N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Etude des approximations des solutions aux équations différentielles.

Présenté par:Bellabaci chaima

Bettaher fattoum

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Dehda Bachir	MCA	Président	Univ. El Oued
Meftah Safia	MCA	Rapporteur	Univ. El Oued
Guesba Messaoud	MCA	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2021 – 2022

Remerciements

En tout premier lieu, on remercie le bon Dieu, tout puissant, de nous avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.
Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au ***"Etude de existence des approximations des solutions aux équations différentielles"****, sous la direction du* ***" Dr. Safia Meftah"****, nos plus grande gratitude va à notre encadreur, pour sa disponibilité et la confiance qu'elle nous a accordée. On a profité pendant longtemps du savoir et du savoir-faire dont on a pu bénéficier au cours de nombreuses discussions. Nous aimerons aussi la remercier pour l'autonomie qu'elle nous a accordée, et ses précieux conseils qui nous ont permis de mener à bien ce travail.*
Afin de n'oublier personne, nos sincères remerciements vont à tous ceux qui nous ont aidés à réaliser notre mémoire.

Notations générales

$P_n(x)$ polynome d'interpolation de Lagrange .

$\triangle(x)$ l'Erreur d'interpolation .

$\delta_n(\varepsilon)$ des fonctions d'ordre .

$F(y, \dot{y})$ une fonction numérique par rapport à y et $\dot{y}$.

$\dot{y} = \frac{dy}{d\theta}$ la dérivée premiére de y par rapport à θ.

$y' = \frac{dy}{dt}$ la dérivée premiére de y par rapport à t.

$\ddot{y} = \frac{d^2y}{d\theta^2}$ la dérivée dexiéme de y par rapport à θ.

$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ la dérivée premiére de F par rapport à y.

$F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ la dérivée dexiéme de F par rapport à y.

$F_{\dot{y}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}$ la dérivée premiére de F par rapport à $\dot{y}$.

$F_{y\dot{y}} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \dot{y}}$ la dérivée dexiéme de F par rapport à y et $\dot{y}$.

$F_{\dot{y}y} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial y}$ la dérivée dexiéme de F par rapport à $\dot{y}$ et y.

$F_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2}$ la dérivée dexiéme de F par rapport à $\dot{y}$.

Table des matières

Introduction générale

L'une des théories qui gagne actuellement en popularité parmi les chercheurs et les scientifiques en sciences est la théorie des perturbations en mécanique quantique et sa théorie des perturbations ou théorie des perturbations. En mathématiques et en physique, l'analyse multi-échelle comprend les techniques utilisées pour créer des approximations uniformément vraies pour résoudre des problèmes de perturbation. Cela se fait en introduisant des variables d'échelle rapide et lente à une variable indépendante et en traitant ainsi ces variables par les nouvelles variables indépendantes utilisées pour supprimer les termes profanes.

L'approximations est une partie très importante en mathématiques. Cela signifie supprimer un grand nombre de nombres et les convertir en un entier ou en terminant un nombre décimal. Les chercheurs ont eu recours aux approximations en raison de la difficulté à résoudre certains problèmes, en particulier les problèmes difficiles et non linéaires.
Ce travail est divisés en trois chapitres.

- Le premier chapitre est consacré aux notions de base et outils fonctionnels concernant des différents types des solutions approximatives et la théorie de la perturbation utilisés dans ce travail.
- Dans le deuxième chapitre, nous donnons les premiers concepts et propriétés utilisés pour définir la théorie de l'existence (Poincaré) et étudions les méthodes de Oscillation (perturbation simple, méthode de Lindsetd, méthode moyenne) avec des exemples de base.

- Dans le dernier chapitre, nous avons introduit quelques théorèmes pour prouver l'existence de solutions périodiques, et détaillé certaines de leurs applications.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques concepts de base sur l'équation différentielle et le concept d'approximation que nous utiliserons dans les chapitres 2 et 3.

1.1 Equation difféertielles

1.1.1 Introdution

Les équations différentielles sont utilisées depuis l'époque de Newton dans la compréhension des sciences physiques, de l'ingénierie et biologiques, en plus de leur contribution à l'étude de l'analyse mathématique, et leurs utilisations se sont répandues en économie, .. et en sociologie. Il est important dans tous les domaines de la science et de ses applications, voir [13, 14].

Définition 1.1.1. *Une équation différentielle est une relation d'égalité entre une variable indépendante, disons x, et une variable dépendante, disons $y(x)$ et une ou plusieurs dérivées différentielles $y', y', ...$ ce qui signifie que sous la forme générale*

$$F(x, y, y', y'', ...) = 0.$$

Cette équation est appelée équation différentielle ordinaire. Mais si le nombre de variables indépendantes est supérieur à un x indépendant, alors y et $z(x, y)$ sont une variable dépendante qui peut être partiellement dérivée à la fois pour x, y et l'équation qui contient les *variables indépendantes, la variable dépendante et leurs dérivées partielles s'appellent une équation aux dérivées partielles. Et elle est sous la forme suivante*

$$G(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, ...) = 0.$$

Par exemple, les équations différentielles

$$y'''^2 + 2y'^3 - 5y = \sin x, \tag{1.1}$$

$$y' + xy = x^2, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial z}{\partial y} = x. \tag{1.3}$$

On note que les équations(1.1) et (1.2) sont toutes deux des équation différentielles ordinaires, tandis que l'équation (1.3) est une équation différentiel partiel.

Définition 1.1.2. *L'ordre de l'équation est l'ordre du coefficient différentiel le plus grand de l'équation.*

Définition 1.1.3. *Le degré d'une équation est le degré (puissance) du coefficient différentiel le plus élevé de l'équation, à condition que tous les coefficients différentiels soient exempts de puissances fractionnaires.*

Remarque 1.1.1.

- *Avec les équation différentielles précédentes, on trouve que l'équation (1.1) est du troisiéme ordre et de degré, l'équation (1.2) est du premier ordre et du premier degré, tandis que l'équation (1.3) est une différentielle qui ne remplace pas notre étude et elle est du second ordre et du premier degré.*
- *Il existe des équations différentielles linéaires, qui sont des équations linéaires dans la variable dépendante et toutes ses dérivées.*

Exemple 1.1.1. *Soit l'équation linéaire du second ordre suivante*

$$x^2y'' + xy' + x^2y = e^x \sin x,$$

où la variable dépendante y et ses dérivées y',y'' sont linéaires, c'est-à-dire que chacune d'elles est élevée à la puissance une, et il n'y a pas de produits communs entre elles et peu importe que leurs coefficients sont des constantes ou des fonctions en x.

Remarque 1.1.2.

— *Si une équation différentielle n'est pas linéaire, par exemple*

$$yy'' + y' = x. \tag{1.4}$$

La non-linéarité n'affecte pas l'ordre de l'équation différentielle, donc l'équation (1.4) est non linéaire du second ordre.

— *La forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n est*

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + .. + P_1(x)y' + P_0(x)y = Q(x),$$

avec

$$\sum_{i=0}^{i=n} P_i(x)y^{(i)} = Q(x), \tag{1.5}$$

où $P_i(x)$ sont des fonctions de x, linéaires ou non linéaires, ainsi que pour la fonction $Q(x)$.

— *Si la fonction $Q(x)$ est nulle dans l'équation (1.6) pour toutes les valeurs de x, alors on dit que c'est une équation différentielle linéaire homogène, sinon l'équation différentielle est inhomogène.*

Exemple 1.1.2. *Soit l'équation*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

C'est une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre homogène.
L'équation

$$xy' + (\sin x)y = x^2(\sin x + 2).$$

C'est une équation différentielle ordinaire linéaire inhomogène du premier ordre.

1.1.2 Résoudre l'équation différentielle

La fonction $y = y(x)$ est appelée une solution à l'équation différentielle $F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$ si

1. Elle est dérivable n fois,
2. elle vérifie l'équation différentielle, c'est-à-dire :$F(x, y(x), y'(x), ..., y^n(x)) = 0$.

Exemple 1.1.3. *$y(x) = c \sin x$ est une solution à l'équation différentielle $y'' + y = 0$ où c fixé.*
Alors $y(x) = c \sin x \Rightarrow y'(x) = c \cos x \Rightarrow y''(x) = -c \sin x$.
Et donc on trouve que

$$y''(x) + y(x) = -x \sin x + x \sin x = 0.$$

1.1.3 Solution générale et la solution privée

La solution générale de l'équation différentielle d'ordre n est celle pour laquelle n est une constante optionnelle contrairement à la spéciale, elles donnent l'équation différentielle.

Exemple 1.1.4. *La solution générale de l'équation $y^3 - 5y^2 + 6y' = 0$, est $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$, où c_1, c_2, c_3 constantes facultatives. Nous constatons que certaines solutions spéciales sont dans les images*

$$y = e^{2x} + e^{3x}, \quad y = 3 + 5e^{2x^2}, \quad y = 5 - 2e^{3x}.$$

1.1.4 Théorème d'existence et d'unicité

Nous allons introduire la théorie de base de l'existence et de l'unicité des solutions de l'équation différentielle ordinaire, voir [13].

Théorème 1.1.1. *On suppose l'équation différentielle*

$$y' = f(x, y). \tag{1.6}$$

On suppose la condition initiale

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.7}$$

Si la fonction $f(x,y)$ *est définie dans la région fermée* R*.*

$R : \{|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b\}$*, où* a, b *sont constantes.*
1. *La fonction* $f(x,y)$ *est continue et donc finie, c'est-à-dire s'il existe un nombre positif* M *alors* $|f(x,y)| \leq M$*.*

2. *La fonction* $f(x,y)$ *a une dérivée partielle par rapport à* y*, et borné par* K*, i,e* $\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq K$*, où* K *est un nombre positif.*

L'équation (1.6) n'a qu'une seule solution $y = y(x)$*. Il satisfait la condition initiale (1.7) dans la région* $|x - x_0| \leq h$ *où* $h = min(a, \frac{b}{M})$*.*

Exemple 1.1.5. *Trouver la solution unique du problème* $y(0) = 0$*,* $y' = x^2 + y^2$*.*
La solution
Puisque $f(x,y) = x^2 + y^2$ *est une fonction polynomiale en* x, y*.*
Donc la solution avec les conditions initiales est la solution unique existe dans le rectangle R *de centre a* $(0,0)$ *:*
$a, b > 0 \ R : |x| \leq a \ , \ |y| \leq b$
$|f(x,y)| = |x^2 + y^2| \leq |x^2| + |y^2| = x^2 + y^2 = M \ , \ h = min(a, \frac{b}{a^2+b^2})$
Autrement dit h *dépend de* a, b*, si c'était* $a = b = 1$ *on trouve* $h = min(a, \frac{1}{2})$ *dans* $h = \frac{1}{2}$*.*
Donc l'équation $y' = x^2 + y^2$*, il n'a qu'une seule solution dans la période* $|x| \leq \frac{1}{2}$ *remplit la condition* $y(0) = 0$*.*

1.2 Solutions approximatives

De nombreuses équations différentielles ne sont pas résolubles. L'intérêt des mathématiciens depuis le début de l'arithmétique est l'étude de l'existence ou des propriétés de la solution et de la nature de la solution. Et aussi en termes d'obtention de la solution approchée et de la solution numérique. Nous donnons quelques exemples.

Exemple 1.2.1. *Le premier exemple est une série étudiée par Euler (1754) avec somme* *partielle*

$$S_m(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n n! \varepsilon^n.$$

Il est clair que la série diverge car, désignant les termes de la série par a_n, on a

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = n\varepsilon.$$

Cependant, le terme pour les petites valeurs ε n'augmente pas beaucoup au début (c'est-à-dire ($n\varepsilon << 1$), mais la croissance affecte de manière significative la somme partielle des valeurs m plus grandes. La question est, pouvons-nous utiliser le nombre de premiers termes d'une telle série divergente pour approximer une fonction dans un certain sens ?
Cela semble être une idée étrange, mais considérez la fonction $f(\varepsilon)$ définie par l'intégrale convergente

$$f(\varepsilon) = \int_0^\infty \exp^{-t} \frac{dt}{1+\varepsilon t}.$$

L'intégration partielle conduit à l'expression

$$f(\varepsilon) = S_m(\varepsilon) + (-1)^{m+1}(m+1)! \varepsilon^{m+1} \int_0^\infty \exp^{-t} \frac{dt}{1+\varepsilon t}^{m+2}.$$

L'intégrale de droite converge, et on estime

$$|f(\varepsilon) - S_m(\varepsilon)| \leq (m+1)! \varepsilon^{m+1}.$$

En quelque sorte, à préciser plus loin, pour ε assez petit, S_m constitue une approximation de f. Pour être plus explicite, nous donnons quelques détails chiffrés, voir [10].

