N° d’ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l’Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ D’ELOUED

FACULTÉ DE SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d’étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Présenté par: - Deiat Tedjani
- Houamdi Hicham

<u>Thème</u>

L'inverse de Drazin

Soutenu le : juin 2014

Devant le jury compose de

Mr :Ahfouda Belliadi	Ma (B).Univ .El-oued	Président
Mr : Messai Ouan Mohamed Salah	Ma (B).Univ .El-Oued	Examinateur
Mr : Mansour Abdelwahab	Dr Univ .El-Oued	Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

Sommaire

Notations:

$\mathcal{R}(A) := \{\omega \in W;\ \omega = A(v)\ ,\ v \in V\}$.

$A_{/T} :=$ La restriction de A au sous espace vectoriel T.

$\mathcal{N}(A) := \{v \in V, A(v) = 0_V\}$.

$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 ;\ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

$V_1 \dot{+} V_2 :=$ La somme directe de deux espaces vectoriel.

I :=L'application identitéque .

$\mathcal{I}(A) := \{B; ABA = A, B \text{ linéaire}\}$.

$\theta(A) := \{B; BAB = B, B \text{ linéaire}\}$.

$T_{\mathcal{N}(A)} := \{T; T \text{ un supplémentaire de } \mathcal{N}(A) \text{ dans } V\}$.

$S_{\mathcal{R}(A)} := \{S; S \text{ un supplémentaire de } \mathcal{R}(A) \text{ dans } W\}$.

$P_{(\mathcal{N}(A))} := \{P; P^2 = P;\ \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(A)\}$.

$Q_{(\mathcal{R}(A))} := \{Q; Q^2 = Q;\ \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(A)\}$.

$\mathcal{L}(V;W) :=$ Espace vectoriel topologique des opérateurs linéaires continus.

$P_{\mathcal{R}(A)} := \{P; P^2 = P, \mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(A) \text{ et } P^* = P\}$.

$\mathrm{Span}\,\mathcal{A} := \{\sum_{i \in I} \beta_i x_i\ ,\ x_i \in \mathcal{A}, \beta_i \in \mathbf{K}\}$

P_L Est un projecteur orthogonal où $\mathcal{R}(P) = L$.

$P_{L,T}$ Est un projecteur tels que $P \in \mathcal{L}(V;W)$, $\mathcal{R}(P) = L$ et $\mathcal{N}(A) = T$.

$\mathbf{k} :=$ Le corps des nombres réels ou complexes.

A^* La matrice adjoint de A

$\underline{A}$ L'application linéaire accessit de la matrice A

$\mathbf{C}^{m,n}(\mathbf{k})$ l'espace des matrices $m \times n$ sur $\mathbf{k}$

$A\{1\} := \{ABA = A;\ A \in \mathbf{C}^{m,n}(\mathbf{k}) \text{ et } B \in \mathbf{C}^{n,m}(\mathbf{k})\}$

$A\{2\} := \{BAB = B;\ A \in \mathbf{C}^{m,n}(\mathbf{k}) \text{ et } B \in \mathbf{C}^{n,m}(\mathbf{k})\}$

$A\{1,2\} := \{ABA = A \text{ et } BAB = B;\ A \in \mathbf{C}^{m,n}(\mathbf{k}) \text{ et } B \in \mathbf{C}^{n,m}(\mathbf{k})\}$

$[X, Y] = 0 \Leftrightarrow XY - YX = 0$

$A^{\pi} :=$ Est un projecteur orthogonal sur $\mathcal{N}(A)$

Chapitre 1:

Les inverses

Généralisés

Introduction générale

La notion d'inversibilité est une notion très importante dans tous les domaines de mathématiques. L'équation $A_X = Y$ possède une solution unique lorsque l'opérateur linéaire A est inversible, malheureusement, on ne se trouve pas toujours dans ce cas, en pratique, on obtient souvent des données sous forme d'une matrice rectangulaire qui est un opérateur non inversible, ou bien dans le cas général on se trouve avec un opérateur non surjectif ou non injectif, ou d'inverse non borné. Dan ce cas on essaie de trouver un opérateur qui possède le maximum de propriété que possède l'inverse s'il existait, un tel opérateur sera appelé un inverse généralisé de A.

