



**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire de fin d'étude**

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

**Thème**

**Etude théorique et numérique pour  
un système des équations de Navier-Stokes  
incompressible**

Présenté par: Azeb Chikh Yousra  
Haga Ouissam

Soutenu publiquement le: 05-06-2024, devant le jury composé de:

<b>M: Mohammed Said Touati Ibrahim</b>	<b>MCB</b>	<b>Univ. d'El-Oued</b>	<b>Président</b>
<b>M : Doudi Nadjat</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ. d' El-Oued</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>M: Mohammed Moumen Bekkouche</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ. d' El-Oued</b>	<b>Examineur</b>

Année universitaire 2023 - 2024.

# Dédicace

قال الله تعالى "وأخر دعوانهم أن الحمد لله رب العالمين "

بعد مسيرة دراسية مكثلة بالعمل والجد نقدم ونهدي ثمرة هذا الإنجاز  
المتواضع

إلى أجمل الهدايا وأعظم العطايا الربانية، التي ضحت من أجلنا ولم تدخر جهدا  
في سبيل إسعادنا على الدوام

**"أمهاتنا قرة أعيننا وبهجة فؤادنا "**

إلى كتفنا وضلعتنا الثابت الذي لا يميل، الذي علمنا أن النجاح لا يأتي إلا بالصبر  
والإصرار

**"أباؤنا أعزة قلوبنا "**

إلى من قال فيهم الله "سنشد عضدك بأخيك" الذين مدوا أيديهم دون كلل أو  
ملل وقت ضعفنا

**"أخوتنا وأخواتنا "**

إلى من جمعنا بهم الأقدار...إلى من رافقونا طيلة السنين وشاركونا الحب  
والحنين إلى من رسموا معنا صورة المستقبل

**"أساتذتنا الأفاضل "**

إلى كل من رافقونا طيلة المسيرة الدراسية...وهان تعبنا بوجودهم

**"أصدقائنا وزملاءنا "**

حفظكم الله ورعاكم وجزاكم عنا خير الجزاء  
والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

**Yousra & Ouissam** 

# Remerciement

قال الله تعالى " قل ان الفضل بيد الله يؤتيه من يشاء و الله واسع عليم"

نشكر الله العلي القدير الذي وفقنا وأعاننا بفضلته على إتمام هذا البحث العلمي

نتقدم بالشكر بشكل خاص إلى الدكتورة المشرفة

**" دودي نجاة "**

على مساعدتها وتشجيعها حتى الإنتهاء من هذا العمل وكذلك على إستماعها.

نود أيضا أن نشكر أعضاء لجنة المناقشة الموقرة دون

نسيان أساتذة الكلية ومدرسينا من المدرسة الإبتدائية إلى الأكاديمية

و لأفراد عائلاتنا شكرا من القلب.

**Yousra & Ouissam** 

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Rappels Mathématiques et étude théorique des équations de Navier-Stokes</b>	<b>7</b>
1.1 Quelques opérateurs différentiels . . . . .	7
1.1.1 Le gradient . . . . .	7
1.1.2 La divergence . . . . .	8
1.1.3 Le Laplacien . . . . .	8
1.1.4 Produit tensoriel . . . . .	8
1.2 Espaces de Sobolev . . . . .	8
1.2.1 Définitions et propriétés élémentaires . . . . .	8
1.3 Quelques inégalités outils . . . . .	12
1.3.1 Injection de Sobolev . . . . .	13
1.3.2 Formule de Green . . . . .	14
1.4 Présentation des équations de Navier-Stokes . . . . .	14
1.4.1 Coordonnées lagrangiennes et eulériennes . . . . .	15
1.4.2 Équations de bilans . . . . .	17
1.4.3 Écoulements incompressibles . . . . .	18
1.5 Forme simplifier des équations Navier-Stokes . . . . .	19

1.5.1	Les équations de l'hydrodynamique . . . . .	19
1.6	Méthode de Faedo Galarkin . . . . .	21
1.6.1	Présentation de la méthode de Faedo-Galerkin . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Existence et unicité des solutions des équations de Navier-Stokes incompressible en dimension deux</b>	<b>24</b>
2.1	Position du problème . . . . .	24
2.2	Formulation variationnel . . . . .	25
2.3	Espace fonctionnels pour les équations de Navier-Stokes . . . . .	26
2.4	Propriété sur le terme non linéaire . . . . .	27
2.5	Lemme de compacité . . . . .	28
2.6	Théorème d'existence et d'unicité . . . . .	28
2.6.1	Démonstration d'unicité . . . . .	29
2.6.2	Démonstration de l'existence (Théorème 2.3) . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Méthode des Volumes finis</b>	<b>34</b>
3.1	Présentation de la méthode de volumes finies . . . . .	34
3.2	Volumes Finis pour les problèmes elliptiques 1D . . . . .	35
3.2.1	Maillage utilisé . . . . .	35
3.2.2	Formulation en Volumes Finis . . . . .	36
3.2.3	Système linéaire . . . . .	37
3.2.4	Convergence . . . . .	37
3.3	Volumes Finis pour les problèmes elliptiques 2D . . . . .	38
3.3.1	Maillage admissible . . . . .	38
3.3.2	Formulation en Volumes Finis . . . . .	40
3.3.3	Exemples de maillages admissibles . . . . .	43
3.3.4	Système linéaire . . . . .	44
3.3.5	Equation elliptique 2D avec coefficients discontinus . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Volumes Finis pour les équations de Navier-Stokes incompressibles</b>	<b>47</b>
4.1	Position de problème . . . . .	47

4.1.1	Maillage rectangulaire utilisé . . . . .	48
4.1.2	Principe de la méthode . . . . .	49
4.1.3	Schéma numérique . . . . .	49
4.2	Discrétisation des équations . . . . .	50
4.3	Discrétisation des conditions aux limites . . . . .	53
4.4	Algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation ) . . .	54
4.4.1	Maillage décalé . . . . .	54
4.4.2	Résolution du système linéaire . . . . .	58
	Références . . . . .	59

---

# TABLE DES FIGURES

3.1	Maillage unidimensionnel en volumes finis. . . . .	35
3.2	Maillage bidimensionnel en volumes finis. . . . .	39
4.1	Positions des composantes de vitesse $u$ (rouge), $v$ (bleu) et de la pression (noir) sur la grille de calcul. . . . .	54

---

# INTRODUCTION

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles qui décrivent le mouvement de substances fluides visqueuses. Ils portent le nom de l'ingénieur et physicien français Claude-Louis Navier et du physicien et mathématicien irlandais George Gabriel Stokes. Ils ont été développés sur plusieurs décennies de construction progressive des théories, de 1822 (Navier) à 1842-1850 (Stokes).

Les équations de Navier-Stokes sont utiles car elles décrivent la physique de nombreux phénomènes d'intérêt scientifique et technique. Ils peuvent être utilisés pour modéliser la météo, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau et l'écoulement de l'air autour d'une aile. Les équations de Navier-Stokes, dans leurs formes complètes et simplifiées, aident à la conception d'avions et de voitures, à l'étude du flux sanguin, à la conception de centrales électriques, à l'analyse de la pollution et à bien d'autres problèmes. Couplées aux équations de Maxwell, elles peuvent être utilisées pour modéliser et étudier la magnétohydrodynamique.

La méthode des volumes finis est à la base des codes de calcul utilisés en mécanique des fluides et s'est avérée très efficace dans le traitement des problèmes basés sur l'équation de Navier Stokes. Les avantages de la méthode des volumes finis résident dans la possibilité de représenter facilement des domaines de forme géométrique compliquée et traiter de façon usuelle les conditions aux limites.

Contrairement à la méthode des différences finies, qui met en jeu des approximations des

dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales. Toutefois, la méthode des volumes finis exploite directement la forme dite «forte» de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle de l'équation (on parle aussi de formulation faible).

En 1971, la méthode des volumes finis a été présentée pour la première fois par Patankar et Spalding, et publiée en 1980 par Patankar. Cette méthode est une approche de discrétisation utilisée pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles, qui sont essentielles pour la modélisation des phénomènes étudiés par les physiciens et les ingénieurs.

Elle permet de résoudre des EDP avec des géométries complexes grâce à l'utilisation de maillages non structurés. Le domaine est discrétisé en volumes de contrôles, des volumes disjoints en 3D, des polygones en 2D et des segments en 1D, construits autour des points d'un maillage initial.

Notre travail est structuré en quatre chapitres :

Le premier chapitre représente un rappel et des définitions de quelques opérateurs différentiels, en plus de certains espaces de Sobolev, de leurs propriétés, et de quelques inégalités utiles. Puisque nous consacrerons nos travaux aux équations de Navier-Stokes, nous avons présenté quelques formes de ces équations qui modélisent l'écoulement de fluides compressibles et incompressibles.

Dans le deuxième chapitre, nous avons prouvé l'existence et l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes incompressible en dimension 2, En utilisant le lemme de compacité avec la méthode de Fredholm-Glarkin.

Le troisième chapitre est consacré à donner une présentation à la méthode de volumes finis, nous avons expliqué le principe de cette méthode par l'application à deux problèmes elliptiques en dimension 1 et 2.

Dans le quatrième chapitre, Nous avons appliqué la méthode de volumes finis avec un maillage admissible rectangulaire pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressible en dimension deux.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## RAPPELS MATHÉMATIQUES ET ÉTUDE THÉORIQUE DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Ce chapitre présente un petit rappel en analyse fonctionnel avec quelques définitions de quelques opérateurs différentiels, en plus de certains espaces de Sobolev, de leurs propriétés, et de quelques inégalités utiles. Puisque nous consacrerons nos travaux aux équations de Navier-Stokes, nous avons présenté quelques formes de ces équations qui modélisent l'écoulement de fluides compressibles et incompressibles.

### 1.1 Quelques opérateurs différentiels

#### 1.1.1 Le gradient

Soit  $f$  une fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On peut définir ses trois dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$ . (si la fonction est continue et différentiable). A partir de ces trois valeurs on peut construire un

vecteur, le gradient, qu'on note  $\vec{\nabla}$  ou  $\vec{\nabla}$  défini comme suit

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

### 1.1.2 La divergence

La divergence d'un champs vectoriel  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  est un scalaire défini par

$$\operatorname{div} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

### 1.1.3 Le Laplacien

Le laplacien d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}$  c'est un scalaire noté  $\Delta f$  où  $\nabla^2$  défini comme suite

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.1)$$

### 1.1.4 Produit tensoriel

Produit tensoriel entre  $v = (v_1, v_2)$  et  $u = (u_1, u_2)$  défini comme suite

$$u \otimes v = \begin{pmatrix} (u_1, v_1), (u_2, v_1) \\ (u_1, v_2), (u_2, v_2) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Pour plus de détails voir [9] et [11].

## 1.2 Espaces de Sobolev

### 1.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition 1.1.** [1]. (Produit scalaire) Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel. Un produit scalaire sur  $E$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in E$  (On dit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est positive),
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est définie),
3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in E$  (symtrie),
4.  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  (biliniarité).

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien**.

**Définition 1.2.** (La Norme) Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$  des réels. L'application  $\|\cdot\|_E : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une norme si et seulement si

1.  $\forall x \in E : \|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2.  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E,$
3.  $\forall x, y \in E : \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$  (Inégalité triangulaire).

On appelle espace vectoriel normé le couple  $(E, \|\cdot\|_E)$  formé par un espace vectoriel réel et une norme  $\|\cdot\|_E$  définie sur  $E$ .

**Corollaire 1.** [1]. Soit  $E$  un espace préhilbertien. L'application

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle_E}, \end{aligned}$$

est une norme sur  $E$ .

C'est-à-dire  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_E}$  est une norme sur  $E$ .

**Définition 1.3.** [9]. (Support d'une fonction) Soit  $\varphi$  une fonction sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ . Le support de  $\varphi$  est l'ensemble

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

**Définition 1.4.** (Espace de fonctions tests  $\mathcal{D}(\Omega)$ ) On note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur  $\Omega$  dont le support est compact et inclus dans  $\Omega$

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, u \in C^\infty(\Omega), \text{supp}(u) \text{ compact}\}.$$

**Définition 1.5.** (Espace des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ) On appelle distribution toute application

$$T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C},$$

linéaire et continue.

La variable d'une distribution est donc une fonction test, et  $T(\varphi)$  est un nombre complexe.

La valeur de  $T$  en  $\varphi$  est noté

$$T(\varphi) \text{ ou } \langle T, \varphi \rangle.$$

L'ensemble des distributions a manifestement une structure d'espace vectoriel complexe avec l'addition de deux formes linéaires et la multiplication par un scalaire. C'est ce qu'on appelle le dual topologique de  $\mathcal{D}(\Omega)$  que nous notons  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Définition 1.6.** [16]. (Dérivée au sens de distribution) Soit  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . La Forme linéaire  $\frac{\partial T}{\partial x_j}$  sur  $C_0^\infty(\Omega)$  définie par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.3)$$

est une distribution appelée dérivée partielle, au sens des distributions, de  $T$  par rapport à la  $j$ -ième variable.

Le fait que  $\frac{\partial T}{\partial x_j}$  soit une distribution résulte immédiatement de l'appartenance de  $T$  à  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Définition 1.7.** (Espace de Schwartz  $S(\mathbb{R}^n)$ ) L'espace  $S = S(\mathbb{R}^n)$  est constitué des fonctions  $u$  appartenant à  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha, \beta} > 0, |x^\alpha \partial^\beta u(x)| \leq C_{\alpha, \beta}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Toutes les dérivées d'un élément de  $S$  tendent vers zéro à l'infini que tout polynôme.

