



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur
Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR
D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

Thème

Analyse d'un Problème de contact électro-viscoélastiques
fractionnaire avec compliance normale et frottement

Présente Par: CHENNOUF Douaà Errahmane et CHIBA Ourida

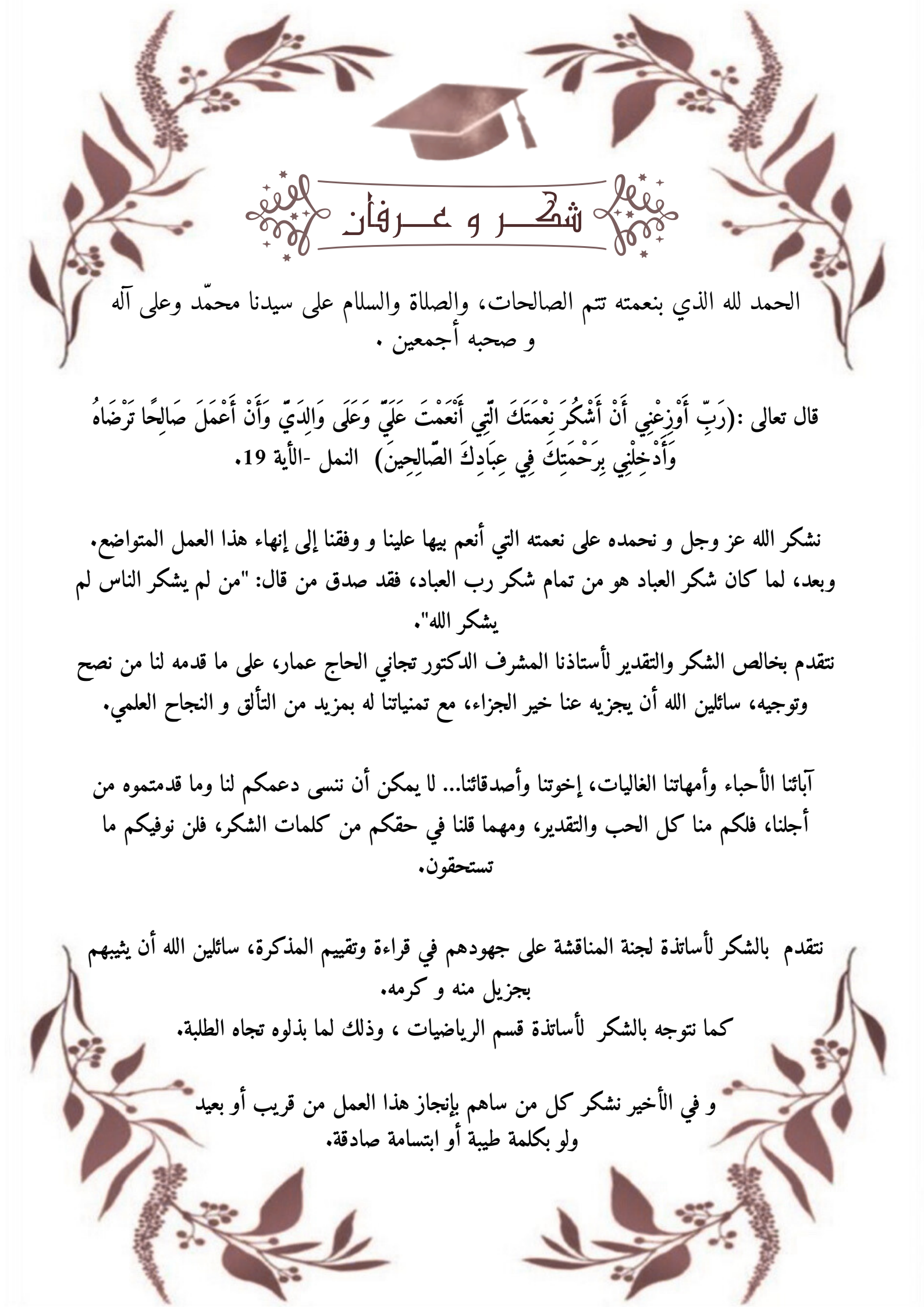
Devant le jury composé de :

Dr. Said Ameer Meziane
Pr. Hadj Ammar Tedjani
Dr. Bachir Douib

President
Encadreur
Examineur

Univ. El Oued
Univ. El Oued
Univ. El Oued

Année universitaire : 2024/2025



شكر و عرفان

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله
و صحبه أجمعين .

قال تعالى : (رَبِّ أَوْزَعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَى وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا تَرْضَاهُ
وَأَدْخِلْنِي بِرَحْمَتِكَ فِي عِبَادِكَ الصَّالِحِينَ) النمل - الآية 19.

نشكر الله عز وجل ونحمده على نعمته التي أنعم بيها علينا و وفقنا إلى إنهاء هذا العمل المتواضع.
وبعد، لما كان شكر العباد هو من تمام شكر رب العباد، فقد صدق من قال: "من لم يشكر الناس لم
يشكر الله".

نتقدم بخالص الشكر والتقدير لأستاذنا المشرف الدكتور تجاني الحاج عمار، على ما قدمه لنا من نصح
وتوجيه، سائلين الله أن يجزيه عنا خير الجزاء، مع تمنياتنا له بمزيد من التآلق والنجاح العلمي.

آبائنا الأحباء وأمهاتنا الغاليات، إخواننا وأصدقائنا... لا يمكن أن ننسى دعمكم لنا وما قدمتموه من
أجلنا، فلكم منا كل الحب والتقدير، ومهما قلنا في حقكم من كلمات الشكر، فلن نوفيكُم ما
تستحقون.

نتقدم بالشكر لأساتذة لجنة المناقشة على جهودهم في قراءة وتقييم المذكرة، سائلين الله أن يشيهم
بجزيل منه و كرمه.

كما نتوجه بالشكر لأساتذة قسم الرياضيات ، وذلك لما بذلوه تجاه الطلبة.

و في الأخير نشكر كل من ساهم بإنجاز هذا العمل من قريب أو بعيد
ولو بكلمة طيبة أو ابتسامة صادقة.

إهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات لك الحمد حتى ترضى، ولك الحمد إذا رضيت،
أهدي تخرجي ونجاحي إلى: إلى أمي الحبيبة، نبع الحنان ومصدر النور في حياتي...
إلى من غرست في قلبي القوة، واحتضنت أحلامي قبل أن أراها تنبت...
يا من كنتِ الدعاء الصادق والسند الثابت، لولاكِ ما كان لهذا الحلم أن يولد. شكراً
لكِ من أعماق القلب، ورضائكِ هو تاج نخري وسر نجاحي.
إلى والدي العزيز

إلى إخوتي، من كانوا نور الطريق وعصب القلب،
إلى من منحوني الحب بلا حدود،
وسهلوا لي درب الحلم بتضحياتهم العظيمة،
شكراً لكم بحجم السماء، وامتناناً يسكن الدعاء والوجدان.
إلى صديقتي العزيزات وأحبابي الأقرب إلى القلب،
كانت صداقتكن لي سنداً،
ومحبتكن طوق نجاة في لحظات التعب والخذلان،
والبهجة التي تُعش الروح كلّها ضاق الطريق.
شكراً لقلوبكن النقية، ولوجودكن الذي لا يُقدّر بثمن.
إلى مديري الفاضل، وزملائي الأعزاء،

خالص الشكر والتقدير لما وجدته من دعم وتشجيع طوال مشواري العلمي.
لقد كنتم خير رفاق في طريق الاجتهاد،
وبيئةً محفزةً على العطاء والتميز. أعتز بكل لحظة جمعتني بكم،
وبكل نصيحة ساعدتني على النضج والتقدم.
فلكم مني كل الامتنان، والدعاء الصادق بدوام التوفيق والنجاح.

إهداء

بعد مسيرة دراسيةٍ حملتُ في طياتها الكثير من الصعوبات و التعب ،ها أنا اليوم اقطفُ ثمار تعبي و ارفعُ قبعتي بِكُلِّ فخر..

فالحمد لله حباً و شكراً و إمتناناً، ما كنت لأفعل هذا لولا فضلُ الله فالحمد لله على البدء و على الختام.. إلى نفسي.. أخاطبك اليوم بفخر، لأنك لم تستسلمي رغم كل شيء.. هذا النجاح ليس مجرد شهادةٍ، بل هو وسام على صبرك، وقوة قلبك، أنا فخورة بك جداً.

إلى من أحملُ إسمهُ بكل فخر إلى من دعمني بلا حدود و أعطاني بلا مقابل إلى من علمني أن الدنيا كفاح و سلاحها العلم، إلى من غرس في روحي مكارم الأخلاق داعمي الأول في مسيرتي و قوتي من بعد الله ..
والدي الغالي

إلى من جعل الله الجنة تحت أقدامها إلى من كان دعاؤها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي ،قدوتي ومعلمتي الأولى و صديقة أيامي ..

"والدي الحنونة"

إلى من شددتُ عضدي بهن فكانوا ينابيع ارتوي منها ،إلى خيرة أيامي و صفوتها إلى قرتاً عيني أختي ..
أبرار و بيان "

إلى من ساندوني عند ضعفي و ساقوني بالحب ،إلى من رسموا لي مستقبل بخطوط من الثقة والحب "عائلي".
إلى صديقتي ورفيقة دربي إسراء"

كنتِ ولا تزالين خير السند، كل لحظة معك كانت درساً في الحب والصدقة، نجاحي اليوم ليس فقط نتيجة اجتهادي، بل هو نتيجة وجودك بجاني، دعمك المستمر، وإيمانك بي.
إلى أصدقائي الذين كانوا عوناً وسنداً في كل خطوة، كل واحد بإسمه وأخص بالذكر "صديقتي الغالية إيمان"
إلى شريكتي ورفيقتي في الجهد والطموح "وريدة".
إلى عائلي الثانية"

إلى من علّمني معنى الالتزام، الخدمة، والتضحية في سبيل الغير.. كنتم دائماً أكثر من مجرد أصدقاء، كنتم العائلة التي أختارها قلبي، في كل لحظة تعب كنت أستمّد منكم القوة، ومن روح الكشيفة معنى الاستمرار. نجاحي اليوم لا يكتمل دون أن أقول أُنتم كنزي وأجمل محطاتي.

إلى أولئك الذين رسموا أحلامهم على جدران الجامعات وحملت دفاترهم في طريقهم إلى الشهادة... إلى طلبة غرة الجامعين الذين رحلوا قبل أن تكتمل الحكاية قبل أن ينادي بأسمائهم يوم التخرج فصاروا نوراً لا ينطفئ في سماء العلم والكرامة..

سلاماً على ارواحكم الطاهرة و موعداً عند رب لا ينسى..

واخيراً من قال أنا لها "نالها" و أنا لها وإن أبت رُغماً عنها أتيتُ بها .

دعاء الرحمن

Contenu

Notations générales	vi
Introduction	ix
1 Modélisation et quelques rappels mathématiques	1
1.1 Modélisation	1
1.1.1 Cadre physique	1
1.1.2 Modèle mathématique	4
1.1.3 Loi de Kelvin-Voigt	5
1.1.4 Conditions aux limites	6
1.2 Outils mathématiques	9
1.2.1 Espaces de Hilbert	9
1.2.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega^\kappa)$	9
1.2.3 Quelques outils dans l'espace $L^p(\Omega^\kappa)$	10
1.2.4 Espaces de Sobolev	10
1.2.5 Espaces fonctionnels	14
1.2.6 Espaces $L^p(0, T; X)$ et $W^{k,p}(0, T; X)$	16
1.2.7 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	18
1.2.8 Dérivée fractionnaire de Caputo	21
1.2.9 Lemme de Gronwall	25
1.2.10 Les inégalités de Hölder et de Young	26
2 Analyse d'un problème de contact avec compliance normale et frottement en matériaux de électro-viscoélastiques fractionnaire	27
2.1 Formulation du problème	28
2.2 Formulation Variationnelle	32
2.3 Existence de la solution	37
Conclusion générale	44
Bibliographie	45

Notations générales

- $\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{S}^d$ L'espace des tenseurs du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$,
- C Constante réelle strictement positive,
- i.e C'est à dire,
- $\partial_i \psi$ La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
- Div divergence du tenseur ; $\text{Div } \sigma = \sigma_{ij,j}$,
- div divergence du vecteur ; $\text{div } D = D_{i,i}$,
- $\cdot$ Produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$,
- $|\cdot|$ La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$,
- (x, y) Paire d'un espace produit $X \times Y$,
- $(\cdot, \cdot)_X$ Le produit scalaire de X ,
- $\|\cdot\|_X$ La norme de X ,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ Le produit dual entre X' et X ,
- p.p. Presque partout,
- Ω^κ Domaines bornés avec une surface frontière régulière Γ^κ ,
- $\overline{\Omega}^\kappa$ L'adhérence de Ω^κ
- Γ_i^κ Les parties de frontière $\Gamma^\kappa, (i = 1, 2, 3)$,
- $mes(\Gamma_i^\kappa)$ Mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_i^κ ,
- dx Mesure superficielle sur Ω^κ ,
- da Mesure superficielle sur Γ_i^κ ,
- ν^κ La normale unitaire sortante à Γ^κ ,
- $v_\nu^\kappa, v_\tau^\kappa$ Les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v^κ défini sur $\overline{\Omega}^\kappa$,
- $\mathcal{D}(\Omega^\kappa)$ L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
- $L^2(\Omega^\kappa)$ L'espace des fonctions u^κ mesurables sur Ω^κ telles que $\int_{\Omega^\kappa} |u^\kappa|^2 dx < +\infty$,

- $\| \cdot \|_{L^2(\Omega^\kappa)}$ La norme de $L^2(\Omega^\kappa)$ définie par $\| u^\kappa \|_{L^2(\Omega^\kappa)} = \left(\int_{\Omega^\kappa} |u^\kappa|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$,
- $L^\infty(\Omega^\kappa)$ L'espace des fonctions u^κ mesurables sur Ω^κ telles que,
 $\exists c > 0 : |u^\kappa| < c$, p.p., sur Ω^κ ,
- $H^1(\Omega^\kappa)$ L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω^κ ,
- H_{Γ^κ} L'espace $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa) \right)^d$,
- H'_{Γ^κ} L'espace dual de H_{Γ^κ} .
- $\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$ L'application trace pour les fonctions vectorielles,
- $\mathbb{H}^\kappa$ L'espace $L^2(\Omega^\kappa)^d$,
- $W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d$ L'espace de Sobolev $H^1(\Omega^\kappa)^d$
- $\mathcal{H}^\kappa$ L'espace $L^2(\Omega^\kappa)^{d \times d}_s$,
- $\mathcal{H}^\kappa_1$ L'espace $W^{1,2}(\Omega^\kappa)^{d \times d}_s$,
- $\mathbb{W}^\kappa$ L'espace $\{\psi^\kappa \in H^1(\Omega^\kappa) \mid \psi^\kappa = 0 \text{ sur } \Gamma^\kappa_a\}$,
- $\mathcal{W}^\kappa$ L'espace $\{D^\kappa = (D^\kappa_i) \mid D^\kappa_i \in L^2(\Omega^\kappa), D^\kappa_{i,i} \in L^2(\Omega^\kappa)\}$,
- $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)$ L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^κ ,
- $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)$ L'espace dual $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)$,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\kappa}$ Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)$,
- $C(0, T; H)$ L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
- $C^1(0, T; H)$ L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
- $L^p(0, T; H)$ L'espace des fonctions u mesurables sur $[0, T]$ telles que $\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt < +\infty$,
- $\| \cdot \|_{L^p(0, T; H)}$ La norme de $L^p(0, T; H)$ définie par $\| u \|_{L^p(0, T; H)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$,
- $W^{k,p}(0, T; H)$ L'espace de Sobolev de paramètres k et p sur $[0, T]$ dans H ,
- $\| \cdot \|_{W^{k,p}(0, T; H)}$ La norme de $W^{k,p}(0, T; H)$ définie par

$$\| u \|_{W^{k,p}(0, T; H)} = \| u \|_{L^p(0, T; H)} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \| u^{(\alpha)} \|_{L^p(0, T; H)},$$

