Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.

Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur **"*DOUDI Nadjet* "**, *à l'université d'* ***El-Oued***, *a quel nous voudrons exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.*

*Ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'****El-oued*** .

Nous remercions vivement nos familles surtouts nos parents pour l'aide et le soutient moral.

*Nous tenons a remercier tous les étudiants de La promotion 2013/2014 de Math de l'université d'****El-oued*** .

Notations générales

C^1	Fonction continument dérivable.
$S(t)$	Somme de fourier d'une fonction périodique.
$a_n(f), b_n(f)$	Coefficients réels d'une série de fourier.
$C_n(f)$	Coefficients complexe d'une série de fourier.
T-périodique	Fonction périodique du période T.
$\mathcal{F}_T$	Ensemble des fonctions périodiques du période T.
pp	Presque-périodique.
$M(f)$	La moyenne de la fonction f.
$M(\|f\|^2)$	La moyenne quadratique de la fonction f.
f'	La dérivée premiére de f.
$f_x(t,a)$	La dérivée partielle par rapport à x.
$G_{x(t)}$	La solution maximale.
$g_{x(t)}$	La solution minimale.
$\psi\left(t\right)$	La solution exacte.

Liste des Figures

Table des matières

Introduction générale

La notion des fonctions presque-périodiques est d'une grande importance dans l'étude des équations différentielles. La théorie des fonctions presque-périodiques se développe avec vigueur depuis une quatre vingtaine d'années environ; très exactement, les premiers résultats de celle-ci ont été publiés dans les deux articles du pionnier de cette classe de fonctions, P. Bohr parus dans la revue " Acta-Mathematica " en 1925 - 26. Elle a été développée par d'autres, notamment par Bochner qui, vers 1933, a donné deux autres versions de la définition des fonctions presque-périodiques équivalentes à celle donnée par Bohr, mais plus maniables. Dans les années cinquante, cette étude a été reprise par Stepanov qui définit la notion de fonction presque-périodique en moyenne L^p_{loc}. Dans les années soixante, Bertrandias a présenté un travail dans le prolongement de celui de Stepanov en définissant les fonctions presque-périodiques continues seulement en moyenne. Il faut aussi mentionner les noms de Weiner, Besicovitch, Delsarte, Maak Bogolioboff, Levitan, dont les travaux consistent en l'étude de la presque-périodicité de la primitive d'une fonction presque-périodique.

Le premier chapitre est consacré a donner quelques notions générales sur les fonctions, en particulier les fonctions périodiques et ses propriétés comme développement de Fourier pour donner la différence entre ce type des fonctions et les fonctions presque périodiques.

Dans la deuxième chapitre nous avons donné la notion des fonctions presque périodiques au sens de Boher avec quelques propriétés élémentaires.

Au troisième chapitre, on s'intéresse à étudier l'existence et l'unicité de la solution presque périodique d'une équation différentielle du premier ordre exprimé par le problème de Démidovitch en utilisant les notions et les propriétés indiqués dans deuxième chapitre, avec quelques théorèmes importants utilisés pour démontrer la presque périodicité de la solution comme les théorèmes de Bochner.

Chapitre 1

Notions générales sur les fonctions

Ce chapitre contient un rappel sur les différents type de convergences des fonctions comme la convergence simple, la convergence unifome et la convergence normale.

Ainsi les fonction périodiques et ses propriétés comme le dévelopement de Fourier.

1.1 Rappel

Soit A un espace vectoriel muni d'une norme.

1.1.1 Convergence simple

Définition 1.1.1 ***(Suites des fonctions)*** *On dit que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$f_n : A \to E$ *converge simplement sur* A *lorsque pour tout* $x \in A$, *la suite de terme général* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

La fonction g *définie sur* A *par* $\forall x \in A,\ g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ *s'appelle limite simple de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.1.2 ***(Séries des fonctions)*** *On dit que la série de terme général*

$u_n : A \to E$ *converge simplement sur* A *lorsque pour tout* $x \in A$, *la série de terme général* $u_n(x)$ *converge, c'est-à-dire si la suite des sommes partielles* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *converge simplement sur* A.

1.1.2 Convergence uniforme

Définition 1.1.3 ***(Suites des fonctions)*** *On dit que la suite de terme général* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $f_n : A \to E$ *converge uniformément sur* A *vers* g *si elle vérifie:*

1- $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, \|f_n(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$

2- C'est-à-dire si $(f_n - g)$ *est bornée à partir d'un certain rang* n_0 *et si*

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} \|f_n - g\|_\infty = 0.$$

Définition 1.1.4 ***(Séries des fonctions)*** *On dit que la série de terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* A *si la suite des somme partielles* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *converge uniformément sur* A.

1.1.3 Convergence normale

On dit que la série de terme général est normalement convergente si pour tout n, est bornée et si la série de réels positifs converge [10].

1.1.4 Fonction convexe

I désigne un convexe dans un espace vectoriel normé E et f est une application définie sur I à valeurs réelles.

Définition 1.1.5 *On dit que la fonction f est convexe si*

$$\forall (x,y) \in I^2 \ , \forall \lambda \in [0,1] \quad , \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) .$$

On dit que f est strictement convexe si pour tout couple (x,y) de points distincts de I et tout réel, $\lambda \in]0,1[$ on a

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) .$$

Définition 1.1.6 *On dit que f est concave (resp. strictement concave) si la fonction $-f$ est convexe (resp. strictement convexe).*

On rappelle que l'épigraphe de f est la partie de $E \times \mathbb{R}$ définie par

$$\varepsilon(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\} .$$

Exemple 1.1.1 • *Toute fonction de la forme $x \to x^n$ où n est un entier naturel non nul est convexe sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ (et même sur $\mathbb{R}$ lorsque n est pair)*

• *La fonction inverse est convexe sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Plus généralement, toute fonction de la forme $x \to \dfrac{1}{x^n}$ où n est un entier naturel non nul est convexe sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.*

• *La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ [9].*

1.2 Fonctions périodiques

Définition 1.2.1 *On appelle période d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tout nombre réel T tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t+T) = f(t).$$

On dit que f est périodique si elle admet une période non nulle, et plus précisément qu'elle est T-périodique si T est une période strictement positive [11].

Exemple 1.2.1 *Posons $f(x) = \sin x$ une fonction π-périodique. D'où le tableau de variations de la fonction sinus est donné par*

x	*0*		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x) = \cos x$	*1*	$+$	*0*	-	*-1*
Variations de sin	*0*	$\nearrow$	*1*	$\searrow$	*0*

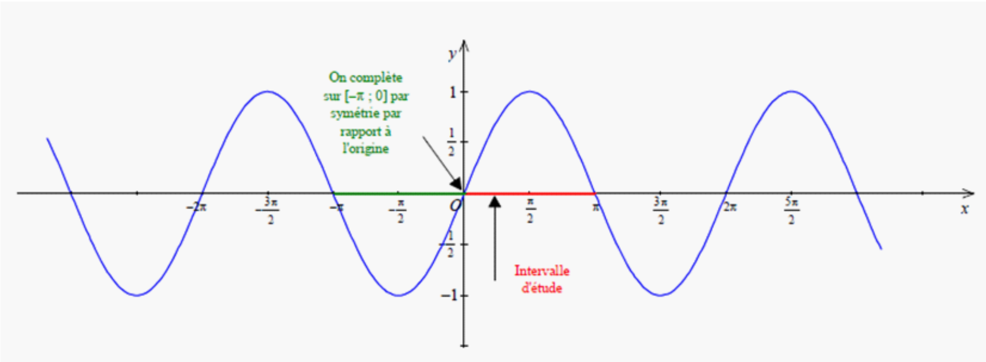
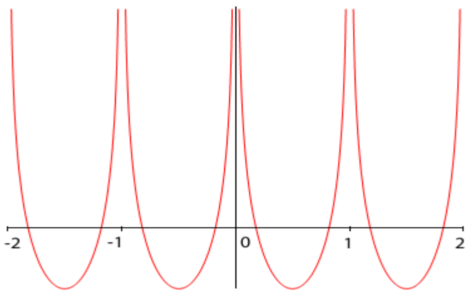


Figure 1.1: Fonction $(f(x) = \sin x)$.