ε	$f(\varepsilon)$	$S_2(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2$
05	*9543*	*9550*
10	*9156*	*9200*
20	*8521*	*8800*

Pour voir l'étendue de la différence, on entre $S_m(10)$ pour $m = 1, ..., 21$.
On trouve la meilleure approximation dans ce cas pour $m = 1, ..., 21$. Il est typique pour l'approximation asymptotique d'avoir une sélection optimale du nombre de termes. Donnant la meilleure approximation et le nombre fini de la série, il n'y a pas un tel choix fini optimal.

m	$S_m(f(1) = 9156)$	m	$S_m(f(1) = 9156)$
0	*1*	*11*	*9154*
1	*9000*	*12*	*9159*
2	*9200*	*13*	*9153*
3	*9140*	*14*	*9161*
4	*9164*	*15*	*9148*
5	*9152*	*16*	*9169*
6	*9159*	*17*	*9134*
7	*9154*	*18*	*9198*
8	*9158*	*19*	*9076*
9	*9155*	*20*	*9319*
10	*9158*	*21*	*8809*

1.2.1 Approximation d'un nombre

Approximations consiste à supprimer un grand nombre de chiffres et à les convertir en nombre entier ou à terminer un nombre décimal. Nous pouvons donc estimer le montant d'argent, les temps et les distances sont approximatifs.

Exemple 1.2.2.

$$\pi \simeq 3.141592654..., \quad e^{10} \simeq 23.14069263..., \quad \sqrt{2} \simeq 1.414213562...$$

1.3 Types d'approximations

Dans cette section, nous allons discuter l'un des types d'approximations, à savoir les approximations numériques. Nous serons consacré pour l'étude les deux méthodes (taylor/Elur et renge kutta).

1.3.1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la plus simple méthode numérique et consiste à substituer la dérivée $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, voir [1]. Par l'expression

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

où $h = \dfrac{b-a}{N}$ (N entier donné) est le pas d'intégration numérique. Considérons alors une subdivision de $[a, b]$ sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $h,\ i = 0, ..., N$ et $x_i = a + ih$, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.
L'expression (1.8) entraine $y(x+h) = y(x) + hy'(x)$ d'où $y(x+h) = y(x) + hf(x, y)$.
Par conséquent, avec la condition initiale (x_0, y_0), et prenant un pas régulier $h = x_{i+1} - x_i$, en posant i approximation de $y(x_i)$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \tag{1.8}$$

L'algorithme d'Euler s'écrit alors

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \quad \text{donné}, \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 1, ..., N-1. \end{cases}$$

Définition 1.3.1. ***(Erreur d'Euler)*** *Une méthode numérique approchant $y(x_j)$ par y_j telle que l'erreure*

$$e_j = y(x_j) - y_j,$$

vérifie $|e_j| \leq kh^p$, est dite d'ordre $p, (k \in \mathbb{R}_*^+)$.

1.3.2 Méthode Taylor d'ordre deux

L'idée consiste à remplacer $y(x)$ la solution de l'équation différentielle sur $[x_i, x_{i+1}]$.
En effet

$$y''(x) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} f(x, y).$$

et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on obtient alors lalgorithme de Taylor d'ordre deux

$$\begin{cases} h = \dfrac{b-a}{N},\ x_0 = a,\ y_0 \, \text{donné},\ x_{i+1} = x_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i + \frac{h^2}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f)(x_i, y_i), \quad i = 0, ..., N-1. \end{cases}$$

Cependant cette méthode présente un inconvenient certain qui réside dans le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f$ qui peut être difficile, pour éviter ce problème on utilise souvent la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 donnée plus bas, voir [8].

1.3.3 Méthode du Runge-kutta

Plus généralement, avec r évaluations de f, on peut atteindre une méthode d'ordre r si $r \leq 4$. Pour atteindre l'ordre 5, six évaluations sont nécessaires. Alors, la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 est très utilisée. Les méthodes de Runge-Kutta sont **stables.**

Méthode du Runge-Kutta d'ordre 3

$k_1 = f(t_i, u_i),$

$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + k_1 \frac{h}{2}),$

$k_3 = f(t_i + h, u_i + (2k_2 - k_1)h),$

$u_{i+1} = u_i + (k_1 + 4k_2 + k_3)\frac{h}{6}.$

Méthode du Runge-Kutta d'ordre 4

$k_1 = f(t_i, u_i),$

$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + k_1 \frac{h}{2}),$

$k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + k_2 \frac{h}{2}),$

$k_4 = f(t_i + h, u_i + k_3 h),$

$u_{i+1} = u_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\frac{h}{6}.$

1.4 Théorie de la perturbation

Dans la section suivante on introduit et on définit quelque notions concernant la théorie des perturbations.

1.4.1 Introduction

La théorie des perturbations est définie comme la théorie des solutions approchées à un problème, voir [10].
La théorie des perturbations s'est développée très rapidement en mathématiques, l'analyse a été établie au XVIIIe siècle, et de nombreuses découvertes classiques dans le domaine. Il peut être attribué à Newton, Euler, Lagrange et d'autres. Les origines de la théorie classique des perturbations se trouvent principalement dans la mécanique céleste, qui est l'une des théories archaiques modernes. Son développement récent est venu avec la théorie de la non-oscillation linéaire en électronique et en mécanique. Le nom du physicien néerlandais Balthasar van der Pol est associé à ce domaine.

Remarque 1.4.1. *Désormais ε sera toujours un petit paramètre possitif $0 < \varepsilon < 1$ et les fonctions seront réelles.*

Nous terminons cette introduction par quelque exemples.

Exemple 1.4.1. *Nous allons montrer maintenant que aussi dans le cas des solutions bornées la différence entre les solutions du preturbé et le problème non perturbé peut etre considérable. Considérez l'initiale problème de valeur*

$$\ddot{x} + (1+\varepsilon)^2 x = 0,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1.$$

La solution est

$$x(t) = \frac{1}{1+\varepsilon} \sin(1+\varepsilon)t.$$

Le problème non perturbé est

$$\ddot{y} + y = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1,$$

avec solution $y(t) = \sin t$.
Calculons la différence $x(t) - y(t)$, les solution sont proches pendant longtemps, mais si l'on attend assez long temps, prenons par exemple $t = \pi/(2\varepsilon)$, la différece devient considérable, Cet exemple pour illustrer qu'en construisant d'approximation de solution de problème de valeur initiale, il faut indiquer sur quel intervalle de temps on cherche une approximation.

Dans de nombreux cas, nous voudrions que cet intervalle de temps soit aussi grand que possible.
Nous allons maintenant introduire un certain nombre de concepts qui nous permettent d'estimer les fonctions vectorielles en fonction d'un petit paramètre ϵ. Voir [7].

1.4.2 Exemple du système non linéaire

Masse attachée à un fil tendu. Considérons le mouvement d'un particule de masse m attachée au centre d'un fil élastique tendu, voir [5]. Fixez les extrémités du fil à une distance de $2d$, comme illustré à figure.
Supposons que la particule est contrainte de se déplacer uniquement dans la direction horizontale ou z. Si la loi de hooke est valable pour chaque partie du fil tendu, alors la tension t dans chaque partie du fil est

$$T = k(L - a),$$

où L est la longueur étirée, a est la longueur pour laquelle $= 0$ et k est le coefficient de rigidité, donc la force totale dans la direction sur la masse est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -(2s)\sin\theta = -2k(L-a)(\frac{x}{L}), \tag{1.9}$$

avec $\sin\theta = \frac{x}{L}$. Puisque $L^2 = d^2 + x^2$. Eq. (1.9) peut s'écrire

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2kx - \frac{2kax}{\sqrt{d^{2+x^2}}} = 0. \tag{1.10}$$

Si $\mid x \mid \ll d$, alors Eq. (1.10) devient

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \left[\frac{2k(d-a)}{d}\right]x + (\frac{ka}{d^3})x^3 + ... = 0.$$

1.5 Matériel de base

Considérons la fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, la fonction $f(t, x, \varepsilon)$ est continue par rapport aux variables $t \in \mathbb{R}$ et $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, ε étant un petit paramètre. La

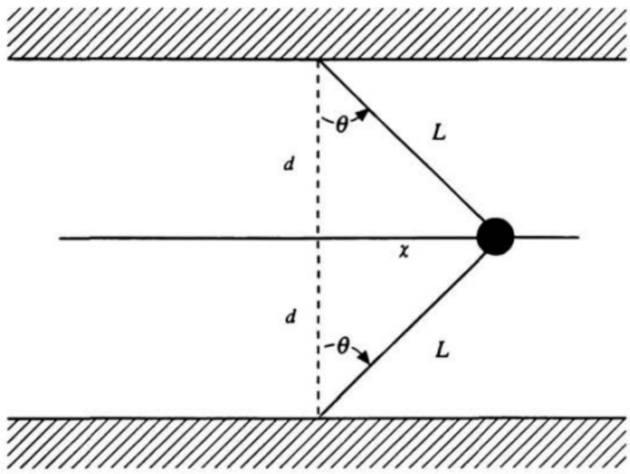

FIGURE 1.1 – Masse attachée à un fil tendu.

fonction f doit avoir un développement en séries par rapport au petit paramètre ε. Dans le cas simple, f a un développement de Taylor par rapport à ε proche à $\varepsilon = 0$, on a

$$f(t, x, \varepsilon) = f(t, x) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x) + \cdots \varepsilon^n f_n(t, x) + \cdots ,$$

avec des coefficients f_1, $f_2, \cdots$ qui dépendent de t et x. Les expressions ε, ε^2, $\cdots$, $\varepsilon^n, \cdots$ sont appellés les fonctions d'ordre. Nous cherchrons un développement de la form

$$f(t, x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \delta_n(\varepsilon) f_n(t, x) + \cdots .$$

dans lequel $\delta_n(\varepsilon)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ sont des fonctions d'ordre, voir [10].

1.5.1 Fonctions d'ordre

Définition 1.5.1. *la fonction $\delta(\varepsilon)$ est continue positive dans $(0, \varepsilon_0]$ et monotone décroissante telle que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon)$ existe lorsque ε tends vers zero ; $\delta(\varepsilon)$ est appelé une fonction d'ordre.*

Définition 1.5.2. *a. $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$ lorsque $\varepsilon \to 0$ s'il existe une constante k tell que $\delta_1(\varepsilon) \leq k\delta_2(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*

b. $\delta_1(\varepsilon) = o\left(\delta_2(\varepsilon)\right)$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$ *si*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = 0.$$

Remarque 1.5.1. *dans un certain nombre de cas, la limite suivante exist*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = k.$$

dans ce cas on trouve avec la définition $\delta_1(\varepsilon) = O\left(\delta_2(\varepsilon)\right)$. *Donc si cette limite existe, on a de manière simple la* O*-estimation pour les fonctions d'ordre.*

Exemple 1.5.1. *On comparer les fonction suivant*

$f(\varepsilon) = \varepsilon,\ g(\varepsilon) = 2\varepsilon \Rightarrow g(\varepsilon) = Of(\varepsilon)$

$f(\varepsilon) = \varepsilon,\ g(\varepsilon) = \sin\varepsilon - 3\varepsilon \Rightarrow g(\varepsilon) = Of(\varepsilon)$

$f(\varepsilon) = \varepsilon^2,\ g(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g(\varepsilon) = \circ f(\varepsilon)$

$f(\varepsilon) = \varepsilon\, g(\varepsilon) = \varepsilon^2 \Rightarrow g(\varepsilon) = \circ f(\varepsilon)$

Remarque 1.5.2.