- Ω^1, Ω^2 Les domaines occupés deux corps déformables,
- Γ^κ La frontière de $\Omega^\kappa : \Gamma^\kappa = \partial\Omega^\kappa$,
- $\Gamma_1^\kappa, \Gamma_2^\kappa, \Gamma_3$ Les parties de $\Gamma^l = \overline{\Gamma_1^\kappa \cup \Gamma_2^\kappa \cup \Gamma_3}$,
- $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$ L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
- u^κ Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^κ , on écrit u_i^κ
les composantes du vecteur dans la base canonique,
- u_ν^κ La composante normale du déplacement u^κ sur la frontière du domaine
définie par $u_\nu^\kappa = u^\kappa \cdot \nu^\kappa$,
- u_τ^κ La composante tangentielle du déplacement u^κ sur la frontière du domaine
définie par $u_\tau^\kappa = u^\kappa - u_\nu^\kappa \nu^\kappa$,
- $\dot{u}^\kappa, \ddot{u}^\kappa$ Les dérivées première et seconde de u^κ par rapport au temps,
- $\varepsilon(u^\kappa)$ Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon(u^\kappa)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\kappa + \partial_j u_i^\kappa)$,
- σ^κ Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^κ , on écrit σ_{ij}^κ
les composantes du tenseur dans la base canonique,
- σ_ν^κ La composante normale du contrainte σ^κ sur la frontière du domaine
définie par $\sigma_\nu^\kappa = (\sigma^\kappa \nu^\kappa) \cdot \nu^\kappa$,
- σ_τ^κ La composante tangentielle du contrainte σ^κ sur la frontière du domaine
définie par $\sigma_\tau^\kappa = \sigma^\kappa \nu^\kappa - \sigma_\nu^\kappa \nu^\kappa$,
- $\sigma^\kappa \cdot u^\kappa$ Produit tensoriel (matriciel) de u^κ par $\sigma^\kappa : (\sigma^\kappa \cdot u^\kappa)_i = \sigma_{ij}^\kappa u_j^\kappa$,
- ψ^κ Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^κ ,
- D^κ Vecteurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^κ .

Introduction

La viscoélasticité est une propriété mécanique des matériaux qui combinent à la fois les comportements élastique et visqueux lorsqu'ils sont soumis à une déformation. Un matériau viscoélastique réagit à une contrainte appliquée par une déformation instantanée (comportement élastique) suivie d'une déformation progressive dans le temps (comportement visqueux). Cette réponse dépend donc du temps, du taux de chargement, et de la durée d'application de la contrainte. Plus précisément, l'étude d'un contact quasi-statique entre deux corps électro-viscoélastiques permet d'explorer les interactions complexes entre la déformation mécanique dépendante du temps, les champs électriques induits et les phénomènes dissipatifs liés à la viscosité et au frottement. Ce type de modèle trouve des applications dans la conception de dispositifs intelligents, les capteurs piézoélectriques, les systèmes MEMS/NEMS (Micro/Nano ElectroMechanical Systems), ainsi que dans les structures avancées utilisées en robotique et en ingénierie biomédicale. En considérant une loi de frottement de type Coulomb, couplée à des relations constitutives viscoélastiques dépendantes d'un champ électrique, le système mathématique obtenu devient hautement non linéaire et requiert des outils analytiques rigoureux pour établir son existence et son unicité. L'objectif de cette étude est donc de formuler le problème de manière variationnelle, d'en déduire les conditions aux limites, et de prouver, sous certaines hypothèses, l'existence d'une solution faible au problème. Cette démarche nécessite notamment l'usage d'outils avancés tels que les opérateurs monotones, les dérivées fractionnaires (ex. Caputo), et des méthodes variationnelles comme celle de Galerkin. Différents modèles ont été développés pour décrire l'interaction entre les champs électrique et mécanique, voir par exemple [3, 14] et les références citées. Des modèles généraux pour des matériaux élastiques avec effet piézoélectrique, appelés matériaux électro-élastiques, peuvent être trouvés dans [3]. Un problème de contact statique avec frottement pour des matériaux électro-élastiques a été étudié dans [4], sous l'hypothèse que la fondation est isolée. Des problèmes de contact impliquant des matériaux élasto-piézoélectriques [4, 12], des matériaux piézoélectriques viscoélastiques [2], ainsi qu'un problème de contact pour des matériaux électro-élasto-viscoplastiques ont été étudiés dans [1, 10]. La dégradation est un sujet extrêmement important en ingénierie, car elle affecte directement la durée de vie utile de la structure ou du composant conçu. Il existe une très grande littérature d'ingénierie à ce

sujet. Des modèles prenant en compte l'influence de la dégradation interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. Des modèles généraux pour la dégradation ont été dérivés dans [9] à partir du principe de puissance virtuelle. Les modèles de dégradation mécanique, dérivés à partir de considérations thermodynamiques et du principe du travail virtuel, peuvent être trouvés dans [6]. Dans un matériau élastique isotrope et homogène, soit E_Y^κ le module de Young du matériau original et $E_e^\kappa f f$ le module courant, la fonction de dégradation est définie par $E_e^\kappa f f / E_Y^\kappa$. Il découle clairement de cette définition que la fonction de dégradation est restreinte à des valeurs comprises entre zéro et un.

Le mémoire comporte deux chapitres et est structurés de la manière suivante :

Premier chapitre : nous présentons le cadre physique et décrivons le problème mécanique, et nous introduisons quelques notations et résultats, quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Deuxième chapitre : nous présentons une formulation du problème mécanique, déduit d'une formulation variationnelle, énonçons notre principal résultat d'existence de la solution faible.

MODÉLISATION ET QUELQUES RAPPELS MATHÉMATIQUES

1

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique d'un Problème étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, quelques définitions concernant le Dérivée fractionnaire, lemme de Gronwall et quelques Théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 MODÉLISATION

Dans cette section, nous introduirons le cadre physique ainsi que le modèle mathématique associé. Ensuite, nous présenterons la formulation mathématique d'un problème de contact quasi-statique entre deux corps piézoélectriques.

1.1.1 Cadre physique

Les phénomènes de contact considérés dans cette mémoire sont décrits par deux cadres physiques suivants ;

Cadre physique n⁰¹ (Problème mécanique.) Nous considérons deux corps matériels qui occupent quelque chaque des domaines bornés $\Omega^\kappa \subset \mathbb{R}^d (\kappa = 1, 2; d = 2, 3)$, avec une frontière régulière $\Gamma^\kappa = \partial\Omega^\kappa$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\kappa, \Gamma_2^\kappa, \Gamma_3^\kappa$, tel que $mes(\Gamma_1^\kappa) > 0$.

Nous notons que ν^κ la normale unitaire sortante à Γ^κ . Le corps encastré sur $\Gamma_1^\kappa, \kappa = 1, 2$ dans une structure fixe. Sur Γ_2^κ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^κ , et dans Ω^κ agissent des forces volumiques de densités f_0^κ .

Nous supposons f_2^κ , et $f_0^\kappa, \kappa = 1, 2$, varient très lentement par rapport au temps. Soient $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Les corps est en contact sur la partie Γ_3^κ , on a $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$ noté par Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps (voir Fig 1.1).

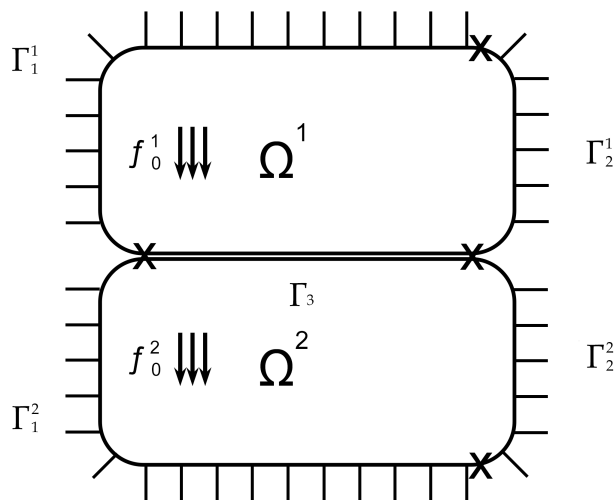


Figure1.1. Cadre Physique 1

Cadre physique n°2 (Problème électro-mécanique.) Nous considérons deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^\kappa \subset \mathbb{R}^d (\kappa = 1, 2; d = 2, 3)$, avec une frontière régulière $\Gamma^\kappa = \partial\Omega^\kappa$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\kappa, \Gamma_2^\kappa, \Gamma_3^\kappa$, tel que $mes(\Gamma_1^\kappa) > 0$. Nous notons que ν^κ la normale unitaire sortante à Γ^κ . Le corps encastré sur $\Gamma_1^\kappa, \kappa = 1, 2$ dans une structure fixe. Sur Γ_2^κ où $\kappa = 1, 2$, agissent des tractions surfaciques de densité f_2^κ , et dans Ω^κ agissent des forces volumiques de densités f_0^κ . Nous supposons f_2^κ , et f_0^κ , varient très lentement par rapport au temps. Soient $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. En plus de l'action des forces des tractions, chaque corps est soumis à l'action des charge électriques de densité volumiques q_0^κ , et de charge électriques surfacique q_2^κ . Pour le décrire, nous considérons une partition de la frontière Γ^κ en deux parties mesurables, Γ_a^κ et Γ_b^κ telles que $mes(\Gamma_a^\kappa) > 0$. Nous supposons également que le potentiel électriques s'annule sur Γ_a^κ , et la charges électriques de surface de densité q_2^κ , est prescrite sur Γ_b^κ . La différence entre cadre physiques mécanique et cadre physiques électro-mécanique résulte du fait que en deuxième, nous prenons en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques

dans les deux corps (voir Fig. 1.2).

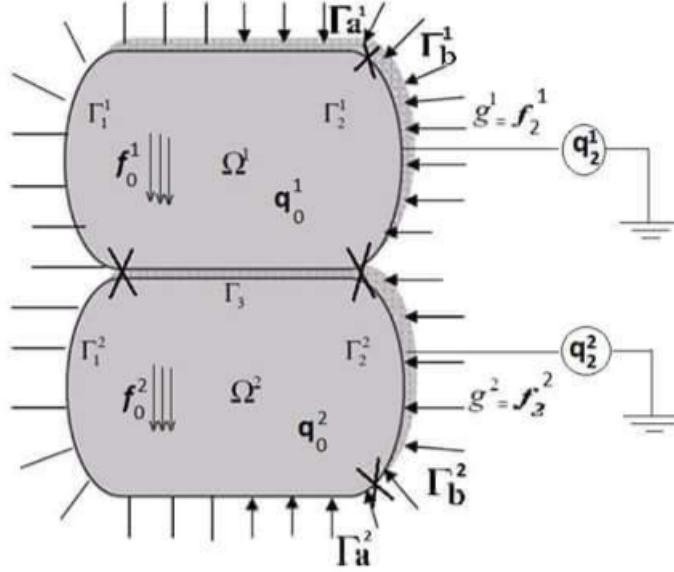


Figure1.2. Cadre Physique 2

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette mémoire.

Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, " $\cdot$ " et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} u^\kappa \cdot v^\kappa &= u_i^\kappa \cdot v_i^\kappa, & |v^\kappa| &= \sqrt{v^\kappa \cdot v^\kappa}, & \forall u^\kappa, v^\kappa \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma^\kappa \cdot \tau^\kappa &= \sigma_{ij}^\kappa \cdot \tau_{ij}^\kappa, & |\tau^\kappa| &= \sqrt{\tau^\kappa \cdot \tau^\kappa}, & \forall \sigma^\kappa, \tau^\kappa \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Ici et ci-dessous, les indices i et j courent entre 1 et d et la convention de sommation sur les indices répétés est adoptée. Pour chaque élément $v^\kappa \in H_1^\kappa$, nous notons par v_ν^κ et v_τ^κ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$v_\nu^\kappa = v^\kappa \cdot \nu^\kappa, \quad v_\tau^\kappa = v^\kappa - v_\nu^\kappa \nu^\kappa. \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\sigma^\kappa = \sigma^\kappa(x, t)$ le champ des contraintes, par $u^\kappa = u^\kappa(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u^\kappa)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à

$x \in \overline{\Omega^\kappa}$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes σ^κ nous dénotons par σ_ν^κ et σ_τ^κ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\kappa = (\sigma^\kappa \nu^\kappa) \cdot \nu^\kappa, \quad \sigma_\tau^\kappa = \sigma^\kappa \nu^\kappa - \sigma_\nu^\kappa \cdot \nu^\kappa. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma^\kappa \nu^\kappa) \cdot v^\kappa = \sigma_\nu^\kappa v_\nu^\kappa + \sigma_\tau^\kappa \cdot v_\tau^\kappa, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans la formulation variationnelle de problème mécanique de contact.

1.1.2 Modèle mathématique

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u^\kappa) = (\varepsilon_{ij}(u^\kappa)), \quad \varepsilon_{ij}(u^\kappa) = \frac{1}{2} (\partial_j u_i^\kappa + \partial_i u_j^\kappa), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Notons qu'ici et tout au long de la mémoire, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

Modèle mathématique n°1 . Le premier modèle mathématique étudié dans cette mémoire décrit évolution des corps dans le cadre physique n°1 (page 1). Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\sigma^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d, \kappa = 1, 2$. Notons la densité des forces volumiques par $f_0^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy suivante

$$\text{Div} \sigma^\kappa + f_0^\kappa = 0 \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T). \quad (1.4)$$

Ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs, $\text{Div} \sigma^\kappa = (\sigma_{ij,j}^\kappa)$. Le processus d'évolution défini par (1.4) s'appelle processus quasi-statique. Nous rappelons que dans le cadre physique n°1, f_2^κ et f_0^κ varient très lentement par rapport au temps.

Puisque le corps Ω^κ où $\kappa = 1, 2$ est encastres sur Γ_1^κ , le champ des déplacements s'annule

$$u^\kappa = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\kappa \times (0, T). \quad (1.5)$$

La condition aux limites en tractions est

$$\sigma^\kappa \nu^\kappa = f_2^\kappa \quad \text{sur} \quad \Gamma_2^\kappa \times (0, T). \quad (1.6)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.4) et (1.6) par les conditions de contact sur la partie.