**Définition 1.8.** (Espace des distributions tempérées  $S'$ )  $S'(\mathbb{R}^n) = S'$  est le dual topologique de  $S$ , i.e, l'espace vectoriel des formes linéaire,  $T : S \rightarrow \mathbb{C}$  appartient à  $S'$  si et seulement si,

$$\exists k, l \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| < k \\ |\beta| < l}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in S.$$

**Définition 1.9.** [1]. L'espace  $L^2(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions de carré sommable c'est-à-dire

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

$L^2(\Omega)$  est un espace fonctionnel linéaire.

**Définition 1.10.** [16]. Nous appelons "espace de Sobolev" d'ordre 1 sur  $\Omega$ , l'espace

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall j = 1, \dots, n \right\}.$$

La dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction  $u \in L^2(\Omega)$  est dans  $H^1(\Omega)$  telles que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} v_j \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \forall j = 1, \dots, n.$$

Nous avons alors

$$v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \forall j = 1, \dots, n.$$

L'espace  $H^1(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Définition 1.11.** [1]. L'espace  $H_0^1(\Omega)$  définie par

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

**Définition 1.12.** [15]. De la même façon, nous définissons les espaces de Sobolev d'ordre  $m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) par

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\},$$

pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n : |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$

Muni de la norme naturelle

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

**Définition 1.13.** [15]. L'espace  $H^m(\Omega)$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) peut être définir aussi par

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in S'(\Omega) : (1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{u} \in L^2(\Omega) \right\}$$

et la norme définie par (1.4) est équivalente à

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Cette proposition permet de définir l'espace  $H^m(\Omega)$  pour tout  $m \in \mathbb{R}$  (et plus seulement  $m \in \mathbb{N}^*$ ). Si  $m$  n'est pas entier, on le note alors plutôt  $H^s(\Omega)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Le théorème de Plancherel nous assure alors que si  $s \geq 0$ ,  $u \in L^2(\Omega)$  ce qui n'est plus le cas si  $s < 0$ .

**Définition 1.14.** [15]. *D'une façon plus générale, pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$  et pour toute  $m \in \mathbb{N}$  on définit les espaces de Sobolev*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha(x)|^p \right)^{1/p}.$$

$(W^{m,p}(\Omega), \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)})$  est un espace de Banach.

**Définition 1.15.** [14]. *Il s'agit de l'espace de Banach  $H^s(\Omega)$ , défini par la norme suivante*

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 \right]^{1/2}.$$

### 1.3 Quelques inégalités utiles

**Théorème 1.1.** [2]. *(Inégalité de Hölder) Soient  $u \in L^p(\Omega)$  et  $v \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $q$  l'exposant conjugué ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ). Alors  $u, v \in L^1(\Omega)$  et*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.5)$$

**Remarque 1.1.** *En particulier, si  $p = 2$  et  $q = 2$  on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.6)$$

**Proposition 1.1.** *(Inégalité de Young) Soit  $1 < p < +\infty$ , alors pour tout  $a, b \geq 0$ , on a*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

où  $q \in ]1, +\infty[$  est l'exposant conjugué à  $p$  définie par  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

De plus l'égalité a lieu si et seulement si  $a^p = b^q$ .

**Remarque 1.2.** *Un cas simple de l'inégalité de Young avec les exposants  $p = q = 2$  et  $(\varepsilon > 0)$  est*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}.$$

**Proposition 1.2.** *(Inégalité d'interpolation) Si  $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , alors  $f \in L^r(\Omega)$ ,  $\forall p \leq r \leq q$ , et on a l'inégalité d'interpolation*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad (0 \leq \alpha \leq 1). \quad (1.7)$$

**Théorème 1.2.** *(Inégalité de Poincaré) Soit  $\Omega$  un borné, alors il existe une constante  $c > 0$ , telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (1.8)$$

### 1.3.1 Injection de Sobolev

**Définition 1.16.** [2]. *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach, l'écriture  $X \subset Y$  signifie l'injection continue de  $X$  dans  $Y$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $K$  telle que*

$$\|u\|_Y \leq K \|u\|_X, \quad \forall u \in X. \quad (1.9)$$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière lipshitzienne ou  $\Omega = \mathbb{R}^n, n \geq 1$ .

**Proposition 1.3.** *Soit  $1 \leq p < \infty$ , on a*

- Si  $p < n$ ,  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ , avec  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ .
- Si  $p = n$ ,  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty)$ .
- Si  $p > n$ ,  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ .

**Théorème 1.3.** *Supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné de classe  $C^1$ , on a*

- Si  $p < n$ ,  $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*), \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ .
- Si  $p = n$ ,  $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty)$ .
- Si  $p > n$ ,  $W^{1,p}(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega})$ .

En particulier  $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p$  injection compacte, pour tout  $p$  et  $n$ .

### 1.3.2 Formule de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des EDP. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

**Théorème 1.4.** [10]. (Formule d'Ostrogradsky) Soient un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné de classe  $C^1$  et  $\Gamma$  son bord. Soit  $F$  une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (un champ de vecteurs). Alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(x)) \, dx = \int_{\Gamma} F(x) \cdot n(x) \, d\Gamma,$$

où  $n(x)$  est le vecteur unitaire normal à  $\Gamma$  au point  $x$ , dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$ .

On déduit de ce théorème le

**Corollaire 2.** [10] (Formule de Green). Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^1$ . Alors pour toutes fonctions  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  et  $v \in C^1(\overline{\Omega})$ , on a

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx,$$

où  $\frac{\partial u}{\partial n}(x) := \nabla u(x) \cdot n(x)$  (dérivée normale de  $u$ ).

## 1.4 Présentation des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont fondamentales en mécanique des fluides, mais leur développement a été précédé par une longue histoire d'étude des fluides. Archimède a découvert que les corps plongés dans un liquide reçoivent une poussée égale au poids du liquide déplacé. Au  $XV^{\text{ème}}$  siècle, Leonard de Vinci a décrit divers écoulements et a introduit le terme "turbulence". Newton a posé les bases mathématiques avec ses lois de la dynamique en 1687. Les équations d'Euler, établies par d'Alembert et Euler au  $XVI^{\text{ème}}$  siècle, ont marqué un tournant. Cependant, le concept de pression reste flou. Euler a finalement publié un traité en 1775 décrivant les fluides parfaits incompressibles avec les équations aux dérivées partielles.

Les équations d'Euler sont les suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} \cdot u = 0. \end{cases}$$

La première équation représente la conservation de la quantité de mouvement, tandis que la deuxième correspond à la conservation de la masse (le fluide est incompressible). Cependant, d'Alembert a remarqué en 1752 que selon ces équations, un corps plongé dans un liquide pourrait se déplacer sans résistance, un paradoxe qui nécessite l'introduction de phénomènes de frottement moléculaire dans les équations, ce qui est complexe étant donné la nature macroscopique des équations d'Euler [3].

### 1.4.1 Coordonnées lagrangiennes et eulériennes

#### Définition

En mécanique des fluides, deux systèmes de coordonnées sont utilisés pour formuler les équations : les coordonnées lagrangiennes et les coordonnées eulériennes.

En coordonnées lagrangiennes, on suit l'évolution d'une particule ou d'un volume de fluide élémentaire au cours du mouvement. Les fonctions décrivant les grandeurs dépendent de la particule  $X$  (de position  $x_0$  à un temps de référence  $t_0$ ) et du temps. Si  $\varphi$  est un champ lagrangien, alors on a

$$\varphi = \varphi(X(x_0, t_0), t).$$

En coordonnées eulériennes, on observe l'évolution des particules qui passent par un point fixe du repère. Les grandeurs associées à ces particules dépendent du point  $x$  et du temps. Si  $\varphi$  est un champ eulérien. Alors, on a

$$\varphi = \varphi(X(x, t), t).$$

Travailler en coordonnées eulériennes revient à fixer la position  $X$  et à écrire des bilans au voisinage de ce point fixe.

En mécanique des fluides, les coordonnées eulériennes sont principalement utilisées pour leur simplicité. Cependant, elles nécessitent un système fermé pour appliquer les théorèmes de la mécanique, alors que le système est ouvert en coordonnées eulériennes. On utilise alors la dérivée particulaire pour décrire correctement les variations temporelles.

## Dérivée particulière

La dérivée particulière d'une quantité associée à une particule est la dérivée temporelle lorsqu'on suit la particule dans son mouvement.

En coordonnées lagrangiennes, cette dérivée s'écrit naturellement  $\partial\varphi/\partial t$ . Cependant, en notation eulérienne, la dérivée partielle ne prend pas en compte le fait que la particule passant par  $X$  à l'instant  $t$  est en mouvement, et que ce mouvement contribue à la variation temporelle de  $\varphi$ . En eulérien, la bonne notion de dérivée temporelle est celle de dérivée particulière, notée  $\frac{D\varphi}{Dt}$

$$\begin{aligned}\frac{D\varphi}{Dt}(X(x, t), t) &= \frac{d}{dt}(\varphi(X(x, t), t)) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(X(x, t), t) + \frac{\partial X}{\partial t}(X(x, t), t) \cdot \nabla\varphi(X(x, t), t) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(X(x, t), t) + v(X(x, t), t) \cdot \nabla\varphi(X(x, t), t),\end{aligned}$$

où  $v$  désigne le champ de vitesse. Dans toute la suite on ne travaillera plus qu'en coordonnées eulériennes.

## Dérivée d'une intégrale

Dans la suite du chapitre, la capacité à calculer la dérivée lagrangienne des bilans sera nécessaire pour formuler les équations de conservation. Ces bilans sont initialement exprimés sous forme intégrale. Un théorème fournira un résultat sur le calcul de la dérivée d'une intégrale.

**Théorème 1.5.** *Soit  $\omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $(\varphi(t))_{t \in \mathbb{R}}$  une famille de difféomorphismes de  $\omega$  sur  $\varphi(t)(\omega) = \Omega_t$ . On suppose que l'application  $t \mapsto \varphi(t)$  est aussi de classe  $C^1$ . On note  $\varphi(t, x) = \varphi(t)(x)$  le point de  $\Omega_t$  image du point  $x$  de  $\omega$  par  $\varphi(t)$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  dans les variables  $(X, t)$  définie sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ . On a alors la formule suivante*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} f(X, t) dX = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fv) \right) dX = \int_{\Omega_t} \left( \frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div}v \right) dX \quad (1.10)$$

où  $v$  est le champ de vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$v_i(X, t) = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t, \varphi(t)^{-1}(X)).$$

Dans le cadre de la mécanique des fluides, le champ  $v$  n'est autre que le champ de vitesse de l'écoulement.

## 1.4.2 Équations de bilans

### Conservation de la masse

on se donne un ensemble de particules que l'on suit dans leur mouvement. On note  $\Omega_t$  le volume défini par ces particules à l'instant  $t$ . Le nombre de particules étant constant, la masse du système  $m(t)$  l'est aussi. Ainsi, en coordonnées eulériennes

$$\frac{Dm(t)}{Dt} = 0.$$

Or  $m(t) = \int_{\Omega_t} \rho(X, t) dX$ . L'équation de Conservation de la masse s'écrit alors

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho(X, t) = 0.$$

D'après le Théorème 1.5, on obtient

$$\int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) \right) dX = 0.$$

Cette équation devant être vraie à tout instant et pour n'importe quel ensemble de particules  $\Omega_t$  on en déduit l'équation de Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0. \quad (1.11)$$

Cette équation est aussi appelée **équation de continuité**.

### Conservation de la quantité de mouvement

Considérons un fluide avec une masse volumique  $\rho$  et une vitesse  $v$ . La quantité de mouvement dans un volume  $\Omega_t$  s'écrit

$$\int_{\Omega_t} \rho v dX.$$

Selon le théorème fondamental de la dynamique, la variation temporelle de cette quantité est égale à la somme des forces extérieures, incluant les forces volumiques

$$\int_{\Omega_t} \rho f dX$$

et les forces de contact

$$\int_{\partial\Omega_t} \gamma(s) ds.$$

En utilisant le Théorème 1.5, pour transformer la dérivée substantielle de  $\int_{\Omega_t} \rho v dX$ , l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient

$$\frac{D\rho v}{Dt} + \rho v \operatorname{div} v = \rho f + \operatorname{div} \sigma, \quad (3)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes. Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes  $\sigma_0$  dépend linéairement et isotropiquement du tenseur des déformations  $D(v)$ , donné par

$$D(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T).$$

En remplaçant

$$\sigma_0 = 2\mu D(v) + \lambda \operatorname{div} v \operatorname{Id},$$

où  $\mu$  et  $\lambda$  sont des coefficients réels, dans l'équation précédente, on obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide newtonien

$$\frac{D\rho v}{Dt} + \rho v \operatorname{div} v - \mu \Delta v + \nabla(p - (\lambda + \mu) \operatorname{div} v) = \rho f. \quad (4)$$

### 1.4.3 Écoulements incompressibles

Les équations de Navier-Stokes sont un ensemble d'équations fondamentales qui décrivent le mouvement des fluides. Elles se présentent sous la forme suivante pour un fluide incompressible :  
Équation de conservation de la masse (ou continuité) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

En supposant un écoulement incompressible, on a :  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .

Équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}. \quad (1.12)$$

Où  $\mathbf{v}$  est le champ de vitesse du fluide,  $p$  est la pression,  $\mu$  est la viscosité dynamique, et  $\mathbf{f}$  est la force volumique externe.