Exemple 1.2.2

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n t)}{n}$$



$$\text{Figure 1.2 : Fonction } (f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n t)}{n}).$$

Définition 1.2.2 ***(Fonction C^1 par morceaux)***

On dit que f est C^1 par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < ... < a_p = b$ telle que:

- f *de classe* C^1 *dans chaque intervalle* $]a_i; a_{i+1}[\quad , \qquad (i = 0, ..., p-1),$
- $f\ (t)$ *et* $f'(t)$ *possèdent une limite en chaque extrémité de ces intervalles, notées*

$$f(a_{i-}).\ f(a_{i+}).\ f'(a_{i-})\ et\ f'(a_{i+})$$

[1].

1.3 Série de Fourier d'une fonction périodique

Soit f est une fonction T-périodique ($T > 0$), continue par morceaux, On note $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation.

1.3.1 Série de Fourier d'une fonction périodique

On associe à f une série qui, lorsqu'elle converge, définit une fonction S périodique de période T.

Forme réelle

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

Forme complexe

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\ n\ \omega\ t}.$$

1.3.2 Coefficients de Fourier

Forme réelle ($n \in N$), α un réel quelconque

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(n\ \omega t)\, dt \qquad ; \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f\ (t) \sin(n\ \omega t)\, dt.$$

Forme complexe ($n \in Z$)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f\ (t)\ \ e^{-i\ n\ \omega t}\ dt.$$

Passage des coefficients complexes aux coefficients réels

$$a_n = c_n + c_{-n} \qquad\qquad pour \quad n \geq 0$$

$$b_n = i\ (c_n - c_{-n}) \qquad\qquad pour \quad n \geq 1$$

Passage des coefficients réels aux coefficients complexes

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad et \quad pour \quad n \geq 1 \quad ; \quad c_n = \frac{a_n\ - i\ b_n}{2} \quad ; \quad c_{-n} = \frac{a_n\ +\ i\ b_n}{2}$$

1.3.3 Propriétés

Parité

Si f est une fonction paire, pour tout n, on a $b_n = 0$, soit $c_n = c_{-n}$.

Si f est une fonction impaire, pour tout n, on a $a_n = 0$, soit $c_n = -c_{-n}$.

Coefficients de Fourier d'une dérivée

Si f est continue et C^1 par morceaux sur $[\ 0, T\ ]$, les coefficients de Fourier de f et $f\ '$ sont reliés par:

Forme réelle

$$\forall\ n\ \in \mathbb{Z}^* :\ a_n\ (f') = n\ \omega b_n\ (f) \text{ et } b_n(f') = -n\ \omega a_n\ (f).$$

Forme complexe

$$\forall\ n\ \in\ \mathbb{Z} :\ c_n(f') = i\ n\ \omega\ c_n(f)$$

[1].

1.3.4 Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique de classe C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$\frac{1}{2}\left[f\ \ (x+0) + f\ \ (x-0)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos x + b_n \sin x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\ n\ x}.$$

En particulier en tout point où f est continue la série de Fourier de f est $f\ (x)$ [2].

Exemple 1.3.1 *Soit la fonction*

$$|\sin x| = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1} \ ,$$

où λ est un coefficient à déterminer.

La fonction dèfinie par $f(x) = |\sin x|$ et périodique de période $T = \pi$ continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ elle est donc développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ (et la convergence est normale).

$$a_n = \tfrac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos(2nt)\, dt \qquad car \qquad w = \tfrac{2\pi}{T} = 2$$
$$a_n = \frac{-4}{\pi(4n^2 - 1)} \qquad et \qquad a_0 = \frac{4}{\pi} \ .$$

D'aprés le théorème de Dirichlet, on a donc pour tout x réel

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1}.$$

On utilise la formule $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$, et on décompose la série Fourier en somme de deux séries convergentes car la première des ces séries est convergente.

En évaluant les deux membres de l'égalité ci-dessus en $x = 0$ on déduit

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1} \quad soit \ \ \lambda = \frac{8}{\pi}$$

[1].

1.4 Quelques propriétés des fonctions périodiques

Proposition 1.4.1

1- L'ensemble

$$\mathcal{F}_T : \ = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ \ ; \ \ \forall t \ \in \mathbb{R}, \ \ f \ (t + T) = f \ (t) \} \, ,$$

des fonctions T-périodiques est un espace vectoriel, de même que, quelque soit $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{F}([a \ , a + T \ [)$ des fonctions $g : [a \ , a + T \ [\to \mathbb{C}$, et l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_T & \to & \mathcal{F}([a \ , a + T \ [) \\ f & \mapsto & f \ |_{[a \ , a+T \ [} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En pratique, nous allons considérer des fonctions périodiques de classe $\wp^k$ par morceaux.

2- Si g est de classe $\wp^k$ par morceaux sur un segment $[a\ , a+T\ ]$, il existe une unique fonction f qui soit T-périodique, de classe $\wp^k$ par morceaux et coïncidant avec g sur $[a\ , a+T\ [$.

3- Toute fonction périodique continue par morceaux est bornée.

4- Toute fonction périodique continue est uniformément continue.

5- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique et continue par morceaux. Alors pour tout réel a on a

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

6- Soient $S_n(t) = \sin(n\ t) \quad ; \quad C_n(t) = \cos(n\ t) \quad ; \quad E_n(t) = e^{i\ n\ t}$

Soit p un polynôme trigonométrique. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$p = \sum_{n\ =\ -p}^{p} C_n\ E_n \quad , \quad C_n = \langle E_n \setminus p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{E_n}(t)\, p(t)\, dt,$$

ce qui équivaut à

$p = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ =1}^{p} (a_n\ C_n + b_n\ S_n)\ ,\ a_n = C_n + C_{-n} = 2\ \langle C_n \setminus p \rangle\ ,$
$b_n = i\ (C_n + C_{-n}) = 2\ \langle S_n \setminus p \rangle$.

On a de plus

$$\|p\|_2^2 = \sum_{n\ =\ -p}^{p} |C_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\ =1}^{p} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

[11].

1.5 Fonction presque-périodique

On dit Γ est un nombre de translation attaché au nombre positive ε si quel soit t on a

$$|f\ \ (t+\Gamma) - f\ \ (t)| < \varepsilon.$$

On dit que la fonction f est presque-périodoque si à tout intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$ de longueur ℓ_ε, on peut faire correspondre un nombre de translation Γ contenu dans cet intervalle ℓ_ε s'appelle longueur d'inclusion (associée à ε).

En d'autres termes dans tout intervalle de longueur ℓ_ε il a y un nombre Γ tel que

$$|f(t+\Gamma) - f(t)| < \varepsilon.$$

Les nombr Γ sont appelés presque périodie de f attachées à ε.