Modèle mathématique n°2. Ce modèle mathématique décrit l'évolution du corps dans le cadre physique n°2, c'est un modèle électro-mécanique. Les inconnues mécaniques du problème sont les champs des déplacements u^κ et les champs des contraintes σ^κ satisfaisant les égalités (1.4)-(1.6). A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le potentiel électrique $\varphi^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $D^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques

$$\operatorname{div} D^\kappa = q_0^\kappa \quad \text{dans} \quad \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (1.7)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\operatorname{div} D^\kappa = (D_{i,i}^\kappa)$ et q_0^κ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^κ . Rappelons que dans le cadre physique n°2, le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a^κ de la frontière

$$\varphi^\kappa = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a^\kappa \times (0, T), \quad (1.8)$$

tandis que sur Γ_b^κ , une charge électrique de densité q_2^κ est prescrite,

$$D^\kappa \cdot \nu^\kappa = q_2^\kappa \quad \text{sur} \quad \Gamma_b^\kappa \times (0, T). \quad (1.9)$$

1.1.3 Loi de Kelvin-Voigt

Le modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt, connu sous le nom de modèle de Kelvin-Voigt généralisé, qui est développé en remplaçant le dashpot du modèle classique de Kelvin-Voigt par un opérateur de dérivée fractionnaire, connu sous le nom de springpot. L'identification des paramètres du modèle fractionnaire a été soulevée au fur et à mesure que le calcul fractionnaire a été utilisé dans le cadre de l'étude de la qualité de l'air. Le calcul fractionnaire a été utilisé en électro-viscoélasticité. Différentes méthodes ont été utilisées, telles que la méthode des algorithmes génétiques, la méthode d'estimation spectrale des paramètres, les erreurs dans les variables, etc. méthode d'estimation spectrale des paramètres, la méthode des erreurs dans les variables la méthode de l'appartenance à un ensemble.

Nous considérons contact entre deux corps électro- viscoélastique qui occupent deux domaines borné $\Omega^\kappa \subset \mathbb{R}^d$ avec une surface frontière régulière Γ^κ subdivisée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\kappa, \Gamma_2^\kappa, \Gamma_3^\kappa$ telles que $\text{mes}(\Gamma_1^\kappa) > 0$, Soit $T > 0$ nous étudions l'évolution du corps due à l'application de force de volume et de tractions de surfaces dans l'intervalle de temps $[0, T]$. Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega^\kappa \cup \Gamma^\kappa$, et $t \in [0, T]$. Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega^\kappa \cup \Gamma^\kappa$, et $t \in [0, T]$.

Afin de décrire le comportement électro-viscoélastique, un modèle rhéologique est nécessaire. Les modèles généralisés de type Kelvin-Voigt et Maxwell sont couramment utilisés mais ils nécessitent un grand nombre de paramètres à identifier. Au cours des dernières années, les modèles fractionnaires sont permettent de décrire le comportement électro-viscoélastique sur une large gamme de fréquences avec peu de paramètres. La électro- viscoélastique est une des premières applications du calcul fractionnaire et la relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations est définie comme suit :

$$\sigma^\kappa(t) = \mathcal{A}^\kappa \varepsilon \left({}^C_0 D_t^\alpha u^\kappa(t) \right) + \mathcal{B}^\kappa \varepsilon \left(u^\kappa(t) \right) + (\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \varphi^\kappa(t) \quad \text{dans} \quad \Omega^\kappa \times (0, T),$$

où $\left({}^C_0 D_t^\alpha u^\kappa(t) \right)$ dénote la dérivée de Caputo d'ordre α telle que $0 < \alpha \leq 1$ par rapport au temps. L'utilisation de la dérivée fractionnaire dans la loi de comportement nécessite l'introduction d'un élément rhéologique nommé spring-pot. Cet élément correspond à une représentation asymptotique d'assemblage d'éléments élastiques (springs) et viscoélastiques traditionnels (dash-pots) connectés en série et en parallèle. L'élément spring-pot permet ainsi de modéliser différents comportements mécaniques en changeant l'ordre de dérivation α . Si $\alpha \rightarrow 0$, le comportement de l'élément fractionnaire tend vers la réponse élastique ; dans le cas où $\alpha \rightarrow 1$, la viscosité prédomine.

1.1.4 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^κ .

A-La condition aux limites de déplacements

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie Γ_1^κ , le champ des déplacements u^κ est par conséquent nul

$$u^\kappa = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\kappa \times (0, T).$$

B-La condition aux limites de tractions

Une traction surfacique de densité f_2^κ agit sur Γ_2^κ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma^\kappa \nu^\kappa$ satisfait

$$\sigma^\kappa \nu^\kappa = f_2^\kappa \quad \text{sur} \quad \Gamma_2^\kappa \times (0, T).$$

C-Les conditions aux limites électriques

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\varphi^\kappa = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a^\kappa \times (0, T).$$

$$D^\kappa \cdot \nu^\kappa = q_2^\kappa \quad \text{sur} \quad \Gamma_b^\kappa \times (0, T).$$

D-Les conditions aux limites de contact avec frottement

Par condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des tenseurs des contraintes. Par loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ et le déplacement tangentiel u_τ . Notons ici que σ_τ s'appelle aussi force de frottement.

Nous commençons par présenter les conditions aux limites de contact utilisées dans cette mémoire. Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur $\Gamma_3^\kappa \times [0, T]$.

Contact avec compliance normale.

Dans ce cas, la contrainte σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p_\nu (u_\nu^1 + u_\nu^2 - g) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3^\kappa \times (0, T), \quad (1.10)$$

où u_ν^1, u_ν^2 sont les déplacements normales, g représente l'interstice entre les deux corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

Loi de frottement de type Coulomb.

C'est une loi de frottement la plus répandue dans la littérature mathématiques. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de glissement et peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq |\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < |\sigma_\nu| \Rightarrow u_\tau^1 = u_\tau^2, \\ \|\sigma_\tau\| = |\sigma_\nu| \Rightarrow \exists \delta \neq 0, \quad -\delta \sigma_\tau = u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t), \end{cases} \quad (1.11)$$

c'est une version statique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottement des problèmes étudiés dans la deuxième partie du mémoire.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.11), par la condition de compliance normale (1.10), de façon à obtenir les conditions suivantes

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau(t)\| \leq p_\tau(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g), \\ \|\sigma_\tau(t)\| < p_\tau(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g) \Rightarrow u_\tau^1(t) = u_\tau^2(t), \\ \|\sigma_\tau(t)\| = p_\tau(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g) \Rightarrow \exists \delta \neq 0, \quad -\delta \sigma_\tau(t) = u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t). \end{cases} \quad (1.12)$$

Où p_τ est une fonction positive. Dans (1.12), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g)$. De plus, quand le seuil de frottement est atteint, les deux corps se mettent à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers.

1.2 QUILS MATHÉMATIQUES

1.2.1 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H .

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|u\|_H = \sqrt{(u, u)_H}, \quad (1.13)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

on dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (1.13).

Soit H' l'espace dual de H

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{(\eta, v)_{H' \times H}}{\|v\|_H},$$

où $(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$ représente la produit dual entre H' et H .

Théorème 1.2.1. (*Représentation de Riesz-Fréchet*)

Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual, alors pour tout $\phi \in H'$ il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H,$$

de plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

L'importance de ce théorème est que tout forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

1.2.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega^\kappa)$

D'abord on note par $L^1(\Omega^\kappa)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω^κ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\|v\|_{L^1(\Omega^\kappa)} = \int_{\Omega^\kappa} |v(x)| dx.$$

Définition 1.2.1. Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega^\kappa)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega^\kappa) = \{v : \Omega^\kappa \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, et } |v|^p \in L^1(\Omega^\kappa)\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^p(\Omega^\kappa)} = \left(\int_{\Omega^\kappa} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

On appelle l'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega^\kappa)$ l'ensemble

$$L^\infty(\Omega^\kappa) = \{v : \Omega^\kappa \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \exists C > 0, |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega^\kappa\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega^\kappa)} = \inf \{C, \text{ telle que } |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega^\kappa\} = \supess(v).$$

1.2.3 Quelques outils dans l'espace $L^p(\Omega^\kappa)$

Théorème 1.2.2. (Convergence faible)

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ converge faiblement vers $x \in H$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y)_H = (x, y)_H \quad \forall y \in H.$$

On écrit souvent $x_n \rightharpoonup x$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $x_n \rightarrow x$ dans H , alors $x_n \rightharpoonup x$.

Définition 1.2.2. (Convergence faible*)

soit E un espace Banach, et soit E' l'espace dual, une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E' converge faible* vers f dans E' , et on note $f_n \xrightarrow{*} f$, si

$$\langle f_n, x \rangle_{E' \times E} \rightarrow \langle f, x \rangle_{E' \times E} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Théorème 1.2.3. Soit (x_n) une suite bornée de H . Alors il existe un élément $x \in H$ et une sous-suite de (x_n) encore notée par (x_n) telle que $x_n \rightarrow x$.

1.2.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque

là. On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espaces de Sobolev $H^1(\Omega^\kappa)$ défini par

$$H^1(\Omega^\kappa) = \left\{ u \in L^2(\Omega^\kappa); \partial_i u \in L^2(\Omega^\kappa) \ i = 1, \dots, d \right\},$$

on note par ∇u le vecteur des composantes $\partial_i u$, on a $\nabla u \in L^2(\Omega^\kappa)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega^\kappa)$.

On sait que $H^1(\Omega^\kappa)$ est un espaces de Hilbert pour le produite scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega^\kappa)} = (u, v)_{L^2(\Omega^\kappa)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega^\kappa)},$$

et la norme associée $\|u\|_{H^1(\Omega^\kappa)} = \sqrt{(u, u)_{H^1(\Omega^\kappa)}}$, et on écrit

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\kappa)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega^\kappa)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega^\kappa)^d}^2, \quad (1.14)$$

on a les résultats suivants

$$C^1(\overline{\Omega^\kappa}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega^\kappa).$$

Théorème 1.2.4. (*Injection continue de Sobolev*)

Soient I un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$, et $r, s \in \mathbb{R}$. Alors, les injections suivantes sont continues

1. si $s \leq r$: on a $H^r(I) \hookrightarrow H^s(I)$;

c'est à dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|u\|_{H^s(I)} \leq C \|u\|_{H^r(I)} \quad \forall u \in H^r(I). \quad (1.15)$$

2. si $s > \frac{N}{2}$; on a $H^{s+j}(I) \hookrightarrow C_b^j(\bar{I}) \quad \forall j \in \mathbb{N}$;

c'est à dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\|u\|_{C_b^j(\bar{I})} \leq C \|u\|_{H^{s+j}(I)} \quad \forall u \in H^{s+j}(I).$$

Théorème 1.2.5. (*Injection compact de Rellich*)

Soient I un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$, et $r, s \in \mathbb{R}$. Alors, les injections suivantes sont compacts

1. si $s \leq r$; on a $H^r(I) \subset\subset H^s(I)$;

c'est à dire toute suite bornée de $H^r(I)$ admet une sous-suite convergente dans $H^s(I)$.

2. si $s > \frac{N}{2}$; on a $H^{s+j}(I) \subset\subset C_b^j(\bar{I}) \quad \forall j \in \mathbb{N}$;

c'est à dire toute suite bornée de $H^s(I)$ admet une sous-suite convergente dans $C_b^j(\bar{I})$.

Théorème 1.2.6. (*trace de Sobolev*)

Soit Ω^κ un domaine Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ^κ et $1 < p < \infty$. Il existe une application linéaire et continue γ^κ définie sur l'espace $W^{1,p}(\Omega^\kappa)$ à valeurs dans l'espace $L^p(\Gamma^\kappa)$ telle que :

- 1) $\gamma^\kappa v = v|_{\Gamma^\kappa}$ si $v \in W^{1,p}(\Omega^\kappa) \cap C(\bar{\Omega}^\kappa)$,
- 2) l'application γ^κ est une application compact,
- 3) il existe une constante $C > 0$, provenant de la continuité de l'application γ^κ , tel que

$$\|\gamma^\kappa v\|_{L^p(\Gamma^\kappa)} \leq C \|v\|_{W^{1,p}(\Omega^\kappa)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega^\kappa).$$

Où

$$C(\bar{\Omega}^\kappa) = \{ \psi^\kappa|_{\Omega^\kappa} : \psi^\kappa \in C(\mathbb{R}^d) \}. \quad (1.16)$$

L'application γ^κ s'appelle application de trace sur $W^{1,p}(\Omega^\kappa)$, on a :

" γ^κ est définie comme le prolongement par densité de l'application $v^\kappa \mapsto v^\kappa|_{\Gamma^\kappa}$ définie pour $v^\kappa \in C(\bar{\Omega}^\kappa)$ ".

Définition 1.2.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega^\kappa)$ par

$$W^{k,p}(\Omega^\kappa) = \left\{ u \in L^p(\Omega^\kappa) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega^\kappa), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u \right\}.$$

où $D^\alpha u$ est la α^{ime} dérivée faible de u .

Remarque 1.2.1. Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega^\kappa)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega^\kappa)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega^\kappa)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega^\kappa)} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega^\kappa)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega^\kappa)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 1.2.7. *Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega^\kappa)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega^\kappa)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.*

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [1].

Théorème 1.2.8. *Soit $u^\kappa \in W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d$. Alors $\varepsilon(u^\kappa) = 0$ si et seulement si $u^\kappa \in \mathbf{R}^\kappa$ où*

$$\mathbf{R}^\kappa = \{u^\kappa \in W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d \mid \varepsilon(u^\kappa) = 0\}. \quad (1.17)$$

Théorème 1.2.9. (Inégalité de Korn)

Soit $\mathbf{V}^\kappa$ un sous-espace fermé de $W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d$ tel que :

$$\mathbf{V}^\kappa \cap \mathbf{R}^\kappa = \{0\}. \quad (1.18)$$

Alors, il existe $C > 0$ ne dépendant que Ω^κ et $\mathbf{V}^\kappa$ tel que

$$\|\varepsilon(u^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa} \geq C \|u^\kappa\|_{W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d} \quad \forall u^\kappa \in \mathbf{V}^\kappa. \quad (1.19)$$

L'inégalité (1.19) appelé l'inégalité de Korn.