Lorsque l'on considère un écoulement incompressible et qu'on introduit la vorticité  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ , on peut récrire les équations de Navier-Stokes sous la forme de la formulation vitesse-vorticité

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}) - \mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

En introduisant le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho LV}{\mu}$ , où  $L$  est une longueur caractéristique,  $V$  une vitesse caractéristique et  $\rho$  la masse volumique, on peut adimensionnaliser les équations de Navier-Stokes et obtenir une forme simplifiée, appelée équations de Stokes, pour les écoulements à faible Reynolds

$$\begin{cases} -\mu \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

D'autre part, lorsque l'on néglige la viscosité ( $\mu = 0$ ), on obtient les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont hyperboliques, ce qui signifie qu'elles ont un comportement différent des équations de Navier-Stokes, qui sont paraboliques.

## 1.5 Forme simplifier des équations Navier-Stokes

### 1.5.1 Les équations de l'hydrodynamique

les équations de l'hydrodynamique nous donne des différentes lois de conservations de la physique. Pour ce faire, nous suivons la présentation faite dans le chapitre 1 du livre de Chandrasekhar.

On considère un fluide dont la densité  $\rho$  où  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $t \in [0, \infty[$ . On note par  $v(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x))$  la vitesse de fluide [4].

#### Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0 \tag{1.13}$$

exprime la conservation de la masse. Une autre forme de (1.13) qui pourra être utile, est la suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\rho \sum_{j=1}^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j}. \tag{1.14}$$

Pour un fluide homogène incompressible (  $\rho = \rho_0$  est constante ), l'équation de continuité est réduite à

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.15)$$

dans ce cas, la vitesse est donc un champ de divergence nulle. Les équations de mouvement de l'hydrodynamique

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^2 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho X_i + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.16)$$

où  $X_i$  est la  $i^{eme}$  composante de toute force extérieure qui pourrait agir sur le fluide.

$P_{ij}$  est la tenseur des contrainte exercée dans la direction  $x_j$  sur un élément de surface normal à  $x_i$ . Cette force doit dépendre du taux de croissance de déformation dans le fluide donné par

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.17)$$

D'après une des hypothèses de la dynamique des fluides, nous donne l'équation suivante

$$P_{ij} = W_{ij} + \sum_{k,l=1}^2 q_{ij;kl} e_{kl} \quad (1.18)$$

où  $W_{ij} = -p\delta_{ij}$  est un tenseur symétrique vers lequel tend  $P_{ij}$  quand  $e_{ij} = 0$ , et  $q_{ij;kl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$  est un tenseur d'ordre 4. Où  $p$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des fonctions (scalaires).

Dans le cas d'un fluide isotropique, la forme de (1.18) doit être invariante à toutes rotations et translations des coordonnées du système. Ça implique donc que  $W_{ij}$  et  $q_{ij;kl}$  sont des tenseurs isotropiques. On trouve

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij} \sum_{k=1}^2 e_{kk}. \quad (1.19)$$

On définit  $p$  comme étant la pression isotropique en  $x_i$  quand il n'y a pas de déformation, dans ce cas,

$$\sum_{i=1}^2 P_{ii} = -3p = -3p + 2\mu \sum_{i=1}^2 e_{ii} + 3\lambda \sum_{k=1}^2 e_{kk}. \quad (1.20)$$

On trouve alors, dans le cas où le fluide n'est pas forcément incompressible

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (1.21)$$

et

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij} \sum_{k=1}^2 e_{kk}. \quad (1.22)$$

Le coefficient  $\mu$  qui apparait dans cette équation est le coefficient de viscosité. Les termes dans (1.22) qui sont proportionnels à  $\mu$  définissent les contraintes dues à la viscosité. Si on les note par

$$p_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \sum_{k=1}^2 \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]. \quad (1.23)$$

Dans le cas d'un fluide homogène incompressible, le tenseur visqueux a la forme plus simple

$$p_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.24)$$

En remplaçant  $P_{ij}$  dans (1.16) par son expression, on trouve

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^2 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right]. \quad (1.25)$$

Dans le cas d'un fluide homogène incompressible pour lequel  $\mu$  est constante, l'équation (1.25) est réduite à

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^2 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i. \quad (1.26)$$

### Le taux de dissipation visqueux

En multipliant (1.25) par  $v_i$  et en intégrant sur  $V$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial}{\partial t} v_i^2 dx + \frac{1}{2} \int_V \rho \sum_{j=1}^2 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i^2 dx = \int_V \rho v_i X_i dx + \int_V v_i \sum_{j=1}^2 \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} dx, \quad (1.27)$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i^2) = \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) v_i^2 + \rho \frac{\partial}{\partial t} v_i^2. \quad (1.28)$$

## 1.6 Méthode de Faedo Galarkin

Le principe de cette méthode est basé sur l'idée de remplacer l'espace séparable infinie  $V$  par un autre  $V_m$  finie, le problème approché est posé sur  $V_m$  ou nous se ramène a la simple solution d'un système d'équations différentielles ordinaires non linéaire, par ailleur on peut chisir la mode

de construction de  $V_m$  de manière à ce que le sous-espace  $V_m$  soit une bonne approximation de  $V$  et que la solution  $u_m$  dans  $V_m$  du problème est approché à la solution exacte  $u$  dans  $V$ .

Cette méthode n'a pas d'intérêt numérique en général elle est très utile d'un point de vue théorique, notamment pour l'étude des problèmes non linéaires [1].

## 1.6.1 Présentation de la méthode de Faedo-Galerkin

### 1. Présentation

La méthode de Faedo-Galerkin est une méthode approximative parmi d'autres, utilisée pour résoudre des équations aux Dérivées partielles d'évolution (déterminer l'existence et l'unicité des solutions).

### 2. Principe de la méthode

Décrivons ici la stratégie (les étapes) de la méthode.

L'existence par la méthode de Faedo-Galerkin se fait en trois étapes :

#### a. Approximation de Galerkin (Recherche de solutions approchées)

Dans cette partie, on choisit une famille de fonctions  $(\zeta_k)_{k \geq 1}$  constituant

une base orthogonale dans  $V = H_0^1(\Omega)$ ,

et

une base orthonormale dans  $H = L^2(\Omega)$ .

En particulier, on pourra écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \zeta_k,$$

où

$$g_k = (g, \zeta_k)_0,$$

et les séries sont convergentes dans  $H$ .

#### b. Estimation à priori

Puis, on construit une suite de sous-espaces de dimension finie,

$$V_m = \text{vect} \zeta_1, \dots, \zeta_m,$$

avec évidemment

$$V_m \subset V_{m+1},$$

et

$$\overline{\cup V_m} = V.$$

Pour  $m$  fixé, on pose

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) \zeta_k, \quad G_m = \sum_{k=1}^m g_k \zeta_k,$$

et on résout le problème approximatif suivant : Déterminer  $u_m \in H_0^1(0, T, V)$  tel que pour  $s = 1, \dots, m$ , on a

$$\begin{cases} (u'_m(t), \zeta_s)_0 + a(u'_m, \zeta_s) = (f(t), \zeta_s)_0, \text{ pour tout } t \in [0, T], \\ U_m(0) = G_m. \end{cases}$$

Pour tout  $v \in V_m$  puisque  $u'_m \in L^2([0, T], V)$ , on a

$$(u'_m(t), v) = \langle u'_m(t), v \rangle.$$

$u_m$  est appelé **approximation de Galerkin** de la solution  $u$ .

### c. Passage à la limite (existence d'une solution faible )

Daru ; cette partie nous montrerons que  $u_m$  et  $u'_m$  sont bornés dans  $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$  et  $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$  respectivement (Estimation de l'énergie).

Alors en appliquant le théorème de compacité, on pourra montrer que les sous-suites  $u_{m_k}$  convergent faiblement dans  $L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega))$  pendant que  $u'_{m_k}$  converge faiblement dans  $L^2(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$ .

---

---

# CHAPITRE 2

---

## EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLE EN DIMENSION DEUX

Ce chapitre traite l'existence de la solution faible de l'équation de Navier-Stokes dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ . Pour ce faire, on introduit des solutions approchées, puis on démontre des estimations sur ces solutions avant de passer à la limite pour obtenir l'existence de la solution  $u$ , et pour une étude plus approfondie de l'existence et de l'unicité de la solution de ce type d'équation, voir [7].

### 2.1 Position du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma$  (quelconque, régulière ou non du moins au début).

On désigne par  $u$  un vecteur de vitesse

$$u = \{u_1, u_2\}, \tag{2.1}$$

défini dans  $Q = \Omega \times ]0, T[$ .

On posera

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} = u' &= \{u'_1, u'_2\} = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t} \right\}, \\ D_i u &= \{D_i u_1, D_i u_2\} = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right\}, \\ \Delta u &= \{\Delta u_1, \Delta u_2\}.\end{aligned}$$

Les équations de Navier-Stokes sont les suivantes, dans le cas d'évolution

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^2 u_i D_i u = f - \text{grad } p, \quad (\nu > 0), \quad (2.2)$$

$$\text{div } u = 0, \quad (2.3)$$

avec les conditions aux limites et initiales

$$u = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (2.4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{sur } \Omega. \quad (2.5)$$

Le problème est de trouver  $u$  et  $p$  (évidemment défini au mieux à une constante additive près) tels que (2.2)-(2.5) aient lieu [7].

## 2.2 Formulation variationnel

Soit  $v \in V$  une fonction test. On multiplie l'équation (2.2) par  $v$  et on intègre sur  $\Omega$

$$\int_{\Omega} u' \cdot v dx - \nu \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^2 u_i D_i u \right) \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx - \int_{\Omega} \nabla p \cdot v dx. \quad (2.6)$$

On a  $\forall P \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$(\nabla p, v) = -(p, \text{div } v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Alors

$$(\nabla p, v) = 0 \text{ ( dans } \mathcal{D}'(0, T)^2 \text{ )}.$$

D'autre part par la **formule de Green** pour tous champs vectoriels  $u, v$  réguliers

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \underbrace{\int_{\Gamma} \nabla u \cdot \eta v ds}_{=0}. \end{aligned}$$

Alors la formulation variationnelle de problème (2.2)-(2.5) est donnée par

$$\int_{\Omega} u' \cdot v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 u_i (D_i u_j) v_j dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx, \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n, \quad (2.7)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.8)$$

## 2.3 Espace fonctionnels pour les équations de Navier-Stokes

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , on définit

$$\mathcal{V} = \{ \varphi \in (D(\Omega))^2 : \nabla \varphi = 0 \}.$$

Il faut noter que l'on peut donner deux définitions, pour les espaces  $V$  et  $H$ .

Première définition de  $V$

$$V = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } (H^1(\Omega))^2,$$

ou d'autre terme

$$V = \{ u \mid u \in (H_0^1(\Omega))^2, \nabla u = 0 \}.$$

On peut définir l'espace  $H$  par

$$H = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } (L^2(\Omega))^2,$$

ou d'autre terme

$$H = \{u \in (L^2(\Omega))^2, \nabla u = 0\}.$$

L'espace  $H$  est équipé du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  induit par  $L^2(\Omega)$ ; l'espace  $V$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^2 (D_i u, D_i v). \quad (2.9)$$

L'espace  $V$  est contenu dans  $H$  dense en  $H$  et l'injection est continue. Soit  $H'$  et  $V'$  les espaces duales de  $H$  et  $V$ .

D'après le théorème de Riesz, on identifie  $H$  à son dual :  $H' = H$ , alors on a l'injection suivante

$$V \subset H \equiv H' \subset V', \quad (2.10)$$

où dans (2.10) chaque espace est dense dans le suivant ([7], [13]).

En conséquence des identifications précédentes, le produit scalaire dans  $H$  de  $f \in H$  et  $u \in V$  est le même que le produit scalaire de  $f$  et  $u$  dans la dualité entre  $V'$  et  $V$

$$\langle f, u \rangle = (f, u), \forall f \in H, \forall u \in V.$$

**Théorème 2.1.** ([7]). Soient  $u_0 \in H$  et  $f \in L^2(0, T; V')$ . Alors, il existe

$$u \in L^2(0, T; V') \cap L^\infty(0, T; H), \quad (2.11)$$

solution de (2.7)-(2.8).

## 2.4 Propriété sur le terme non linéaire

Soient  $u, v$  et  $w$  trois vecteurs dans  $V$ , on pose

$$b(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^2 \int_{\Omega} u_k (D_k v_i) w_i dx. \quad (2.12)$$

**Lemme 2.1.** ([7], [13]). La forme trilinéaire  $u, v, w \rightarrow b(u, v, w)$  est continue sur  $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$  et vérifie

$$1- \forall u, v, w \in V, \quad b(u, v, w) = -b(u, w, v),$$

$$2- \forall u, v \in V, \quad b(u, v, v) = 0.$$

Noter que  $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$  si  $n \leq 4$ .

## 2.5 Lemme de compacité

Soit  $B_0, B, B_1$  sont des espaces de Banach, avec les injections continues

$$B_0 \subset B \subset B_1, \quad B_i \text{ réflexif, } i = 0, 1, \quad (2.13)$$

$$\text{l'injection } B_0 \rightarrow B \text{ est compacte.} \quad (2.14)$$

On définit

$$W = \left\{ v \mid v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\}, \quad (2.15)$$

où  $T$  est fini et  $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$ . Muni de la norme

$$\|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)},$$

$W$  est un espace de Banach. Evidemment  $W \subset L^{p_0}(0, T; B)$ .