- *Les symboles d'ordre de Landau permettent aussi de comparer des fonctions qui n'existent pas pour* $\varepsilon = 0$. *Par exemple,*

$$\frac{1}{\varepsilon} = \circ(\frac{1}{\varepsilon^2}).$$

  l'estimation nous renseigne sur le taux de divergence des deux fonctions $1/\varepsilon$ *et* $1/\varepsilon^2$ *pour* $\varepsilon \longrightarrow 0$.
- *Contrairement aux règles d'utilisation des symboles de Landau, nous omettrons généralement l'expression pour* $\varepsilon \longrightarrow 0$ *dans nos estimations.*
- *L'estimation* $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ *peut parfois être amélioré en une estimation et parfois non. Par exemple,* $\varepsilon = O(2\varepsilon)$ *et* $\varepsilon \neq \circ(2\varepsilon)$, *mais* $\varepsilon^2 = O(\varepsilon)$, *et* $\varepsilon^2 = \circ(\varepsilon)$. *Il est naturel de comparer des fonctions d'ordre, et il faut parfois être plus précis dans nos estimations, voir [3].*

1.5.2 Dévoloppement simple

Considérez le problème de la valeur initiale

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon),\ x(0),$$

avec $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Si nous pouvons développer $f(t, x, \varepsilon)$ dans une série de Taylor par rapport à ε

$$f(t, x, \varepsilon) = f_0(t, x) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x) \cdots .$$

alors on pourrait supposer qu'il existe une expansion similaire pour la solution

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 f_2(t, x) \cdots .$$

Naturellement, nous nous attendrions à ce qu'il s'agisse à peu près d'une extension de la solution. La procédure générale d'approximation simple consiste à remplacer l'équation par le développement des puissances. Et réglez tous les coefficients des puissances de ε l'exposant à zéro. Cela donne un système d'équations différentielles linéaires inhomogènes que l'on peut résoudre récursivement, voir [10].

Chapitre 2

Perturbation de l'équations différentielles

Dans ce chapitre, nous déterminons les solutions des systèmes de perturbations, en utilisant des théorie de l'éxistence et quelque méthodes ; la perturbation simple et la méthode de Lindstedt, et en fin méthode de la moyenne.

2.1 Théorème de l'expansion de Poincaré

Considérons le problème de valeur initiale

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon),\ x(t_0) = \eta.$$

Supposons que $f(t, x, \varepsilon)$ est développé pour une série de Taylor convergente par rapport à ε et x dans un certain domaine, le problème non perturbatif est

$$\dot{x_0} = f(x, t_0, 0).$$

Dans de nombreuses applications, par exemple si nous recherchons des solutions pèriodiques, nous ne connaissons pas les conditions initiales précises. On pose

$$x_0(t_0) + \mu.$$

Avec μ une constante, en ce point indépendamment de ε, on introduit

$$x = y + x_0(t).$$

On a donc pour y

$$\dot{y} = F(t, y, \varepsilon),\ y(t_0) = \mu,$$

avec $F(t, y, \varepsilon) = f(t, y + x_0(t), \varepsilon) - f(t, x_0(t), 0)$.
Les propriétés d'expansion de $f(t, x, \varepsilon)$ impliquent que $F(t, y, \varepsilon)$ possède une puissance convergente expansion par rapport à y et ε au voisinage de $y = 0$, $\varepsilon = 0$.

Théorème 2.1.1. *(Poincaré) Considérons le problème de valeur intiale*
$\dot{y} = F(t, y, \varepsilon)$, $y(t_0) = \mu$ *avec* $|t - t_0| \leq h$, $y \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$.
Si $F(t, y, \varepsilon)$ *est continue par rapport à* t, y *et* ε, *est développé en une série convergente par rapport à* y *et* ε *pour* $\|y\| \leq \rho$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, *alors* $y(t)$ *est développé en un série de puissance par rapport à* ε *et* μ *dans un voisinage de* $\varepsilon = \mu = 0$ *convergent sur l'échelle du temps* 1.

Preuve. A partir de la fonction $y^0(t) = \mu$. On a

$$y^{(n+1)}(t) = \mu + \int_{t_0}^{t} F(\tau, y^{(n)}(\tau), \varepsilon) d\tau,\ n = 0, 1, 2, ...$$

Pour qui converge vers la solution du problème de la valeur initiale.
La suite est uniformément convergente pour $|t - t_0| \leq h$. Nous utiliserons maintenant le propriétés d'expansion de $F(t, y, \varepsilon)$ à développer à chaque étape d'itération $y^n(t)$ par rapport à ε et μ. L'intégration de la série de puissances pour $y^n(t)$ donne une série de puissances pour $y^{n+1}(t)$ qui est convergente dans le même domaine.
Utilisons maintenant le théorème de la théorie des fonctions analytiques (complexes) qui nous dit que la fonction limite d'une suite uniformément convergente est également analytique (Grauert et Fritzsche 1976). Pour appliquer ce théorème nous effectuons la suite analytique des fonctions $y^n(t)_{n=0}^{\infty}$ dans les paramètres ε et μ sur un domaine $D \subset C^2$ de mesure positive.
Le théorème utilise l'intégration dans D pour une certaine intégrale de Cauchy, dans laquelle t joue la partie d'un paramètre réel. Donc la fonction limite $y(t)$ est analytique en ε et μ.
Enfin, nous examinons de plus près l'intervalle de temps sur lequel l'expansion est valide.
Sur le domaine de définition de F on a

$$\|F\|_{\sup} = M.$$

Les propriétés d'expansion que nous avons utilisées exigent que la solution reste dans un ρ-voisinage de $y = \mu$ à chaque itération. Pour $n = 1$ on a pour que

$$\left\|y^1 - \mu\right\| \leq \rho,$$

$$\Rightarrow \|y^n - \mu\| \leq \rho$$

$$\Rightarrow \|\mu\| + M\,|t - t_0| \leq \rho$$

pour que $|t - t_0| \leq \rho/M - \|\mu\|/M$.

Alors, l'expansion de la solution vaut pour $|t - t_0| \leq \min(h, \dfrac{\rho - \|\mu\|}{M})$.
Si $\|\mu\| \ll \rho$ et h n'est pas $o(1)$, le développement est clairement valable sur l'échelle du temps 1, voir [10]. $\square$

Théorème 2.1.2. *Considérons le problème de la valeur initiale*

$$\dot{x} = f_0(t, x) + \varepsilon f_1(t, x) + ... + \varepsilon^m f_m(t, x) + \varepsilon^{m+1} R(t, x, \varepsilon),$$

avec $x(t_0) = \eta$ *et* $|t - t_0| \leq h$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.
Supposons que dans ce domaine on a
a. $f_i(t, x)$, $i = 0, ..., m$ *continue en* t *et* x, $m + 1 - i$ *fois continue différentiable en* x.
b. $R(t, x, \varepsilon)$ *continue en* t, x *et* ε, *Lipschitz-continue en* x.
Substitution dans l'équation de x *le développement formel suivant*

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + ... + \varepsilon^m x_m(t),$$

c'est le développement de Taylor par rapport aux puissances de ε, *égalant les coefficients correspondants et en appliquant les valeurs initiales* $x_0(t_0) = \eta$, $x_i(t) = 0$, $i = 1, ..., m$ *donne un approximation de* $x(t)$

$$\|x(t) - (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^m x_m(t))\| = O(\varepsilon^{m+1}).$$

sur l'échelle du temps 1.

Preuve. La substitution de l'expansion formelle dans l'équation donne

$$\dot{x_0} + \varepsilon \dot{x_1} + ... = f_0(t, x_0 + \varepsilon x_1 + ...) + \varepsilon f_1(t, x_0 + \varepsilon x_1 + ...) + ...$$

où les points indiquent les termes commençant par $\varepsilon^2, \varepsilon^3$ etc.
Développement en série de Taylor et la mise en équation des coefficients de puissances égales de ε donne une équation non perturbée

$$\dot{x_0} = f_0(t, x_0),$$

$$\dot{x_1} = f_1(t, x_0) + \frac{\partial f_0}{\partial x}(t, x_0)x_1.$$

L'équation pour x_i, $i = 1, 2, ...$ est de la forme

$$\dot{x_i} = A_i(t) + B_i(t)x_i.$$

dans laquelle $A_i(t)$ et $B_i(t)$ dépendent de $x_0(t), ..., x_{i-1}(t)$.
Soit l'équation non perturbée est non linéaire, les équations suivantes sont linéaires à coefficients variables. L'équation intégrale équivalente pour le problème de la valeur initiale est

$$x(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f_0(\tau, x(\tau))d\tau + ... + \varepsilon^m \int_{t_0}^{t} f_m(\tau, x(\tau))d\tau + \varepsilon^{m+1} \int_{t_0}^{t} R(\tau, x(\tau), \varepsilon)d\tau.$$

On commence par choisir $m = 0$, on a

$$x_0(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f_0(\tau, x(\tau))d\tau,$$

et

$$x(t) - x_0(t) = \int_{t_0}^{t} [f_0(\tau, x(\tau)) - f_0(\tau, x_0(\tau))]d\tau + \varepsilon \int_{t_n}^{t} R(\tau, x(\tau), \varepsilon)d\tau.$$

En utilisant la continuité de Lipschitz de f_0, la constante de Lipschitz L et la délimitation de R, $\|R\| \leq M$, on trouve pour $t \geq t_0$

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} L \|x(\tau) - x_0(\tau)\| \, d\tau + \varepsilon M(t - t_0).$$

L'application (Gronwall) avec $\delta_1 = L$, $\delta_2 = \varepsilon M$ et $\delta_3 = 0$ donne

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq \varepsilon \frac{M}{L} \exp^{L(t-t_0)} - \frac{M}{L}.$$

Nous concluons qu'elle est égal à $O(\varepsilon)$ sur l'échelle du temps 1.
Il s'ensuit que l'on peut poser

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon\, \phi(t, \varepsilon),$$

avec $\phi(t, \varepsilon)$ bornée par une constante indépendante de ε sur l'échelle du temps 1.
Maintenant, nous choisissons $m = 1$ et on peut vérifier que nous pouvons utiliser la même technique, intégrales et de Gronwall, pour prouver que $\phi(t, \varepsilon) - x_1(t) = O(\varepsilon)$ sur la échelle du temps 1.
Il est clair qu'en continuant ainsi, le théorème s'ensuit.
Le développement que nous avons obtenu est une approximation asymptotique de la solution. Une question naturelle est de savoir si, en prenant la limite $m \longrightarrow \infty$, en supposant que le membre droit de l'équation peut être représenté par une convergence série entière par rapport à ε, on obtient ainsi une série convergente pour $x(t)$. Cette question a reçu une réponse positive de Poincaré. $\square$

2.2 Méthode de perturbation simple

Considérez le problème de valeur initiale

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad x(0) \text{ donné.}$$

où $t \geq 0,\ x \in D \subset \mathbb{R}^n$.
Si nous pouvons développer $f(t, x, \varepsilon)$ dans une série de Taylor par rapport à ε

$$f(t, x, \varepsilon) = f_0(t, x) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 \dots$$

alors on pourrait supposer qu'il existe une expansion similaire pour la solution

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 f_2(t, x) \dots,$$

nous substituons $x(t)$ dans l'équation et trouvons les coefficients $x_i(t)$, $i = 1, 2, ...$, voir [10].

2.3 Méthode de Lindstedt-Poincaré

Dans ce section, nous montrerons comment trouver des approximations de séries convergentes de solutions périodiques en utilisant le théoréme d'expansion et la périodicité de la solution. Cette méthode est généralement appelée d'aprés Lindstedt-Poincaré, elle est aussi appelée méthode de continuation, voir [4].

2.3.1 Termes séculaires

Définition 2.3.1. *Les termes tels que* $t^m cos\,(pt)$ *ou* $t^m sin\,(nt)$ *où* $m, n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ *sont appelés* **termes séculaires**.

Pour construire une solution uniformément valide, il faut chercher une approximation qui élimine les termes séculaires. Une technique pour éviter l'existence de termes profanes a été développée par Lindstedt-Poincaré. Plus tard, Poincaré a prouvé que les expansions obtenues avec la technologie Lindstedt-Poincaré sont à la fois asymptotique et uniformément valides. Bien que la manière de Lindstedt-Poincaré donne des extensions d'une approche uniformément valide. Pour des solutions périodiques d'oscillations non linéaires faibles, c'est-à-dire $0 < \varepsilon < C_1$, cette technique ne fonctionne pas si l'amplitude de l'oscillation est fonction du temps.