Exemple : Tout au long de la mémoire, dans les parties mécaniques, la frontière Γ^κ est subdivisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1^κ , Γ_2^κ , et Γ_3^κ , tels que $\text{mes}(\Gamma_1^\kappa) > 0$. Nous aurons constamment besoin de l'espace des déplacements admissibles $\mathcal{V}^\kappa$ défini par

$$\mathcal{V}^\kappa = \{u^\kappa \in W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d \mid u^\kappa = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\kappa\}. \quad (1.20)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\kappa) > 0$, il vient $\mathcal{V}^\kappa \cap \mathbf{R}^\kappa = \{0\}$, d'où l'inégalité de Korn s'applique sur $\mathcal{V}^\kappa$; alors, il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^κ et Γ_1^κ telle que

$$\|\varepsilon(v^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa} \geq c_k \|v^\kappa\|_{W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d}, \quad \forall v^\kappa \in \mathcal{V}^\kappa. \quad (1.21)$$

Sur l'espace $\mathcal{V}^\kappa$ nous considérons le produit scalaire donnée par

$$(u^\kappa, v^\kappa)_{\mathcal{V}^\kappa} = (\varepsilon(u^\kappa), \varepsilon(v^\kappa))_{\mathcal{H}^\kappa}, \quad \forall u^\kappa, v^\kappa \in \mathcal{V}^\kappa, \quad (1.22)$$

et soit $\|\cdot\|_{\mathcal{V}^\kappa}$ la norme associée

$$\|u^\kappa\|_{\mathcal{V}^\kappa} = \|\varepsilon(u^\kappa)\|_{\mathcal{H}^\kappa}, \quad \forall u^\kappa \in \mathcal{V}^\kappa. \quad (1.23)$$

Par l'inégalité de Korn (1.21), il vient que $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{V}^\kappa}$ sont des normes équivalentes sur $\mathcal{V}^\kappa$ et ainsi $(\mathcal{V}^\kappa, \|\cdot\|_{\mathcal{V}^\kappa})$ est un espace de Hilbert réel.

En outre, par le Théorème de trace de Sobolev et (1.21), il existe une constante $c_{tr} > 0$, dépendant uniquement de $\Omega^\kappa, \Gamma_1^\kappa$ et Γ_3 telle que

$$\|u^\kappa\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_{tr} \|u^\kappa\|_{\mathcal{V}^\kappa}, \quad \forall u^\kappa \in \mathcal{V}^\kappa. \quad (1.24)$$

1.2.5 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les espaces du type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace, aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeur dans l'espace de Hilbert.

Maintenant, pour procéder à la formulation variationnelle, nous avons besoin des les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques u^κ , σ^κ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{H}^\kappa = \{u^\kappa = (u_i^\kappa); u_i^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa)\} = L^2(\Omega^\kappa)^d, \\ \mathcal{H}^\kappa = \{\sigma^\kappa = (\sigma_{ij}^\kappa); \sigma_{ij}^\kappa = \sigma_{ji}^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa)\} = L^2(\Omega^\kappa)_s^{d \times d}, \\ \mathbb{H}_1^\kappa = \{u^\kappa = (u_i^\kappa); u_i^\kappa \in W^{1,2}(\Omega^\kappa)\} = W^{1,2}(\Omega^\kappa)^d, \\ \mathcal{H}_1^\kappa = \{\sigma^\kappa = (\sigma_{ij}^\kappa) \in \mathcal{H}^\kappa; \text{Div } \sigma^\kappa \in \mathbb{H}^\kappa\} = W^{1,2}(\Omega^\kappa)_s^{d \times d}. \end{array} \right.$$

Les espaces $\mathbb{H}^\kappa, \mathcal{H}^\kappa, \mathbb{H}_1^\kappa, \mathcal{H}_1^\kappa$ et , sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires respectivement, donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^\kappa, v^\kappa)_{\mathbb{H}^\kappa} = \int_{\Omega^\kappa} u_i^\kappa \cdot v_i^\kappa dx, \\ (\sigma^\kappa, \theta^\kappa)_{\mathcal{H}^\kappa} = \int_{\Omega^\kappa} \sigma_{ij}^\kappa \cdot \theta_{ij}^\kappa dx, \\ (u^\kappa, v^\kappa)_{\mathbb{H}_1^\kappa} = \int_{\Omega^\kappa} u_i^\kappa \cdot v_i^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} \nabla u_i^\kappa \cdot \nabla v_i^\kappa dx, \\ (\sigma^\kappa, \theta^\kappa)_{\mathcal{H}_1^\kappa} = \int_{\Omega^\kappa} \sigma_{ij}^\kappa \cdot \theta_{ij}^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} \text{Div } \sigma^\kappa \cdot \text{Div } \theta^\kappa dx, \end{array} \right.$$

Les normes associés sont notées par $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^\kappa}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\kappa}, \|\cdot\|_{\mathbb{H}_1^\kappa}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\kappa}$ respectivement.

Puisque la frontière Γ^κ est régulier, le vecteur normal extérieur ν^κ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v^\kappa \in \mathbb{H}_1^\kappa$ nous utilisons la notation v^κ pour désigner la trace de v^κ sur Γ^κ . Désignons par $\mathbb{H}'_{\Gamma^\kappa}$ le dual de $\mathbb{H}_{\Gamma^\kappa} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\kappa)^d$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\kappa}$ le produit de dualité entre $\mathbb{H}'_{\Gamma^\kappa}$ et $\mathbb{H}_{\Gamma^\kappa}$.

Pour τ^κ assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$(\Delta \tau^\kappa, \delta^\kappa)_{H^1(\Omega^\kappa)} + (\nabla \tau^\kappa, \nabla \delta^\kappa)_{L^2(\Omega^\kappa)} = \int_{\Gamma^\kappa} \frac{\partial \tau^\kappa}{\partial \nu^\kappa} \delta^\kappa da, \quad \forall \delta^\kappa \in H^1(\Omega^\kappa). \quad (1.25)$$

Pour D^κ assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$(D^\kappa, \nabla \phi^\kappa)_{\mathbb{H}^\kappa} + (\text{div } D^\kappa, \phi^\kappa)_{L^2(\Omega^\kappa)} = \int_{\Gamma^\kappa} D^\kappa \nu^\kappa \phi^\kappa da, \quad \forall \phi^\kappa \in \mathbb{W}^\kappa. \quad (1.26)$$

Pour tout $\sigma^\kappa \in \mathcal{H}_1^\kappa$, il existe un élément $\sigma^\kappa \nu^\kappa \in \mathbb{H}'_{\Gamma^\kappa}$ tel que

$$\langle \sigma^\kappa \nu^\kappa, v^\kappa \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\kappa} = (\sigma^\kappa, \varepsilon(v^\kappa))_{\mathcal{H}^\kappa} + (\text{Div} \sigma^\kappa, v^\kappa)_{\mathbb{H}^\kappa} \quad \forall v^\kappa \in \mathbb{H}_1^\kappa,$$

en outre, si σ^κ est continûment différentiable sur $\Omega^\kappa \cup \Gamma^\kappa$, tel que

$$\langle \sigma^\kappa \nu^\kappa, v^\kappa \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\kappa} = \int_{\Gamma^\kappa} \sigma^\kappa \nu^\kappa \cdot v^\kappa da, \quad \forall v^\kappa \in \mathbb{H}_1^\kappa,$$

donc, pour σ^κ assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$(\sigma^\kappa, \varepsilon(v^\kappa))_{\mathcal{H}^\kappa} + (\text{Div} \sigma^\kappa, v^\kappa)_{\mathbb{H}^\kappa} = \int_{\Gamma^\kappa} \sigma^\kappa \nu^\kappa \cdot v^\kappa da, \quad \forall v^\kappa \in \mathbb{H}_1^\kappa, \quad (1.27)$$

où da est un élément de mesure de surface.

Par ailleurs, soient α^κ et ξ^κ deux fonctions assez régulières (par exemple $\alpha^\kappa \in C^2(\overline{\Omega}^\kappa)$ et $\xi^\kappa \in C^1(\overline{\Omega}^\kappa)$), elles vérifient la formule de Green suivante

$$\int_{\Omega^\kappa} \Delta \alpha^\kappa \xi^\kappa dx = - \int_{\Omega^\kappa} \nabla \alpha^\kappa \cdot \nabla \xi^\kappa dx + \int_{\Gamma^\kappa} \frac{\partial \alpha^\kappa}{\partial \nu} \xi^\kappa da. \quad (1.28)$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev de notre problème associés aux inconnues électriques :

$$\begin{aligned} E_0^\kappa &= L^2(\Omega^\kappa), \quad E_1^\kappa = H^1(\Omega^\kappa), \\ \mathbb{W}^\kappa &= \{ \Psi^\kappa \in E_1^\kappa; \quad \Psi^\kappa = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\kappa \}, \\ \mathcal{W}^\kappa &= \{ D^\kappa = (D_i^\kappa); \quad D_i^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa); \quad \text{div} D^\kappa \in L^2(\Omega^\kappa) \}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

où $\text{div} D^\kappa = D_{i,i}^\kappa$. Les espaces $\mathbb{W}^\kappa$ et $\mathcal{W}^\kappa$ définis par (1.29) sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{aligned} (\varphi^\kappa, \psi^\kappa)_{\mathbb{W}^\kappa} &= (\nabla \varphi^\kappa, \nabla \psi^\kappa)_{\mathbb{H}^\kappa}, \\ (D^\kappa, E^\kappa)_{\mathcal{W}^\kappa} &= \int_{\Omega^\kappa} D^\kappa \cdot E^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} \text{div} D^\kappa \cdot \text{div} E^\kappa dx. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Soient $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^\kappa}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\kappa}$ les normes associées, c'est-à-dire

$$\|\psi^\kappa\|_{\mathbb{W}^\kappa} = \|\nabla \psi^\kappa\|_{\mathbb{H}^\kappa}, \quad (1.31)$$

$$\|D^\kappa\|_{\mathcal{W}^\kappa}^2 = \|D^\kappa\|_{\mathbb{H}^\kappa}^2 + \|\text{div} D^\kappa\|_{L^2(\Omega^\kappa)}^2. \quad (1.32)$$

Puisque mes $\Gamma_a^\kappa > 0$, l'inégalité de Friedrich-Poincaré est vérifiée, ainsi il existe une constante $c_F > 0$ dépendant uniquement de Ω^κ et Γ_a^κ telle que

$$\|\nabla \psi^\kappa\|_{\mathbb{H}^\kappa} \geq c_F \|\psi^\kappa\|_{H^1(\Omega^\kappa)}, \quad \forall \psi^\kappa \in \mathbb{W}^\kappa. \quad (1.33)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée, par exemple, dans [1, 6]. Il s'ensuit, d'après (1.14) et (1.33), que $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\Omega^\kappa)}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^\kappa}$ sont des normes équivalentes sur $\mathbb{W}^\kappa$ et donc $(\mathbb{W}^\kappa, \|\cdot\|_{\mathbb{W}^\kappa})$ est un espace réel de Hilbert.

De plus, par le Théorème de trace de Sobolev 1.2.6, il existe une constante c_0^κ dépendant uniquement de $\Omega^\kappa, \Gamma_a^\kappa$ et Γ_3 , telle que

$$\|\psi^\kappa\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_0^\kappa \|\psi^\kappa\|_{\mathbb{W}^\kappa}, \quad \forall \psi^\kappa \in \mathbb{W}^\kappa.$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits pour les inconnues mécaniques

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^1 \times \mathcal{V}^2, \quad \mathbb{H} = \mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^2,$$

$$\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_1^1 \times \mathbb{H}_1^2, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2,$$

et pour les inconnues électriques, nous présentons les espaces produits suivants

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}^1 \times \mathbb{W}^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2, \quad E_0 = E_0^1 \times E_0^2, \quad E_1 = E_1^1 \times E_1^2.$$

Les espaces $\mathcal{V}, \mathbb{H}, \mathcal{H}, E_0, E_1, \mathbb{W}$ et $\mathcal{W}$ sont des espaces de Hilbert réels, dotés des produits scalaires canoniques notés $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}}, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{H}}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}, (\cdot, \cdot)_{E_0}, (\cdot, \cdot)_{E_1}, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{W}}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$. Les normes associées seront désignées par $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}, \|\cdot\|_{\mathbb{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{E_0}, \|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivement.

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel, nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes

$$\|\pi\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|\pi(t)\|_X,$$

$$\|\pi\|_{C^1(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|\pi(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{\pi}(t)\|_X.$$

De plus, nous utilisons le point ci-dessus pour indiquer la dérivée par rapport à la variable de temps.

1.2.6 Espaces $L^p(0, T; X)$ et $W^{k,p}(0, T; X)$

Définition 1.2.4. Soit $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : (0, T) \rightarrow X$ mesurables telle que l'application $t \rightarrow \|u(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{C > 0 : \|u(t)\|_X \leq C, \text{ p.p. } t \in (0, T)\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Par ailleurs, on a les résultats suivants.

Propriété 1.2.1.

- (1) $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) est un espace de Banach.
- (2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

- (3) $L^r(0, T; X) \subset L^q(0, T; X)$ avec injection continue $1 \leq q \leq r \leq \infty$.
- (4) Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X) \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X),$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.2.5. Soit $u, v \in L^1(0, T; X)$. La fonction v s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) v(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T).$$

$C_c^\infty(0, T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $(0, T)$. Nous écrivons $v = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $v = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Définition 1.2.6. Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T; X)$. Notons que $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \|u\|_{L^p(0, T; X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0, T; X)}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0, T; X)$ muni de la norme précédente est un espace de Hilbert.

Définition 1.2.7. Étant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in W^{k-1,p}(0, T; X) \mid \dot{u} \in W^{k-1,p}(0, T; X)\}.$$

On vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0, T; X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1, \dots, g_k \in L^p(0, T; X)$ telle que

$$\int_0^T u(t) \varphi^{(j)}(t) dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([0, T]), \forall j = 1, 2, \dots, k,$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ . On peut donc considérer les dérivées successives $\dot{u} = g_1, u^{(2)} = g_2, \dots, u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Théorème 1.2.10. Si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$, $p \in [1, \infty]$. Nous avons alors :

1. $\|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$
2. si de plus $p < \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t-s)^p \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

3. si $p = \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Théorème 1.2.11. Dans le cas où l'espace $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace de Hilbert et si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,2}(0, T; X)$, alors

1. la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0, T[$,
2. $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_X^2 = (\dot{u}(t), u(t))_X, \quad p.p. \quad t \in]0, T[$,
3. $\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_X ds, \quad \forall t \in [0, T].$

Ces quelques propriétés achèvent cette section. Pour plus de détails sur les résultats dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple aux références [5].

1.2.7 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

I-Opérateur fortement monotone

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs frottements monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert H munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de la norme associé $\|\cdot\|_H$.