On a alors le résultat suivant

**Théorème 2.2.** [7]. *Sous les hypothèses (2.13) et (2.14) et si  $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$  l'injection de  $W$  dans  $L^{p_0}(0, T; B)$  est compacte.*

## 2.6 Théorème d'existence et d'unicité

Pour  $T > 0$  fini quelconque, on a

**Théorème 2.3.** *Le Problème (2.2)-(2.5) admet une solution unique.*

### 2.6.1 Démonstration d'unicité

Pour montrer l'unicité de la solution du problème (2.2)-(2.5), on a besoin des lemmes suivants.

**Lemme 2.2.** *Il existe une constante  $c(\Omega)$  telle que*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c(\Omega) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.16)$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer (2.16) pour  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ; prolongeant  $v$  par 0 hors de  $\Omega$ , (2.16) résultera alors de

$$\|v\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{1/4} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1/2} \left( \sum_{i=1}^2 \|D_i v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right)^{1/4}. \quad (2.17)$$

On part de

$$v^2(x) = 2 \int_{-\infty}^{x_i} v(D_i v) dx_i,$$

d'où

$$v^2(x) \leq 2v_1(x_2) \quad \text{et} \quad v^2(x) \leq 2v_2(x_1),$$

où

$$v_1(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v| |D_1 v| dx_1 \quad \text{et} \quad v_2(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v| |D_2 v| dx_2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} v^4(x) dx &\leq 4 \int_{\mathbb{R}} v_1(x_2) dx_2 \int_{\mathbb{R}} v_2(x_1) dx_1 \\ &\leq 4 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|D_1 v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|D_2 v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

d'où en particulier (2.17). □

**Lemme 2.3.** [7]. *Si  $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ , alors*

$$\sum_{i=1}^2 u_i D_i u \in L^2(0, T; V').$$

**Théorème 2.4.** *La solution  $u$  du problème (2.2) vérifie,*

$$u' \in L^2(0, T; V'). \quad (2.18)$$

## Démonstration du Théorème 2.3 (unicité)

Soient  $u$  et  $u^*$  deux solutions et soit  $w = u - u^*$ . Alors

$$(w', v) + \nu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0, \quad \forall v \in V, \text{ (car } V \subset (L^2(\Omega))^2). \quad (2.19)$$

Puisque l'on sait, d'après (2.18), que  $w' \in L^2(0, T; V')$ , on peut prendre dans (2.19)  $v = w(t)$  et intégrer en  $t$ ; il vient

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \nu \int_0^t a(w, w) d\sigma + \int_0^t [b(w, u, w) + b(u, w, w) - b(w, w, w)] = 0. \quad (2.20)$$

Mais  $b(u, w, w) = 0$ ,  $b(w, w, w) = 0$  et donc (2.20) donne

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \nu \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma = - \int_0^t b(w, u, w) d\sigma. \quad (2.21)$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t b(w, u, w) d\sigma \right| &\leq c_3 \int_0^t \|w(\sigma)\|_{(L^4(\Omega))^2}^2 \|u(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq c_4 \int_0^t |w(\sigma)| \|w(\sigma)\| \|u(\sigma)\| d\sigma \text{ (par (2.16))} \\ &\leq \nu \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma + c_5 \int_0^t |w(\sigma)|^2 \|u(\sigma)\|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Donc, l'équation (2.21) donne

$$|w(t)|^2 \leq 2c_5 \int_0^t \|u(\sigma)\|^2 |w(\sigma)|^2 d\sigma, \quad (2.22)$$

d'où  $w = 0$  ■.

**Remarque 2.1.** Si  $w \in L^2(0, T; V)$ ,  $w' \in L^2(0, T; V')$ , on a bien  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 = (w(t), w'(t))$  p.p.

## 2.6.2 Démonstration de l'existence (Théorème 2.3)

### Solutions approchées

On utilise  $w_1, \dots, w_m$  comme une base spéciale dans la méthode de Faedo-Galerkin.

On définit  $u_m(t)$  solution approchée d'ordre  $m$  par

$$u_m(t) \in [w_1, \dots, w_m], \quad u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j,$$

$$(u'_m(t), w_j) + \nu a(u_m(t), w_j) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), 1 \leq j \leq m \quad (2.23)$$

$$u_m(0) = u_{0m}, u_{0m} \in [w_1, \dots, w_m], u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ dans } H. \quad (2.24)$$

Ce système d'équations différentielles en les  $g_{jm}(t)$  définit  $u_m(t)$  dans  $[0, t_m]$ ; on verra au point suivant que l'on peut prendre  $t_m = T$ .

### Estimations a priori (I)

Multiplions (2.23) par  $g_{jm}(t)$  et sommons en  $j$ ; comme  $b(u_m, u_m, u_m) = 0$ , on en déduit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu a(u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)), \quad (2.25)$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 \leq \|f(t)\| \|u_m(t)\| \leq \frac{\nu}{2} \|u_m(t)\|^2 + c \|f(t)\|^2,$$

d'où

$$|u_m(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq |u_{0m}|^2 + c \int_0^t \|f(\sigma)\|^2 d\sigma. \quad (2.26)$$

Utilisant (2.24) on en déduit que  $t_m = T$  et que

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \quad (2.27)$$

### Estimation a priori (II)

On va maintenant et c'est le point fondamental montrer que

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V'_s). \quad (2.28)$$

Soit en effet  $P_m$  le projecteur de  $H \rightarrow [w_1, \dots, w_m]$  (donc  $P_m h = \sum_{i=1}^m (h, w_i) w_i$ ).

On déduit de (2.23) que

$$u'_m = -P_m(g(u_m)) - \nu P_m A u_m + P_m f. \quad (2.29)$$

Mais  $\|P_m\|_{\mathcal{L}(V_s;V_s)} \leq 1$  (grâce au choix de  $w_j$ ), donc par transposition (et comme  $P_m^* = P_m$ )

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V'_s;V'_s)} \leq 1. \quad (2.30)$$

On déduit de (2.27) que  $g_{u_m}$  demeure dans un borné de  $L^2(0, T; V'_s)$ , et donc  $P_m(g(u_m))$  demeure dans un borné de  $L^2(0, T; V'_s)$ .

Alors, comme  $Au_m$  demeure dans un borné de  $L^2(0, T; V')$  donc de  $L^2(0, T; V'_s)$ , (2.28) résulte de (2.29).

### Passage à la limite

On utilise le Théorème 2.2 de compacité avec

$$B_0 = V, p_0 = 2,$$

$$B_1 = V'_s, p_1 = 2,$$

$$B = H.$$

On peut donc extraire de  $u_m$  une suite  $u_\mu$  telle que

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible}, \quad (2.31)$$

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; H) \text{ weak star}, \quad (2.32)$$

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ fort et p.p dans } Q, \quad (2.33)$$

$$u'_\mu \rightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T; V'_s) \text{ faible}. \quad (2.34)$$

On déduit de (2.31) et (2.34) que  $u_\mu(0) \rightarrow u_0$  dans  $V'_s$  faible (par exemple) et donc que  $u(0) = u_0$ .

D'après le Lemme 6.7 dans [7],  $u_{\mu i} u_{\mu j}$  est borné dans  $L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega))$  et on peut supposer que

$$u_{\mu i} u_{\mu j} \rightarrow \chi_{ij} \text{ dans } L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega)) \text{ faible}. \quad (2.35)$$

Mais grâce à (2.33) on a

$$\chi_{ij} = u_i u_j. \quad (2.36)$$

Utilisons le Lemme suivant

**Lemme 2.4.** [7] Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ ,  $g_\mu$  et  $g$  des fonctions de  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q(\Omega)} \leq C, \quad g_\mu \rightarrow g \text{ p.p dans } \Omega.$$

Alors,  $g_\mu \rightarrow g$  dans  $L^q$  faible.

$u_{\mu i} u_{\mu j} \rightarrow u_i u_j$  dans  $\mathcal{D}'(Q)$ ; en effet

$$\int_Q u_{\mu i} u_{\mu j} \varphi dx dt \rightarrow \int_Q u_i u_j \varphi dx dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q),$$

car  $u_{\mu i} \rightarrow u_i$  dans  $L^2(Q)$  faible et  $u_{\mu j} \varphi \rightarrow u_j \varphi$  dans  $L^2(Q)$  fort.

On déduit de (2.35) et (2.36) que

$$b(u_\mu, u_\mu, w_j) \rightarrow b(u, u, w_j) \text{ dans } L^2(0, T) \text{ faible.} \quad (2.37)$$

En effet si  $\psi \in L^2(0, T)$ , on a

$$\int_0^T b(u_\mu, u_\mu, w_j) \psi dt = - \int_0^T b(u_\mu, w_j, u_\mu) \psi dt,$$

et on passe à la limite en utilisant (2.35). Par ailleurs

$$(u'_\mu, w_j) \rightarrow (u', w_j) \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T) \text{ par exemple,}$$

et donc (2.23) (pour  $m = \mu$ ) donne à la limite

$$(u', w_j) + \nu a(u, w_j) + b(u, u, w_j) = (f, w_j), \text{ et cela } \forall j.$$

On en déduit (2.7)  $\forall v \in V_s$ , puis  $\forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n$ , où

$$V_s = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } (H^s(\Omega))^2,$$

---

---

# CHAPITRE 3

---

## MÉTHODE DES VOLUMES FINIS

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode de volumes finis par l'application de cette méthodes sur deux exemples. Le premier exemple est un problème modele elliptique et un deuxième problème de Poisson en dimension deux.

### 3.1 Présentation de la méthode de volumes finies

La méthode des Volumes Finis se distingue par son approche intégrale basée sur la forme forte des équations à résoudre. Contrairement à la méthode des Eléments Finis, qui utilise une formulation variationnelle, les Volumes Finis effectuent des intégrations sur des volumes de contrôles disjoints. Les termes de divergence sont traités à l'aide du théorème de la divergence, transformant les intégrales de volume en intégrales de surface. Les flux aux interfaces sont estimés par des fonctions de flux numériques. Cette méthode est conservatrice, garantissant que le flux entrant dans un volume est égal au flux sortant du volume voisin, adaptée principalement aux lois de conservation hyperboliques.

## 3.2 Volumes Finis pour les problèmes elliptiques 1D

La méthode des Volumes Finis est présentée pour les équations elliptiques en une dimension (1D) en prenant en compte le problème modèle suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $f$  est une fonction donnée.

### 3.2.1 Maillage utilisé

On discrétise l'intervalle  $[0, 1]$  en introduisant un maillage  $\tau$  de l'intervalle  $[0, 1]$  défini de la façon suivante

Soient  $N$  volumes de contrôle appelés aussi cellules, notés  $K_i$  pour  $i = 1, \dots, N$

$$K_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[,$$

avec les points  $x_{i+1/2} \in [0, 1]$  tels que  $0 = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{N-1/2} < x_{N+1/2} = 1$ .

A chaque cellule  $K_i$  est associée à un point (centre)  $x_i \in K_i$  tel que

$$0 = x_0 = x_{1/2} < x_1 < \dots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = x_{N+1} = 1.$$

On introduit alors les pas de discrétisation

$$h_i = |K_i| = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$$

$$h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i.$$

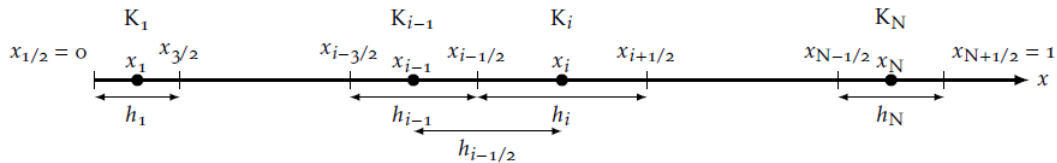


FIGURE 3.1 – Maillage unidimensionnel en volumes finis.

### 3.2.2 Formulation en Volumes Finis

On considère les approximations  $u_i$  de la solution  $u$  de (3.1) dans chaque cellule  $K_i$ . On a donc  $N$  inconnues. Plus précisément,  $u_i$  est une approximation de la valeur moyenne de  $u$  dans  $K_i$

$$u_i = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} u(x) dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx \text{ pour } 1 \leq i \leq N.$$

On intègre alors l'équation différentielle de (P) sur chaque cellule  $K_i$ . On a

$$- \int_{K_i} u''(x) dx = \int_{K_i} f(x) dx,$$

ce qui donne

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i, \quad (3.2)$$

où  $f_i$  désigne la valeur moyenne de  $f$  dans  $K_i$ , c'est-à-dire  $f_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) dx$ .