Pour un opérateur A on peut définir différents types d'inverses généralisés, qui, malgré leurs différences, possèdent tous des propriétés communes, notamment leurs relations avec les projections.

Dans ce travail, on contente d'exposer différents types d'inverses généralisés, en basant d'une manière essentielle, sur leurs liens avec les projecteurs en question.

Ce travail est constitué de deux chapitres, le premier est une simple introduction à la notion de l'inverse généralisé, avec des propriétés élémentaires, le deuxième chapitre expose les propretés minimales des inverses généralisés dans un espace euclidien ou hilbertien dans un cas plus général, où le rôle des projecteurs est bien visible.

Chapitre 1: les inverses généralisés

Introduction

Soient V et W deux espaces vectoriels sur le même corps ☐ et ☐ un opérateur linéaire défini

de V dans W.

Au début de ce chapitre nous définissons l'inverse généralisé 𝒝 de ☐, qui est la solution au
système suivant:

☐☐𝒝☐ = ☐

𝒝☐𝒝 = 𝒝

☐ **……..(++)**

Où: 𝒝 est un opérateur linéaire défini de W dans V .

Remarquons que le système précédent admet plusieurs solutions, ce qui a conduit à la

définition de l'inverse généralisé ☐□,□

≉ unique de ☐ , qui est la solution du système suivant:

(1)

𝒝☐𝒝 = 𝒝

☐𝒝☐ = ☐

☐𝒝 = ☐

𝒝☐ = ☐ − P

☐

Tels que P et ☐ des projecteurs sur ☐(☐) et ℛ(☐) respectivement.

1-1 Préliminaires

1-1-1 Définition: Soient V□ et V□ deux espaces vectoriels de V ; on dit que V□ et V□ sont

supplémentaires si V□ ∩ V□ = {0□} et V□ + V□ = V.

De façon équivalente: tout vecteur v ϵ V s'écrit de manière unique v□ + v□ = v

Où v□ϵ V□ et v□ϵ V□. V est alors somme directe de V□ et V□ , noté par V□⊕ V□ = V.

1-1-2 Proposition: Tout sous espace vectoriel possède un supplémentaire.

1-1-3 Définition : On appelle opérateur linéaire $A: V \to W$, toute application telle que

$\forall\ v_1, v_2 \in V$, $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$ et $\forall\ v \in V$, $\forall\ \alpha \in \mathbf{k}$, on ait $A(\alpha v) = \alpha Av$.

Soit P un opérateur linéaire défini de V dans lui même.

1-1-4 Définition: On dit que P est un projecteur si $P^2 = P$.

1-1-5 Proposition: tout projecteur P décompose V en somme directe de deux sous espaces V_1 et V_2 Tels que:

$$V_1 \oplus V_2 = V, \text{ Où } V_1 = \mathcal{N}(P) \text{ et } V_2 = \mathcal{R}(P).$$

1-1-6 Proposition: toute somme directe détermine un projecteur P.

Preuve:

Soit $V_1 \oplus V_2 = V$, quel que soit $v \in V$ il existe (v_1, v_2) Unique tel que $v_1 + v_2 = v$,

on définie P par $P(v_1 + v_2) = v_1$. Alors P est linéaire et $P = P^2$.

1-1-7 Proposition: Soit $P : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes:

a) $P = P^2$

b) $P(v) = v$; $\forall v \in \mathcal{R}(P)$

c) $\mathcal{R}(I - P) = \mathcal{N}(P)$

d) $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$

e) $V = \mathcal{R}(I - P) \oplus \mathcal{R}(P)$

1-2 Inverse intérieur

1-2-1 Définition: Soit $B: W \longrightarrow V$ un opérateur linéaire, on dit que B est un inverse intérieur de A, si $ABA = A$.

1-2-2 Proposition: Soit B un inverse intérieur de A, alors

a) $(AB)^2 = AB$ et b) $(BA)^2 = BA$

c) $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$ et d) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(BA)$

Preuve:

a) $ABA = A \Rightarrow ABAB = AB \Rightarrow (AB)^2 = AB$.

b) $ABA = A \Rightarrow BABA = BA \Rightarrow (BA)^2 = BA$.

c) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(ABA) \subset \mathcal{R}(AB) \subset \mathcal{R}(A)$.

d) $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(BA) \subset \mathcal{N}(ABA) = \mathcal{N}(A)$

1-2-3 Théorème : Tout opérateur linéaire admet un inverse intérieur linéaire.