Une fonctione périodique ou presque-périodique n'est pas nécessairement continue [5].

1.5.1 Premier exemple

Cette classe de fonctions intervient notamment en mécanique céleste.

Soit la fonction

$$f(x) = \cos(x) + \cos(\pi x),$$

n'est pas périodique. Cependant voici le graphe de la fonction f

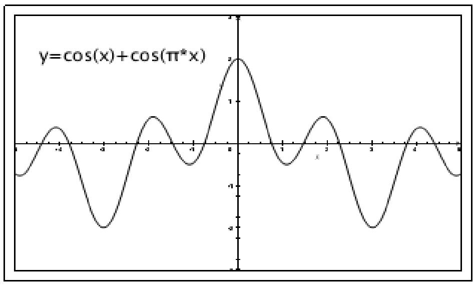


Figure 1.3 : Fonction ($f(x) = \cos(x) + \cos(\pi x)$)

et celui de la fonction $x \mapsto f(x-44)$

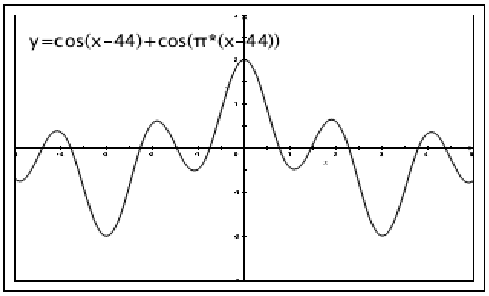


Figure 1.4 : Fonction ($x \mapsto f(x-44)$).

La différence des deux fonctions est trés petite. Ceci est bien sur relié au fait que $\pi \simeq \frac{22}{7}$ et donc que 44 est une presque-période pour f

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x-44)| &= |\cos(x) - \cos(x-44)| \\ &= |\cos(x - 7.2.\pi) - \cos(x-44)| \\ &\leq |7.2.\pi - 44| \leq 0,018\end{aligned}$$

[6].

Remarque 1.5.1 *1- Une fonction continue périodique et presque-périodique sa période et ses multiples sont les presque-périodique.*

2- Fonctions analytiques presque-périodiques. On imagine fort bien que la théorie des fonctions presque-périodiques d'une variable réelle se généralise aux fonctions complexes d'une variable complexe, au moins sur un axe. En fait, on l'étend à une bande avec succès (mais pas au plan tout entier, le théorème de Liouville veille!).

Une fonction $f(z)$, continue dans la bande $[a,b]$ est dite presque-périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\ell = \ell(\varepsilon)$ tel que tout intervalle de longueur ℓ sur l'axe imaginaire contient un nombre $i\eta$ tel que

$$|f(z+i\eta) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

Pour tout z dans la bande considérée. En d'autres mots, la fonction $f(x+iy)$ est presque-périodique en y, uniformément en fonction de x, x restant dans l'intervalle $[a,b]$.

Dans la théorie des fonctions analytiques d'une variable, le principe de Phragmén-Lindelöf (en), qui n'est que l'extension du principe du maximum à un ensemble non borné (bande ou secteur angulaire, ici bande), permet de montrer le résultat suivant (appelé théorème des trois droites de Doetsch (de)) :

Soit $f(z)$ une fonction analytique bornée dans la bande $[a,b]$ Soit

$$M(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(x+iy)|.$$

La fonction $M(x)$ est logarithmiquement convexe dans toute bande intérieure à $[a,b]$: Si $a < x_1 < x < x_2 < b$, on a

$$\ln M(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \ln M(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \ln M(x_2).$$

Chapitre 2

Propriétés des fonctions presque-périodiques

Les fonctions presque-périodiques sont, intuitivement, des fonctions f (continues) pour lesquelles, en choisissant des (périodes) T de plus en plus grandes, on a une périodicité approximative de plus en plus précise, c'est-à-dire que (pour tout x) l'écart $f(x+T)-f(x)$ peut être rendu arbitrairement petit.

2.1 Définition de Bohr d'une fonction presque-périodique

Définition 2.1.1 *Un ensemble I de $\mathbb{R}$ est dit relativement dense s'il existe un nombre réel $l > 0$ (dit longueur d'inclusion), tel que, tout intervalle $[a, a+l]$ de longueur l de $\mathbb{R}$ contient un nombre de I.*

Définition 2.1.2 *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans E et $\varepsilon > 0$ un nombre réel strictement positif. Un nombre réel τ est une ε-presque-période de f si on a*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(\tau)\|_E < \varepsilon$$

[6].

Exemple 2.1.1 *Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \sin(2\pi x) + \sin\left(\sqrt{2}\pi x\right).$$

La fonction f ainsi introduite est presque-périodique au sens de Bohr. En effet, on choisit τ un entier et $\tau\sqrt{2}$ différent d'un autre entier par moins de $\varepsilon/2\pi$. Alors, il est clair que

$$f(x+\tau) = \sin(2\pi x) + \sin\left(2\pi x\sqrt{2} + \theta_\varepsilon\right).$$

En vertu du théorème des Accroissements Finis appliqué à la fonction sinus entre $A = 2\pi x\sqrt{2}$ et $B = 2\pi x\sqrt{2} + \theta_\varepsilon$, il existe un certain $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$f(B) - f(A) = f'(A + \alpha(B-A)).(B-A),$$

ou encore

$$\sin\left(2\pi x\sqrt{2} + \theta_\varepsilon\right) - \sin\left(2\pi x\sqrt{2}\right) = \cos\left(2\pi x\sqrt{2} + \alpha\theta_\varepsilon\right).\theta_\varepsilon = \theta'_\varepsilon,$$

où

$$\theta' = \cos\left(2\pi x\sqrt{2} + \alpha\theta_\varepsilon\right).\theta,$$

et donc $|\theta'| \leq 1$.

Ceci entraîne que $\sin\left(2\pi x\sqrt{2} + \theta_\varepsilon\right) = \sin\left(2\pi x\sqrt{2}\right).\theta'_\varepsilon$ et donc en revenant à la formule avec f on obtient que $f(x+\tau) = f(x) + \theta'_\varepsilon$. Il en résulte que la première assertion de la *définition 1.1 est satisfaite. Du point de vue géométrique, on observe l'existence de presque-périodes à partir de l'allure de sa courbe représentative donné par la figure 2.1.*

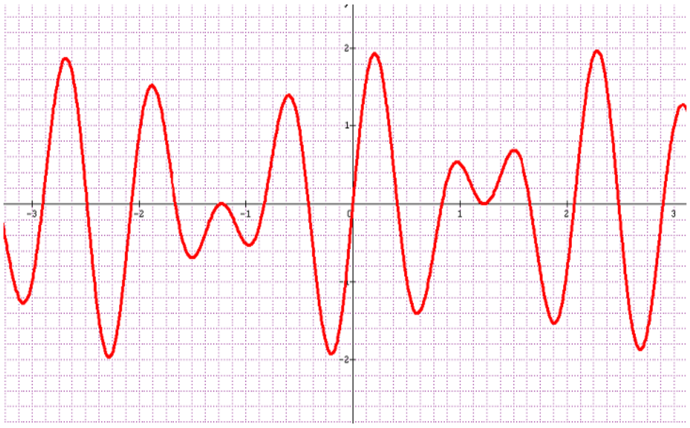


Figure 2.1 : Fonction $f(x) = \sin(2\pi x) + \sin\left(\sqrt{2}\pi x\right)$

[3].