Définition 1.2.8. Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire, l'opérateur A est dit

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_H \geq 0, \quad \forall u, v \in H,$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_H \geq m\|u - v\|_H^2, \quad \forall u, v \in H,$$

3. Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_H \leq L\|u - v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

4. hemicontinu si pour toute suite numérique (t_n) tel que $t_n \rightarrow t$ lorsque $n \rightarrow \infty$ on a :

$$(A(u + t_nv), w)_H \rightarrow (A(u + tv), w)_H \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall u, v, w \in H.$$

Définition 1.2.9. Soit la fonction $j : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ et soit ω ouvert dans $H \times H$, on dit que j est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si, pour tout $(t_0, x_0) \in \omega$, il existe un voisinage $U \subset \omega$ de (t_0, x_0) et une constante $C > 0$ tels que, pour tous (t, x_1) et $(t, x_2) \in U$, on a

$$|j(t, x_1) - j(t, x_2)| \leq C\|x_1 - x_2\|.$$

Théorème 1.2.12. (Théorème de point fixe de Banach)

Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^n : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \quad n \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 1.2.13. *Sous les mêmes conditions du Théorème 1.2.12. Supposons que $\Lambda^n : K \rightarrow K$ est une contraction pour n un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

Définition 1.2.10. *Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.2.11. *Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 1.2.14. (*Théorème du Lax-Milgram*)

Soient H un espace de Hilbert, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive, et $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H.$$

De plus, si $a(., .)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2}a(u, u) - (u, u)_X \leq \frac{1}{2}a(v, v) - (v, v)_X, \quad \forall v \in X.$$

II- Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.2.15. (*Cauchy-Lipschitz*)

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ (b) \text{ Il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

III- Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème 1.2.16. *Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{H} \subset \mathcal{V}'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait*

$$(Av, v)_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \geq w \|v\|_{\mathcal{V}}^2 + \lambda, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (1.34)$$

$$\|Av\|_{\mathcal{V}'} \leq C_1(\|v\|_{\mathcal{V}} + 1), \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (1.35)$$

Pour des constantes $w > 0$, $C_1 > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, étant donnée $u_0 \in \mathbb{H}$ et $F \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$, alors il existe une fonction unique u satisfait

$$u \in L^2(0, T; \mathcal{V}) \cap C^1(0, T; \mathbb{H}), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; \mathcal{V}'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = F(t) \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

IV- Inégalités variationnelles paraboliques

Théorème 1.2.17. *Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{H} \subset \mathcal{V}'$ un triplet de Gelfand, K est un sous-ensemble non vide fermé et convexe de $\mathcal{V}$, et supposons que $a(., .) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, continue et symétrique telle que*

$$\exists \alpha > 0 \text{ et } c_0 \quad a(v, v) + c_0 \|v\|_{\mathbb{H}}^2 \geq \alpha \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $F \in L^2(0, T; \mathbb{H})$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in H^1(0, T; \mathbb{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}), \quad u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} + a(u(t), v - u(t)) \geq (F(t), v - u(t))_{\mathbb{H}} \quad \forall v \in K, \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

1.2.8 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.2.12. *Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tel que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|u(b_j) - u(a_j)\|_X < \epsilon$.*

L'espace des fonctions absolument continues sur $[0, T]$ noté par $AC([0, T]; X)$.

Définition 1.2.13. (*L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville*).

Soit X un espace de Banach et $(0; T)$ un intervalle de temps fini. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction donnée $f \in L^1(0, T; X)$ est définie par

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad \text{pour tout } t \in (0, T),$$

où $\Gamma(\cdot)$ représente la fonction Gamma définie par $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Pour compléter la définition, nous fixons ${}_0I_t^0 = I$, où I est l'opérateur d'identité, ce qui signifie que ${}_0I_t^0 f(t) = f(t)$ pour p.p. $t \in (0, T)$.

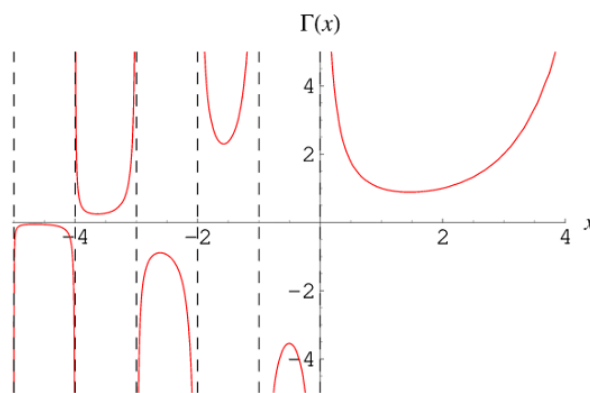


Figure1.3. courbe fonction gamma

Définition 1.2.14. (*La dérivée Caputo de l'ordre, $0 < \alpha \leq 1$*). Soit X un espace de Banach, $0 < \alpha \leq 1$ et $(0, T)$ un intervalle de temps fini. Pour une fonction donnée $f \in C(0, T; X)$, la dérivée fractionnaire de Caputo de f est définie par

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0I_t^{1-\alpha} f'(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \quad \text{pour tout } t \in (0, T).$$

Il est évident que si $\alpha = 1$, la dérivée de Caputo se réduit à la dérivée classique du premier ordre, c'est-à-dire que nous avons

$${}_0^C D_t^1 f(t) = I f'(t) = f'(t) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T).$$

Propriété 1.2.2. . Soit X un espace de Banach et $\alpha, \beta > 0$. Les énoncés suivants sont alors valables :

(i) pour $y \in L^1(0, T; X)$, nous avons

$${}_0I_t^\alpha {}_0I_t^\beta y(t) = {}_0I_t^{\alpha+\beta} y(t) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T),$$

(ii) pour $y \in AC(0, T; X)$ et $\alpha \in (0, \alpha]$, nous avons

$${}_0I_t^{\alpha C} D_t^\alpha y(t) = y(t) - y(0) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T),$$

(iii) pour $y \in L^1(0, T; X)$, nous avons

$${}_0^C D_t^\alpha {}_0I_t^\alpha y(t) = y(t) \quad \text{pour p.p. } t \in (0, T).$$

Définition 1.2.15. (La dérivée directionnelle généralisée de Clarke et le gradient généralisé).

Soit $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction localement Lipschitz. on note $j(u, v)$ la dérivée directionnelle généralisée de Clarke de J au point $x \in X$ dans la direction $y \in X$ définie par

$$j(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sup_{z \rightarrow x} \frac{(z + \lambda y) - j(z)}{\lambda}.$$

Le gradient généralisé de $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ en $x \in X$ est défini par

$$\partial j(x) = \{\xi \in X' \mid \forall y \in X, j(x, y) \geq (\xi, y)_{X' \times X}\}.$$

Propriété 1.2.3. Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Supposons que $f : [0, \infty) \times (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ soit continue et localement Lipschitz dans la seconde variable. En d'autres termes, $\forall A > 0$ et $K \subset (\alpha, \beta)$ compacte, il existe $L_{A,K} > 0$ telle que

$$\sup_{0 \leq t \leq A} |f(t, v_1) - f(t, v_2)| \leq L_{A,K} |v_1 - v_2|, \quad \forall v_1, v_2 \in K.$$

Soit $0 < \alpha < 1$ and $v_0 \in (\alpha, \beta)$. alors

$${}_0^C D_t^\alpha v(t) = f(t, v(t)), v(0) = v_0,$$

a une unique solution continue $v(\cdot)$ sur $[0, T_*)$, où

$$T_* = \sup\{h > 0 \text{ le solution } v \in C([0, h)), v(t) \in (\alpha, \beta), \forall t \in [0, h)\}.$$

Est le plus grand temps d'existence satisfaisant $T_* \in (0, \infty]$. Si $T_* < \infty$, alors on a

$$\liminf_{t \rightarrow T_*^-} v(t) = \alpha, \text{ où } \limsup_{t \rightarrow T_*^-} v(t) = \beta.$$

Soit le problème suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{V}) \text{ tel que} \\ (\mathcal{A}\varepsilon({}_0^C D_t^\alpha u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ \quad + \int_{\Gamma_3} j_\nu(u_\nu(t), v_\nu) da + \int_{\Gamma_3} j_\tau(u_\tau(t), v_\tau) da \geq (f(t), v)_{\mathcal{V}}, \\ \text{pour tout } v \in \mathcal{V}, \text{ p.p. } t \in (0, T), \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (1.36)$$

Dans l'étude du problème, nous supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$, l'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$, le potentiel non convexe $j_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et la fonction tangentielle $j_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfont aux hypothèses suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ est tel que} \\ \text{(a) } \mathcal{A}(x, \varepsilon) = a(x)\varepsilon \text{ pour p.p. } x \in \Omega \text{ et tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(b) } a(x) = (a_{ijkl}(x)) \text{ avec } a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \\ \text{(a) } a_{ijkl}(x)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq m_c \|\varepsilon\|_{\mathbb{S}^d}^2 \text{ pour p.p. } x \in \Omega, \\ \text{et tout } \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{S}^d \text{ avec } m_c > 0. \end{array} \right. \quad (1.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ est tel que} \\ \text{(a) } \mathcal{B}(x, \varepsilon) = b(x)\varepsilon \text{ pour p.p. } x \in \Omega \text{ et tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(b) } b(x) = (b_{ijkl}(x)) \text{ avec } b_{ijkl} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (1.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est tel que} \\ \text{(a) } j_\nu(\cdot, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_C \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \text{ et} \\ \text{il existe } e_\nu \in L^1(\Gamma_3) \text{ telle que } j_\nu(\cdot, e_\nu(\cdot)) \in L^1(\Gamma_3), \\ \text{(b) } j_\nu(x, \cdot) \text{ est localement Lipschitz sur } \mathbb{R} \text{ pour p.p. } x \in \Gamma_3, \\ \text{(c) il existe } a_{j_\nu} > 0 \text{ telle que} \\ |\partial j_\nu(x, r)| \leq a_{j_\nu}(1 + |r|) \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (1.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est tel que} \\ \text{(a) } j_\tau(\cdot, \xi) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ et} \\ \text{il existe } e_\tau \in L^1(\Gamma_3; \mathbb{R}^d) \text{ telle que } j_\tau(\cdot, e_\tau(\cdot)) \in L^1(\Gamma_3), \\ \text{(b) } j_\tau(x, \cdot) \text{ est localement Lipschitz sur } \mathbb{R}^d \text{ pour p.p. } x \in \Gamma_3, \\ \text{(c) il existe } a_{j_\tau} > 0 \text{ telle que} \\ \|\partial j_\tau(x, \xi)\|_{\mathbb{R}^d} \leq a_{j_\tau}(1 + \|\xi\|_{\mathbb{R}^{d-1}}) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d-1}. \end{array} \right. \quad (1.40)$$

$$u_0 \in \mathcal{V}, \quad f \in L^2(0, T; \mathcal{V}). \quad (1.41)$$

Théorème 1.2.18. *Supposons que les hypothèses (1.37)-(1.41) se vérifient. Alors le problème (1.36) admet au moins une solution $u \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{V})$ [15].*

Théorème 1.2.19. *Soit $T > 0, \alpha \in (0, 1)$ et $p \in [1, \infty)$. Soit $Q, L^2(0, T; Q)$ et Q' des espaces de Banach. $Q \hookrightarrow L^2(0, T; Q)$ de façon compacte et $L^2(0, T; Q) \hookrightarrow Q'$ de façon continue.*

Supposons que $W \subset L^1_{loc}((0, T); Q)$ satisfasse :

(i). Il existe $r_1 \in [1, \infty)$ et $c > 0$ tels que $\forall u \in W$,

$$\sup_{t \in (0, T)} {}_0I_t^\alpha (\|u\|_Q^{r_1}) = \sup_{t \in (0, T)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|u(s)\|_Q^{r_1} ds \leq c.$$

(ii). Il existe $p_1 \in (p, \infty]$ tels que W est borné dans $L^{p_1}((0, T); L^2(0, T; Q))$.

(iii). There exist $r_2 \in [1, \infty)$ and $c_s > 0$ tels que $\forall u \in W$, il existe une affectation de la valeur initiale u_0 telle que la dérivée faible de Caputo satisfasse :

$$\|{}_0^C D_t^\alpha u\|_{L^{r_2}((0, T); Q')} \leq c_s,$$

Alors, W est relativement compact dans $L^p((0, T); L^2(0, T; Q))$.

Propriété 1.2.4. Soit $\alpha \in (0, 1)$. Si l'application $u : [0, T) \rightarrow Q$ satisfait

$$u \in C^1((0, T); Q) \cap C([0, T); Q),$$

et $u \rightarrow E(u) \in \mathbb{R}$ est une fonctionnelle convexe C^1 sur Q , alors

$${}_0^C D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{u(t) - u(0)}{t^\alpha} + \alpha \int_0^t \frac{u(t) - u(s)}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \right),$$

et

$${}_0^C D_t^\alpha E(u(t)) \leq ({}_0^C D_t^\alpha E(u), {}_0^C D_t^\alpha(u)),$$

où ${}_0^C D_t^\alpha E(\cdot) : Q \rightarrow Q'$ est la différentielle de Fréchet et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Q' \times Q}$ est compris comme l'appariement dual entre Q' et Q .

Résultat 1.2.1. Notons que si nous supposons que la proposition 1.2.4 est valable pour u et que $\frac{1}{2} \|u(t)\|_Q^2$ est une fonctionnelle convexe, nous avons

$${}_0^C D_t^\alpha \left\| \frac{1}{2} u(t) \right\|_Q^2 \leq \langle u(t), {}_0^C D_t^\alpha u(t) \rangle_{Q' \times Q}.$$

1.2.9 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.2.1. Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C(0, T; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.2.1. Soit $n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$, si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

1.2.10 Les inégalités de Hölder et de Young

Lemme 1.2.2. (Inégalité de Young)

Soit $1 < p < \infty$ alors pour tous $a, b \geq 0$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

où $q \in]1, +\infty[$ est l'exposant conjugué à p définie par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.2.3. (Inégalité de Hölder)

Soient p et q deux exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), $1 \leq p \leq \infty$. Soient $f \in L^p(\Omega^\kappa)$, $g \in L^q(\Omega^\kappa)$. Alors, $f.g \in L^1(\Omega^\kappa)$, et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega^\kappa)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega^\kappa)} \|g\|_{L^q(\Omega^\kappa)}.$$

De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$ est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega^\kappa} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega^\kappa)} \|g\|_{L^2(\Omega^\kappa)}.$$

ANALYSE D'UN PROBLÈME DE CONTACT AVEC COMPLIANCE NORMALE ET FROTTEMENT EN MATÉRIAUX DE ÉLECTRO-VISCOÉLASTIQUES FRACTIONNAIRE

2

Dans ce chapitre, nous étudions d'un Problème de contact frictionnel quasi-statique entre deux corps électro-viscoélastique et modélisé avec la loi de frottement Coulomb. Notre intérêt est de décrire un processus quasi-statique, et démontrer que le modèle résultant se ramène à un Problème mathématique bien posé. Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la première section, nous posons et décrire la Problème mécanique puis nous indiquons les hypothèses sur les données, dans la deuxième section, en utilisant les formules de Green, on propose une formulation variationnelle du Problème, et dans la troisième section, on démontre l'existence d'une solution faible. Enfin, nous énonçons notre résultat principal d'existence, est en utilisant théorème des opérateurs monotones, la dérivée de Caputo, la sous-différentielle de Clark, la méthode Galerkin et le Théorème du point fixe de Banach.