Preuve:

Soit A est un opérateur linéaire défini de V dans W

On pose $V = \mathrm{T} \oplus \mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A) \oplus S = W$ c'est-à-dire T est un Supplémentaire de $\mathcal{N}(A)$ dans V et S un supplémentaire de $\mathcal{R}(A)$ dans W, on considère

$A_{/_T} = \hat{A}$ (i.e; $\hat{A}$: T $\longrightarrow \mathcal{R}(A)$), Alors $\hat{A}$ admet un inverse $\widehat{B}$: $\mathcal{R}(A) \longrightarrow$ T , on définit

B sur W dans V par : $B(v) = \widehat{B}(v), \forall v \in \mathcal{R}(A)$ et $B(v) = 0$; $\forall v \in S$.

Exemple

Soit A est un opérateur linéaire de ℓ_2 dans lui mémé, définie par:

$$A(x_1; x_2; \ldots) = (0; x_1; x_2; \ldots)$$

On définit l'opérateur B de ℓ_2 dans lui mémé par:

$$B(x_1; x_2; \ldots) = (x_2; x_3; \ldots)$$

Donc,

$$ABA(x_1; x_2; \ldots) = AB(0; x_1; x_2; \ldots) = A(x_1; x_2; \ldots)$$

1-2-4 Remarque: On considère l'équation $Av = \omega$ tel que $v \in V$ et $\omega \in W$

Soit $B : W \longrightarrow V$ un opérateur linéaire, alors B est un inverse intérieur de A si et seulement si $B\omega$ est une solution de l'équation $Av = \omega$ pour tout ω appartenant à $\mathcal{R}(A)$.

1-2-5 Proposition: Soit B est un inverse intérieur de A, alors $(I - BA)$ est un projecteur sur $\mathcal{N}(A)$.

Preuve:

$(I - BA)^2 = I + BA - 2\,BA = I - BA$

Et $(I - BA)v = v - BAv = v, \forall\, v \in \mathcal{N}(A)$; $(i.e; \mathcal{R}(I - BA) = \mathcal{N}(A))$.

1-2-6 Proposition: Soit $B: W \longrightarrow V$ est un inverse intérieur linéaire de A, alors

$V = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(BA)$ $\;et\;$ $W = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(AB)$.

1-2-7 Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $B \in J(A)$.

b) $(AB)^2 = AB$ et $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$.

c) $(BA)^2 = BA$ et $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(BA)$.

d) $(BA)^2 = BA$ et $V = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(BA)$.

e) $(AB)^2 = AB$ et $W = \mathcal{N}(AB) \oplus \mathcal{R}(A)$.

f) $(BA)^2 = BA$ et $\mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\}$.

Preuve:

a) $\Rightarrow$ b), on applique la proposition (1-2-2) ; nous trouvons b)

b) $\Rightarrow$ c), il est évident que $(AB)^2 = AB$

Par (1-2-2) et (1-2-5) on a $\mathcal{R}(I - BA) = \mathcal{N}(BA) = \mathcal{N}(A)$

c) $\Rightarrow$ d), $V = \mathcal{N}(BA) \oplus \mathcal{R}(BA) = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(BA)$

d) $\Rightarrow$ e), Il est évident que $(AB)^2 = AB$

$W = \mathcal{N}(AB) \oplus \mathcal{R}(AB) = \mathcal{N}(AB) \oplus \mathcal{R}(A)$

e) $\Rightarrow$ f), il est évident que $(BA)^2 = BA$,

Chapitre 2:

Propriétés

minimales

Chapitre 2: Propriétés minimales

Introduction

Dans ce chapitre on utilise les inverses généralisés pour déterminer les solutions

approximantes de l'équation linéaire A☐ = ☐

2-1 Orthogonalité dans les espaces normés

Soit ☐ un espace normé et ☐ ⊂ ☐. ☐(☐, ☐) = ☐☐☐ {‖☐ − ☐‖; ☐ ∈ ☐}

On définit une notion d'orthogonalité comme suite :

☐ ⊥ ☐

⇔ ☐(☐, span{☐}) = ‖☐‖.