2.1.1 Presque-périodicité par rapport à une norme

Soit $\|.\|$ une norme définie sur un espace de fonctions continues. On dit qu'une fonction f est presque-périodique au sens de la norme $\|.\|$ si:

1- f est continue.

2- $\|f\|$ est finie.

3- il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ℓ_ε tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient une ε-presque-période τ telle que

$$\|f - f_\tau\| \leq \varepsilon \quad \text{où} \quad f_\tau(t) = f(t+\tau)$$

[4].

2.1.2 Valeur moyenne d'une fonction presque-périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to$ß une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la valeur moyenne supérieure et la valeur moyenne inférieure, qu'on note respectivement, $\overline{M}(f)$ et $\underline{M}(f)$ comme suit

$$\overline{M}(f) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \underline{M}(f) = \underline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt.$$

Lorsque ces deux valeurs sont égales, on obtient la valeur moyenne de f, notée $M(f)$.

La valeur moyenne d'une fonction périodique, de période élémentaire $\tau \in \mathbb{R}$

$$M(f) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,dt.$$

Concernant les fonction $PP(\mathbb{R}, ß)$.

Théorème 2.1.1 *Pour toute fonction f appartenant à $PP(\mathbb{R}, ß)$, la limite suivante existe et est finie*

$$M(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt \ , \forall a \in \mathbb{R},$$

[5].

2.2 Propriétés

2.2.1 Propriétés élémentaires

Soit f une fonction presque-périodique de t :

1- Si τ est une presque-période de f, $-\tau$ est aussi une présque-période de f pour le même ε.

Démonstration. En posant $t + \tau = s$, on a, quelque soit s

$$|f(s) - f(s-\tau)| < \varepsilon.$$

■

2- En même temps que $f(t)$, les fonctions $\overline{f}(t)$, $|f(t)|$, $f(t+a)$ sont presque-périodiques, avec les mêmes presque-périodes.

Démonstration. C'est éviddent pour $\overline{f}$. Pour $|f|$, on remarque que, d'aprés l'inégalité triangulaire,

$$|f(t+\tau)| - |f(t)| \leq |f(t+\tau) - f(t)|,$$

d'où la conclusion.

Enfin, la propriété des translatées $f(t+a)$ de $f(t)$ résulte de l'inégalité

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon,$$

appliquée au point $t + a$. ■

3- Une fonction presque-périodique est bornée.

Démonstration. Cela signifie qu'il existe un nombre A tel que, pour toute valeur de t,

$$|f(t)| < A.$$

En effect, à chaque valeur de t nous pouvons associer un intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$, contenant une presque-période τ. Si donc $t \in [\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$, on a

$$|t - \tau| < \ell_\varepsilon. \tag{2.2.1}$$

Ecrivons

$$f(t) = [f(t) - f(t - \tau)] + f(t - \tau),$$

d'où

$$|f(t)| \leq |f(t) - f(t - \tau)| + |f(t - \tau)|. \tag{2.2.2}$$

On a par définition

$$|f(t) - f(t - \tau)| < \varepsilon.$$

D'autre part. d'aprés (2.2.1), lorsque t varie, $t - \tau$ parcourt un intervalle de longueur finie, inférieure à $2\ell_\varepsilon$. f étant continue, est bornée sur cet intervalle fini

$$|f(t - \tau)| < M.$$

Donc, quelque soit t,

$$|f(t)| < \varepsilon + M.$$

■

4- Une fonction presque-périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Cela veut dire que, ε étant donné, on peut trouver un nombre $h_0(\varepsilon) > 0$ tel que, si $|t_1 - t_2| < h_0(\varepsilon)$, on ait

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon.$$

Démonstration. La continuité uniforme est une propriété bien connue des fonctions continues sur un intervalle fermé borné (intervalle compact). Ce qui est nouveau ici, c'est que, pour les fonctions presque-périodiques, elle est valable sur toute la droite.

Donnons-nous ε, et associons-lui une longueur ℓ_ε. Le nombre cherché $h_0(\varepsilon)$ sera en tout les cas inférieur à ℓ_ε. Prenons deux points t_1, t_2 tels que

$$|t_1 - t_2| < \ell_\varepsilon.$$

Il appartiennent à un même intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$, qui contient une presque-période τ.

$t_1 - \tau$ et $t_2 - \tau$ appartiennent à intervalle $[-\ell_\varepsilon, \ell_\varepsilon]$. Dans cet intervalle, $f(t)$ est uniformément continue, On peut trouver $h_0(\varepsilon)$ tel que, si $|t_1 - \tau - (t_2 - \tau)| = |t_1 - t_2| < \varepsilon$, on ait

$$|f(t_1 - \tau) - f(t_2 - \tau)| < \varepsilon.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |f(t_1) - f(t_1 - \tau)| &< \varepsilon \\ |f(t_2) - f(t_2 - \tau)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Par suite

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq |f(t_1) - f(t_1 - \tau)| + |f(t_1 - \tau) - f(t_2 - \tau)| + |f(t_1 - \tau) - f(t_2)| < 3\varepsilon.$$

Ce qui démontre la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$. ■

Remarque 2.2.1 *Toute fonction uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *admet des nombres de translation associés à* ε, *car, si* $|h| < h_0(\varepsilon)$,

$$|f(t+h) - f(t)| < \varepsilon.$$

Mais ces nombres h sont (petits). Il n'est pas possible de leur associer une longueur d'inclusion ℓ_ε telle que, dans tout intervalle $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$, il y ait un d'abscisse h.

5- Une fonction presque-périodique non constante ne tend vers aucune limite lorsque la variable t augmente indéfiniment.

Démonstration. En effet, les inégalités

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \ ; \ \alpha < \tau < \alpha + \ell_\varepsilon,$$

montrent qu'il existe des nombres τ aussi grands qu'on le désire, puisque α peut être choisi arbitrairement.

Si donc $f(t)$ a pour $t = t_0$ une certaine valeur a, il existe des valeurs de t aussi grandes qu'on le désire pour les quelles $f(t)$ diffère aussi peu qu'on le désire de a.

Une fonction presque-périodique a donc des oscillations irrégulières, comprises entre deux valeur extrêmes finies. Mais bien entendu, cet aspect qualitatif n'est pas suffisant pour les caractériser. ■

6- Si une suite de fonction presque-périodiques f_n converge, uniformément sur $\mathbb{R}$, vers une fonction limite f, la limite f est presque-périodique.

Démonstration. En effet, il existe un nombre $n_0(\varepsilon)$ tel que, si $n > n_0(\varepsilon)$

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

n étant fixé, il existe une longueur ℓ_ε, dépendant de ε, et dans tout intervalle de longueur ℓ_ε, un nombre τ, tels que

$$|f_n(t+\tau) - f_n(t)| < \varepsilon.$$

Mais pour le même indice n, on a aussi, à cause de la convergence uniforme,

$$|f_n(t+\tau) - f(t+\tau)| < \varepsilon.$$

Alors

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leq |f(t+\tau) - f_n(t+\tau)| + |f_n(t+\tau) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| \leq 3\varepsilon.$$

La fonction limite f est donc presque-périodique. La longueur ℓ_ε et le nombre τ sont pour f une longueur d'inclusion et une presque-période associées à 3ε [5]. ■

2.3 Développement de fourier d'une fonction presque-périodique

2.3.1 Polynôme trigonométrique, série de Fourier généralisée

$e^{i\omega t}$, fonction périodique est presque-périodique. Donc la somme finie

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\omega_n t},$$

où les a_n sont N nombres complexes, est une fonction presque-périodique. On dit que c'est un polynôme trigonométrique.