2.1 FORMULATION DU PROBLÈME

Le modèle mécanique que l'on étudie peut se formuler de la manière suivante :

Problème ($\mathcal{P}$). Pour $\kappa = 1, 2$ trouver le champ de déplacement $u^\kappa = (u_i^\kappa) : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ de contrainte $\sigma^\kappa = (\sigma_{ij}^\kappa) : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, les champs des potentiels électriques $\varphi^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, les champs des déplacements électriques $D^\kappa : \Omega^\kappa \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, telle que :

$$\sigma^\kappa(t) = \mathcal{A}^\kappa \varepsilon \left({}^C D_t^\alpha u^\kappa(t) \right) + \mathcal{B}^\kappa \varepsilon \left(u^\kappa(t) \right) + (\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \varphi^\kappa(t) \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$D^\kappa(t) = \mathcal{E}^\kappa \varepsilon \left(u^\kappa(t) \right) + \mathcal{C}^\kappa E \left(\varphi^\kappa(t) \right) \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$\text{Div } \sigma^\kappa(t) + f_0^\kappa(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.3)$$

$$\text{div } D^\kappa(t) - q_0^\kappa(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega^\kappa \times (0, T), \quad (2.4)$$

$$u^\kappa(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\kappa \times (0, T), \quad (2.5)$$

$$\sigma^\kappa(t) \nu^\kappa = f_2^\kappa(t) \quad \text{sur } \Gamma_2^\kappa \times (0, T), \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1(t) = \sigma_\nu^2(t) \equiv \sigma_\nu(t) \\ -\sigma_\nu(t) = p_\nu(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1(t) = -\sigma_\tau^2(t) \equiv \sigma_\tau(t) \\ \|\sigma_\tau(t)\| \leq p_\tau(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g) \\ \|\sigma_\tau(t)\| < p_\tau(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g) \Rightarrow u_\tau^1(t) = u_\tau^2(t) \\ \|\sigma_\tau(t)\| = p_\tau(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g) \\ \Rightarrow \exists \delta \neq 0, -\delta \sigma_\tau(t) = u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.8)$$

$$\varphi^\kappa = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\kappa \times (0, T), \quad (2.9)$$

$$D^\kappa \cdot \nu^\kappa = q_2^\kappa \quad \text{sur } \Gamma_b^\kappa \times (0, T), \quad (2.10)$$

$$u^\kappa(0) = u_0^\kappa \quad \text{dans } \Omega^\kappa. \quad (2.11)$$

Ce passage traite d'un Problème de contact quasi-statique dans un milieu électro-viscoélastique de type Kelvin-Voigt fractionnée pour temps du Caputo, voir [14]. Les équations (2.1)-(2.2) définissent les lois constitutives reliant les contraintes mécaniques et les champs électriques ; $\mathcal{A}^\kappa \varepsilon \left({}^C D_t^\alpha u^\kappa(t) \right)$: effet viscoélastique avec dérivation fractionnaire de Caputo d'ordre α , traduisant la mémoire temporelle du matériau, $\mathcal{B}^\kappa \varepsilon \left(u^\kappa(t) \right)$: composante élastique pure (réponse instantanée), $(\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \varphi^\kappa(t)$: la potentiel électrique (via le gradient du potentiel φ^κ) et la contrainte mécanique. Les équations (2.3)-(2.4) sont les équations d'équilibre pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, respectivement dans laquelle "Div" et "div" désignent les opérateurs de divergence pour le tenseur.

Nous utilisons ces équations car le processus quasi-statique. $q_0^\kappa(t)$ est la densité de charge volumique. (2.5)-(2.6) concernent les conditions aux limites du déplacement et de la traction. L'équation (2.7) exprime la condition de contact à compliance normale, où p_ν est une fonction prescrite. Lorsqu'elle est positive, $u_\kappa^1 + u_\kappa^2 - g$ représente l'interpénétrabilité entre deux corps. (2.8) dans cette équation, la loi de frottement de Coulomb est appliquée, où la fonction p_r représente une limite supérieure non négative pour les forces de frottement entre les deux corps. Ensuite, les équations (2.9) et (2.10) définissent les conditions aux limites électriques.

Enfin, l'équation (2.11) fixe les conditions initiales du Problème.

Nous introduisons les formes bilinéaires suivantes :

$$a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \sum_{\kappa=1}^2 (\mathcal{A}^\kappa \varepsilon(u^\kappa), \varepsilon(v^\kappa))_{\mathcal{H}^\kappa}, \quad (2.12)$$

$$b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(u, v) = \sum_{\kappa=1}^2 (\mathcal{B}^\kappa \varepsilon(u^\kappa), \varepsilon(v^\kappa))_{\mathcal{H}^\kappa}, \quad (2.13)$$

$$d : \mathbb{W} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(\varphi, v) = \sum_{\kappa=1}^2 ((\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \varphi^\kappa, \varepsilon(v^\kappa))_{\mathcal{H}^\kappa}. \quad (2.14)$$

Ainsi

L'application $j : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2 - g)(v_\nu^1 + v_\nu^2) da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu^1 + u_\nu^2 - g) \|v_\tau^1 - v_\tau^2\| da. \quad (2.15)$$

Pour l'étude du Problème ($\mathcal{P}$), nous considérons les hypothèses suivantes :

H(1) : Hypothèse de viscosité :

$\mathcal{A}^\kappa = (a_{ijkl}^\kappa) : \Omega^\kappa \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$, et le opérateur élasticité $\mathcal{B}^\kappa = (b_{ijkl}^\kappa) : \Omega^\kappa \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$, le opérateur de piézoélectricité $\mathcal{E}^\kappa = (e_{ijk}^\kappa) : \Omega^\kappa \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, et le opérateur de permittivité

électrique $C^\kappa = (c_{ij}^\kappa) : \Omega^\kappa \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, satisfont les propriétés des symétriques, bornitudes et ellipticités :

$$\begin{aligned} a_{ijkl}^\kappa &= a_{jikl}^\kappa = a_{klij}^\kappa \in L^\infty(\Omega^\kappa), & b_{ijkl}^\kappa &= b_{jikl}^\kappa = b_{klij}^\kappa \in L^\infty(\Omega^\kappa), \\ e_{ijk}^\kappa &= e_{ikj}^\kappa \in L^\infty(\Omega^\kappa) & c_{ij}^\kappa &= c_{ji}^\kappa \in L^\infty(\Omega^\kappa). \end{aligned}$$

De plus, il existe des constantes strictement positives $m_a, m_b, m_c > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} a_{ijkl}^\kappa \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} &\geq m_a \|\varepsilon\|^2, & \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d & \quad \forall x \in \Omega^\kappa. \\ b_{ijkl}^\kappa \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} &\geq m_b \|\varepsilon\|^2, & \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d & \quad \forall x \in \Omega^\kappa. \\ c_{ij}^\kappa \zeta_i \zeta_j &\geq m_c |\zeta|^2 & \forall \zeta \in \mathbb{R}^d & \quad \forall x \in \Omega^\kappa. \end{aligned}$$

H(2) de H(1) Nous avons :

(i) Les opérateurs a, b et d satisfont la propriété de bornitude usuelle :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq M_a \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \\ |b(u, v)| &\leq M_b \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \\ |d(\varphi, v)| &\leq M_d \|\varphi\|_{\mathbb{W}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \end{aligned}$$

où $M_a, M_b, M_d > 0$.

(ii) Ellipticité :

Les opérateurs a et b satisfont les propriétés d'ellipticité suivantes :

$$a(u, u) \geq m_a \|u\|_{\mathcal{V}}^2, \quad b(u, u) \geq m_b \|u\|_{\mathcal{V}}^2, \quad \forall u \in \mathcal{V}.$$

H(3) On suppose que les forces volumiques f_0^κ et les tractions surfaciques f_2^κ , et les charges électriques volumique q_0^κ et surfaciques q_2^κ ont la régularité suivante :

$$\begin{aligned} f_2^\kappa &\in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_2^\kappa)^d), & f_0^\kappa &\in W^{1,2}(0, T; H^\kappa). \\ q_2^\kappa &\in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_b^\kappa)), & q_0^\kappa &\in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega^\kappa)). \end{aligned}$$

H(4) La fonction de jeu et les conditions initiales satisfont :

$$g \in L^\infty(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3, \quad u_0 \in \mathcal{V}_{ad}.$$

H(5) Les fonctions de compliance normale p_ν et compliance tangentielle p_τ satisfont les hypothèses suivantes pour $\delta = \nu, \tau$:

- a) $p_\delta : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- b) $x \rightarrow p_\delta(x, r)$ est mesurable sur Γ_3 , pour tout $r \in \mathbb{R}$.
- c) $p_\delta(x, r) = 0$ pour $r \leq 0$, presque par tout sur Γ_3 .
- d) Il existe $L_\delta > 0$ tel que

$$|p_\delta(\cdot, r_1) - p_\delta(\cdot, r_2)| \leq L_\delta |r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

H(6) Le fonctionnel j satisfait :

$$\|\partial j(u, v)\|_{\mathcal{V}} \leq m_j(1 + \|u\|_{\mathcal{V}} + \|v\|_{\mathcal{V}}), \quad \forall u \in \mathcal{V}, v \in \mathcal{V}, \quad \text{a.e. } t \in (0, T).$$

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, il existe un élément $f(t) \in \mathcal{V}$ et $q(t) \in \mathbb{W}$ tel que :

$$(f(t), v)_{\mathcal{V}} = \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} f_0^\kappa(t) v^\kappa dx + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_2^\kappa} f_2^\kappa(t) v^\kappa da. \quad (2.16)$$

$$(q(t), \varphi)_{\mathbb{W}} = \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} q_0^\kappa(t) \varphi^\kappa dx - \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_b^\kappa} q_2^\kappa(t) \varphi^\kappa da. \quad (2.17)$$

$\forall v \in \mathcal{V}, \varphi \in \mathbb{W}$ et $t \in [0, T]$, et ainsi,

$$f \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{V}), \quad q \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{W}). \quad (2.18)$$

De toutes ces hypothèses et notations, nous obtenons la formulation variationnelle du Problème $\mathcal{P}$.

2.2 FORMULATION VARIATIONNELLE

En utilisant les formules de Green (1.27) et en supposant que u^κ et σ^κ sont des fonctions suffisamment régulières satisfaisant (2.3), (2.5) et (2.6), pour tout $\nu \in \mathcal{V}$ et $t \in (0, T)$, on obtient :

$$(\sigma^\kappa(t), \varepsilon(v^\kappa) - \varepsilon(u^\kappa(t)))_{\mathcal{H}^\kappa} + (\text{Div } \sigma^\kappa(t), v^\kappa - u^\kappa(t))_{\mathcal{H}^\kappa} = \int_{\Gamma^\kappa} \sigma^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\kappa} \sigma^\kappa(t) \cdot (\varepsilon(v^\kappa) - \varepsilon(u^\kappa(t))) dx + \int_{\Omega^\kappa} \text{Div } \sigma^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) dx &= \int_{\Gamma_1^\kappa} \sigma^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\kappa} \sigma^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da. \end{aligned}$$

D'après (2.3), (2.5) et (2.6) on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\kappa} \sigma^\kappa(t) \cdot (\varepsilon(v^\kappa) - \varepsilon(u^\kappa(t))) dx - \int_{\Omega^\kappa} f_0^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) dx &= \int_{\Gamma_2^\kappa} f_2^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da. \end{aligned}$$

La formule de Green pour $\kappa = 1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \sigma^1(t) \varepsilon(v^1 - \varepsilon(u^1(t))) dx - \int_{\Omega^1} f_0^1(t) \cdot (v^1 - \varepsilon(u^1(t))) dx &= \int_{\Gamma_2^1} f_2^1(t) \cdot (v^1 - u^1(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma^1(t) \nu^1 \cdot (v^1 - u^1(t)) da. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La formule de Green pour $\kappa = 2$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^2} \sigma^2(t) \varepsilon(v^2 - \varepsilon(u^2(t))) dx - \int_{\Omega^2} f_0^2(t) \cdot (v^2 - \varepsilon(u^2(t))) dx &= \int_{\Gamma_2^2} f_2^2(t) \cdot (v^2 - u^2(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma^2(t) \nu^2 \cdot (v^2 - u^2(t)) da. \end{aligned} \quad (2.20)$$

En additionnant :(2.19) , (2.20)

$$\sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} \sigma^\kappa(t) \cdot \varepsilon(v^\kappa - \varepsilon(u^\kappa(t))) dx - \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} f_0^\kappa(t) \cdot \varepsilon(v^\kappa - \varepsilon(u^\kappa(t))) dx = \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_2^\kappa} f_2^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da$$

$$+ \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^2 (\sigma^\kappa(t), \varepsilon(v^\kappa) - \varepsilon(u^\kappa(t)))_{\mathcal{H}^\kappa} &= \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} f_0^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_2^\kappa} f_2^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da \\ &+ \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da. \end{aligned}$$

Et moyennant (2.16), on a

$$\sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} \sigma^\kappa(t) \cdot (\varepsilon(v^\kappa) - \varepsilon(u^\kappa(t))) dx = (f(t), (v - u(t))_\nu) + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da.$$

En substituant $\sigma^\kappa(t)$ à partir de (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\kappa} \mathcal{A}^\kappa \varepsilon_0^C D_t^\alpha u^\kappa(t) \cdot \varepsilon(v^\kappa - u^\kappa(t)) dx + \int_{\Omega^\kappa} \mathcal{B}^\kappa \varepsilon(u^\kappa(t)) \cdot \varepsilon(v^\kappa - u^\kappa(t)) dx + \int_{\Omega^\kappa} (\mathcal{E}^\kappa)^* \nabla \varphi^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) dx \\ = \langle f(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) \rangle + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da. \end{aligned}$$

En utilisant (2.12)-(2.13) et (2.14), on obtient :

$$\begin{aligned} a_0^C D_t^\alpha u(t), v - u(t) + b(u(t), v - u(t)) + d(\varphi(t), v - u(t)) &= \langle f(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) \rangle \\ &+ \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da. \quad (2.21) \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da \\ \sum_{\kappa=1}^2 \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) &= \sigma^1(t) \nu^1 \cdot (v^1 - u^1(t)) + \sigma^2(t) \nu^2 \cdot (v^2 - u^2(t)) \\ &= \sigma_\nu^1(t) \cdot (v_\nu^1 - u_\nu^1(t)) + \sigma_\nu^2(t) \cdot (v_\nu^2 - u_\nu^2(t)) \\ &+ \sigma_\tau^1(t) \cdot (v_\tau^1 - u_\tau^1(t)) + \sigma_\tau^2(t) \cdot (v_\tau^2 - u_\tau^2(t)) \\ &= \sigma_\nu(t) \cdot (v_\nu^1 + v_\nu^2) - \sigma_\nu(t) \cdot (u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t)) \\ &+ \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau^1 - v_\tau^2) - \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t)). \end{aligned}$$

D'après (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t) \cdot (v_\nu^1 + v_\nu^2) da - \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t) \cdot (u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau^1 - v_\tau^2) da - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t)) da. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Et, moyennant (2.8), on a

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da &= - \int_{\Gamma_3} p_\nu((u_\nu^1 + u_\nu^2 - g) \cdot (v_\nu^1 + v_\nu^2)) da + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2 - g) \\ &\cdot (u_\nu^1 + u_\nu^2) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau^1 - v_\tau^2) da - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1 - u_\tau^2) da. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ainsi on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, avec (2.8), il résulte

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau^1(t) - v_\tau^2(t)) da \geq - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g) \|v_\tau^1 - v_\tau^2\| da. \quad (2.24)$$

Nous supposons que $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \cup \Gamma_3^-$, où

$$\Gamma_3^+ = \{x \in \Gamma_3 \mid \|\sigma_\tau(t)\| < p_\tau(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g)\}, \quad \Gamma_3^- = \{x \in \Gamma_3 \mid \|\sigma_\tau(t)\| = p_\tau(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) - g)\}.$$

On a

$$- \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t)) da = - \int_{\Gamma_3^+} \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1 - u_\tau^2) da - \int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1 - u_\tau^2) da. \quad (2.25)$$