2.3.2 Principe de la mèthode de Lindstedt-Poincarè

Dans cette section, nous donnons une méthode pour obtenir des solutions uniformément valides de l'équation différentielle non linéaire

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon F(y, \frac{dy}{dt}). \tag{2.1}$$

$$y(0, \varepsilon) = A, \qquad \frac{dy}{dt}(0, \varepsilon) = 0, \qquad 0 < \varepsilon << 1.$$

If $\varepsilon = 0$ nous obtenons le probléme non perturbé suivant :

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t, 0) + y(t, 0) = 0. \tag{2.2}$$

L'essence de la méthode est d'introduire une transformation de la variable indépendante. Cette transformation nous permettra d'éviter l'occurrence de termes séculaires dans les solutions d'équations des séries de perturbations (2.1), voir [11].
L'idée fondamentale est venue de l'astronome Lindstedt-Poincaré et est basée sur l'observation que l'un des effets du terme non linéaire dans l'équation (2.1) est de changer la fréquence du système de la valeur linéaire $\omega_0 = 1$ à $\omega(\varepsilon)$. Pour tenir compte de ce changement de fréquence, une nouvelle variable $\theta = \omega t$ (lorsque ε est nul, la solution périodique résultante a une fréquence unitaire, si ε est non nul et petit, alors la fréquence dépend de ε et est proche de l'unité si $y(t)$ a la période $2\pi/\omega(\varepsilon)$, puis en mettant $\theta = \omega t$. Nous obtenons une nouvelle fonction $y(\theta)$ avec la période 2π est introduite, et les deux y et sont étendus en puissances de ε comme suit :

$$y(\theta, \varepsilon) = y_0(\theta) + \varepsilon y_1(\theta) + \cdots + \varepsilon^n y_n(\theta) + \dots. \tag{2.3}$$

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \cdots + \varepsilon^n \omega_n + \dots. \tag{2.4}$$

où à ce point les ω_j sont des constantes inconnues.
On introduit les notations suivantes

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{d\,\theta}, \qquad \ddot{y} \equiv \frac{d^2 y}{d\,\theta^2}. \tag{2.3a}$$

$$F_y(y, \dot{y}) \equiv \frac{\partial F(y, \dot{y})}{\partial y}, \qquad F_{\dot{y}}(y, \dot{y}) \equiv \frac{\partial F(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}}. \tag{2.3b}$$

On a $\theta = \omega t$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{d(\omega t)} = \frac{1}{\omega}\frac{dy}{dt}.$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \omega \frac{dy}{d\theta}. \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{d\theta}\right) = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2 y}{dt^2}. \tag{2.6}$$

Mettre $\theta = \omega t$ alors l'équation (2.1) devient

$$\omega^2 \frac{d^2 y}{d\theta^2}(\theta, \varepsilon) + y(\theta, \varepsilon) = \varepsilon F\left(y, \omega \frac{dy}{d\theta}\right). \tag{2.7}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 \ddot{y} + y = \varepsilon F(y, \omega \dot{y}), \qquad 0 < \varepsilon << 1, \tag{2.8}$$

où $y(0,\varepsilon) = A$, $\dot{y}(0,\varepsilon) = 0$. Lorsque nous substituons l'expansion (2.3) à l'équation (2.8), on obtient

$$\left(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\varepsilon^3\omega_3+...\right)^2\left(\ddot{y_0}+\varepsilon\ddot{y_1}+\varepsilon^2\ddot{y_2}+\varepsilon^3\ddot{y_3}+...\right)+y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\varepsilon^3 y_3+...-\varepsilon F\left(y,\omega\dot{y}\right)=0.$$

les coefficients des différentes puissances de ε sont égaux à zéro, alors on a

$$\ddot{y_0}+y_0=0. \tag{2.9}$$

$$\ddot{y_1}+y_1=-2\omega_1\ddot{y_0}+F\left(y_0,\dot{y_0}\right). \tag{2.10}$$

$$\ddot{y_2}+y_2=-2\omega_1\ddot{y_1}-\left(\omega_1^2+2\omega_2\right)\ddot{y_0}+F_y\left(y_0,\ddot{y_0}\right)y_1+F_{\dot{y}}\left(y_0,\dot{y_0}\right)\left(\omega_1\dot{y_0}+\dot{y_1}\right). \tag{2.11}$$

$$\ddot{y_3}+y_3=G_3(y_0,y_1,y_2;\dot{y_0},\dot{y_1},\dot{y_2}). \tag{2.12}$$

$$\vdots$$

$$\ddot{y_n}+y_n=G_n(y_0,y_1,\ldots,y_{n-1};\dot{y_0},\dot{y_1},\ldots,\dot{y_{n-1}}). \tag{2.13}$$

Si F est une fonction polynomiale en y et dy/dt, alors G "est aussi une fonction polynomiale par rapport à ses arguments.
La condition de la périodicité pour la nouvelle variable θ peut être exprimée comme

$$y\left(\theta\right)=y\left(\theta+2\pi\right). \tag{2.14}$$

Les conditions correspondantes pour $y_n\left(\theta\right)$ sont

$$y_n\left(\theta\right)=y_n\left(\theta+2\pi\right). \tag{2.15}$$

La solution (2.3) doit être une solution périodique de l'équation (2.1), puis les côtés droits des équations (2.9), (2.10), (2.11) et (2.12) ne doivent pas contenir des multiples constants de $sin\theta$ ou de $cos\theta$; sinon, des termes séculaires existeraient. Par conséquent, si $y_n(0)$ doit être périodique, deux conditions doivent être satisfaites à chaque étape du calcul.
Il existe une situation pour laquelle l'analyse précédente peut être simplifiée. Cela se produit lorsque la fonction $F(y,dy/dt)$ est une fonction paire de dy/dt. Pour ce cas, on peut choisir $y(t)$ comme une fonction paire de t en utilisant les conditions initiales

$$y\left(0\right)=A, \qquad \frac{dy\left(0\right)}{dt}=0. \tag{2.16}$$

Par conséquent, $y(\theta)$ et $y_n(\theta)$ sont des fonctions paires de θ. Ainsi, les côtés droits des équations (2.9), (2.10) et(2.11) ne contiennent pas de terme dans $sin\theta$. Pour cette situation, un seul paramètre libre ω_n est nécessaire pour s'assurer qu'il n'y a pas de terme dans $cos\theta$. Ce résultat implique que les équations (2.16) devient

$$\begin{cases} y_0\left(0\right)=A_0, \qquad y_i\left(0\right)=0 \qquad \text{pour} \qquad i\geq 1. \\ \frac{dy_k(0)}{dt}=0, \qquad \text{pour} \qquad k\geq 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Donc, la $(n+1)$ième approximation de la solution de l'équation (2.1) selon la méthode de Lindstedt-Poincaré est donnée par

$$y\left(t,\varepsilon\right)=\sum_{m=0}^{n}\varepsilon^m y_m\left(t\right)+O\left(\varepsilon^{n+1}\right). \tag{2.18}$$

tel que

$$\theta=\omega t=\left[1+\varepsilon\omega_1+...+\varepsilon^m\omega_m+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)\right]t. \tag{2.19}$$

Remarque 2.3.1. *Poincaré a démontré l'existence de la solution analytique de Lindsetd sous quellques condition, voir [4].*

Exemple 2.3.1. *Considérez l'équation*

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y-\varepsilon(1-y)(\frac{dy}{dt})^2=0. \tag{2.20}$$

où $F=(1-y)(\frac{dy}{dt})^2$.

Les équations différentielle satisfaites par $y_0(\theta)$, $y_1(\theta)$ *sont*

$$\ddot{y}_0+y_0=0,\; y_0(0)=A,\; \dot{y}_0(0)=0. \tag{2.21}$$

$$\ddot{y}_1+y_1=-2\omega_1\ddot{y}_0+\dot{y_0}^2-y_0\dot{y_0}^2,\; y_1(0)=\dot{y}_1(0)=0. \tag{2.22}$$

L'équation (2.21) *a la solution*

$$y_0(\theta)=A\cos\theta. \tag{2.23}$$

La substitution de ce résultat dans l'Eq.(2.22) *donne l'équation suivante pour* $y_1(\theta)$ *:*

$$\ddot{y}_1+y_1=2\omega_1A\cos\theta-\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{2}\cos2\theta+\frac{A^3}{2}\cos\theta-\frac{A^3}{4}\cos3\theta-\frac{A^3}{4}\cos\theta. \tag{2.24}$$

Le terme séculaire dans la solution pour $y_1(\theta)$ peut être éliminé si

$$\omega_1 = -\frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{8}. \tag{2.25}$$

Avec cette éq (2.24) devient

$$\ddot{y}_1 + y_1 = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos 2 \therefore \frac{A^3}{4}\cos 3\theta. \tag{2.26}$$

La solution générale de cette équation est

$$y_1(\theta) = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta + \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{6}\cos 2\theta + \frac{A^3}{32}\cos 3\theta. \tag{2.27}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires dont la valeur peut être obtenue à partir de la conditions initiales pour $y_1(\theta)$, c'est-à-dire,

$$y_1(0) = C_1 + \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{6} + \frac{A^3}{32} = 0. \tag{2.28}$$

$$\dot{y}_1(0) = C_2 = 0. \tag{2.29}$$

Par conséquent $y_1(\theta)$ est

$$y_1(\theta) = -\frac{2A^2}{3} - \frac{A^3}{32}\cos\theta + \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{6}\cos 2\theta + \frac{A^3}{32}\cos 3\theta, \tag{2.30}$$

alors

$$y(\theta) = A\cos(\theta) + \varepsilon(-\frac{A^2}{6} - \frac{A^3}{32}\cos\theta + \frac{A^2}{6}\cos 2\theta + \frac{A^3}{32}\cos 3\theta).$$

Proposition 2.3.1. *Soit l'équation*

$$\ddot{y} + y = G(\theta), y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0. \tag{2.31}$$

La solution de ce problème est

$$y(0) = \int_0^\theta \sin(\theta - \tau)G(\tau)d\tau. \tag{2.32}$$

De plus, l'équation (2.31) a une solution périodique $y_1(\theta)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} F(A\cos\theta, -A\sin\theta)sin\theta d\theta = 0, \\ 2\pi\omega_1 A + \int_0^{2\pi} F(A\cos\theta, -A\sin\theta)\cos\theta d\theta = 0. \end{cases}$$

Preuve. voir [6] □

2.4 Méthode de la moyenne (Averaging method)

Le principal avantage de cette méthode est qu'elle permet non seulement de déterminer les mouvements périodiques dans un état stationnaire, mais aussi de déterminer le comportement transitoire du mouvement dans une solution périodique, voir [10].

2.4.1 Principe de la méthode de Krylov et Boyolinbov

Cette méthode s'applique aux équations de la forme

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon F(x, \dot{x}) = 0. \tag{2.33}$$

Pour $\varepsilon = 0$ la solution générale est

$$x(t) = A \sin(\omega t + \Phi). \tag{2.34}$$

où A et Φ sont des constantes quelconques Pour $\varepsilon \neq 0$ petit, Krylov et Boyolinbov posent la solution

$$x(t) = A(t) \sin(\omega t + \Phi(t)),$$

$$\dot{x}(t) = A(t)\omega \cos(\omega t + \Phi(t)),$$

. Posons $y = \dot{x}$ dans(2.33), on trouve

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \varepsilon F(x, y). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(t)\omega \cos(\omega t + \Phi(t)) = \dot{A}(t) \sin(\omega t + \Phi(t)) + A(t)(\omega + \dot{\Phi}(t)) \cos(\omega t + \Phi(t)) \\ \Rightarrow \dot{A}(t) \sin(\omega t + \Phi(t)) + A(t)\dot{\Phi}(t) \cos(\omega t + \Phi(t)) = 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

De même, on a

$$\dot{A}(t)\omega \cos(\omega t + \Phi(t)) - A(t)\omega(\omega + \dot{\Phi}(t)) \sin(\omega t + \Phi(t)) =$$

$$-A(t)\omega^2 \sin(\omega t + \Phi(t)) - \varepsilon f(A(t) \sin(\omega t + \Phi(t)), A(t)\omega \cos(\omega t + \Phi(t))).$$

$$\dot{A}(t)\omega \cos(\omega t + \Phi(t)) - A(t)\omega\dot{\Phi}(t) \sin(\omega t + \Phi(t)) = \varepsilon f(A(t) \sin(\omega t + \Phi(t)), A(t)\omega \cos(\omega t + \Phi). \tag{2.36}$$

En résolvant (2.35) et (2.36) par rapport a $\dot{A}$ et $\dot{\Phi}$, on obtient (par la méthode de cramer (Vérifier !))

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\frac{\varepsilon}{\omega}\cos(\omega t + \Phi(t)) f(A(t)\sin(\omega t + \Phi(t)), A(t)\omega\cos(\omega t + \Phi(t))), \\ \dot{\Phi}(t) = -\frac{\varepsilon}{A(t)\omega}\sin(\omega t + \Phi(t)) f(A(t)\sin(\omega t + \Phi(t)), A(t)\omega\cos(\omega t + \Phi(t))). \end{cases} \tag{2.37}$$

Notons que $\dot{A}(t)$ et $\dot{\Phi}(t)$ sont propositionnelles à ε alors $A(t)$ et $\Phi(t)$ varient lentement vers le temps.

L'approximation de Krylov et Boyolinbov est de remplacer $A(t)$ et $\Phi(t)$ dans (2.37) par leur valeur moyennes sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, (c-à-d $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$).