La quantité  $-u'_i(x_{i+1/2})$  (resp.  $-u'_i(x_{i-1/2})$ ) représente le flux rentrant (resp. flux sortant) associé à la cellule  $K_i$ , au point  $x = x_{i+1/2}$  (resp. en  $x = x_{i-1/2}$ ). On approche le flux  $-u'_i(x_{i+1/2})$  par différences décentrées

$$-u'(x_{i+1/2}) \approx -\frac{u_{i+1/2} - u_i}{x_{i+1/2} - x_i} \text{ ou } -u'(x_{i+1/2}) \approx -\frac{u_{i+1/2} - u_{i+1}}{x_{i+1/2} - x_{i+1}}. \quad (3.3)$$

Les approximations (3.3) traduisent la consistance des flux numériques. Du fait des décentrement, il s'agit d'approximations d'ordre  $O(h)$  avec  $h = \max(h_i)$ . Au point  $x = x_{i+1/2}$ , on introduit les flux numériques  $F_{i+1/2}^-$  associé à la cellule  $K_i$  et  $F_{i+1/2}^+$  associé à la cellule  $K_{i+1}$

$$F_{i+1/2}^- = -\frac{u_{i+1/2} - u_i}{x_{i+1/2} - x_i}, \quad F_{i+1/2}^+ = -\frac{u_{i+1/2} - u_{i+1}}{x_{i+1/2} - x_{i+1}}. \quad (3.4)$$

On impose alors la conservation des flux numériques à travers le point  $x = x_{i+1/2}$

$$F_{i+1/2}^- = F_{i+1/2}^+. \quad (3.5)$$

Cette condition correspond à la continuité du flux (exacte)  $-u'$  en  $x = x_{i+1/2}$ . En combinant (3.4) avec (3.5) les expressions précédentes, on obtient

$$F_{i+1/2}^- = F_{i+1/2}^+ = -\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}. \quad (3.6)$$

Le schéma numérique correspondant à l'approximation de l'équation (3.2) par (3.3) avec (3.6), s'écrit

$$-\frac{(u_{i+1} - u_i)}{h_{i+1/2}} + \frac{(u_i - u_{i-1})}{h_{i-1/2}} = h_i f_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq N, \quad (3.7)$$

où

$$-\frac{1}{h_{i-1/2}}u_{i-1} + \left( \frac{1}{h_{i-1/2}} + \frac{1}{h_{i+1/2}} \right) u_i - \frac{1}{h_{i+1/2}}u_{i+1} = h_i f_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq N, \quad (3.8)$$

et on fixe

$$u_0 = u_{N+1} = 0. \quad (3.9)$$

### 3.2.3 Système linéaire

On regroupe les  $N$  inconnues dans le vecteur  $u = (u_1, \dots, u_N)^\top$  et on note  $b = (b_1, \dots, b_N)^\top$  avec  $b_i = h_i f_i$ . Soit  $A$  la matrice de taille  $N \times N$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_{N-2} & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} \\ 0 & & & & \beta_{N-1} & \alpha_N \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

avec

$$\alpha_i = \frac{1}{h_{i-1/2}} + \frac{1}{h_{i+1/2}} > 0, \quad \beta_i = -\frac{1}{h_{i+1/2}} < 0.$$

Les relations (3.8), (3.9) s'écrivent

$$Au = b. \quad (3.11)$$

Il est à noter que  $\beta_{i-1} + \alpha_i + \beta_i = 0$  pour  $2 \leq i \leq N - 1$  et que  $\alpha_1 > \beta_1$  et  $\alpha_N > \beta_N$ . La matrice  $A$  est irréductible et à diagonale fortement dominante, donc elle est inversible.

### 3.2.4 Convergence

On a le résultat de convergence suivant.

**Théorème 3.1.** [6] Soit  $f \in C([0, 1])$  et  $u \in C^2([0, 1])$  l'unique solution de (3.1). Soit  $u$  l'unique solution du schéma "Volumes Finis" (3.11). On note l'erreur  $e_i = u(x_i) - u_i$  pour  $1 \leq i \leq N$  avec  $e = (e_0, e_1, \dots, e_N, e_{N+1})$  où  $e_0 = e_{N+1} = 0$ . Alors, il existe une constante  $C \geq 0$  dépendant de  $u$  mais indépendant de  $h = \max_i(h_{i+1/2})$ , telle que

$$\|e\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq N} |e_i| \leq Ch, \quad (3.12)$$

$$\|e\|_{1,h} := \left( \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \right)^{1/2} \leq Ch. \quad (3.13)$$

Dans l'estimation (3.13),  $\|\cdot\|_{1,h}$  représente une norme  $H_0^1$  discrète. L'approximation en Volumes Finis est donc (au moins) d'ordre  $O(h)$ .

### 3.3 Volumes Finis pour les problèmes elliptiques 2D

Nous allons résoudre l'équation de Poisson en utilisant la méthode des Volumes finis dans un domaine polygonal  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Nous recherchons une fonction  $u = u(x)$  définie pour  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur le bord } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.14)$$

avec  $f$  et  $g$  des fonctions données. Nous allons d'abord définir un maillage admissible selon la méthode des volumes finis, puis nous présenterons la formulation en volumes finis du problème (3.14). Ensuite, nous donnerons des exemples concrets de maillages admissibles. Enfin, nous terminerons la section en abordant un problème elliptique à coefficients discontinus.

#### 3.3.1 Maillage admissible

**Définition 3.1.** (Notion du maillage admissible) Soit  $\tau_h$  une rectangulation du domaine  $\Omega$  à l'aide de quadrilatères convexes  $K_i$  de diamètre  $\leq h$ . Donc, cela signifie que : si  $K_1$  et  $K_2$  sont

deux éléments quelconques mais distincts de  $\tau_h$ , on aurait

$$K_1 \cap K_2 = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{un sommet commun}, \\ \text{un côté commun.} \end{cases}$$

Dans cette dernière éventualité, les volumes  $K_1$  et  $K_2$  seront dits adjacents.

Si en l'occurrence de cette condition est satisfaite, le maillage est dit admissible.

**Maillage utilisé :** Le maillage  $\tau$  de  $\Omega$  est défini par des volumes de contrôle (ou cellules)  $K$  de la manière suivante :

1. Les volumes de contrôle  $K$  sont des polygones convexes tels que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau} \bar{K}.$$

2. Pour chaque cellule  $K$ , il existe un point  $x_K \in K$  appelé centre, tel que les propriétés suivantes soient vérifiées
  - a. Pour chaque cellule  $L$  adjacente à  $K$ , le segment de droite  $(x_K, x_L)$  est perpendiculaire à l'arête commune aux deux cellules  $K$  et  $L$ . On notera  $e = K|L$  (voir la figure suivante).

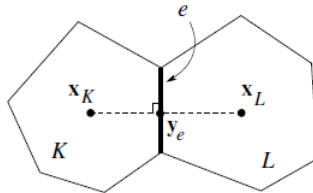


FIGURE 3.2 – Maillage bidimensionnel en volumes finis.

- b. Pour chaque arête  $e$  appartenant au bord  $\partial\Omega$ , la droite passant par  $x_K$  et perpendiculaire à l'arête  $e$  intersecte  $e$ .

Un tel maillage sera dit admissible au sens des Volumes Finis.

Après avoir établi à la section suivante la formulation en Volumes Finis du problème (3.1), on donnera des exemples de maillages admissibles au sens des Volumes Finis. Il s'agit de maillages triangulaires et de maillages de type Voronoï.

### 3.3.2 Formulation en Volumes Finis

Cet théorème est considéré comme l'un des principes de la méthode des volumes finis.

**Théorème 3.2.** [12] (Théorème de Gauss-Ostrogradisky) Pour une fonction  $\phi \in C_2$  et  $K \in \tau$ , donne

$$\int_K \nabla \phi dx = \int_{\partial K} \phi n_K d\gamma(x) = \sum_{\sigma \in \varepsilon_K} \int_{\sigma} \phi(x, t) n_{K, \sigma} d\gamma(x),$$

où  $d\gamma$  est la mesure de Lebesgue sur  $\partial K$ .

$\varepsilon_K$  l'ensemble des sommets inclus dans  $\partial K$ .

Pour  $\sigma \in \partial K$ ,  $n_{K, \sigma}$  le vecteur normal sur  $\sigma$  dirigé vers l'extérieur de  $\partial K$ .

De même on trouve que

$$\int_K \Delta \phi dx = \int_{\partial K} \nabla \phi n_{K, \sigma} d\gamma(x) = \sum_{\sigma \in \varepsilon_K} \int_{\sigma} \nabla \phi(x, t) n_{K, \sigma} d\gamma(x).$$

On commence par intégrer l'équation de Poisson sur une cellule  $K$

$$\int_K -\Delta u dx = \int_K f dx.$$

En utilisant la formule de la divergence (Théorème 3.2), on obtient

$$-\int_{\partial K} \nabla u \cdot n d\Gamma = |K| f_K. \quad (3.15)$$

Où  $n$  est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de  $K$ , et  $f_K$  est la valeur moyenne de  $f$  dans la cellule  $K$ , c'est-à-dire

$$f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f dx. \quad (3.16)$$

On note  $\varepsilon_K$  l'ensemble des arêtes de la cellule  $K$ , et on décompose le bord de  $K$  comme suit

$$\partial K = \bigcup_{e \in \varepsilon_K} e. \quad (3.17)$$

La relation (3.15) s'écrit comme

$$-\sum_{e \in \varepsilon_K} \int_e \nabla u \cdot n_{K, e} d\Gamma = |K| f_K. \quad (3.18)$$

Où  $n_{K, e}$  est la normale unitaire à  $e$  dirigée vers l'extérieur de  $K$ .

Pour approcher le flux à travers l'arête  $e$ , on écrit

$$-\int_e \nabla u \cdot n_{K,e} d\Gamma \simeq F_{K,e}. \quad (3.19)$$

Où  $F_{K,e}$  est le flux numérique à travers l'arête  $e$  associé à la cellule  $K$ . Le schéma des "Volumes Finis" s'écrit alors

$$\sum_{e \in \varepsilon_K} F_{K,e} = |K| \cdot f_K, \quad \forall K \in \tau. \quad (3.20)$$

On considère les inconnues  $(u_K)_{K \in \tau}$  associées à chaque volume de contrôle, avec les approximations

$$u_K \approx \frac{1}{|K|} \int_K u(x) dx.$$

On désigne également par  $(u_e)_{e \in \varepsilon_K}$  des valeurs associées aux arêtes de la cellule  $K$ , qui seront utilisées de manière intermédiaire et finalement éliminées.

On distingue les cas où une arête  $e$  appartient ou non au bord  $\partial\Omega$ .

- Pour une arête  $e$  d'une cellule  $K$  telle que  $e \not\subseteq \partial\Omega$ , c'est-à-dire n'appartenant pas au bord de  $\Omega$ .

- a. Pour un centre  $x_K \notin e$ , le flux numérique  $F_{K,e}$  est choisi tel que

$$F_{K,e} = -\frac{(u_e - u_K)}{d_{K,e}} |e|. \quad (3.21)$$

Où  $d_{K,e}$  est la distance de  $x_K$  à l'arête  $e \in \partial\Omega$ . Le choix de  $F_{K,e}$  est fait pour  $x_K \notin e$  de sorte que  $d_{K,e} \neq 0$ . L'approximation (3.19), (3.21) correspond à la consistance des flux numériques.

Pour éliminer les valeurs  $u_e$ , on suppose qu'il y a conservation des flux numériques à travers les arêtes. Précisément, pour l'arête  $e = K|L$  commune aux deux volumes de contrôle  $K$  et  $L$ , on impose

$$F_{K,e} = -F_{L,e}. \quad (3.22)$$

Autrement dit, l'approximation du flux  $-\int_e \nabla u \cdot n_{K,e} d\Gamma$  est égale à celle du flux  $\int_e \nabla u \cdot n_{L,e} d\Gamma$  (on a  $n_{K,e} = -n_{L,e}$ ). On écrit alors

$$F_{K,e} = -\frac{(u_e - u_K)}{d_{K,e}} |e| = -F_{L,e} = \frac{(u_e - u_L)}{d_{L,e}} |e|,$$

ce qui donne

$$d_{L,e}u_K + d_{K,e}u_L = \underbrace{(d_{K,e} + d_{L,e})}_{d(x_K, x_L)} u_e.$$

Par conséquent

$$u_e = \frac{d_{L,e}u_K + d_{K,e}u_L}{|x_K - x_L|}.$$

On obtient donc

$$F_{K,e} = -\frac{(u_K - u_L)}{|x_K - x_L|}|e|. \quad (3.23)$$

b. Pour un centre  $x_K \in e$ , on choisit  $u_K = u_L$  où  $L$  est la cellule adjacente ayant l'arête  $e$  en commun avec  $K$ . Cela revient à fusionner les cellules  $K$  et  $L$ . Ainsi, pour une cellule  $K$  strictement située à l'intérieur de  $\Omega$ , on peut supposer que  $x_K \notin \partial K$ .

• Pour une arête  $e$  d'une cellule  $K$  telle que  $e \subseteq \partial\Omega$ , c'est-à-dire appartenant au bord de  $\Omega$  :

Dans ce cas, on utilise la relation

$$d_{K,e}F_{K,e} = (u_K - u_e)|e|, \quad (3.24)$$

avec

$$u_e = \frac{1}{|e|} \int_e g d\Gamma. \quad (3.25)$$

En particulier, si  $x_K \in e \subseteq \partial\Omega$ , alors  $d_{K,e} = 0$  et on choisit

$$u_K = u_e = \frac{1}{|e|} \int_e g d\Gamma \quad (e \subseteq \partial\Omega). \quad (3.26)$$

Autrement dit, dans ce cas, la valeur de  $u_K$  est connue dans ces cellules.

En résumé, le schéma des "Volumes Finis" s'écrit

$$\sum_{e \in \varepsilon_K} F_{K,e} = |K|f_K, \quad \forall K \in \tau, \quad (3.27)$$

avec

$$F_{K,e} = -\frac{(u_K - u_L)|x_K - x_L|}{|e|} \text{ si } e \not\subseteq \partial\Omega, \text{ } e = K|L \text{ et } x_K \notin e,$$

$$d_{K,e}F_{K,e} = (u_K - u_e)|e| \text{ où } u_e = \frac{1}{|e|} \int_e g, d\Gamma \text{ si } e \subseteq \partial\Omega.$$

**Remarque 3.1.** Si l'on considère des conditions aux limites de Neumann homogènes  $\nabla u \cdot n = 0$  sur une partie  $e \subset \partial\Omega$ , alors on impose  $F_{K,e} = 0$  pour toute arête  $e \subset \partial\Omega$ .