Considérons maintenant une suite infinie $a_1, ..., a_n, ...$ de nombres complexes tels que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

Soit convergente. Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\omega_n t}, \tag{2.3.1}$$

est uniformément et absolument convergente, quelle que soit la suite de nombres réels $\omega_1, ..., \omega_n ...$ La somme de cette série est la limite unifor

me de la suite de polynômes trigonométriques

$$S_n(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\omega_n t}.$$

C'est donc une fonction presque-périodique.

On dit que (2.3.1) est une série de Fourier généralisée.

Nous allons maintenant examiner deux problèmes:

Question 1: Quelles sont les relations entre la somme de la série et ses coefficients a_n?

La réponse est connue dans le cas de série de Fourier périodiques, telles que $\omega_n = n\omega$.

Il s'agit de la généraliser aux fonctions presque-périodiques.

Question 2: Dans quelle mesure toute fonction presque-périodique est-elle somme d'une série de Fourier généralisée, ou limite d'une suite de polynômes trigonométriques ?.

La réponse est connue pour les fonctions périodiques continues. Leur série de Fourier existe, mais ne converge pas nécessairement vers la fonction (il faut d'autres hypothèses que la continuité). Cependant (théorème d'appoximation de Weierstrass, théorème de fejer), toute fonction périodique continue est une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques. Ce résultat va se généraliser aux fonctions presque-périodiques.

Pour tout cela, nous aurons besoin de notions nouvelles:

moyenne d'une fonction presque-périodique; coefficients de Fourier-Bohr; formule de Parseval; fonction de corrélation [5].

2.3.2 Autres propriétés des fonctions presque-périodiques de Bohr

Soient f, $g \in PP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

1- $|f|$ est presque-périodique.

Démonstration. Ce point découle du fait que $\forall\ x, y \in \mathbb{C}$, on a $||x| - |y|| \leq |x - y|$. ■

2- Les fonctions: $x \mapsto f(\alpha x)$ et $x \mapsto \alpha f(x)$ sont aussi presque-périodiques.

Démonstration. Soit

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \exp\{i\lambda x\},$$

le polynôme trigonométrique correspond à la fonction presque-périodique f. Alors le polynôme

$$P_1(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \exp\{i\alpha\lambda x\},$$

est le polynôme trigonométrique correspond à la fonction $x \mapsto f(\alpha x)$, donc cette derniére est presque-périodique. ■

3- $f \pm g$ et $f.g$ sont presque-périodiques.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes trigonométriques P et $\mathbb{Q}$ tels que:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P(x)\| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} \| g(x) - \mathbb{Q}(x) \| < \varepsilon.$$

Avec l'inégalité triangulaire, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\|(f+g) - (P+\mathbb{Q})\| \leq \|f - P\| + \|g - \mathbb{Q}\| < 2\varepsilon,$$

qui nous confirme la presque-périodicité de la fonction $(f + g)$.

Pour $f.g$, nous posons

$$A = \max\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x)\| \ , \sup_{x\in\mathbb{R}} \|g(x)\|\right\} + 1,$$

il existe deux polynômes trigonométriques P et $\mathbb{Q}$ tels que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \| f(x) - P(x) \| < \frac{\varepsilon}{A} \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} \| g(x) - \mathbb{Q}(x) \| < \frac{\varepsilon}{A}.$$

Le produit $P.\mathbb{Q}$ reste toujours polynôme trigonométrique. On a donc

$$\begin{aligned} \|(f.g) - (P.\mathbb{Q})\| &\leq \|(f.g) - (f.\mathbb{Q})\| + \|(f.\mathbb{Q}) - (P.\mathbb{Q})\| \\ &\leq \|f\| \, \|g - \mathbb{Q}\| + \|\mathbb{Q}\| \, \|f - P\| \\ &< \frac{\varepsilon}{A}A + \frac{\varepsilon}{A}A = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Donc $(f.g)$ est presque-périodique. ■

4- La limite uniforme de fonctions presque-périodiques est presque-périodique.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions presque-périodiques converge uniformément vers la fonction f. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f - f_{n_0}\|_\infty < \varepsilon.$$

Comme f_{n_0} est presque-périodique, il existe un polynôme trigonométrique P tel que

$$\|f_{n_0} - P\|_\infty < \varepsilon.$$

Donc, on a

$$\|f - P\|_\infty \leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0} - P\|_\infty < 2\varepsilon.$$

■

5- Les parties réelles et imaginaires d'une fonction presque-périodique sont presque-périodiques.

Démonstration. Ce point est un résultat direct des deux propriétés 2 et 3 [7]. ■

2.3.3 Coefficients de Fourier-Bohr (Coefficients de Fourier-Bohr. moyenne quadratique et fonction de corrélation)

$e^{-i\omega t}$ est périodique. Si donc $f(t)$ est presque-périodique, la fonction

$$f(t)\, e^{-i\omega t},$$

est presque-périodique. Sa moyenne

$$a(\omega) = M\left[f(t)\, e^{-i\omega t}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-i\omega t} dt,$$

existe. Ceux des $a(\omega)$ qui ne sont pas nuls sont appelés coefficients de Fourier-Bohr de f. De même $|f|^2$ est presque-périodique. Sa moyenne

$$M\left(|f|^2\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2\, dt,$$

existe. C'est la moyenne quadratique de f.

Enfin, comme $\overline{f}(t)$ et $f(t+\tau)$ sont presque-périodiques, la moyenne du produit de $\overline{f}(t)$ $f(t+\tau)$ existe. C'est la fonction de corrélation de f

$$\gamma(\tau) = M\overline{f}(t)\, f(t+\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{f}(t)\, f(t+\tau)\, dt.$$

Exemple 2.3.1 *Supposons que les a_k soient des nombres complexes tels que*

$$\sum |a_k| < \infty.$$

Alors la série

$$f(t) = \sum a_k e^{i\omega_k t}, \tag{2.3.2}$$

(2.3.2) est, quel que soit l'ensemble des nombres réel ω_k , une fonction presque-périodique.

Les coefficients a_k sont les coefficients de Fourier-Bohr de f. Il suffit en effet de multiplier (2.3.2) terme à terme par $e^{-i\omega t}$ et de prendre la moyenne.

A cause de la convergence uniforme de la série (1), on a

$$M\left(fe^{-i\omega t}\right) = \sum a_k M\left(e^{i(\omega_k - \omega)t}\right).$$

Or

$$\begin{aligned} M\left(e^{i(\omega_k-\omega)t}\right) &= 0 \qquad si \quad \omega \neq \omega_k, \\ M\left(e^{i(\omega_k-\omega)t}\right) &= 1 \qquad si \quad \omega = \omega_k. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} M\left(fe^{-i\omega t}\right) &= 0 \qquad si \qquad \omega \neq \omega_k, \\ M\left(fe^{-i\omega_k t}\right) &= a_k \quad\; si \qquad \omega \neq \omega_k \end{aligned}$$

[5].