$A(t)$ et $\Phi(t)$sont considérés comme des constantes en prenant la moyenne. Ce procédé est connu comme la méthode de la moyennisation

$$\begin{cases} \dot{A} = -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t + \Phi(t)) f(A(t)\sin(\omega t + \Phi(t)), A(t)\omega\cos(\omega t + \Phi(t)))dt, \\ \dot{\Phi} = \frac{\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t + \Phi(t)) f(A(t)\sin(\omega t + \Phi(t)), A(t)\omega\cos(\omega t + \Phi(t)))dt. \end{cases}$$

Posons $\theta = \omega t + \Phi$, on trouve

$$\begin{cases} \dot{A} = -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\theta) f(A\sin, A\omega\cos\theta), \\ \dot{\Phi} = -\frac{\varepsilon}{2\pi A\omega}\int_0^{2\pi} \sin(\theta) f(A\sin, A\omega\cos\theta). \end{cases}$$

Une fois ces intégrales trouvées, nous aurons à résoudre des équations différentielles pour $A(t)$ et $\Phi(t)$. On a

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x dx = 0,$$

si m, n sont impaires et de plus $I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$, $I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$. On arrive à $I_{0,0} = 2\pi$

Exemple 2.4.1. *Soit l'équation de Van Der Pol*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x)\dot{x}^2. \tag{2.38}$$

On a $\omega = 1$,$F(x, \dot{x}) = (1 - x)\dot{x}^2$.

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{-\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta(A^2\cos^2\theta - A^3\cos^2\theta\sin\theta), \\ \dot{\phi} = \frac{-\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{2\pi} \sin\theta(A^2\cos^2\theta - A^3\cos^2\theta\sin\theta). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{A} = \frac{dA}{dt} = 0 \Rightarrow A(t) = A(0) = A_0.$$

D'autre part

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{-\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{2\pi} A^2\cos^2\theta\sin\theta - A^3\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\varepsilon A^2}{8}$$

$$\Rightarrow \phi(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon A^2}{8}t + \phi_0.$$

La solution est donnée approximativement par

$$x(t,\varepsilon) = A_0\sin(t + \frac{\varepsilon A^2}{8}t + \phi_0).$$

2.4.2 Forme standard de lagrange

Pour valider les approximations, on part généralement d'un système à évolution lente comme l'équation (2.37). Nous montrons ici comment obtenir ces équations par la méthode des "différences de paramètres".

Considérons pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ le problème de la valeur initiale

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon g(t,x),\ x(0) = x_0. \tag{2.39}$$

$A(t)$ est une matrice $n \times n$ continue, $g(t,x)$ est une fonction suffisamment lisse de t et x. L'équation non perturbée ($\varepsilon = 0$) est linéaire et possède n solutions indépendantes qui sont utilisées pour composer une matrice fondamenteale $\phi(t)$. Nous mettons

$$x = \Phi(t)y \quad \text{(Lagrange)}\ .$$

En mécanique, cela s'appelle parfois"introduir des coordonnées comoving". La substitution dans l'équation (2.39) produit

$$\dot{\Phi}y + \Phi\dot{y} = A(t)\Phi y + \varepsilon g(t,\Phi y).$$

et comme $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ on a

$$\Phi\dot{y} = \varepsilon g(t,\Phi y).$$

les équations (2.35)-(2.36) sont un cas particulier de cette équation vectorielle. Nous résolvns pour y en inversant l'intrix fondamental

$$\dot{y} = \varepsilon\Phi^{-1}(t)g(t, \Phi(t)y). \tag{2.40}$$

les valeurs initiales découlent de

$$y(0) = \Phi^{-1}(0)x_0.$$

En écrivant les équations des composantes de y en utilisant la règle de Cramer, nousavons

$$\dot{y}_i = \varepsilon\frac{W_i(t, y)}{W(t)},\ i = 1, \dots, n \tag{2.41}$$

avec $W(t) = |\Phi(t)|$, le wronskien (déterminant of $\Phi(t)$), $W_i(t, y)$ est le déterminant de la matrice que l'on obtient en remplaçant la i^{th} colonne de $\Phi(t)$ par g. La forme standard

$$\dot{y} = \varepsilon f(t, y).$$

Remarque 2.4.1. *L'équation non perturbée dans le cas de l'équqtion* (2.39) *est linéaire, ceci facilite la procédure de variation des paramètres. Si l'équation non perturbée est non linéaire,la technique de variation des paramètres s'applique toujours. En pratique, il existe généralement de nombreux obstacles technique lors de la réalisation de la procédure.*

Exemple 2.4.2. *Considérez l'équation*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(-\dot{x} + x^2).$$

L'équation général :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon g(t, x, \dot{x}), \tag{2.42}$$

donc $\omega = 1$ *et* $g(t, x, \dot{x}) = \varepsilon(-\dot{x}+x^2)$, *avec constante* $\omega > 0$. *Nous avons une certaine liberté dans le choix de transformation vers la forme standard car il existe plusieurs représentations des solutions du problème non perturbé.*
On commence par une transformation amplitude-phase

$$x(t) = r(t)\cos(\omega t + \psi(t))$$
$$\dot{x}(t) = -r(t)\omega\sin(\omega t + \psi(t)).$$

on retrouve les équations

$$\dot{r} = -\frac{\varepsilon}{\omega}\sin(\omega t+\psi)g(t, r\cos(\omega t+\psi), -r\omega\sin(\omega t+\psi))$$
$$\dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{\omega r}\cos(\omega t+\psi)g(t, r\cos(\omega t+\psi), -r\omega\sin(\omega t+\psi)).$$

Alors

$$\dot{r} = \sin^2(t+\psi) - \varepsilon r^2\sin(t+\psi)\cos^2(t+\psi)$$
$$\dot{\psi} = -\varepsilon\cos(t+\psi)\sin(t+\psi) - \varepsilon r\cos^3(t+\psi).$$

$$\dot{r} = -\frac{1}{2}\varepsilon r \;\dot{\psi} = 0.$$

Enfin

$$r = r_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t}; \psi = \psi_0.$$

Donc

$$x(t) = r_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t}\cos(t+\psi_0).$$

Une autre possibilité consiste à utiliser la transformation

$$x(t) = y_1(t)\cos\omega t + \frac{y_2(t)}{\omega}\sin\omega t$$
$$\dot{x}(t) = -\omega y_1(t)\sin\omega t + y_2(t)\cos\omega t.$$

on retrouve les équations

$$\dot{y}_1 = -\tfrac{\varepsilon}{\omega}\sin\omega t g(t, x(t), \dot{x}(t))$$
$$\dot{y}_2 = \varepsilon\cos\omega t g(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

$$\dot{y}_1 = -\varepsilon\sin t(-\dot{x}+x^2)$$
$$\dot{y}_2 = \varepsilon\cos t(-\dot{x}+x^2).$$

$$y_1 = -\varepsilon\cos t(-\dot{x}+x^2)$$
$$y_2 = -\varepsilon\sin t(-\dot{x}+x^2).$$

Donc

$$x(t) = -\varepsilon\cos^2 t(-\dot{x}+x^2) - \varepsilon\sin^2 t(-\dot{x}+x^2).$$

Chapitre 3

Existence de solutions approximatives périodiques

3.1 Solutions périodiques

Nous avons vu que la méthode de Poincaré-Lindstedt n'est pas seulement une méthode quantitative mais conduit aussi, par le théorème de la fonction implicite, à l'existence de solutions périodiques. Un résultat similaire est valable pour la méthode de calcul de la moyenne où, encore une fois, le théorème de la fonction implicite avec une condition de périodicité appropriée joue un rôle. Reprenons l'équation

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon). \tag{3.1}$$

avec $x \in D \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0$. De plus, nous supposons que les deux $f(t, x)$ et $g(t, x, \varepsilon)$ sont T-périodique en t. Séparément, nous considérons dans D l'équation moyennée

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y). \tag{3.2}$$

Dans certaines conditions, les solutions d'équilibre de l'équation moyennée s'avèrent correspondre à T -solutions périodiques de l'équation (3.1).

Théorème 3.1.1. *Considérez l'équation (3.1)et supposons que :*

a. Les fonctions vectorielles f, g, $\partial f/dx$, $\partial^2 f/\partial x^2$ et $\partial g/\partial x$ sont définis, continus et bornés par une constante M (indépendant de ε) dans $[0, \infty)\times$ D, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, *b. f et g sont T-périodique en $t(T$ indépendant de $\varepsilon)$, si p est un point critique de l'équation moyennée (3.2) tandis que*

$$\left|\partial f^0(y)/\partial y\right|_{y=p} \neq 0. \tag{3.3}$$

Alors il existe un T-solution périodique $\phi(t,\varepsilon)$ d'équation (3.1) qui est proche de p tel que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \phi(t,\varepsilon) = p.$$

Preuve. Nous allons d'abord imposer la condition de périodicité après laquelle nous pouvons appliquer le théorème de la fonction implicite.

$$x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t)).$$

L'équation pour z devient

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R(t, z, \varepsilon). \tag{3.4}$$

En raison du choix de $u(t, z(t))$, a T-solution périodique $z(t)$ produit un T solution périodique $x(t)$. Pour R nous avons l'expression

$$R(t, z, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) u(t, z) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f^0(z) + g(t, z, 0) + O(\varepsilon).$$

cette expression est T-périodique en t et continûment différentiable par rapport à z, équation (3.4) est équivalente à l'équation intégrale

$$z(t) = z(0) + \varepsilon \int_0^t f^0(z(s))ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, z(s), \varepsilon)ds.$$

La solution $z(t)$ est T -périodique si $z(t+T) = z(t)$ pour tous $t \geq 0$ ce qui conduit à l'équation

$$h(z(0), \varepsilon) = \int_0^T f^0(z(s))ds + \varepsilon \int_0^T R(s, z(s), \varepsilon)ds = 0. \tag{3.5}$$

Il est clair que $h(p, 0) = 0$ avec ε dans un quartier de $\varepsilon = 0$, l'équation (3.5) a une solution unique $z(0)$ à cause de l'hypothèse sur le déterminant de Jacobi (3.3). Si $\varepsilon \to 0$, alors $z(0) \to p$.

Si nous avons conclu avec le théorème 3.1.1qu'une solution périodique de l'équation (3.1) existe dans un quartier de $x = p$, on peut souvent établir sa stabilité de manière simple. $\square$

Théorème 3.1.2. *Considérez l'équation* (3.1) *et supposons que les conditions du théorème* (3.1.1) *ont été satisfaits. Si les valeurs propres du point critique $y = p$ de l'équation moyennée*(3.2) *ont tous des parties réelles négatives, la solution périodique correspondante $\phi(t, \varepsilon)$ d'équation* (3.1) *est asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. Si une des valeurs propres a une partie réelle positive, $\phi(t, \varepsilon)$ est instable.*

Preuve. On va linéariser l'équation (3.1) au voisinage de la solution périodique $\phi(t, \varepsilon)$. Après avoir traduit $x = z + \phi(t, \varepsilon)$
en expansion par rapport à z, en omettant les termes non linéaires et en renommant à nouveau la variable dépendante x, on trouve une équation linéaire avec T-coefficients périodiques :

$$\dot{x} = \varepsilon A(t, \varepsilon)x. \tag{3.6}$$

avec $A(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x}[f(t, x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon)]_{x=\phi(t,\varepsilon)}$. Nous introduisons le T-matrice périodique

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, p).$$

De théorème 3.1.1 on a $\lim_{\varepsilon \to 0} A(t, \varepsilon) = B(t)$. On utilisera aussi les matrices

$$B^0 = \frac{1}{T}\int_0^T B(t)dt,$$

et

$$C(t) = \int_0^t \left[B(s) - B^0\right] ds.$$

Noter que B^0 est la matrice de l'équation moyennée linéarisée. La matrice $C(t)$ est T-périodique et il a une moyenne nulle. La transformation quasi-identitaire $x \to y$ avec

$$y = (I - \varepsilon C(t))x.$$

donne

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\varepsilon \dot{C}(t)x + (I - \varepsilon C(t))\dot{x} \\ &= -\varepsilon B(t)x + \varepsilon B^0 x + (I - \varepsilon C(t))\varepsilon A(t, \varepsilon)x \\ &= \left[\varepsilon B^0 + \varepsilon(A(t, \varepsilon) - B(t)) - \varepsilon^2 C(t)A(t, \varepsilon)\right](I - \varepsilon C(t))^{-1}y \\ &= \varepsilon B^0 y + \varepsilon(A(t, \varepsilon) - B(t))y + \varepsilon^2 R(t, \varepsilon)y. \end{aligned} \tag{3.7}$$

$R(t, \varepsilon)$ est T-périodique et borné, on remarque que $(A(t, \varepsilon) - B(t)) \to 0$ comme $\varepsilon \to 0$, et aussi que les exposants caractéristiques de l'équation (3.7) dépendent continuellement du petit paramètre ε. Il suit que, pour ε suffisamment petit, le signe des parties réelles des exposants caractéristiques est égal au signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice B^0. □

3.2 Existence d'une solution périodique

Cette section examine les conditions d'obtention de solutions périodiques dans le cadre de la méthode des perturbations. La procédure suivante donne des résultats conformes aux termes de la commande ε. Une justification rigoureuse de l'existence des solutions périodiques sur l'utilisation de la méthode des perturbations.