**Remarque 3.2.** Les intégrales dans (3.27) peuvent être calculées à l'aide de formules de quadrature. Par exemple, on peut utiliser les formules suivantes

$$\int_K f(x) dx \approx |K|f(x_K),$$

$$\int_e g d\Gamma \approx |e|g(x_K) \text{ si } x_K \in e \subset \partial K \subset \partial\Omega.$$

### 3.3.3 Exemples de maillages admissibles

1. **Grille cartésienne** : Pour  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , on peut utiliser un maillage cartésien (uniforme pour simplifier). Soit  $N$  le nombre de points de discrétisation dans les directions  $x$  et  $y$ . On note  $h = \frac{1}{N-1}$  le pas de discrétisation. Pour  $i, j = 1, \dots, N$ , les cellules  $K_{ij}$  sont définies par

$$K_{ij} = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[ \times ]y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}[ \text{ avec } x_{i-\frac{1}{2}} = (i-1)h \text{ et } y_{j-\frac{1}{2}} = (j-1)h.$$

Les centres  $x_{K_{ij}}$  des cellules sont les barycentres des cellules

$$x_{K_{ij}} = (x_i, y_j)^\top \text{ avec } x_i = x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} = i\frac{h}{2} \text{ et } y_j = y_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} = j\frac{h}{2}.$$

2. **Maillage triangulaire** : On considère une triangulation du domaine  $\Omega$ , admissible au sens des éléments finis si deux triangles ont une arête commune alors ils ont deux sommets communs. On suppose que tous les angles des triangles sont plus petits que  $\frac{\pi}{2}$ . En conséquence, dans un triangle les médiatrices s'intersectent à l'intérieur du triangle. Les volumes de contrôle sont les triangles de la triangulation et les centres  $x_K$  des cellules sont choisis comme les centres de masse des triangles, c'est-à-dire l'intersection des médiatrices. Avec l'hypothèse sur les angles, les centres  $x_K$  se trouvent à l'intérieur des triangles. On remarquera qu'une triangulation de Delaunay ne fournit pas nécessairement des triangles ayant tous des angles inférieurs ou égaux à  $\frac{\pi}{2}$ .
3. **Maillage Voronoï** : Soit  $P$  un ensemble de points appartenant au domaine  $\Omega$ . On définit les cellules de Voronoï par rapport à chaque point  $x \in P$  par

$$K_x = \{y \in \Omega, |x - y| < |z - y|, \forall z \in P, z \neq x\}.$$

La construction des cellules de Voronoï est basée sur la détermination des régions délimitées par les médiatrices des segments joignant les points de  $P$ . Les volumes de contrôles  $K$  sont choisis comme étant les cellules de Voronoï associées à une triangulation de Delaunay du domaine  $\Omega$ . à chaque cellule de Voronoï  $K$ , on associe le centre  $x_K \in K$  qui est un sommet de la triangulation.

### 3.3.4 Système linéaire

Pour fixer les idées, on choisit un maillage de Voronoï. En particulier, pour les cellules  $K$  ayant (au moins) une arête sur le bord de  $\Omega$ , le centre  $x_K$  appartient au bord  $\partial\Omega$ . Avec le maillage de Voronoï, le schéma "Volumes Finis" s'écrit

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{\substack{e \in \varepsilon_K \\ e \not\subset \partial\Omega}} F_{K,e} = |K| f_K, \quad \forall K \in \tau, \\ & \text{avec } F_{K,e} = -\frac{(u_K - u_L)}{|x_K - x_L|} |e| \text{ si } e \not\subset \partial\Omega, e = K|L, \\ & \bullet u_K = u_e = \frac{1}{|e|} \int_e g d\Gamma \text{ si } e \subset \partial\Omega. \end{aligned}$$

Le système linéaire s'écrit  $Au = b$  avec la matrice  $A$  de taille  $N \times N$  où  $N$  est le nombre de volumes de controooooole intérieurs, c'est-à-dire les volumes de controooooole qui ne possèdent pas d'arêtes appartenant au bord  $\partial\Omega$ . La matrice  $A$  est symétrique et elle est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} \dots & \sum_{e_K \in \varepsilon_K, e_K \not\subset \partial\Omega} \frac{|e_K|}{d_{e_K}} & \dots & -\frac{|e_{K,L_1}|}{d_{e_{K,L_1}}} & \dots & -\frac{|e_{K,L_2}|}{d_{e_{K,L_2}}} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \dots & -\frac{|e_{K,L_1}|}{d_{e_{K,L_1}}} & \dots & \sum_{e_{L_1} \in \varepsilon_{L_1}, e_{L_1} \not\subset \partial\Omega} \frac{|e_{L_1}|}{d_{e_{L_1}}} & \dots & -\frac{|e_{L_1,L_2}|}{d_{e_{L_1,L_2}}} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \dots & -\frac{|e_{K,L_2}|}{d_{e_{K,L_2}}} & \dots & -\frac{|e_{L_1,L_2}|}{d_{e_{L_1,L_2}}} & \dots & \sum_{e_{L_2} \in \varepsilon_{L_2}, e_{L_2} \not\subset \partial\Omega} \frac{|e_{L_2}|}{d_{e_{L_2}}} & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} K \\ \\ L_1 \\ \\ L_2 \end{matrix}$$

On a noté les distances  $d_{e_K} = d_{e_{K,L}} = |x_K - x_L|$  pour une arête  $e_K = e_{K,L}$  commune aux deux

cellules  $K$  et  $L$  ( $e_K \not\subset \partial\Omega$ ). Les cellules  $L_1, L_2, \dots$  sont les cellules ayant une arête en commun avec la cellule  $K$ .

### Assemblage de la matrice $A$

Dans la pratique, pour construire la matrice  $A$ , on parcourt les arêtes du maillage de Voronoï. Pour une arête (intérieure) courante  $e = K|L$ , on ajoute les contributions des deux cellules adjacentes  $K$  et  $L$

$$\begin{pmatrix} & K & & L & \\ \dots & +\frac{|e|}{d_e} & \dots & -\frac{|e|}{d_e} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & -\frac{|e|}{d_e} & \dots & +\frac{|e|}{d_e} & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} K \\ \\ \\ L \end{matrix}$$

avec  $d_e = |x_K - x_L|$ .

### 3.3.5 Equation elliptique 2D avec coefficients discontinus

Cette section généralise le problème elliptique en considérant des coefficients de l'EDP discontinus. On cherche une fonction  $u = u(x)$  définie pour  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , où  $\Omega$  est un domaine polygonal, telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = g, & \text{sur le bord } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.28)$$

avec  $f$  et  $g$  des fonctions données, et  $A = A(x)$  une matrice  $2 \times 2$  symétrique définie positive. En intégrant l'équation différentielle (3.28) sur chaque cellule  $K$  du maillage "Volumes Finis" de  $\Omega$ , on obtient

$$\sum_{e \in \varepsilon_K} F_{K,e} = |K|f_K,$$

où le flux  $F_{K,e}$  associé à la cellule  $K$  à travers l'arête  $e \subset \partial K$  est donné par

$$F_{K,e} = - \int_e A(x)\nabla u \cdot n_{K,e} d\Gamma,$$

avec  $n_{K,e}$  la normale unitaire à  $e$  dirigée vers l'extérieur de  $K$ . Si  $e \not\subset \partial\Omega$  est une arête communes aux deux cellules  $K$  et  $L$ , on approxime le flux exact  $F_{K,e}$  par

$$F_{K,e} \simeq F_{K,e} := -A_{K,e} \frac{(u_e - u_K)}{d_{K,e}} |e|, \quad (3.29)$$

où  $d_{K,e}$  est la distance de  $x_K$  à l'arête  $e \subset \partial K$ , ( $A_{K,e} = \lim_{x \rightarrow x_e, x \in K} A(x)$  où  $x_e$  désigne le point milieu de l'arête  $e$ , et  $u_e$  représente une approximation de  $u$  sur l'arête  $e$ ).

On impose la conservation des flux numériques à travers l'arête  $e = K|L$ , c'est-à-dire  $F_{K,e} = -F_{L,e}$ . En éliminant le terme  $u_e$  de l'expression (3.29) pour  $F_{K,e}$ , on obtient ( $e \not\subset \partial\Omega$ )

$$F_{K,e} = -\frac{A_{K,e}A_{L,e}}{(d_{K,e}A_{L,e} + d_{L,e}A_{K,e})}(u_L - u_K)|e|.$$

qui peut s'écrire comme

$$F_{K,e} = -A_{K,L}^* \frac{(u_L - u_K)}{d_{K,L}} |e|, \quad (3.30)$$

où le coefficient  $A_{K,L}^*$  est donné par

$$\frac{1}{A_{K,L}^*} = \frac{1}{A_{K,e}} \left( \frac{d_{K,e}}{d_{K,L}} \right) + \frac{1}{A_{L,e}} \left( \frac{d_{L,e}}{d_{K,L}} \right)$$

avec  $d_{K,L} = |x_K - x_L|$ . Le coefficient  $A_{K,L}^*$  est obtenu par moyenne harmonique de  $A_{K,e}$  et  $A_{L,e}$ , pondérée par les distances  $d_{K,e}$  et  $d_{L,e}$ .

---

---

# CHAPITRE 4

---

## VOLUMES FINIS POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLES

Dans ce chapitre, nous avons appliqué les volumes finis pour le problème de Navier-Stokes incompressible. Pour simplifier l'idée de cette méthode, nous choisirons une discrétisation admissible rectangulaire uniforme. La résolution des systèmes linéaires a été réalisée en appliquant l'algorithme connu sous le nom SIMPLE.

### 4.1 Position de problème

On s'intéresse à présent aux équations de Navier-Stokes incompressibles. Il s'agit d'un problème d'évolution en temps obtenu à partir des équations de Stokes avec un terme convectif non-linéaire. Le terme convectif non-linéaire sera linéarisé et traité de façon semi-implicite par un schéma décentré (upwind).

On cherche la vitesse  $U(x, y, t) = (u, v)(x, y, t)$  définie de  $\Omega \times (0, T)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et la pression

$p = p(x, y, t)$  définie de  $\Omega \times (0, T)$  dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\begin{cases} U_t + (U \cdot \nabla)U - \nu \Delta U + \nabla p = f, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} U = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ U = g, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ U(0) = U_0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Le problème (4.1) s'écrit sous la forme simplifiée suivante :

### Equations de la quantité de mouvement

Suivant la direction  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (4.2)$$

Suivant la direction  $y$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g. \quad (4.3)$$

### Equation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.4)$$

où  $u$ ,  $v$  sont respectivement les composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse,  $p$  le champ de pression,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  la viscosité cinématique,  $g$  le champ de gravité terrestre.

#### 4.1.1 Maillage rectangulaire utilisé

$\tau = (K_{ij})_{i=1, \dots, N_1; j=1, \dots, N_2}$  est un maillage admissible de  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ , si les hypothèses suivantes sont satisfaites

#### Hypothèses

H1. Soient  $N_1 \in \mathbb{N}^*$ ,  $N_2 \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_1, \dots, h_{N_1} > 0$  tel que  $\sum_{i=1}^{N_1} h_i = L_1$ ,  $k_1, \dots, k_{N_2} > 0$ ,  $\sum_{j=1}^{N_2} k_j = L_2$ ,

H2. Soient  $h_0 = 0$ ,  $h_{N_1+1} = L_1$ ,  $k_0 = 0$ ,  $k_{N_2+1} = L_2$ . Pour  $i = 1, \dots, N_1$ , soit  $x_{\frac{1}{2}} = 0$ ,

$x_{i+\frac{1}{2}} = x_{i-\frac{1}{2}} + h_i$ . Pour  $j = 1, \dots, N_2$ , soit  $y_{\frac{1}{2}} = 0$ ,  $y_{j+\frac{1}{2}} = y_{j-\frac{1}{2}} + k_j$ . Alors

$$\left(x_{N_1+\frac{1}{2}} = L_1; y_{N_2+\frac{1}{2}} = L_2\right) \text{ et } K_{ij} = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right].$$

H3. Soient  $(x_i)_{i=0, \dots, N_1+1}$  et  $(y_j)_{j=0, \dots, N_2+1}$  tel que

$$- x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} \text{ pour } i = 1, \dots, N_1, x_0 = 0, x_{N_1+1} = L_1,$$

$$- y_{j-\frac{1}{2}} < y_j < y_{j+\frac{1}{2}} \text{ pour } j = 1, \dots, N_2, y_0 = 0, y_{N_2+1} = L_2,$$

où  $(x_i, y_j)$  pour  $i = 1, \dots, N_1$ ;  $j = 1, \dots, N_2$ , ensemble de centres des volumes de contrôle

$K_{ij}$ .

Ces hypothèses signifient que nous avons un maillage de volumes finis admissible.

## 4.1.2 Principe de la méthode

La méthode des éléments finis discontinue est souvent appelée méthode de volumes finis, car elle multiplie l'équation d'origine par une fonction caractéristique de la cellule  $K_{ij}$ , définie par  $1_{K_{ij}}(w) = 1$  si  $w \in K_{ij}$ ,  $1_{K_{ij}}(w) = 0$  si  $w \notin K_{ij}$ , et l'inconnue discrète peut être considérée comme une combinaison linéaire de fonctions de ce type. Ainsi, la méthode de volumes finis est basée sur le principe de conservation de la variable générale  $\phi$  sur chaque volume élémentaire.

La solution approchée obtenue par cette méthode est une fonction constante par morceaux.