Conclusion 2.3.1 *f une fonction p.p. elle admet une développement en série de Fourier comme suit*

$$f(x) = \sum a_k e^{i\omega_k t},$$
$$a(\omega_k) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-i\omega_k t} dt.$$

Chapitre 3

Solution presque-périodique d'une équation differéntielle du premier ordre

L'existence et l'unicité des solutions presque-périodiques sont d'une grande importance dans l'étude qualitative de la théorie des équations différentielles due à leurs applications dans plusieurs domaines comme la biologie mathématique, la physique, la théorie du contrôle et d'autres.

Ici nous avons étudié comme exemple l'existence et l'unicité de la solution presque-périodique du problème de Démidovitch en utilisant les théorèmes de Bochner.

3.1 Problème de Démidovitch

B.P. Démidovitch a démontré que si une fonction continue $g(t)$ est presque-périodique et telle que son intégrale

$$G(t) = \int_0^t g(u)\,du,$$

soit bornée sur tout l'axe des t et si $f(x)$ est une fonction monotone de classe C^1, toute solution bornée de l'équation différentielle

$$x^{'} = f(x) + g(t),$$

est une fonction presque-périodique. Il a aussi remarqué que l'hypothèse relative à la fonction $G(t)$ peut bien être rejetée si l'on a

$$f'(x) \geq k > 0 \qquad \text{ou} \qquad f'(x) \leq k < 0.$$

En employant la méthode de B.P. Démidovitch.N. Gheorghiu a réussi à étendre une partie de ce résultat à l'équation générale du premier ordre

$$x' = f(t,x). \tag{3.1.1}$$

Il a notamment établi le théorème suivant:

Théorème 3.1.1 *Si*

1- $f(t,x)$ est une fonction définie et continue pour $|x| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$.

2- $f_x(t,x)$ est continue dans la même bande et $f_x(t,x) \geq k > 0$ ou $f_x(t,x) \leq k < 0$.

3- $f(t,x)$ est une fonction presque-périodique de t, uniformément par rapport à x, dans la bande considérée, alors toute solution bornée de l'équation (3.1.1) est presque-périodique.

Z.Opial (Kraków) généralise les théorèmes de Démidovitch et Gheorghiu en démontrant le théorème suivant:

Théorème 3.1.2 *Si la fonction $f(t,x)$ définie et continue dans le plan (t,x) est une fonction presque-périodique de la variable t, uniformément par rapport à x, et monotone au sens large par rapport à la variable x, alors toute solution bornée de l'équation (3.1.1) est presque-périodique.*

L'hypothèse de la presque-périodicité uniforme intervenant dans l'énoncé de ce théorème veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $M > 0$ on peut trouver un nombre $l(\varepsilon)$ tel que chaque intervalle de l'axe t de longueur $l(\varepsilon)$ contienne au moins une presque-période τ, relative à ε c'est-a-dire telle que

$$|f(t+\tau,x) - f(t,x)| \leq \varepsilon \quad \textit{pour} \quad |x| \leq M \quad \textit{et} \quad -\infty < t < +\infty.$$

Dans la seconde partie de la note Z.Opial (Kraków) applique la méthode de la démonstration du théorème (3.1.2) aux équations différentielles du second ordre en obtenant ainsi une généralisation d'un théorème de C. Corduneanu [8].

3.2 Théorèmes de Bochner

Dans la démonstration du théorème formulé ci-dessus nous nous servirons de la méthode de J. Favard .Rappelons à cet effet quelques notions et propositions sur les fonctions presque-périodiques.

Nous appelons fonction normale toute fonction $f(t)$ définie et continue pour $-\infty < t < +\infty$ et telle que l'on puisse extraire de toute suite

$$f(t+h_1),\ f(t+h_2),\ f(t+h_3),...,$$

où les h sont des nombres réels arbitraires, une autre suite

$$f(t+k_1),\ f(t+k_2),\ f(t+k_3),...,$$

qui converge uniformément pour $-\infty < t < +\infty$ vers une fonction limite.

Théorème 3.2.1 *(théorème de Bochner) Toute fonction presque-périodique est une fonction normale et réciproquement.*

Pareillement, nous pouvons appeler fonction normale toute fonction $f(t,x)$ définie et continue dans le plan (t,x) et telle que l'on puisse extraire de toute suite

$$f(t+h_1,x),\ f(t+h_2,x),\ f(t+h_3,x),...,$$

une autre suite

$$f\left(t+k_1,x\right),\ f\left(t+k_2,x\right),\ f\left(t+k_3,x\right),...,$$

qui converge uniformément pour $-\infty < t < +\infty$, $|x| \leq M$ *(M – fixe mais arbitraire) vers une fonction limite.*

En répératant sans aucun changement la démonstration de J. Favard du théorème de Bochner on établit sans peine:

Théorème 3.2.2 *(théorème de Bochner) Toute fonction* $f\left(t,x\right)$ *presque-périodique de la variable* t, *uniformément par rapport à la variable* x, *est une fonction normale.*

3.3 Solution maximale et solution minimale

Avant de passer à la démonstration du théorème (3.1.2) nous allons établir quelques lemmes.

Supposons que l'équation (3.1.1) admette au mois une solution bornée.

Il existe donc un nombre M tel que la famille F de solution $x\left(t\right)$ de l'équation (3.1.1) qui satisfont à l'inégalité

$$-M \leq x\left(t\right) \leq M, \qquad \left(-\infty < t < +\infty\right), \tag{3.3.1}$$

n'est pas vide, toute fonction $x\left(t\right)$ de la famille F a des bornes supérieure et inférieure $G_{x(t)}$, $g_{x(t)}$ finies. Posons

$$h = \text{ borne inférieure } \left(G_{x(t)} - g_{x(t)}\right).$$

Le second membre de l'équation (3.1.1) étant borné dans l'ensemble $|x| \leq M$,

$-\infty < t < +\infty$, les fonctions de la famille F sont équicontinues.

D'autre part, toute fonction limite d'une suite des fonctions de cette famille est une intégrale de l'équation (3.1.1) qui satisfait à l'inégalité (3.3.1). L'ensemble $F' \subset F$ des fonctions pour lesquelles $G_{x(t)} - g_{x(t)} = h$ contient donc au moins un élément.

L'ensemble F' jouit des même propriétés que l'ensemble F. Il existe dans F' au moins une solution $\varphi\left(t\right)$ de l'équation (3.1.1) pour laquelle la borne inférieure $g_{\varphi(t)}$ est la plus petite possible.

Toute solution de ce type sera appelée dans la suite solution à oscillation minimale ou tout simplement solution minimale de l'équation (3.1.1).

Lemme 3.3.1 *1: Pour toute solution minimale $\varphi(t)$ de l'équation (3.1.1) on a*

$$\limsup_{t\to-\infty}\varphi(t) = G_{\varphi(t)} = \limsup_{t\to+\infty}\varphi(t), \tag{3.3.2}$$

$$\liminf_{t\to-\infty}\varphi(t) = g_{\varphi(t)} = \liminf_{t\to+\infty}\varphi(t). \tag{3.3.3}$$

Démonstration. Supposons en effet que l'on ait, par axemple,

$$\limsup_{t\to+\infty}\varphi(t) < G_{\varphi(t)}. \tag{3.3.4}$$

Choisissons une suite $\{\tau_n\}$ de telle sorte que l'on ait $\lim_{n\to+\infty}\tau_n = +\infty$ et que τ_n soit une presque-période de la fonction $f(t,x)$ relative à $\frac{1}{n}$.