3.2.1 Deux conditions

Considérons l'équation différentielle non linéaire

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon F(y, \frac{dy}{dt}). \tag{3.8}$$

avec ε est un petit paramètre positif, F est une fonction polynomiale de ses arguments, et les conditions initiales sont

$$y(0) = A, \ \frac{dy(0)}{dt} = 0.$$

Comme dans les sections précédentes, soit $\theta = \omega(\varepsilon)t$ et développons $y(\theta)$ et $\omega(\varepsilon)$ en série dans ε, c'est à dire

$$y(\theta, \varepsilon) = y_0(\theta) + \varepsilon y_1(\theta) + O(\varepsilon^2), \tag{3.9}$$

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2).$$

Les équations différentielles suivantes sont respectivement satisfaites par $y_0(\theta)$ et $y_1(\theta)$

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0, \ y_0(0) = A, \ \dot{y}_0 = 0,$$

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -2\omega_1\ddot{y}_0 + F(y_0, \dot{y}(0)),$$

$$y_1(0) = 0, \ \dot{y}_1(0) = 0. \tag{3.10}$$

La solution pour $y_0(\theta)$ est

$$y_0(\theta) = A\cos\theta. \tag{3.11}$$

En remplaçant l'éq (3.10) dans le cote droit de l'équation (3.11) donne

$$\ddot{y}_1 + y_1 = 2\omega_1 A\cos\theta + F(A\cos\theta, -A\sin\theta). \tag{3.12}$$

La solution de l'éq (3.12) sous réserve des conditions initiales de l'Eq (3.10) est

$$y_1(\theta) = \int_0^\theta [2\omega_1 A\cos\tau + F(A\cos\tau, -A\sin\tau)].\sin(\theta-\tau)d\tau. \tag{3.13}$$

La fonction génératrice $y_0(\theta)$ est périodique de période 2π. Si $y_1(\theta)$ doit être périodique de période 2π, puis

$$y_1(\theta) = y_1(\theta+2\pi), \dot{y}_1(\theta) = \dot{y}_1(\theta+2\pi).$$

Puisque $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$, ces conditions deviennent

$$y_1(2\pi) = 0,\ \dot{y}_1(2\pi) = 0.$$

En appliquant ces résultats à l'Eq (3.13) donne

$$\int_0^{2\pi} [2\omega_1 A\cos\tau + F(A\cos\tau, -A\sin\tau)]\sin\tau d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} [2\omega_1 A\cos\tau + F(A\cos\tau, -A\sin\tau)]\cos\tau d\tau = 0.$$

La seconde relation utilise le fait que la dérivée de l'Eq (3.13) est

$$\dot{y}_1(\theta) = \int_0^\theta [2\omega_1 A\cos\tau + F(A\cos\tau, -A\sin\tau)]\cos(\theta-\tau)d\tau.$$

Depuis

$$\int_0^{2\pi} \cos\tau\sin\tau d\tau = 0, \int_0^{2\pi} \cos^2\tau d\tau = \pi. \tag{3.14}$$

ces équations deviennent

$$P(A) = \int_0^{2\pi} F(A\cos\tau, -A\sin\tau)\sin\tau d\tau = 0. \tag{3.15}$$

$$Q(A,\omega_1) = 2\pi\omega_1 A + \int_0^{2\pi} F(A\cos\tau, -A\sin\tau)\cos\tau d\tau = 0. \tag{3.16}$$

Ainsi, aux termes d'ordre ε, Eq (3.8) une équation périodique pourvu que les conditions des (3.15) et (3.16) sont satisfaites.

Si $F(y, dy/dt)$ est une fonction polynomiale de ses arguments, alors $P(A)$ est aussi une fonction polynomiale de A. Notons maintenant les racines réelles de $P(A) = 0$ par $\bar{A}_i$, $i = 1, 2, ...I$. Correspondant à chaque $\bar{A}_i$ il y a une correction de la fréquence La solution périodique particulière obtenue par (3.8) est

$$y^{(i)}(\theta, \varepsilon) = \bar{A_{(i)}} \cos[\omega^{(i)} t] + O(\varepsilon),$$

$$\omega^{(i)} = 1 + \varepsilon \bar{\omega_{(i)}} + O(\varepsilon^2).$$

La discussion suivante examine un certain nombre de cas particuliers qui se produisent pour choix particuliers de la fonction F.

3.2.2 F est une fonction seulement de y

Soit F une fonction seulement de y, c'est-à -dire

$$F = F_1(y).$$

On pose $u = A\cos\tau$, alors $du = -A\sin\tau d\tau$, et $u = A$ quand τ est 0 ou 2π.
Ainsi l'équation (3.15) devient

$$p(A) = -\int_A^A F(u)du = 0.$$

cela signifie que Eq (3.15) satisfie pour toute valeur de A. En conséquence, $y(0) = A$ est arbitrairement. Etant donné A, la correction de la fréquence w_1 est

$$w_1 = -(\frac{1}{2\pi A}) \int_0^{2\pi} F_1(A\cos\tau)\cos\tau d\tau.$$

Remarquons que si $F_1(y)$ contient un terme $a_1 y^{2n}$, où n est un entier non négatif, alors sa contribution à w_1 est

$$w_1 = -(\frac{a_1 A^{2n-1}}{2\pi}) \int_0^{2\pi} (cos\tau)^{2n+1} d\tau = 0.$$

Par conséquent, même les termes de puissance dans la fonction de force ne contribuent pas à la fréquence correction dans les méthodes de perturbation du premier ordre.
Si $F_1(y)$ admet un terme $a_2 y^{2n+1}$, alors

$$w_1 = -(\frac{a_2 A^{2n}}{2\pi}) \int_0^{2\pi} (cos\tau)^{2n+2} d\tau \neq 0.$$

Ainsi, les termes de puissance impairs dans $F_1(y)$ contribuent à un premier ordre dans ε décalage de fréquence.
En résumé, la correction de fréquence w_1 obtenue par perturbation de premier ordre méthodes est une fonction puissance paire l'amplitude A si F est une fonction polynomial de y.

3.3 Moyennage dans le cas périodique

Nous alons maintenant considérez la validité asymptotique de la méthode de moyennage. Considérez l'initiale problème de valeur

$$\dot{x} = \varepsilon f(t,x) + \varepsilon^2 g(t,x,\varepsilon),\ x(0) = x_0. \tag{3.17}$$

On suppose que $f(t,x)$ et T-périodique en t et on troduit la moyenne

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,y)dt.$$

dans l'exécution de l'intégration y a été maintenue constante.
Considérons maintenant le problème de la valeur initiale pour l'équation moyennée

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y),\ y(0) = x_0. \tag{3.18}$$

La fonction vectorielle $y(t)$ représente une approximation de $x(t)$ de la manière suivante

Théorème 3.3.1. *Considerons* (3.17) *et* (3.18) *avec* $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0$.
Supposons que
a. Les fonction vectorielles f, *get* $\partial f/\partial x$ *est definies, continues et bornées par constante* M *(indèpendant de* ε *) dans* $[0,\infty) \times D$,
b. g *est Lipschitz-continu en* x *pour* $x \in D$,
c. $f(t,x)$ *est* T*-périodique en* t *de moyenne* $f^0(x)$, *et* T *est une constante indépendante de* ε,
d. $y(t)$ *est contenu dans un sous-ensemble interne de* D.
Alors on a $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$ *sur l'échelle du temps* $1/\varepsilon$.

Preuve. Les hypothèses a et b garantissent l'existence et l'unicité des solutions des problèmes (3.17) et (3.18) sur l'échelle du temps se situent $1/\varepsilon$. Nous introduisons

$$u(t,x) = \int_0^t [f(s,x) - f^0(x)]ds. \tag{3.19}$$

Lorsque nous soustrayons la moyenne de $f(s,x)$ dans l'intégrande, l'intégrale est bornée :

$$\|u(t,x)\| \leq 2MT,\ t \geq 0,\ x \in D.$$

Nous introduisons maintenant une "transformation quasi-identitaire".

$$x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t)). \tag{3.20}$$

Nous appelons cela "quasi-identité" car $x(t) - z(t) = O(\varepsilon)$ pour $t \geq 0$, $x, z \in D$. Transformation (3.20) sera utilisé pour simplifier l'équation (3.17), c'est ce qu'on appelle aussi la normalisation.

La différenciation de (3.20) et la substitution en (3.17) donnent

$$\dot{x} = \dot{z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} u(t,z) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t,z)\dot{z} = \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t,z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t,z), \varepsilon).$$

En utilisant (3.19) nous écrivons cette équation sous la forme

$$[I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t,z)]\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + R.$$

avec I la matrice $n \times n$-identités ; R est l'abréviation de la fonction vectorielle

$$R = \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t,z) - \varepsilon f(t,z) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t,z), \varepsilon).$$

$\partial u/\partial z$ est uniformément borné (comme u) donc on peut inverser pour obtenir

$$[I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t,z)]^{-1} = I - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t,z) + O(\varepsilon^2), t \geq 0, z \in D. \tag{3.21}$$

De la continuité de Lipschitz de $f(t,z)$ nous avons

$$\|f(t, z + \varepsilon u(t,z)) - f(t,z)\| \leq L\varepsilon \|u(t,z)\|.$$

$$\leq \varepsilon 2MT.$$

L est la constante de Lipschitz. En raison de la limitation de g, il s'ensuit que pour une constante positive C, indépendante de ε, nous avons l'estimation

$$\|R\| \leq \varepsilon^2 C,\ t \geq 0,\ z \in D. \tag{3.22}$$

Avec (3.21) et (3.22) on trouve pour z

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + R - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial \partial z} f^0(z) + O(\varepsilon^2), z(0) = x(0). \tag{3.23}$$

Comme $R = O(\varepsilon^2)$ on peut mettre l'équation (3.23) sous la variable de type temps $\tau = \varepsilon t$. Nous concluons que la solution de mourir

$$\frac{dy}{d\tau} = f^0(y), y(0) = z(0).$$

approche la solution de l'équation (3.23) avec l'erreur $O(\varepsilon)$ sur l'échelle du temps 1 en τ, c'est-à-dire sur l'échelle du temps $1/\varepsilon$ en t. En raison de la transformation quasi-identitaire (3.20) la même estimation est valable pour $y(t)$ comme approximation de $x(t)$, voir [4] $\square$

Exemple 3.3.1. *L'équation général est :*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}). \tag{3.24}$$

Considérez l'équation :

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \tag{3.25}$$

$\omega = 1$ *et* $f = (1 - x^2)\dot{x}$ *avec des valeurs initiales données.*

En transformant $x, \dot{x} \to r, \psi$ *avec l'éq* (3.5) *obtient l'équation*

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \sin(t + \psi) f(r\cos(t + \psi), -r\sin(t + \psi), \\ \dot{\phi} &= -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \psi) f(r\cos(t + \psi), -r\sin(t + \psi)) \end{aligned}. \tag{3.26}$$

alors

$$\dot{r} = -\varepsilon \sin(t + \psi)(1 - r^2\cos^2(t, \phi))(-r\sin(t, \phi)),$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \psi)(1 - r^2\cos^2(t, \phi))(-r\sin(t, \phi)).$$

on a

$$\dot{r} = -\varepsilon f_1, r(0) = r(0),$$

$$\dot{\phi} = \frac{\varepsilon}{r_0} f_2, \phi(0) = \phi(0).$$

telle que :

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t+\psi) f(r\cos(t+\psi), -r\sin(t+\psi))dt$$

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t+\psi) f(r\cos(t+\psi), -r\sin(t+\psi))dt.$$

Donc :

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t+\psi)(1 - r^2\cos^2(t,\phi))(-r\sin(t,\phi))$$

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t+\psi)(1 - r^2\cos^2(t,\phi))(-r\sin(t,\phi)).$$

Remarque 3.3.1. *Une fois ces intégrales trouvées, nous aurons à résoudre des équations différentielles pour f_1 et f_2, on a :*

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x dx = 0,$$

si m, n sont impaires.