L'équation générale du problème (4.1) est intégrée sur chaque volume de contrôle pour obtenir l'équation discrète qui contient les valeurs de  $\phi$  dans le domaine d'étude.

**Définition 4.1.** [5] (*Discrétisation temporelle de  $(0, T)$* ). Une discrétisation du temps de  $(0, T)$  est donnée par une valeur naturelle  $M$  et une suite de valeurs réels  $(t^n)_{n \in [0, M]}$  avec  $t^0 = 0$  et  $t^n = n\delta t$ , où  $\delta t$  est le pas du temps défini par  $\delta t = \frac{T}{M} = t^{n+1} - t^n$ , pour  $n \in [0, M]$ .

## 4.1.3 Schéma numérique

Pour  $K_{ij}$  un volume de contrôle d'un maillage admissible, on construit une solution  $\phi$  approchée constante par morceaux sur  $\Omega \times (0, T)$ , donnée par

$$\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K_{ij}} \phi \, dx dy dt = \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \phi_{ij} dt$$

où  $\phi_{ij}$  est la valeur de  $\phi$  sur  $K_{ij}$ .

Pour calculer l'intégrale, il doit utilisé  $\phi$  au temps  $n\delta t$  ou  $(n+1)\delta t$ , ou alternativement, une combinaison de  $\phi$  en  $n\delta t$  et en  $(n+1)\delta t$ . On peut généraliser l'approche par un parametre de poid  $f$ , l'intégrale de  $\phi_{ij}$  sur  $[n\delta t, (n+1)\delta t]$  est donné par

$$\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \phi_{ij} dt = f\phi_{ij}^{(n+1)\delta t} + (1-f)\phi_{ij}^{n\delta t} \quad 0 \leq f \leq 1.$$

Suivant les valeurs de  $f$  nous avons les types de schémas suivants

- Si  $f = 0$  le schéma est dit explicite.
- Si  $f = 1$  le schéma est dit implicite.
- Si  $f = 0.5$  le schéma est dit de Crank-Nicolson.

## 4.2 Discrétisation des équations

En effectuant l'intégration de l'équation (4.2) terme par terme sur un volume de contrôle quelconque représenté par  $K_{ij}$  avec l'application du du théorème de Gauss-Ostrogradsky.

Commençons par la première partie

$$\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K_{ij}} \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dt = [u_{i,j}^{(n+1)\delta t} - u_{i,j}^{n\delta t}] \Delta x \Delta y.$$

De même pour la deuxième partie

$$\begin{aligned} & \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K_{ij}} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy dt \\ &= \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K_{ij}} \left( \frac{\partial(u.u)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right) dx dy dt \\ &= \delta t \int_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} \left( \frac{\partial(u.u)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \delta t \int_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} [u^2]_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} dy + \delta t \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} [vu]_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} dx \\ &= \delta t \Delta y [(u^2)_{i+1/2,j} - (u^2)_{i-1/2,j}] + \delta t \Delta x [(vu)_{i,j+1/2} - (vu)_{i,j-1/2}]. \\ &= M_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j} + M_{i-1/2,j} u_{i-1/2,j} + M_{i,j+1/2} u_{i,j+1/2} + M_{i,j-1/2} u_{i,j-1/2}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
M_{i+1/2,j} &= \delta t \Delta y u_{i+1/2,j}, \\
M_{i-1/2,j} &= \delta t \Delta y u_{i-1/2,j}, \\
M_{i,j+1/2} &= \delta t \Delta x v_{i,j+1/2}, \\
M_{i,j-1/2} &= \delta t \Delta x v_{i,j-1/2}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

De même pour la troisième partie

$$\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K_{ij}} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dt = [p_{i+1/2,j} - p_{i-1/2,j}] \Delta y \delta t.$$

De même pour la quatrième partie

$$\begin{aligned}
& \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K_{ij}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy dt \\
&= \delta t \int_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} \right] dy + \delta t \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j-1/2} \right] dx \\
&= \delta t \Delta y \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} \right] + \delta t \Delta x \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j-1/2} \right].
\end{aligned}$$

Les dérivées de  $u$  qui sont résultées de terme de flux diffusif sont données par

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}, \\
\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}, \\
\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta y}, \\
\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j-1/2} &= \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y}.
\end{aligned}$$

En substituant dans (4.2), on trouve

$$\begin{aligned}
& \left[ u_{i,j}^{(n+1)\delta t} - u_{i,j}^{n\delta t} \right] \Delta x \Delta y + M_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j} + M_{i-1/2,j} u_{i-1/2,j} + M_{i,j+1/2} u_{i,j+1/2} + M_{i,j-1/2} u_{i,j-1/2} \\
&= -\frac{1}{\rho} [p_{i+1/2,j} - p_{i-1/2,j}] \Delta y \delta t + \nu \delta t \Delta y \left[ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right] \\
&+ \nu \delta t \Delta x \left[ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \right].
\end{aligned} \tag{4.6}$$

On peut trouver

$$p_{i+1/2,j} - p_{i-1/2,j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2},$$

$$p_{i,j+1/2} - p_{i,j-1/2} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2}.$$

Pour estimer les valeurs de  $u$  sur les faces de volumes de contrôle, nous utilisons les définitions suivantes

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{i+1,j}, \\ u_{i-1/2,j} &= \frac{1}{2}u_{i-1,j} + \frac{1}{2}u_{i,j}, \\ u_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{i,j+1}, \\ u_{i,j-1/2} &= \frac{1}{2}u_{i,j-1} + \frac{1}{2}u_{i,j}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Pour un schéma implicite en temps le terme de l'espace dans l'équation final est prendre à l'instant  $(n+1)\delta t$ , mais les valeurs de  $u$  et  $v$  qui construit les coefficients  $M_{i+1/2,j}$ ,  $M_{i-1/2,j}$ ,  $M_{i,j+1/2}$  et  $M_{i,j-1/2}$  sont prendre à l'instant  $t = n\delta t$ . Alors, on obtient

$$\begin{aligned} &A_{i,j}u_{i,j}^{n+1} + A_{i+1,j}u_{i+1,j}^{n+1} + A_{i-1,j}u_{i-1,j}^{n+1} + A_{i,j-1}u_{i,j-1}^{n+1} + A_{i,j+1}u_{i,j+1}^{n+1} \\ &= \Delta x \Delta y u_{i,j}^n - \alpha p_{i+1,j} + \alpha p_{i-1,j}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{i+1,j} &= \frac{1}{2}M_{i+1/2,j} + \frac{\nu\delta t\Delta y}{\Delta x}, \\ A_{i-1,j} &= \frac{1}{2}M_{i-1/2,j} + \frac{\nu\delta t\Delta y}{\Delta x}, \\ A_{i,j-1} &= \frac{1}{2}M_{i,j-1/2} + \frac{\nu\delta t\Delta x}{\Delta y}, \\ A_{i,j+1} &= \frac{1}{2}M_{i,j+1/2} + \frac{\nu\delta t\Delta x}{\Delta y}, \\ A_{i,j} &= \left[ \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} (M_{i+1/2,j} + M_{i-1/2,j} + M_{i,j+1/2} + M_{i,j-1/2}) - \frac{2\nu\delta t\Delta y}{\Delta x} - \frac{2\nu\delta t\Delta x}{\Delta y} \right], \\ \alpha &= \frac{1}{2\rho}\Delta y\delta t. \end{aligned}$$

Donc, l'équation linéaire prendre la forme finale suivante

$$A_{i,j}u_{i,j}^{n+1} + A_{i+1,j}u_{i+1,j}^{n+1} + A_{i-1,j}u_{i-1,j}^{n+1} + A_{i,j-1}u_{i,j-1}^{n+1} + A_{i,j+1}u_{i,j+1}^{n+1} = B_{i,j},$$

où  $B_{i,j} = \Delta x \Delta y u_{i,j}^n - \alpha p_{i+1,j} + \alpha p_{i-1,j}$ .

Avec les mêmes étapes, nous avons discrétisé l'équation (4.3) suivant la direction  $y$ . En ajoutant le terme source.

D'abord, effectuons l'intégrale de terme source sur un volume de contrôle, on obtient

$$\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K_{ij}} \rho g dx dy dt = \delta t \Delta x \Delta y (\rho g)_{i,j}.$$

Alors, l'équation discrète suivant la direction  $y$  prendre la forme suivante

$$\begin{aligned} & A_{i,j} v_{i,j}^{n+1} + A_{i+1,j} v_{i+1,j}^{n+1} + A_{i-1,j} v_{i-1,j}^{n+1} + A_{i,j-1} v_{i,j-1}^{n+1} + A_{i,j+1} v_{i,j+1}^{n+1} \\ & = C_{i,j} + \delta t \Delta x \Delta y (\rho g)_{i,j}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

où  $C_{i,j} = \Delta x \Delta y v_{i,j}^n - \beta p_{i,j+1} + \beta p_{i,j-1}$ ,  $\beta = 1/(2\rho)\Delta x \delta t$  et  $A_{i,j}$  sont définis précédemment.

On va intégrer l'équation de la masse (4.4)

$$\begin{aligned} & \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K_{ij}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy dt \\ & = \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{K_{ij}} \left( \frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y} \right) dx dy dt \\ & = \delta t \int_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} \left( \frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y} \right) dx dy \\ & = \delta t \int_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} [u]_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} dy + \delta t \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} [v]_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} dx \\ & = \delta t \Delta y [(u)_{i+1/2,j} - (u)_{i-1/2,j}]^{n+1} + \delta t \Delta x [(v)_{i,j+1/2} - (v)_{i,j-1/2}]^{n+1}. \end{aligned}$$

Alors, l'équation de la conservation de la masse discrète est prend la forme

$$\delta t \Delta y [u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}] + \delta t \Delta x [v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j-1/2}^{n+1}] = 0. \quad (4.10)$$

### 4.3 Discrétisation des conditions aux limites

Dans notre problème, nous avons un domaine avec 4 frontières : inférieure, supérieure, gauche et droite.

Sur les frontières inférieure et supérieure, on a

$$u_{i,0} = u_{i,N_2+1} = 0 \text{ et } v_{i,0} = v_{i,N_2+1} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N_1.$$

Sur les frontières gauche et droite, on a

$$u_{0,j} = u_{N_1+1,j} = 0 \text{ et } v_{0,j} = v_{N_1+1,j} = 0, \forall j = 1, \dots, N_2.$$

## 4.4 Algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation )

### 4.4.1 Maillage décalé

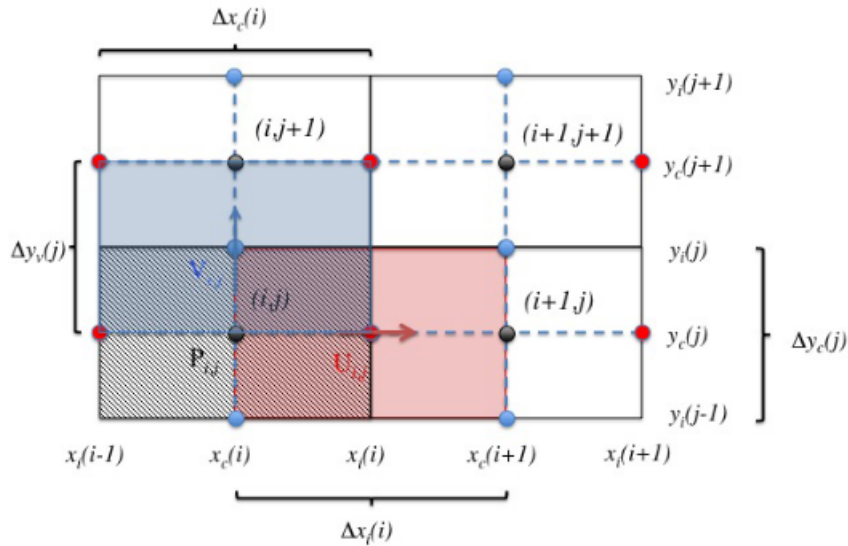


FIGURE 4.1 – Positions des composantes de vitesse  $u$  (rouge),  $v$  (bleu) et de la pression (noir) sur la grille de calcul.

L'algorithme SIMPLE est basé sur l'utilisation d'un champ de pression estimé pour pouvoir déterminer une première approche du champ de vitesse.

Afin de rendre possible l'application de l'algorithme, il est nécessaire de ne pas discrétiser les champs de vitesse et de pression sur la même grille. Ainsi, nous allons décrire les deux réseaux de points de leur utilisation pour mieux discrétiser les différentes équations aux dérivées partielles gouvernant le problème physique.

Le choix de grille favorise d'une part les propriétés de conservation en passant d'un volume de contrôle à un autre, et facilite d'autre part la résolution numérique du système d'équations et le traitement des conditions aux limites. Des deux grilles différentes sont donc définies de la manière suivante :

1. Une grille dite principale pour le calcul de variable  $p$ .
2. Une grille dite décalée pour évaluer les champs de vitesse  $u$  et  $v$  dont les noeuds sont localisés à mi-distance de ceux de la grille principale (Figure 4.1).

Chaque composante de vecteur de vitesse  $u$  ou  $v$  est seulement décalée dans sa propre direction.

Supposons maintenant que nous connaissions un champ de pression  $p^*$ , défini aux points différents de réseau. Dans l'algorithme SIMPLE, les équations de correction de pression sont obtenues à partir des équations de quantité de mouvement.