A l'aide de définition de Γ_3^+ , on obtient

$$\int_{\Gamma_3^+} \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t)) da = 0. \quad (2.26)$$

Maintenant, en utilisant (2.8)

$$\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t)) da = -\frac{1}{\delta} \int_{\Gamma_3^-} [(u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t))] \cdot (u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t)) da.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t)) da &= -\frac{1}{\delta} \int_{\Gamma_3^-} \|u_\tau^1 - u_\tau^2\|^2 da \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \|\sigma_\tau\| \cdot \|u_\tau^1 - u_\tau^2\| da \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} p_\tau(u_\nu^1 + u_\nu^2 - g) \|u_\tau^1 - u_\tau^2\| da, \end{aligned}$$

on a,

$$\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t)) da = - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu^1 + u_\nu^2 - g) \|u_\tau^1 - u_\tau^2\| da. \quad (2.27)$$

Nous utilisons l'égalités (2.23)– (2.27) pour trouver

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau^1 - v_\tau^2) da - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (u_\tau^1 - u_\tau^2) da &\geq - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu^1 + u_\nu^2 - g) \cdot \|v_\tau^1 - v_\tau^2\| da \\ &+ \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu^1 + u_\nu^2 - g) \|u_\tau^1 - u_\tau^2\| da. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Alors par définition (2.19), on obtient

$$\sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\kappa(t) \nu^\kappa \cdot (v^\kappa - u^\kappa(t)) da \geq J(u(t), v) - J(u(t), u(t)). \quad (2.29)$$

En combinant les inegalités (2.28) et (2.29), d'où

$$\left. \begin{aligned} a({}_0^C D_t^\alpha u(t), v - u(t)) + b(u(t), v - u(t)) + d(\varphi(t), v - u(t)) + j(u(t), v) \\ - j(u(t), u) \geq (f(t), v - u(t)), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \text{ a.e. } t \in (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Maintenant, on utilise aussi formule de Green (1.26) pour les inconnues électriques du Problème, ainsi que les conditions (2.2), (2.4), (2.10) et la définition (2.21), pour tout $\phi = (\phi^1, \phi^2) \in \mathbb{W}$, et $t \in [0, T]$, on a

$$(D^\kappa, \nabla \phi^\kappa)_{\mathcal{H}^\kappa} + (\operatorname{div} D^\kappa, \phi^\kappa)_{L^2(\Omega^\kappa)} = \int_{\Gamma^\kappa} D^\kappa \nu^\kappa \cdot \phi^\kappa da,$$

d'où

$$\int_{\Omega^\kappa} D^\kappa \cdot \nabla \phi^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} \operatorname{div} D^\kappa \cdot \phi^\kappa dx = \int_{\Gamma_a^\kappa} D^\kappa \nu^\kappa \cdot \phi^\kappa da + \int_{\Gamma_b^\kappa} D^\kappa \nu^\kappa \cdot \phi^\kappa da. \quad (2.31)$$

Pour $\kappa = 1, 2$, on a d'après définition de $\mathbb{W}$, on a

$$\int_{\Gamma_a^\kappa} D^\kappa \nu^\kappa \cdot \phi^\kappa da = 0,$$

alors

$$\int_{\Omega^\kappa} D^\kappa \cdot \nabla \phi^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} \operatorname{div} D^\kappa \cdot \phi^\kappa dx = \int_{\Gamma_b^\kappa} D^\kappa \nu^\kappa \cdot \phi^\kappa da. \quad (2.32)$$

On a d'après (2.4) et (2.10)

$$\int_{\Omega^\kappa} D^\kappa \cdot \nabla \phi^\kappa dx + \int_{\Omega^\kappa} q_0^\kappa(t) \cdot \phi^\kappa dx = \int_{\Gamma_b^\kappa} q_2^\kappa(t) \cdot \phi^\kappa da. \quad (2.33)$$

La formule de Green pour $\kappa = 1$

$$\int_{\Omega^1} D^1 \cdot \nabla \phi^1 dx + \int_{\Omega^1} q_0^1(t) \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_b^1} q_2^1(t) \cdot \phi^1 da. \quad (2.34)$$

La formule de Green pour $\kappa = 2$

$$\int_{\Omega^1} D^2 \cdot \nabla \phi^2 dx + \int_{\Omega^2} q_0^2(t) \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_b^2} q_2^2(t) \cdot \phi^2 da. \quad (2.35)$$

On additionnant (2.34) et (2.35) on a

$$\sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} D^\kappa \cdot \nabla \phi^\kappa dx + \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Omega^\kappa} q_0^\kappa(t) \cdot \phi^\kappa dx - \sum_{\kappa=1}^2 \int_{\Gamma_b^\kappa} q_2^\kappa(t) \cdot \phi^\kappa da = 0.$$

On a d'après (2.17) on obtient

$$\sum_{\kappa=1}^2 \langle D^\kappa, \nabla \phi^\kappa \rangle_{\mathcal{H}^\kappa} + \langle q(t), \phi \rangle_{\mathbb{W}} = 0.$$

De (2.2), on obtient

$$\sum_{\kappa=1}^2 (\mathcal{C}^\kappa \nabla \varphi^\kappa(t) - \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u^\kappa(t)), \nabla \phi^\kappa)_{\mathcal{H}^\kappa} = \langle q(t), \phi \rangle_{\mathbb{W}}, \quad \forall \phi \in \mathbb{W}, t \in [0, T]. \quad (2.36)$$

Finalement, de (2.30) et (2.36) on obtient la formulation variationnelle du Problème de contact $\mathcal{P}$.

Problème $\mathcal{PV}$:

Trouver le champ des déplacements , $u = (u^1, u^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$, le champ de potentiel électrique $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$, tels que, pour tout $t \in [0, T]$

$$\left. \begin{aligned} & a({}_0^C D_t^\alpha u(t), v - u(t)) + b(u(t), v - u(t)) + d(\varphi(t), v - u(t)) + j(u(t), v) \\ & - j(u(t), u) \geq (f(t), v - u(t)), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \text{ a.e. } t \in (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

$$\sum_{\kappa=1}^2 (\mathcal{C}^\kappa \nabla \varphi^\kappa(t) - \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u^\kappa(t)), \nabla \phi^\kappa)_{\mathcal{H}^\kappa} = (q(t), \phi)_{\mathbb{W}}, \quad \forall \phi \in \mathbb{W}, t \in [0, T]. \quad (2.38)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.39)$$

Nous notons que le Problème variationnel $\mathcal{PV}$ est formulé en termes de champ des déplacements et de potentiel électrique . Le principal d'existence est prouvée dans la prochaine section.

2.3 EXISTENCE DE LA SOLUTION

L'existence du Problème variationnel $\mathcal{PV}$ est donnée par le Théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses H(1)-H(6), et les conditions*

$$m_a > c_d^2(L_\nu + L_\tau), \quad . \quad (2.40)$$

Le Problème variationnel $\mathcal{PV}$ admet au moins une solution ayant la régularité suivante :

$$u \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{V}), \quad (2.41)$$

$$\varphi \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{W}). \quad (2.42)$$

Démonstration du Théorème 2.3.1

La preuve du Théorème 2.3.1 sera effectuée en plusieurs étapes que nous prouvons dans ce qui suit. Par tout dans cette section, nous supposons ce qui suit que tenir H(1) à H(6) avec (2.37) et nous considérons que c est une constante positive générique qui dépend de Ω^κ , Γ_1^κ , Γ_2^κ , Γ_3^κ , $\mathcal{A}^\kappa$, $\mathcal{B}^\kappa$, p_ν , p_τ , g , L , m_a , m_b , m_d , M_a , M_b , M_d , M_m , L_ν , L_τ et T .

Et la démonstration basée l'argument de l'opérateur monotone, la dérivée de Caputo, la sous-différentielle de Clarke, la méthode Galerkin et le théorème du point fixe de Banach.

Première étape : Soit $\beta \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ donné, et nous considérons le Problème intermédiaire suivant.

Problème $\mathcal{PV}_{u_\beta}$: Trouver les champs des déplacements $u_\beta : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ tels que :

$$\left. \begin{aligned} & a({}_0^C D_t^\alpha u_\beta(t), v - u_\beta(t)) + b(u_\beta(t), v - u_\beta(t)) + (\beta(t), v - u_\beta(t))_{\mathcal{V}} \\ & + j(u_\beta(t), v) - j(u_\beta(t), u_\beta(t)) \geq (f(t), v - u_\beta(t))_{\mathcal{V}} \quad \forall v \in \mathcal{V}, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

$$u_\beta(0) = u_0. \quad (2.44)$$

Nous obtenons le reseltat suivant :

Lemme 2.3.1. *Le Problème $\mathcal{PV}_{u_\beta}$ possède au moins une solution qui satisfait la régularité (2.41).*

Démonstration : Le Théorème de représentation de Riesz nous permet de définir les fonctions $f_\beta : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ comme suit :

$$(f_\beta(t), v)_{\mathcal{V}} = (f(t), v)_{\mathcal{V}} - (\beta(t), v)_{\mathcal{V}}, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2.45)$$

Le Problème $\mathcal{PV}_{u_\beta}$ peut s'écrire comme suit :

$$\left. \begin{aligned} & a({}_0^C D_t^\alpha u_\beta(t), v - u_\beta(t)) + b(u_\beta(t), v - u_\beta(t)) + j(u_\beta(t), v) - j(u_\beta(t), u_\beta(t)) \\ & \geq (f_\beta(t), v - u_\beta(t))_{\mathcal{V}} \quad \forall v \in \mathcal{V}, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

$$u_\beta(0) = u_0. \quad (2.47)$$

L'opérateur $a(\cdot, \cdot)$ bilinéaire, continu et coercive d'après (2.12), $H(2)$, et d'après (2.13), l'opérateur $b(\cdot, \cdot)$ bilinéaire continu. D'après (2.18), (2.45) et la régularité du β , on a $f_\beta \in L^2(0, T, \mathcal{V})$. L'hypothèse $H(5)(d)$ donne que j sont des fonctions localement Lipschitz.

Nous combinons ces résultats des opérateurs $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, $j(\cdot, \cdot)$ et de la fonction $f_\beta(\cdot)$ avec l'hypothèse $H(6)$ et le résultat fourni par le Théorème 1.2.18, nous trouvons que Le Problème $\mathcal{PV}_{u_\beta}$ possède au moins une solution $u_\beta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{V})$.

Deuxième étape :

Soit $\beta \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ donné, et nous utilisons le champ de déplacement u_β obtenu dans le Lemme 2.3.1 pour prouver le résultat d'existence du champ de potentiel électrique φ_β du Problème suivant :

Problème $\mathcal{PV}_{\varphi_\beta}$: Trouver le champ de potentiel électrique $\varphi_\beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$ tel que, pour tout $t \in]0, T[$, nous ayons :

$$\sum_{\kappa=1}^2 (\mathcal{C}^\kappa \nabla \varphi_\beta^\kappa(t) - \mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u_\beta^\kappa(t)), \nabla \phi^\kappa)_{\mathcal{H}^\kappa} = (q(t), \phi)_{\mathbb{W}}, \quad \forall \phi \in \mathbb{W}. \quad (2.48)$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.3.2. *Le Problème $\mathcal{PV}_{\varphi_\beta}$ admet une solution unique $\varphi_\beta \in W^{1,2}(0, T; W)$.*

Démonstration : Nous définissons une forme bilinéaire $L : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$L(\varphi, \psi) = \sum_{\kappa=1}^2 (\mathcal{C}^\kappa \nabla \varphi^\kappa, \nabla \psi^\kappa)_{\mathcal{H}^\kappa}. \quad (2.49)$$

Nous utilisons l'hypothèse $H(1)$ et l'équation (1.33) pour montrer que la forme bilinéaire L est continue, symétrique et coercitive sur W . De plus, en utilisant (2.17) et le Théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir un élément $q_\beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$ tel que :

$$(q_\beta(t), \phi)_{\mathbb{W}} = (q(t), \phi)_{\mathbb{W}} + \sum_{\kappa=1}^2 (\mathcal{E}^\kappa \varepsilon(u_\beta^\kappa(t)), \nabla \phi^\kappa)_{\mathcal{H}^\kappa}, \quad \forall \phi \in \mathbb{W}. \quad (2.50)$$

Nous appliquons le Théorème de Lax-Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique $\varphi_\beta(t) \in \mathbb{W}$ tel que :

$$L(\varphi_\beta(t), \phi) = (q_\beta(t), \phi)_{\mathbb{W}}, \quad \forall \phi \in \mathbb{W}. \quad (2.51)$$

Nous concluons donc que $\varphi_\beta(t)$ est une solution du Problème $\mathcal{PV}_{\varphi_\beta}$. Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$, il découle de (2.48) que :

$$\|\varphi_\beta(t_1) - \varphi_\beta(t_2)\|_{\mathbb{W}} \leq C (\|u_\beta(t_1) - u_\beta(t_2)\|_{\mathcal{V}} + \|q(t_1) - q(t_2)\|_{\mathbb{W}}). \quad (2.52)$$

L'inégalité précédente, la régularité de u_β et (2.19) impliquent que

$$\varphi_\beta \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{W}). \quad (2.53)$$

Pour l'unicité, soient : Maintenant, en substituant $\beta = \beta_1$, et $\phi = \varphi_1$, puis $\beta = \beta_2$, , et $\phi = \varphi_2$, aussi dans (2.38) et en soustrayant les deux inégalités obtenues,

$$\sum_{\kappa=1}^2 (\mathcal{C}^\kappa \nabla (\varphi_1^\kappa(t) - \varphi_2^\kappa(t)), \nabla (\varphi_1^\kappa(t) - \varphi_2^\kappa(t)))_{\mathcal{H}^\kappa} = \sum_{\kappa=1}^2 \mathcal{E}^\kappa \varepsilon (u_1^\kappa(t) - u_2^\kappa(t)), \nabla (\varphi_1^\kappa(t) - \varphi_2^\kappa(t)))_{\mathcal{H}^\kappa}, \quad (2.54)$$

on a

$$\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\|_{\mathcal{V}} \leq c \|u_2(t) - u_1(t)\|_{\mathcal{V}}. \quad (2.55)$$

Dernière étape :

Dans cette étape, pour une fonction $\beta \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ et la fonction φ_β obtenue dans le Lemme 2.3.2, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : L^2(0, T; \mathcal{V}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{V})$$

défini par :

$$(\Lambda \beta(t), v) = d(\varphi_\beta(t), v), \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2.56)$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.3.3. *L'opérateur Λ admet une point fixé $\beta^* \in L^2(0, T; \mathcal{V})$.*

Preuve : Soit $\beta \in L^2(0, T; \mathcal{V})$, et $t_1, t_2 \in]0, T[$. En utilisant (2.56) l'hypothèse $H(2)$, nous déduisons que :

$$\|\Lambda\beta(t_1) - \Lambda\beta(t_2)\|_{\mathcal{V}} \leq c\|\varphi_\beta(t_1) - \varphi_\beta(t_2)\|_{\mathbb{W}}. \quad (2.57)$$