Et de plus

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}, I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}.$$

On arrive à $I_{0,0} = 2\pi$

Nous trouvons

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-r\sin^2(t,\phi) - r^3\cos^2(t,\phi)\sin^2(t,\phi)dt$$

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -r\cos(t,\phi)\sin(t,\phi) - r^3\cos^3(t,\phi)\sin(t,\phi)dt.$$

alors

$$f_1(r) = -\frac{1}{2} r(1 - \frac{1}{4}r^2)$$

$$f_2(r) = 0.$$

Donc

$$\dot{r} = -\varepsilon f_1 = -\varepsilon(\frac{1}{2}r(1 - \frac{1}{4}r^2))$$

$$\dot{\phi} = 0.$$

nous trouvons avec $r(0) = 2$ *et* $\phi(0) = 0$

$x(t) = 2\cos t + O(\varepsilon)$ *on the time scale* $1/\varepsilon$.

Par la méthode de la moyenne on trouve de plus une approximation pour les autre solution en résolvant les équations :

$$r_a(t) = \frac{r(0)e^{\frac{1}{2}et}}{\left[1 + \frac{1}{4}r_0^2\left(e^{et} - 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad \psi_a(t) = \psi(0).$$

comme $x_a(t) = r_a(t)\cos\left(t + \psi_a(t)\right)$ *nous trouvons qu'avec le tempst croissant, les soulutions se rapprochent de la périodique solution.*

3.4 Solutions périodiques d'équations autonomes du second ordre

Dans cette section, nous considérerons des équations de la forme

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon), \quad (x, \dot{x}) \in D \subset \mathbb{R}^2. \tag{3.27}$$

Si $\varepsilon = 0$, toutes les solutions non triviales sont 2π-périodiques. Pour commencer, nous supposons que des solutions périodiques de l'équation (3.27) existent pour de petites valeurs positives de ε. De plus, nous supposerons que dans D et pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, les exigences de le théorème de développement de Poincaré ont été satisfaits. Étant la période T de la solution et les valeurs initiales (et donc la position de la solution dans le plan de phase) dépendra du petit paramètre ε. C'est la raison de mettre

$$T = T(\varepsilon),\ x(0) = a(\varepsilon),\ \dot{x}(0) = 0.$$

Notez que mettre $\dot{x} = 0$ pour les solutions périodiques de l'équation ((3.27)) n'est pas une restriction. Les approximations que nous allons construire concernent des solutions qui existent pour tout temps. L'échelle du temps de validité des approximations jouera donc un rôle dans le débat. Le théorème d'expansion nous dit que, sur l'échelle du temps 1.

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} x(t, \varepsilon) = a(0)\cos t.$$

avec $a(0)$ à ce stade inconnu, de plus on a bien $T(0) = 2\pi$. suite, nous allons étendre à la fois la valeur initiale et la période par rapport à la petit paramètre ε. Il convient de transformer $t \longrightarrow \theta$ tel que, dans la nouvelle variable de type temps θ la solution périodique est 2π-périodique. Nous transformons

$$\omega t = \theta, \omega^{-2} = 1 - \varepsilon\eta(\varepsilon).$$

L'équation 3.27 devient après transformation et avec la notation $x' = dx/d\theta$, on a

$$x'' + x = \varepsilon[\eta x + (1 - \varepsilon\eta)f(x, (1 - \varepsilon\eta)^{-\frac{1}{2}}x', \varepsilon)]. \tag{3.28}$$

avec $x(0) = a(\varepsilon)$, $\dot{x}(0) = 0$.

Nous allons abréger l'équation (3.28) par

$$x'' + x = \varepsilon g(x, x', \varepsilon, \eta).$$

La valeur initiale a et le paramètre η qui détermine la période inconnue, doivent être choisis de telle sorte que l'on obtienne une solution 2π-périodique dans θ de l'équation (3.28). Par variation des constantes, nous trouvons que le problème de la valeur initiale pour l'équation (3.28) est équivalent à l'équation intégrale suivante

$$x(\theta) = a\cos\theta + \varepsilon \int_0^\theta \sin(\theta - \tau)g(x(\tau), x'(\tau), \varepsilon, \eta)d\tau.$$

Pour la solution périodique, nous avons $x(\theta) = x(\theta + 2\pi)$. qui donne la périodicité état

$$\int_\theta^{\theta+2\pi} \sin(\theta - \tau)g(x(\tau), x'(\tau), \varepsilon, \eta)d\tau = 0.$$

En développant $\sin(\theta - \tau)$ nous trouvons deux conditions indépendantes

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin\tau g(x(\tau), x'(\tau), \varepsilon, \eta)d\tau = 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos\tau g(x(\tau), x'(\tau), \varepsilon, \eta)d\tau = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

La solution périodique dépend de ε mais aussi de a et η donc le système (3.29) peut être comme un système de deux équations à deux inconnues, a et η. Selon le théorème de la fonction implicite ce système d'équations 3.29 est uniquement résoluble dans un voisinage de $\varepsilon = 0$, si le Jacobien correspondant ne s'annule pas. Système d'écriture (3.29) sous la forme $F_1(a,\eta) = 0$, $F_2(a,\eta) = 0$ cela signifie que dans un voisinage de $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(a, \eta)} \neq 0. \tag{3.30}$$

Si la condition (3.30) est satisfaite, on a avec les hypothèses de droite de l'équation (3.27), que $a(\varepsilon)$ et $\eta(\varepsilon)$ peuvent être développés en une série de Taylor avec respect à ε. De l'équation (3.28), nous trouvons pour le système (3.29) avec $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin\tau f(a(0)\cos\tau, -a(0)\sin\tau, 0)d\tau = 0, \\ \pi\eta(0)a(0) + \int_0^{2\pi} \cos\tau f(a(0)\cos\tau, -a(0)\sin\tau, 0)d\tau = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

En appliquant (3.30) au système (3.31) on trouve la condition (notation : $f = f(x, y, \varepsilon)$)

$$\begin{aligned} a(0)\int_0^{2\pi}[\frac{1}{2}\sin 2\tau\frac{\partial f}{\partial x}(a(0)\cos\tau, -a(0)\sin\tau, 0)+ \\ -\sin^2\tau\frac{\partial f}{\partial y}(a(0)\cos\tau, -a(0)\sin\tau, 0)]d\tau \neq 0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Remarque 3.4.1. *Si $\varepsilon = 0$, toutes les solutions de l'équation (3.27) sont périodiques. Condition (3.30) et par conséquent condition (3.32), est une condition d'existence d'un périodique isolé solution qui bifurque pour $\varepsilon > 0$. Si au contraire il existe pour $\varepsilon > 0$ une famille continue de solutions périodiques, un famille à un paramètre dépendant de $a(\varepsilon)$, alors la condition (3.30)ou (3.32) ne sera pas satisfait. Si on sait a priori que cette famille de solutions périodiques existe, alors on peut bien sûr toujours appliquer la méthode de Poincaré-Lindstedt. Soit l'équation*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x).$$

Nous concluons que si la condition (3.30) a été satisfaite, la valeur périodique correspondante solution de l'équation (3.28) peut être représentée par la série convergente

$$x(\theta) = a(0)\cos\theta + \Sigma_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\gamma_n(\theta). \tag{3.33}$$

dans laquelle $\theta = \omega t = (1-\varepsilon\eta)^{-1/2}t$ en utilisant la série convergente
$a = \Sigma_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n a_n$, $\eta = \Sigma_{n=0}^{\infty}\varepsilon\eta_n$, $x(0) = a(0) + \Sigma_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\gamma_n(0)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.
Les développements de $T(\varepsilon)$ et $a(\varepsilon)$ que nous avons utilisés au début, ont ainsi été validés.

Nous allons maintenant illustrer la construction de la méthode de Poincaré-Lindstedt pour un exemple important.

Exemple 3.4.1. *(Équation de Van der Pol) Nous avons montré avant que l'équation*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

a une solution périodique pour toutes les valeurs positives de ε. On prend ε petit et on met $\omega t = \theta$, $\omega^{-2} = 1 - \varepsilon\eta(\varepsilon)$ de sorte que l'équation de Van der Pol se transforme en

$$x'' + x = \varepsilon[\eta x + (1 - \varepsilon\eta) f(x, (1 - \varepsilon\eta)^{-\frac{1}{2}} x', \varepsilon)$$

on a

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= (1 - x^2)\dot{x} \\ &= (1 - x^2)(1 - \varepsilon\eta)^{-\frac{1}{2}} x'. \end{aligned}$$

alors

$$x'' + x = \varepsilon[\eta x + (1 - \varepsilon\eta)(1 - x^2)(1 - \varepsilon\eta)^{-\frac{1}{2}} x'].$$

$$x'' + x = \varepsilon[\eta x + (1 - \varepsilon\eta)^{\frac{1}{2}}(1 - x^2)x']. \tag{3.34}$$

avec $x(0) = a(\varepsilon)$, $x'(0) = 0$. On peut déterminer $a(0)$ et $\eta(0)$ avec le système d' équations (3.31). Nous trouvons

$$\begin{aligned} a'(\varepsilon) &= \frac{1}{2}a(\varepsilon)(1 - \frac{1}{4}a(\varepsilon)) \\ \frac{1}{2}a(0)(1 - \frac{1}{4}a(0)^2) &= 0 \\ \eta(0)a(0) &= 0 \\ \frac{1}{2}a(0) &= \frac{1}{8}a(0)^3 \\ a^2(0) &= 4, \end{aligned}$$

avec des solutions non triviales $a(0) = 2$, $\eta(0) = 0$ (mettrea$(0) = -2$ ne donne pas a nouvelle solution périodique). La condition (3.30) a été satisfaite. Pour déterminer les termes de la série (3.33) systématiquement, on substitue la série avec ses dérivées dans équation (3.34). On collecte de termes qui sont des coefficients de puissances égales de c produit équations *pour les coefficients* $\gamma_n(\theta)$*. Ensuite, on applique la condition de périodicité, cette équivaut à utiliser le système* (3.29) *où* g *a été développé par rapport à pouvoirs de* ε*. Nous écrivons*

$$x(\theta) = a(0)\cos\theta + \Sigma_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\gamma_n(\theta)$$

$a = \Sigma_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n a_n,\ \ \eta = \Sigma_{n=0}^{\infty}\varepsilon\eta_n,\ \ x(0) = a(0) + \Sigma_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\gamma_n(0), 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$
Alors

$$x(0) = a_0\cos\theta + \varepsilon\gamma_1(\theta) + \varepsilon^2\gamma_2(\theta) + ...,$$

$$x'(0) = -a_0\sin\theta + \varepsilon\gamma_1'(\theta) + \varepsilon^2\gamma_2'(\theta) + ...etc,$$

et on a

$$\gamma_1'' + \gamma_1 = a_0\eta_0 cos\theta + a_0(\frac{1}{4}a_{0^2} - 1)\sin\theta + \frac{1}{4}a_0^3\sin 0\theta. \tag{3.35}$$

Les solutions de l'équation (3.35) *sont périodiques si* $a_0 = 2$*,* $\eta_0 = 0$*. La solution générale de l'équation est*

$$\gamma_1(\theta) = A_1\cos\theta + B_1\sin\theta - \frac{a_0^3}{32}\sin 3\theta.$$

D'après les conditions initiales, nous avons $B_1 = \frac{3}{32}(a_0^3)$*,* $A_1 = a_1$*, à l'étape suivante* a_1 *être déterminé. Dans la littérature, ce processus d'application de la condition de périodicité est parfois appelée « élimination des termes profanes ». Le terme « séculier » vient de mécanique céleste et fait référence à des termes sans limite du temps.*
En mettant $a_0 = 2$*, on trouve*

$$\gamma_1(\theta) = a_1\cos\theta + \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta.$$

L'équation pour γ_2 *est*

$$\gamma_2'' + \gamma_2 = \left(2\eta_1 + \frac{1}{4}\right)cos\theta + 2a_1\sin\theta + 3a_1\sin 3\theta - \frac{3}{2}\cos 3\theta + \frac{5}{4}\cos 5\theta. \tag{3.36}$$

La condition de périodicité donne $2\eta_1 + \frac{1}{4} = 0$*,* $a_1 = 0$ *ce qui détermine* $\gamma_1(\theta)$ *totalement. La solution générale de l'équation*(3.36) *est*

$$\gamma_2(\theta) = A_2\cos\theta + B_2\sin\theta + \frac{3}{16}\cos 3\theta - \frac{5}{96}\cos 5\theta.$$

D'après les conditions initiales, nous avons $B_2 = 0$*,* $A_2 + \frac{13}{96} = a_2$*, à l'étape suivante* a_2 *être déterminé. L'équation pour* γ^3 *est*

$$\gamma_3'' + \gamma_3 = 2\eta_2\cos\theta + \left(2A_2 + \frac{1}{4}\right)\sin\theta + \left(3A_2 - \frac{9}{32}\right)\sin 3\theta + \frac{35}{24}\sin 5\theta - \frac{7}{12}\sin 7\theta. \tag{3.37}$$

Notez que les équations pour γ_n sont toutes linéaires.