Par hypothèse la suite des fonctions $\{f(t+\tau_n, x)\}$ converge vers $f(t,x)$ uniformément dans l'ensemble $|x| \leq M$ et $-\infty < t < +\infty$.

Par conséquent, on peut extraire de la suite $\{\varphi(t+\tau_n)\}$ une suite partielle convergente (uniformément dans tout intervalle finie) vers une solution $\psi(t)$ de l'équation (3.1.1).

En vertu de l'inégalité (3.3.4) on aurait alors

$$g_{\varphi(t)} \leq g_{\psi(t)} \leq G_{\psi(t)} \leq \limsup_{t\to+\infty}\varphi(t) < G_{\varphi(t)},$$

ce qui est en contradiction avec la définition de la solution minimale.

On a donc $\limsup_{t\to+\infty}\varphi(t) = G_{\varphi(t)}$. On démontre de même que toute les autres relations (3.3.2) et (3.3.3) sont aussi vraies [8]. ■

Lemme 3.3.2 *L'équation (3.1.1) admet une et une seule solution minimale.*

En effet, la différence de deux telles solutions $\psi(t) - \varphi(t)$ doit être monotone puisque l'on a

$$\psi'(t) - \varphi'(t) = f(t, \psi(t)) - f(t, \varphi(t)),$$

et par hypothèse, la fonction $f(t,x)$ est monotone par rapport à la variable x.

On a donc ou bien $\lim_{t\to-\infty}(\psi(t) - \varphi(t)) \neq 0$, ou bien $\lim_{t\to+\infty}(\psi(t) - \varphi(t)) \neq 0$, ce qui est impossible en raison du lemme précédent.

A côté de l'équation (3.1.1) considérons toute une classe S d'équations.

$$x' = f^*(t,x), \tag{3.3.5}$$

où $f^*(t,x)$ est limite uniforme dans l'ensemble $|x| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$ d'une suite arbitraire $\{f(t+h_n, x)\}$. On vérifie aisément que toute équation de cette classe satisfais aux hypothèse du théorème (3.1.2).

En particulier, toute fonction $f^*(t,x)$ est monotone par rapport à la variable x. Les lemmes (3.1.1) et (3.1.2) s'appliquent donc à toute équation (3.3.5) de la classe S. Cela veut dire que toute équation de la classe S admet une et une seul solution minimale qui satisfait en plus aux inégalités (3.3.1). Désignons-la par $\varphi^*(t)$. On peut facilement démontrer que

$$g_{\varphi^*(t)} = g_{\varphi(t)} \quad \text{et} \quad G_{\varphi^*(t)} = G_{\varphi(t)}. \tag{3.3.6}$$

En effet, soit $f^*(t,x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t+h_n, x)$. De la suite $\{\varphi(t+h_n)\}$ on peut donc extraire une suite partielle convergente (uniformément dans tout intervalle fini) vers une solution $\alpha(t)$ de l'équation (3.3.5). On a évidemment

$$g_{\varphi(t)} \leq g_{\alpha(t)} \quad \text{et} \quad G_{\alpha(t)} \leq G_{\varphi(t)}. \tag{3.3.7}$$

Nous allons montrer que les inégalités fortes dans les relation (3.3.7) ne sont pas possibles.

Supposons en effet que l'on ait par exemple $G_{\alpha(t)} < G_{\varphi(t)}$.

Remarquons que la suite $\{f^*(t-h_n, x)\}$ converge uniformément dans l'ensemble

$|x| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$ vers la fonction $f(t,x)$.

Lemme 3.3.3 *De la suite $\{\alpha(t-h_n)\}$ on pourrait donc extraire une suite partielle convergente vers une solution $\beta(t)$ de l'équation (3.1.1). On aurait évidemment*

$$g_{\varphi(t)} \leq g_{\alpha(t)} \leq g_{\beta(t)} \leq G_{\beta(t)} \leq G_{\alpha(t)} \leq G_{\varphi(t)},$$

ce qui est incompatible avec la définition de la solution minimale de l'équation (3.1.1). Or, on démontre facilement que la solution $\alpha(t)$ de l'équation (3.3.5) est identique à la solution minimale $\varphi^*(t)$ de la même équation.

Par suite, des relations (3.3.7) on obtient immédiatement les égalités (3.3.6).

On peut même démontrer quelque chose de plus, notamment la relation

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t+h_n) = \varphi^*(t). \tag{3.3.8}$$

En effet, toute sous-suite convergente de la suite $\{\varphi(t+h_n)\}$ *converge vers la solution minimale* $\varphi^*(t)$ *de l'équation (3.3.5) car c'est la seule solution de cette équation qui a les même bornes que la fonction* $\varphi(t)$ *elle-même.*

Il en résulte que la relation (3.3.8) est vérifiée [8].

Lemme 3.3.4 *La solution minimale* $\varphi(t)$ *de l'équation (3.1.1) est une fonction presque-périodique.*

D'après le théorème de Bochner il suffit de démontrer que $\varphi(t)$ *est une fonction normale.*

Soit donc $\{h_n\}$ *une suite arbitraire des nombres réels. De la suite* $\{f(t+h_n,x)\}$ *on peut extraire une suite partielle* $\{f(t+k_n,x)\}$ *qui converge uniformément dans l'ensemble* $|x| \le M$, $-\infty < t < +\infty$ *vers une fonction* $f^*(t,x)$.

La suite $\{\varphi(t+k_n)\}$ *converge alors vers la solution minimale* $\varphi^*(t)$ *de l'équation (3.3.5).*

Pour démontrer notre lemme il suffit de montrer que cette convergence est uniforme sur tout l'axe des t. Il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ *et deux suites de nombres* $\{t_p\}, \{l_p\}$ *telles que*

$$|\varphi(t_p+l_p) - \varphi^*(t_p)| \ge \varepsilon \qquad (p=1,2,...). \tag{3.3.9}$$

De la suite de fonctions $\{f(t+t_p+l_p,x)\}$ *on peut extraire une suite qui converge uniformément dans l'ensemble* $|x| \le M$, $-\infty < t < +\infty$ *vers une fonction* $f^{**}(t,x)$.

Pour ne pas compliquer les notations supposons que ce soit la suite $\{f(t+t_p+l_p,x)\}$ *elle-même qui jouisse de cette propriété. On a donc*

$$f^{**}(t,x) = \lim_{p\to\infty} f(t+t_p+l_p,x) = \lim_{p\to\infty} f^*(t+t_p,x).$$

D'après ce que nous avons dit au n° précédent, on a aussi

$$\lim_{p\to\infty} \varphi(t+t_p+l_p) = \lim_{p\to\infty} \varphi^*(t+t_p) = \varphi^{**}(t),$$

où $\varphi^{**}(t)$ est solution minimale de l'équation $x\prime = f^{**}(t,x)$. on a donc, en particulier

$$\lim_{p\to\infty} \varphi(t_p + l_p) = \lim_{p\to\infty} \varphi^*(t_p) = \varphi^{**}(0),$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (3.3.9) [8].

3.4 Démonstration du théorème (3.1.2)

D'après le lemme (3.1.3) la solution minimale $\varphi(t)$ est une fonction presque-périodique.