Comme $\varphi_\beta \in L^2(0, T; \mathbb{W})$, nous concluons que $\Lambda\beta \in C(0, T; \mathcal{V})$. Soient maintenant $\beta_1, \beta_2 \in L^2(0, T; \mathcal{V})$. De manière similaire à (2.57), nous obtenons :

$$\|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)\|_{\mathcal{V}} \leq C\|\varphi_{\beta_1}(t) - \varphi_{\beta_2}(t)\|_{\mathbb{W}}. \quad (2.58)$$

Par conséquent, d'après (2.43), on obtient :

$$\begin{aligned} & a \left({}^C D_t^\alpha u_{\beta_1}(t) - {}^C D_t^\alpha u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t) \right) \\ & + (\beta_1(t) - \beta_2(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) \\ & + b(u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) \\ & + j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t)) - j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_2}(t)) \\ & + j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_2}(t)) - j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t)) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

D'après (2.15) et l'hypothèse $H(5)$, nous avons

$$\begin{aligned} & |j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t)) - j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_2}(t)) + j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_2}(t)) - j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t))| \\ & = \left| \int_{\Gamma_3} [p_\nu(u_{\beta_1\nu}^1(t) + u_{\beta_1\nu}^2(t) - g) - p_\nu(u_{\beta_2\nu}^1(t) + u_{\beta_2\nu}^2(t) - g)] \right. \\ & \quad \times (u_{\beta_1\nu}^1(t) + u_{\beta_1\nu}^2(t) - u_{\beta_2\nu}^1(t) - u_{\beta_2\nu}^2(t)) \, da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} [p_\tau(u_{\beta_1\tau}^1(t) + u_{\beta_1\tau}^2(t) - g) - p_\tau(u_{\beta_2\tau}^1(t) + u_{\beta_2\tau}^2(t) - g)] \\ & \quad \times (\|u_{\beta_1\tau}^1(t) + u_{\beta_1\tau}^2(t)\| - \|u_{\beta_2\tau}^1(t) + u_{\beta_2\tau}^2(t)\|) \, da \Big| \\ & \leq L_\nu \int_{\Gamma_3} |(u_{\beta_1\nu}^1(t) + u_{\beta_1\nu}^2(t)) - (u_{\beta_2\nu}^1(t) + u_{\beta_2\nu}^2(t))|^2 \, da \\ & \quad + L_\tau \int_{\Gamma_3} |(u_{\beta_1\tau}^1(t) + u_{\beta_1\tau}^2(t)) - (u_{\beta_2\tau}^1(t) + u_{\beta_2\tau}^2(t))| \\ & \quad \times (\|u_{\beta_1\tau}^1(t) + u_{\beta_1\tau}^2(t)\| - \|u_{\beta_2\tau}^1(t) + u_{\beta_2\tau}^2(t)\|) \, da \\ & \leq L_\nu \|(u_{\beta_1}^1(t) + u_{\beta_1}^2(t)) - (u_{\beta_2}^1(t) + u_{\beta_2}^2(t))\|_{(L^2(\Gamma_3))^d}^2 + L_\tau \|(u_{\beta_1}^1(t) + u_{\beta_1}^2(t)) - (u_{\beta_2}^1(t) + u_{\beta_2}^2(t))\|_{(L^2(\Gamma_3))^d}^2, \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité (1.24), on obtient

$$\begin{aligned} & |j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t)) - j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_2}(t)) + j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_2}(t)) - j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t))| \\ & \leq c_d^2(L_\nu + L_\tau) \|(u_{\beta_1}^1(t) + u_{\beta_1}^2(t)) - (u_{\beta_2}^1(t) + u_{\beta_2}^2(t))\|_{\mathcal{V}}^2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Par la définition 1.2.14, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
 & \left\| {}_0^C D_t^\alpha u_{\beta_1}(t) - {}_0^C D_t^\alpha u_{\beta_2}(t) \right\|_{\mathcal{V}} \\
 &= \left\| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \dot{u}_{\beta_1}(s) ds - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \dot{u}_{\beta_2}(s) ds \right\|_{\mathcal{V}} \\
 &= \left\| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\dot{u}_{\beta_1}(s) - \dot{u}_{\beta_2}(s)) ds \right\|_{\mathcal{V}} \leq C \left\| \dot{u}_{\beta_1}(t) - \dot{u}_{\beta_2}(t) \right\|_{\mathcal{V}} \\
 &\leq C \left\| \dot{u}_{\beta_1}(t) - \dot{u}_{\beta_2}(t) \right\|_{\mathcal{V}}.
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

D'après (2.43), on a

$$\begin{aligned}
 & a({}_0^C D_t^\alpha (u_{\beta_2}(t) - u_{\beta_1}(t)), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) + b(u_{\beta_2}(t) - u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) \\
 & + (\beta_2(t) - \beta_1(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t))_{\mathcal{V}} + j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_2}(t)) - j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t)) \\
 & + j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t)) - j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_2}(t)) \geq 0,
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 & b(u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) \leq |a({}_0^C D_t^\alpha (u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t))| \\
 & + |(\beta_1(t) - \beta_2(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t))_{\mathcal{V}} + j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_2}(t)) - j(u_{\beta_1}(t), u_{\beta_1}(t)) \\
 & + j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t)) - j(u_{\beta_2}(t), u_{\beta_2}(t))|,
 \end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, (2.60), H(1)(b) et H(2), on obtient

$$\begin{aligned}
 & m_b \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq b(u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t), u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)) \\
 & \leq M_a \left\| {}_0^C D_t^\alpha u_{\beta_1}(t) - {}_0^C D_t^\alpha u_{\beta_2}(t) \right\|_{\mathcal{V}} \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}} + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}} \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}} \\
 & + c_d^2(L_\tau + L_\nu) \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2,
 \end{aligned}$$

et moyennant la condition (2.46), il s'ensuit

$$\begin{aligned}
 (m_b - c_d^2(L_\tau + L_\nu)) \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq M_a \left\| {}_0^C D_t^\alpha u_{\beta_1}(t) - {}_0^C D_t^\alpha u_{\beta_2}(t) \right\|_{\mathcal{V}} \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}} \\
 &+ \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}} \|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}},
 \end{aligned}$$

et de (2.60), il vient

$$\|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq c_1 \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + c_2 \|\dot{u}_{\beta_1}(t) - \dot{u}_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2. \tag{2.62}$$

d'après proposition 1.2.2 (iii), on obtient

$$\|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq c_1 \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + c \int_0^t \|u_{\beta_1}(s) - u_{\beta_2}(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds. \tag{2.63}$$

L'inégalité précédente combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|u_{\beta_1}(t) - u_{\beta_2}(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds. \quad (2.64)$$

En combinant (2.58) et (2.64), alors il existe $c > 0$, tel que

$$\|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds. \quad (2.65)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\Lambda^2\beta_1(t) - \Lambda^2\beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 &= \|(\Lambda(\Lambda\beta_1))(t) - (\Lambda(\Lambda\beta_2))(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &\leq c \int_0^t \|\Lambda\beta_1(s) - \Lambda\beta_2(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \\ &\leq c \int_0^t \left(c \int_0^s \|\beta_1(r) - \beta_2(r)\|_{\mathcal{V}}^2 dr \right) ds \\ &= c^2 \int_0^t \left(\int_0^s \|\beta_1(r) - \beta_2(r)\|_{\mathcal{V}}^2 dr \right) ds \\ \|\Lambda^3\beta_1(t) - \Lambda^3\beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq C^3 \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \|(\beta_1)(l) - (\beta_2)(l)\|_{\mathcal{V}}^2 dl ds_2 ds_1, \\ &\vdots \\ \|\Lambda^n\beta_1(t) - \Lambda^n\beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq C^n \underbrace{\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}}}_{n \text{ fois}} \|\beta_1(l) - \beta_2(l)\|_{\mathcal{V}}^2 dl ds_{n-1} \cdots ds_1 \\ &\leq C^n \underbrace{\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-2}}}_{(n-1) \text{ fois}} \left[\int_0^T \|\beta_1 - \beta_2\|_{\mathcal{V}}^2 dl \right] ds_{n-1} \cdots ds_1 \\ &\leq C^n \|\beta_1(l) - \beta_2(l)\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})}^2 \underbrace{\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}}}_{(n-1) \text{ fois}} ds_{n-1} \cdots ds_1 \end{aligned}$$

,

On sait que $\int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} = s_{n-2}$, et que $\int_0^{s_{n-3}} \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} ds_{n-2} = \int_0^{s_{n-3}} s_{n-2} ds_{n-2} = \frac{s_{n-3}^2}{2}$,

et $\int_0^{s_{n-4}} \int_0^{s_{n-3}} \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} ds_{n-2} ds_{n-3} = \frac{s_{n-4}^3}{3!}$.

Enfin on a

$$\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-2}} ds_{n-1} \cdots ds_1 = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Alors

$$\|\Lambda^n\beta_1(t) - \Lambda^n\beta_2(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq C^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})}^2,$$

donc

$$\|\Lambda^n \beta_1 - \Lambda^n \beta_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})}^2 \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})}^2,$$

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C^n T^n}{n!} = 0$, ce qui implique que pour n suffisamment grand la puissance Λ^n de Λ est une contraction dans $L^2(0, T; \mathcal{V})$. D'après le Théorème 1.2.13, alors il existe un élément unique $\beta^* \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ tel que $\Lambda \beta^* = \beta^*$.

Nous sommes maintenant prêts à prouver le Théorème 2.3.1.

Démonstration du Théorème 2.3.1. Soit $\beta^* \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ est un point fixe de l'opérateur Λ . Dénotez par u_{β^*} une solution du Problème $\mathcal{PV}_{u_{\beta^*}}$ et φ_{β^*} une solution du Problème $\mathcal{PV}_{\varphi_{\beta^*}}$, en utilisant la définition (2.56), (2.43), (2.44) et (2.48), nous constatons que $\{u_{\beta^*}, \varphi_{\beta^*}\}$ est une solution du Problème $\mathcal{PV}$.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous étudions un modèle mathématique décrivant le processus quasistatique de contact entre deux corps électro-viscoélastiques. La relation constitutive est formulée à l'aide d'un modèle de Kelvin-Voigt fractionnaire. Le contact est modélisé par la condition de conformité normale et le frottement est décrit selon la loi de Coulomb. Nous établissons une formulation variationnelle du problème et prouvons l'existence d'une solution faible au modèle en utilisant la théorie des opérateurs monotones, la dérivée de Caputo, la sous-différentielle de Clarke et le théorème du point fixe de Banach.

Mots-clés : Contact électro-viscoélastique, loi constitutive viscoélastique fractionnaire, frottement, dérivée de Caputo, théorème du point fixe de Banach.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Azeb Ahmed ,S. Boutechebak, *Analysis of a dynamic electro-elastic-viscoplastic contact problem*, Wulfenia Journal Klagenfurt Austria 2013, **3** (20), 43-63.
- [2] M. Barboteu, J.R. Fernandez, Y. Ouafik, *Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem*, Math. Model. Numer. Anal 2008, **42** (4), 667-682.
- [3] R.C. Batra, J.S. Yang, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, J. Elast 1995 , **38** , 209-218.
- [4] P. Bisenga, F. Lebon, F. Maceri, *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support*, In : Martins, J.A.C., Monteiro Marques, M.D.P. (eds.) Contact Mechanics 2002, **pp** , 347-354. Kluwer, Dordrecht.
- [5] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [6] H.L. Dai, X. Wang, *Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures*, Inter. J. Soli. Struct 2005, **42** , 1151-1171.
- [7] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage, gradient of damage and principle of virtual work*, Internat. J. Solids Struct 1996, **33** (8), 1083-1103.
- [8] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete : The unilateral phenomenon*, Nucl. Eng. Des. 1995, **156** , 323-335.

- [9] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane, S. Drabla, *Frictional contact problem for electro-viscoelastic materials with long-term memory, damage , and adhesion* , Elec. J. Dif. Eq.2014, **222** , 01-21.
- [10] T. Hadj ammar, *A dynamic problem with adhesion and damage in electro-elasto-viscoplasty* , Palest. J. Math.2016, **5** , 1-22.
- [11] R. D. Mindlin, *Polarisation gradient in elastic dielectrics* , Int. J. Solids Struct.1968, **4** , 637-663.
- [12] Sofonea, M., Ouafik, Y., *A piezoelectric contact problem with normal compliance*, *Appl. Math.*2005, **32**, 425-442
- [13] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, *Pure and Applied Mathematics*.276, Chapman-Hall/CRC Press, New York 2006.
- [14] F. Zeng, C. Li, F. Liu, and I. Turner, *The use of finite difference/element approaches for solving the time-fractional subdiffusion equation*, SIAM J. Sci.2013, **35** , 2976-3000
- [15] S. Zeng and S. Migórski, *A class of time-fractional hemivariational inequalities with application to frictional contact problem*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.2018, **56** , 34-48.
- [16] S. Zeng, Z. Liu, and S. Migórski, *A class of fractional differential hemivariational inequalities with application to contact problem*, Z. Angew. Math. Phys.2018. **69** , Article Number : 36.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est un modèle mathématique décrivant le processus quasi-statique de contact entre deux corps électro-viscoélastiques. La relation constitutive est formulée à l'aide d'un modèle de Kelvin-Voigt fractionnaire. Le contact est modélisé par la condition de conformité normale et le frottement est décrit par la loi de Coulomb. Nous établissons une formulation variationnelle du problème et prouvons l'existence d'une solution faible du modèle en utilisant la théorie des opérateurs monotones, la dérivée de Caputo, la sous-différentielle de Clarke et le théorème du point fixe de Banach.

Key words : Contact électro-viscoélastique, loi constitutive viscoélastique fractionnaire, frottement, dérivée de Caputo, théorème du point fixe de Banach.

Abstract

We consider a mathematical model which describes the quasistatic process of contact between two electro-viscoelastic bodies. The constitutive relation is built by a fractional Kelvin-Voigt model. The contact is described by the normal compliance condition and the friction is described by Coulomb's law. We derive a variational formulation of the problem and prove the existence of a weak solution to the model by using the theory of monotone operator, Caputo derivative, Clark subdifferential and Banach fixed point theorem. .

Key words : Electro-viscoelastic contact, fractional viscoelastic constitutive law, friction, Caputo derivative, Banach fixed point theorem.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة تحليل مسألة لنموذج رياضي يصف السلوك شبه الساكن لعملية التلامس بين جسمين كهرومرنين لزجين. تُبنى العلاقة التكوينية اعتماداً على نموذج كلفن-فوغت الكسري الذي يأخذ في الحسبان الخواص الذاكرية للوسط. يُنمذج التلامس باستخدام شرط الامتثال العمودي، بينما يُوصف الاحتكاك وفقاً لقانون كولوم الكلاسيكي. نشق الصيغة التغايرية المرتبطة بالمشكلة المدروسة، ونثبت وجود حل ضعيف للنموذج المقترح من خلال توظيف نظرية المؤثرات الرتيبة، ومشتقة كابوتو الكسرية، والمشتقة شبه التفاضلية لكلارك، بالإضافة إلى الاستعانة بنظرية لنقطة الثابتة لبناخ.

الكلمات المفتاحية : تلامس كهرومرن لزج، قانون دستوري لزج كسري، احتكاك، مشتقة كابوتو، نظرية النقطة الثابتة لبناخ.