☐ ⊥ ☐

⇔ ☐(☐, ☐) = ‖☐‖; ∀☐ ☐ ☐ ; ☐ ⊂ ☐.

L'orthogonalité dans un espace normé n'est pas nécessairement symétrique.

Soit $\mathscr{M}$ un sous espace vectoriel dans ☐ et $\mathscr{M}$ admet un supplémentaire topologique dans ☐

P$_{\mathscr{M}}$:={ P ☐ $\mathscr{L}$ (☐) / P = P□ et $\mathscr{R}$(P) = $\mathscr{M}$}

☐(☐, P$_{\mathscr{M}}$) ≥ 1 := ☐P ☐ P$_{\mathscr{M}}$: ☐(☐, P) ≥ 1 ☐

2-1-1 Proposition: Soit P□ ☐ P$_{\mathscr{M}}$; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

☐) ‖ ☐−P□‖ = 1.

☐) ☐(P□) ⊥ $\mathscr{R}$(P□).

☐) ∀ ☐ ☐ ☐ , ‖ ☐ − P□☐‖ ≤ ‖ ☐ − ☐‖; ∀ ☐ ☐ $\mathscr{M}$.

Preuve:

Supposons ☐), soit ☐ ☐ ☐(P□), z ☐ $\mathscr{R}$(P□), alors

‖☐‖ = ‖(☐−P□)(☐ − ☐)‖ ≤ ‖☐ − ☐‖

Remarquons que,

$Uw + z$ est une solution de l'équation $Ax = w$ où $z \in \mathcal{N}(A)$. Maintenant nous cherchons la solution minimale. Par la proposition (2-1-1) on a:

$$\|(\mathrm{I} - \mathrm{P})Uw\| \leq \|Uw - z\|;\ \forall z \in \mathcal{R}(\mathrm{P})$$

Mais; $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{R}(\mathrm{P})$. Donc,

$$\|(\mathrm{I} - \mathrm{P})Uw\| \leq \|Uw - z\|;\ \forall z \in \mathcal{N}(A)$$

Alors, $(\mathrm{I} - \mathrm{P})Uw$ est une solution minimale de l'équation $Ax = w$

Mais, $(\mathrm{I} - \mathrm{P})Uw = UAUw = UQy = Uw$.

2-2-4 Théorème: Soient $A: \mathrm{D}(A) \subset N_1 \longrightarrow N_2$ un opérateur linéaire et U est un inverse orthogonal de A, si pour tout x appartenant à N_2, il existe z dans $\overline{\mathcal{R}(A)}$ unique tel que

$$\|x - z\| < \|x - y\|;\ \forall y \in \overline{\mathcal{R}(A)}$$

Alors, Uy est une solution minimale de l'équation $Ax = y$.

Preuve:

Par le théorème (2-2-2) on a:

Uy est l'unique solution approximante de l'équation $Ax = y$, donc Uy est l'unique solution de l'équation $Ax = Qy$.

On applique le théorème (2-2-3) à l'équation $Ax = Qy$, nous trouvons

$UQy = UAUy = Uy$ est une solution minimale de l'équation $Ax = y$.

2-3 Solution minimale d'une équation linéaire dans un espace de Hilbert

2-3-1 Théorème:[17] Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C une partie convexe Fermée non vide de $\mathcal{H}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$; il existe un et un seul point y_0 de C en lequel la fonction

$y \longrightarrow \|x - y\|$ Atteint son minimum, pour tout $y \in$ C .

approximante et $\| x_0 \| \leq \| w \|,\ \forall w \in X$

Conclusion générale

Nous avons devisée notre recherche en deux chapitre .

Le premier chapitre ,est une simple introduction à la notion de l'inverse généralisé , avec des propriétés été men taire le deuxième chapitre expose le propriétés minimales des inverses généralises dans un espace euclidien ou hilbertien dans un cas général ou le rôle des projecteurs est bien visible.