Nous allons montrer que toute autre solution bornée de l'équation (3.1.1) doit être forcément de la forme $\psi(t) = \varphi(t) + const$. Supposons, pour fixer les idées, que la fonction $f(t,x)$ soit non décroissante. Parmi plusieur cas qui peuvent se présenter envissageons, à titre d'exemple, le suivant: dans un intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$ $(\alpha < \beta)$ on a

$$\psi'(t) - \varphi'(t) \geq 2k > 0, \qquad \psi(\beta) = \varphi(\beta) + \eta \qquad (\eta > 0),$$

on a évidemment dans l'intervalle $\langle\beta,+\infty\rangle$

$$\psi'(t) - \varphi'(t) = f(t,\psi(t)) - f(t,\varphi(t)) \geq f(t,\varphi(t)+\eta) - f(t,\varphi(t)) \geq 0.$$

La fonction $\Phi(t) = f(t,\varphi(t)+\eta) - f(t,\varphi(t))$ est presque-périodique et dans l'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$ on a par hypothèse $\Phi(t) \geq 2k$.

Il existe donc dans l'intervalle $\langle\beta,+\infty\rangle$ une infinité d'intervalles de longueurs égales à $\beta-\alpha$ dans chacun desquels on a $\Phi(t) \geq k > 0$.

Il en résulte que

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = +\infty.$$

Ayant de même exclu toutes les autres possibilités, on conclut enfin que pour tout t on doit avoir forcément $\psi'(t) - \varphi'(t) = 0$.

Le théorème (3.1.2) se trouve ainsi démontré.

3.5 Complement de la démonstration du lemme (3.1.3)

En s'appuyant sur la relation (3.3.9) et sur le lemme (3.1.3) on peut aisément démontrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que toute presque-période de la fonction $f(t,x)$, relative à δ, soit une presque-période de la solution minimale $\varphi(t)$ (et, par suite, de toute autre solution bornée), relative à ε. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi.

Il existe donc un $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites de nombres $\{t_p\}$ et $\{\tau_p\}$ où τ_p est une presque-période de la fonction $f(t,x)$, relative à $\frac{1}{p}$, telles que

$$|\varphi(t_p + \tau_p) - \varphi(t_p)| \geq \varepsilon_0 \qquad (p = 1, 2, ...) \tag{3.5.1}$$

La suite de fonctions $\{f(t + \tau_p, x)\}$ converge uniformément dans l'ensemble $|x| \leq M$, $-\infty < t < +\infty$ vers la fonction $f(t,x)$. Par conséquent, la suite $\{\varphi(t + \tau_p)\}$ converge uniformément dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ (cf. la démonstration du lemme (3.1.3) vers la fonction $\varphi(t)$, ce qui est en contradiction avec l'inégalité (3.5.1).

Remarque 3.5.1 *Au (3.4) nous avons démontré que toute solution bornée $\psi(t)$ de l'équation (3.1.1) ne diffère de la solution minimale que d'une constante.*

Ce n'est possible que dans le cas où l'on a

$$f(t, \varphi(t)) \equiv f(t, \psi(t)) \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

Or, cette identité est impossible si la fonction $f(t,x)$ est monotone au sens strict par rapport à la variable x. On en conclut que dans ce cas l'équation (3.1.1) ne peut admettre qu'une seule solution bornée dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ [8].

3.6 Unicité de la solution

Soit $\alpha(t)$ une solution de l'équation (3.1.1) bornée dans un intervalle $(t_0, +\infty)$.

De même qu'au (3.4) on démontre que la différence $\alpha(t) - \varphi(t)$ ($\varphi(t)$ −solution minimale de l'équation (3.1.1)) est une fonction monotone. On a donc, en particulier

$$\lim_{t\to+\infty} (\alpha(t) - \varphi(t)) = C, \tag{3.6.1}$$

où C est une constante. Nous allons montrer que la fonction $\varphi(t) + C$ est une solution de l'équation (3.1.1). En effet, choisissons une suite de nombres $\{\tau_n\}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty,$$

et que τ_n soit une presque-période de la fonction $f(t, x)$, relative à $\frac{1}{n}$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} f(t + \tau_n, x) = f(t, x).$$

De la suite $\{\alpha(t + \tau_n)\}$ on peut extraire une suite partielle qui converge (uniformément dans tout intervalle fini) vers une solution de l'équation (3.1.1). Mais de la relation (3.6.1) il résulte immédiatement que cette solution doit être identique à $\varphi(t) + C$ puisque la suite $\{\varphi(t + \tau_n)\}$ converge uniformément dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ vers $\varphi(t)$. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Théorème 3.6.1 *Dans les hypothèse du théorème (3.1.2) toute solution de l'équation (3.1.1), bornée dans un intervalle* $(t_0, +\infty)$ *est la somme d'une solution presque-périodique de l'équation (3.1.1) et d'une fonction tendant vers zéro lorsque* t *tend vers l'infini c'est-à-dire elle est une fonction asymptotiquement presque-périodique au sens de Fréchet.*

Il en est de même pour toute solution de l'équation (3.1.1), bornée dans un intervalle $(-\infty, t_0)$.

Remarque 3.6.1 *Du raisonnement du (3.6) précédent il résulte immédiatement que dans l'énoncé du théorème (3.1.2) il suffit de supposer l'existence d'une solution au moins de l'équation (3.1.1), bornée dans un intervalle* $(t_0, +\infty)$ *(ou bien* $(-\infty, t_0)$*), puisque l'on en tire sans peine l'existence d'une solution bornée sur tout l'axe des* t *[8].*

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons donné une étude simple sur les fonctions presque-périodiques avec quelques propriétés élémentaires pour ce type de fonctions comme le développement de Fourier. La notion générale des fonctions presque-périodiques est donnée ici par comparaison avec les fonctions périodiques que nous avons présenté au début de ce travail.

Une grande importance de ce type de fonctions est montré ici par une application sur les équations différentielles ordinaires, l'existence et l'unicité de la solution presque-périodique sont démontrés en utilisant les théorèmes de Bochner avec les propriétés élémentaires des fonctions presque-périodiques rappelés au chapitre II.

Bibliographie

[1] D. FREDON, M. MAUMY et F. BERTRAND; Mathématiques - Analyse; DUNOD; Paris 2009.

[2] D. GUININ, B. JOPPIN; Mathématiques - Analyse; Bréal; 2000.

[3] D. LASSOUED; Fonctions presque-périodiques et équations différentielles; Mémoir Pour l'obtention du diplôme de docteura mathématique; Université paris I panthéon-Sorbonne; décembre 2013.

[4] F. DIB; Méthodes variationnelles pour équations différéntielles à retard; Mémoir Pour l'obtention du diplôme de magistère mathématique,Université de Abou Bekr Belkaid Tlemcen; 2011.

[5] J. BASS; Cours de Mathématique; Masson; Tome III; 1971.

[6] M. AYACHI; Méthodes fonctionnelles et variationnelles pour l 'existence des solutions presque-périodiques des équations différentielles ordinaires à retard; Mémoir Pour l'obtention du diplôme de docteura mathématique; Université paris I panthéon-Sorbonne;octobre 2009.

[7] M. LARB. AHMAD; Contribution à l'étude de modéles autorégressifs AR(1) à coefficients péroidique et presque péroidique; Mémoir Pour l'obtention du diplôme de magistère mathématique, Université de MOULOUD MAMMERI de TIZI-OUZOU; 2012.

[8] Z. OPIAL; Sur les solutions presque péroidique des équations différéntielles du premier et second ordre; ICM; 1959.

[9] http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/AgregInterne/Oral1/217.pdf.

[10] http://melusine.eu.org/syracuse/immae/mp/mathematiques/10.pdf.

[11] http://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=pmi:series_fourier.pdf.