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction  $x$  sur le volume de contrôle décalé de centre  $(i + 1/2, j)$  et de limites  $(i, j)$  et  $(i + 1, j)$ , (Figure 4.1, volume de contrôle en rouge), donne

$$\begin{aligned} (A_{i,j})_u (u_{i,j}^{n+1})_u + (A_{i+1,j})_u (u_{i+1,j}^{n+1})_u + (A_{i-1,j})_u (u_{i-1,j}^{n+1})_u + (A_{i,j-1})_u (u_{i,j-1}^{n+1})_u \\ + (A_{i,j+1})_u (u_{i,j+1}^{n+1})_u = B_{i,j}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction  $y$  sur le volume de contrôle décalé de centre  $(i, j + 1/2)$  et de limites  $(i, j)$  et  $(i, j + 1)$ , (Figure 4.1, volume de contrôle en bleu), donne

$$\begin{aligned} (A_{i,j})_v (v_{i,j}^{n+1})_v + (A_{i+1,j})_v (v_{i+1,j}^{n+1})_v + (A_{i-1,j})_v (v_{i-1,j}^{n+1})_v + (A_{i,j-1})_v (v_{i,j-1}^{n+1})_v \\ + (A_{i,j+1})_v (v_{i,j+1}^{n+1})_v = C_{i,j} + \delta t \Delta x \Delta y (\rho g)_{i,j}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Soit un champ de pression initial  $p^*$ . Les solution provisoires des équations précédentes seront notées  $u^*$  et  $v^*$  (notons que  $u^*$  et  $v^*$  ne vérifient pas l'équation de continuité).

$$\begin{aligned} (A_{i,j})_u (u_{i,j}^*)_u + (A_{i+1,j})_u (u_{i+1,j}^*)_u + (A_{i-1,j})_u (u_{i-1,j}^*)_u + (A_{i,j-1})_u (u_{i,j-1}^*)_u \\ + (A_{i,j+1})_u (u_{i,j+1}^*)_u = B_{i,j}^*, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} (A_{i,j})_v (v_{i,j}^*)_v + (A_{i+1,j})_v (v_{i+1,j}^*)_v + (A_{i-1,j})_v (v_{i-1,j}^*)_v + (A_{i,j-1})_v (v_{i,j-1}^*)_v \\ + (A_{i,j+1})_v (v_{i,j+1}^*)_v = C_{i,j}^* + \delta t \Delta x \Delta y (\rho g)_{i,j}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

où  $B_{i,j}^* = \Delta x \Delta y u_{i,j}^n - \alpha p_{i+1,j}^* + \alpha p_{i-1,j}^*$  et  $C_{i,j}^* = \Delta x \Delta y v_{i,j}^n - \beta p_{i,j+1}^* + \beta p_{i,j-1}^*$ .

A ce stade, aucune des deux variables n'est correcte. Toutes les deux nécessitent une correction.

### Equations de correction de vitesse et de pression

On définit la correction de pression  $p'$  comme étant la différence entre la pression correcte  $p$  et la pression estimée  $p^*$

$$p = p^* + p'. \quad (4.15)$$

La soustraction des équations (4.13) et (4.14) des équations (4.11) et (4.12) respectivement donne

$$(A_{i,j})_u (u_{i,j} - u_{i,j}^*) + \sum (A_{n,b})_u (u_{nb} - u_{nb}^*) = -\alpha p'_{i+1,j} + \alpha p'_{i-1,j}, \quad (4.16)$$

$$(A_{i,j})_v (v_{i,j} - v_{i,j}^*) + \sum (A_{n,b})_v (v_{nb} - v_{nb}^*) = -\beta p'_{i,j+1} + \beta p'_{i,j-1}. \quad (4.17)$$

En négligeant les termes  $\sum (A_{n,b})_v (v_{nb} - v_{nb}^*)$  dans les deux équations précédentes, ce qui représente le principe de l'algorithme SIMPLE, on obtient les équations de correction de vitesses suivantes

$$(A_{i,j})_u (u_{i,j} - u_{i,j}^*) = -\alpha p'_{i+1,j} + \alpha p'_{i-1,j}, \quad (4.18)$$

$$(A_{i,j})_v (v_{i,j} - v_{i,j}^*) = -\beta p'_{i,j+1} + \beta p'_{i,j-1}, \quad (4.19)$$

alors, les équations de correction de **vitesses** deviennent

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* - \frac{\alpha}{(A_{i,j})_u} (p'_{i+1,j} - p'_{i-1,j}), \quad (4.20)$$

$$v_{i,j} = v_{i,j}^* - \frac{\beta}{(A_{i,j})_v} (p'_{i,j+1} - p'_{i,j-1}). \quad (4.21)$$

Maintenant, on cherche à trouver une équation qui permet la détermination de  $p'$ . Au début de cette procédure, on écrit les équations (4.20) et (4.21) sur les interfaces de volumes de contrôle

**Face Est :**

$$u_{i+1/2,j} = u_{i+1/2,j}^* - \frac{2\alpha}{(A_{i+1/2,j})_u} (p'_{i+1,j} - p'_{i,j}). \quad (4.22)$$

**Face Ouest :**

$$u_{i-1/2,j} = u_{i-1/2,j}^* - \frac{2\alpha}{(A_{i-1/2,j})_u} (p'_{i,j} - p'_{i-1,j}). \quad (4.23)$$

**Face Nord :**

$$v_{i,j+1/2} = v_{i,j+1/2}^* - \frac{2\beta}{(A_{i,j+1/2})_v} (p'_{i,j+1} - p'_{i,j}). \quad (4.24)$$

**Face Sud :**

$$v_{i,j-1/2} = v_{i,j-1/2}^* - \frac{2\beta}{(A_{i,j-1/2})_v} (p'_{i,j} - p'_{i,j-1}). \quad (4.25)$$

En substituant les équations (4.22)-(4.25) dans l'équation de la conservation de la masse discrète (4.10), on obtient une équation en  $p'$  qui prend la forme suivante

$$\begin{aligned} & \delta t \Delta y \left[ u_{i+1/2,j}^* - \frac{2\alpha}{(A_{i+1/2,j})_u} (p'_{i+1,j} - p'_{i,j}) - u_{i-1/2,j}^* + \frac{2\alpha}{(A_{i-1/2,j})_u} (p'_{i,j} - p'_{i-1,j}) \right] \\ & + \delta t \Delta x \left[ v_{i,j+1/2}^* - \frac{2\beta}{(A_{i,j+1/2})_v} (p'_{i,j+1} - p'_{i,j}) - v_{i,j-1/2}^* + \frac{2\beta}{(A_{i,j-1/2})_v} (p'_{i,j} - p'_{i,j-1}) \right] = 0, \end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$a_{i,j} p'_{i,j} + a_{i+1,j} p'_{i+1,j} + a_{i-1,j} p'_{i-1,j} + a_{i,j+1} p'_{i,j+1} + a_{i,j-1} p'_{i,j-1} = b, \quad (4.26)$$

où

$$a_{i,j} = 2\alpha \delta t \Delta y \left( \frac{1}{(A_{i+1/2,j})_u + (A_{i-1/2,j})_u} \right) + 2\beta \delta t \Delta x \left( \frac{1}{(A_{i,j+1/2})_v + (A_{i,j-1/2})_v} \right),$$

$$a_{i+1,j} = -2\alpha \delta t \Delta y \frac{1}{(A_{i+1/2,j})_u},$$

$$a_{i-1,j} = -2\alpha \delta t \Delta y \frac{1}{(A_{i-1/2,j})_u},$$

$$a_{i,j+1} = -2\beta \delta t \Delta x \frac{1}{(A_{i,j+1/2})_v},$$

$$a_{i,j-1} = -2\beta \delta t \Delta x \frac{1}{(A_{i,j-1/2})_v},$$

$$b = \delta t \Delta y (u_{i-1/2,j}^* - u_{i+1/2,j}^*) + \delta t \Delta x (v_{i,j-1/2}^* - v_{i,j+1/2}^*).$$

Enfin, l'algorithme SIMPLE est résumé comme suit :

1. Choisir un champ de pression initial  $p^*$ .
2. Résoudre les équations de quantité de mouvement ((4.13) et (4.14))

$$\begin{aligned} & (A_{i,j})_u (u_{i,j}^*)_u + (A_{i+1,j})_u (u_{i+1,j}^*)_u + (A_{i-1,j})_u (u_{i-1,j}^*)_u + (A_{i,j-1})_u (u_{i,j-1}^*)_u \\ & + (A_{i,j+1})_u (u_{i,j+1}^*)_u = B_{i,j}^*, \end{aligned}$$

$$(A_{i,j})_v(v_{i,j}^*)_v + (A_{i+1,j})_v(v_{i+1,j}^*)_v + (A_{i-1,j})_v(v_{i-1,j}^*)_v + (A_{i,j-1})_v(v_{i,j-1}^*)_v \\ + (A_{i,j+1})_v(v_{i,j+1}^*)_v = C_{i,j}^* + \delta t \Delta x \Delta y (\rho g)_{i,j},$$

pour déduire un champ de vitesse  $u^*$  et  $v^*$ .

3. Calcul de terme source  $b$ , puis résoudre l'équation (4.26).
4. Corriger les champs de pression et de vitesse via les équations (4.15), (4.20) et (4.21)

$$p = p^* + p',$$

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* - \frac{\alpha}{(A_{i,j})_u} (p'_{i+1,j} - p'_{i-1,j}), \\ v_{i,j} = v_{i,j}^* - \frac{\beta}{(A_{i,j})_v} (p'_{i,j+1} - p'_{i,j-1}).$$

6. Remplacer l'ancien champ de pression  $p$  trouvée à l'étape 4 par le nouveau  $p^*$  et revenir à l'étape 2. Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

#### 4.4.2 Résolution du système linéaire

Les équations algébriques résultant de la discrétisation des équations de Navier-Stokes par la méthode de volumes finis présentent des systèmes linéaires sous forme matricielle  $AU = B$  qui sont résolus par des méthodes directes ou itératives, comme la méthode d'élimination de Gauss et la méthode Gauss-Seidel respectivement.

---

# RÉFÉRENCES

- [1] E. Blayo, Notes de cours sur la méthode des éléments finis. M1 Mathématiques Appliquées et Industrielles, Laboratoire Jean Kuntzmann, INRIA, 2010.
- [2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et Application, Masson, Paris 1992.
- [3] D. Cherel, Décomposition de domaine pour des systèmes issus des équations de Navier-Stokes, (Doctoral dissertation), Université de Grenoble ALPES, FRANCE, 2012.
- [4] S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Dover, New York, 1981.
- [5] N. Doudi, Simulation numérique des écoulements dans une cavité ouverte curviligne, Thèse pour obtenir le diplôme de Magister, université de KASDI MERBAH - Ouargla, 2006.
- [6] R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin, The finite volume method, Handbook for Numerical Analysis, Ph. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland, 715-1022, 2000.
- [7] J. L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-Linéaires, faculté des sciences de PARIS, FRANCE, 1969.
- [8] J. Lions and L. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume 1, Dunod Paris, 1968.
- [9] J. MATOS, EDP et méthodes hilbertiennes, (2017/2018).
- [10] A. Munnier, Equations aux dérivées partielles, Master. France. 2018.  
<https://hal.science/cel-01955823>

- [11] E. Popov and A. L. Fehrembach, Note de Math : Vecteurs, Dérivées et Opérateurs différentiels, 2014.
- [12] A. Smirnov, Hedra : A Control-Volume Finite-Element PDE Solver, West Virginia University, November 3, 2001.
- [13] R. Temam, Navier-Stokes equations : Theory and Numerical Analysis, North-Holland, Publishing Company-Amsterdam, NewYork OXFORD, 1977.
- [14] H. Triebel, Theory of function space II. Monographs in Mathematics, 84, Birkhauser Verlag, Basel 1992.
- [15] S. Tas, Formulation variationnelle des problèmes aux limites elliptiques linéaires, Cours Master, 2013.
- [16] C. Zuily, Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus, (Vol. 130). Dunod, 2002.

## ملخص

في هذا العمل. قمنا بدراسة نوع من أنواع معادلات Navier-Stokes في حالة غاز غير قابل للضغط في فضاء ثنائي البعد. لإثبات وجود ووحداية الحل استخدمنا طريقة Faedo-Galerkin التي تعتمد على خاصية التراص. ومن أجل الحل العددي استعملنا طريقة الحجم المنتهية على شبكة حجوم مربعة لتسهيل فكرة تطبيق هذه الطريقة على هذا النوع من المعادلات.

الكلمات المفتاحية: معادلات Navier-Stokes, طريقة Faedo-Galerkin, خاصية التراص, طريقة الحجم المنتهية, صيغة Green.

## Résumé

Dans ce travail. Nous avons étudié un type des équations de Navier-Stokes dans le cas d'un gaz incompressible. Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution faible Nous avons utilisé la méthode Faedo-Galerkin, basée sur la propriété compacité. Pour trouver la solution numérique de ce problème, nous avons utilisé la méthode des volumes finis avec un maillage rectangulaire uniforme afin de faciliter l'idée d'appliquer cette méthode dans ce type de problème.

**Mots clés:** Equations de Navier-Stokes, Méthode de Fraedo-Galarkin, Lemme de compacités, Méthode de volumes finis, Formule de Green.

## Abstract

In this work. We have studied a type of Navier-Stokes equations in the case of an incompressible gas. To prove the existence and uniqueness of the weak solution we used the Faedo-Galerkin method, based on the compactness property. To find the numerical solution of this problem, we used the finite volume method with a uniform rectangular mesh in order to facilitate the idea of applying this method in this type of problem.

**Keywords:** Navier-Stokes equations, Fraedo-Galarkin method, Compactness lemma, Finite volume method, Green's formula.