La condition de périodicité produit $\eta_2 = 0$, $2A_2 + \frac{1}{4} = 0$ qui détermine a_2.

En utilisant la relation $w^{-2} = 1 - \varepsilon\eta_0 - \varepsilon^2\eta_1 - \varepsilon^3\eta_2 - ...$, on trouve

$$\omega = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon\eta_0 + \varepsilon^2(\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{3}{8}\eta_0^2) + \varepsilon^3(\frac{1}{2}\eta_2 + \frac{3}{4}\eta_0\eta_1 + \frac{15}{48}\eta_0^3) + ...$$

Pour la période que nous avons

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\eta_0 - \varepsilon^2(\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{8}\eta_{0^2}) - \varepsilon^3(\frac{1}{2}\eta_2 + \frac{1}{4}\eta_0\eta_1 + \frac{3}{48}\eta_0^3) + ...)$$

Pour l'équation de Van der pol, on trouve avec $\eta_0 = 0$, $\eta_1 = -\frac{1}{8}$, $\eta_2 = 0$

$$\omega = 1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4),$$

$$T = 2\pi(1 + \frac{1}{16}\varepsilon^2) + O(\varepsilon^4).$$

L'approximation de la solution périodique de l'équation de van der Pol à la précision $O(\varepsilon^4)$

$$x(\theta) = 2\cos\theta + \varepsilon\left(\frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta\right) + \varepsilon^2\left(-\frac{1}{8}\cos\theta + \frac{3}{16}\cos 3\theta - \frac{5}{96}\cos 5\theta\right) +$$
$$\varepsilon^3\left(A_3 cos\theta - \frac{7}{256}\sin\theta + \frac{21}{256}\sin 3\theta - \frac{35}{576}\sin 5\theta + \frac{7}{576}\sin 7\theta\right) + O(\varepsilon^4).$$

3.5 Application

Dans cette section, nous montrerons comment trouver des approximations en séries convergentes de solutions en utilisant le théorème de développement et la périodicité de la solution. Cette méthode est généralement appelée d'après Poincaré Lindstedt, elle est aussi appelée la méthode de continuation.

Considérons l'équation de van der Pol modifiée pour $\varepsilon > 0$ d'apré l'équation (3.28)

Exemple 3.5.1.

$$\ddot{x} + x = \varepsilon x^3 + \varepsilon^2(1 - x^2)\dot{x}. \tag{3.38}$$

Nous chercherons des solutions périodiques de cette équation, Comme dans l'exemple (3.27), on pose

$$\omega t = \theta, \omega^{-2} = 1 - \varepsilon\eta(\varepsilon).$$

L'équation (3.38) devient avec $dx/d\theta = x'$

$$f(x,\dot{x},\varepsilon) = x^3 + \varepsilon(1-x^2)\dot{x}.$$

on a

$$x'' + x = \varepsilon[\eta x + (1-\varepsilon\eta) f(x,(1-\varepsilon\eta)^{-\frac{1}{2}}x',\varepsilon)]$$

alors

$$f(x,(1-\varepsilon\eta)^{-\frac{1}{2}}x',\varepsilon) = x^3 + \varepsilon(1-x^2)(1-\varepsilon\eta)^{-\frac{1}{2}}x'$$

$$x'' + x = \varepsilon[\eta x + (1-\varepsilon\eta)(x^3 + \varepsilon(1-x^2)(1-\varepsilon\eta)^{-\frac{1}{2}}x')].$$

donc

$$x'' + x = \varepsilon[\eta x + (1-\varepsilon\eta)x^3 + \varepsilon(1-\varepsilon\eta)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)x']. \tag{3.39}$$

Les valeurs initiales seront à nouveau $x(0) = a(\varepsilon)$, $x'(0) = 0$. Nous élargissons, et d'apré l'équation (3.33), on trouve

$$a(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n a_n, \quad \eta(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\eta_n$$

$$x(0) = a_0\cos\theta + \varepsilon y_1(\theta) + \varepsilon^2 y_2(\theta) + ...$$

$$x'(\theta) = -a_0\sin\theta + \varepsilon y_1'(\theta) + \varepsilon^2 y_2'(\theta) + ...$$

La substitution dans l'équation (3.39) et la mise en équation des coefficients de puissances égales de ε donne

$$y_1'' + y_1 = \eta_0 a_0\cos\theta + a_0^3\cos^3\theta, \tag{3.40}$$

$$y_2'' + y_2 = \eta_1 a_0\cos\theta + \eta_0 y_1(\theta) - \eta_0 a_0^3\cos^3\theta + 3a_0^2\cos^2\theta y_1(\theta) - (1-a_0^2\cos^2\theta)a_0\sin\theta. \tag{3.41}$$

La solution générale de l'équation (3.40) est

$$y_1(\theta) = A_1\cos\theta + B_1\sin\theta + \int_0^{\theta}\sin(\theta-\tau)[\eta_0 a_0\cos\tau + a_0^3\cos^3\tau]d\tau.$$

A partir des valeurs initiales nous avons $A_1 = a_1$, $B_1 = 0$, a_0 et a_1 sont encore inconnus. La condition de périodicité produit

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin\tau[\eta_0 a_0\cos\tau + a_0^3\cos^3\tau]d\tau = 0\\ \int_0^{2\pi}\cos\tau[\eta_0 a_0\cos\tau + a_0^3\cos^3\tau]d\tau = 0.\end{aligned} \tag{3.42}$$

on a

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x dx = 0, \quad si \quad m, n \quad sont\ impaires,$$

et de plus

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}, \quad I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}.$$

On arrive à $I_{0,0} = 2\pi$*, alors*

$$\int_0^{2\pi} a_0\eta_0 \sin\tau \cos\tau d\tau + \int_0^{2\pi} a_0^3 \cos^3\tau \sin\tau d\tau = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2\tau a_0\eta_0 + \int_0^{2\pi} a_0^3 \cos^4\tau d\tau &= 0 \\ &= a_0\eta_0\pi + a_0^3 \frac{3\pi}{4} \\ &= a_0(\eta_0 + \frac{3a_0^2}{4}) \end{aligned}$$

La première équation de (3.42) *est valable pour toutes les valeurs de* η_0 *et* a_0*, dès la seconde équation que nous trouvons*

$$a_0(\eta_0 + \frac{3}{4}a_0^2) = 0.$$

Le jacobien du système 3.41 *est nul. Les paramètres* a_0 *et* η_0 *n'ont pas été déterminée de manière unique. On trouve avec* $\eta_0 = -\frac{3}{4}a_0^2$*,*

$$y_1(\theta) = a_1 \cos\theta + \int_0^{\theta} \sin(\theta - \tau) \frac{a_0^3}{4} \cos 3\tau d\tau = a_1 \cos\theta + \frac{a_0^3}{32}(\cos\theta - \cos 3\theta).$$

Le lecteur doit considérer les conséquences du choix $a_0 = 0$*. De la même manière on détermine la solution de l'équation* (3.41)*. La périodicité donne*

$$\int_0^{2\pi} \sin\tau[\eta_1 a_0 \cos\tau + \eta_0\gamma_1(\tau) - \eta_0 a_0^3 \cos^3\tau + 3a_0^2 \cos^2\tau\gamma_1(\tau) - (1 - a_0^2\cos^2\tau)a_0 \sin\tau]d\tau = 0 \tag{3.43}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\tau[\eta_1 a_0 \cos\tau + \eta_0\gamma_1(\tau) - \eta_0 a_0^3 \cos^3\tau + 3a_0^2 \cos^2\tau\gamma_1(\tau) - (1 - a_0^2\cos^2\tau)a_0 \sin\tau]d\tau = 0. \tag{3.44}$$

alors

$$\int_0^{2\pi} \eta_1 a_0 \sin\tau \cos\tau + \int_0^{2\pi} \sin\tau\eta_0\gamma_1(\tau) - \int_0^{2\pi} \sin\tau\eta_0 a_0^3 \cos^3 + \int_0^{2\pi} \sin\tau 3a_0^2 \cos^2\tau\gamma_1(\tau) - \int_0^{2\pi} a_0 \sin^2\tau$$

$$+\int_0^{2\pi} \sin\tau a_0^3 \cos^2\tau \sin^2\tau d\tau$$

$$= -a_0\pi + \frac{a_0^3\pi}{4} = a_0(1 - \frac{1a_0^2}{4}).$$

$$\int_0^{2\pi} \eta_1 a_0 \cos^2\pi + \int_0^{2\pi} \eta_0\gamma_1(\tau)\cos\tau - \int_0^{2\pi} \eta_0 a_0^3 \cos^4\tau$$

$$+\int_0^{2\pi} 3a_0^2 \cos^3\tau\gamma_1(\tau) - \int_0^{2\pi} a_0\cos\tau\sin\tau + \int_0^{2\pi} a_0^3\cos^2\tau\sin\tau = 0.$$

Les conditions (3.43) *et* (3.44) *conduisent à à*

$$a_0(1 - \frac{1}{4}a_0^2) = 0$$

$$\Rightarrow \eta_1 a_0 + \eta_0 a_1 - \frac{23}{32}\eta_0 a_0^3 + \frac{9}{4}a_0^2 a_1 + \frac{a_0^3}{64} = 0.$$

Il s'ensuit que $a_0 = 2$ *de sorte que* $\eta_0 = -3$. *Ainsi le premier terme de l'approximation de* $x(\theta)$ *a été déterminé de manière unique. La deuxième relation donne*

$$2\eta_1 + 6a_1 + \frac{139}{8} = 0.$$

Les paramètres η_1 *et* a_1 *peuvent être déterminés en analysant la condition de périodicité pour la solution de l'équation pour* $\gamma_2(\theta)$. *La solution périodique de l'équation* (3.38) *est approché comme*

$$x(t) = 2cos(1 - \frac{3}{2}\varepsilon)t + O(\varepsilon).$$

Bibliographie

[1] Aziz. Alaoui, *C. Bertelle, METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES, France, (2002).*

[2] J-P.Demailly, *Analyse Numérique Et Equations Differentielles,Nouvelle Edition , France,2006.*

[3] F.C-Emard, *Analyse 2,Calcul differentiel,Intégrales multiples,Séries de fourier ,2006.*

[4] R-E.Mickens, *An Introduction to nonlinear oscillations, Cambridge University , 1981.*

[5] R.E. Mickens , *Oscillations in planar dynamics systems,World Scientifics, Singapore ,1996.*

[6] S. Meftah, *A new approach to approximate solutions for nonlinear differential equation , J. IJMMS, 6 (1), pp. 26-38. 2018.*

[7] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, American Mathematical Society, 2011.*

[8] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos, Perseus Book Publishing, LLC, Cambridge, MA (1994).*

[9] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems, Third Edition, Springer, New York (2001).*

[10] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, 2nd edition, Springer, Berlin (1989).*

[11] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, New York, 1990.*

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier l'existence d'approximations analytiques pour approximer les solutions d'équations différentielles, où nous avons d'abord introduit toutes les propriétés et concepts de base utilisés, puis nous avons introduit la théorie de l'existence de Poincaré, la méthode de Lindstedt et la moyenne, et enfin nous avons étudié les conditions d'existence des solutions périodiques, comme nous l'avons donné avec des exemples.

Mots clés: Approximation, Théorie des perturbations, solutions périodiques, méthodes d'approximation simple et moyenne, Lindstedt-Poincaré et des groupes de renormalisation.

Abstract

The purpose of this work is to study the existence of analytic approximations to approximate solutions of differential equations, where we first introduced all the basic properties and concepts used, then we introduced Poincaré's theory of existence, Lindstedt's method and the mean, and finally we studied the conditions for the existence of periodic solutions, as we gave that with examples.

Keywords: Approximation, Theory of perturbation, periodic solution, simple, avergning , Lindstedt-Poincaré method and renormalization group methods.

الملخص

الغرض من هذا العمل هو دراسة وجود التقريبات التحليليه للحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية ، حيث قدمنا أولاً جميع الخصائص والمفاهيم الأساسية المستخدمة ، ثم قدمنا نظرية بوانكاريه للوجود وطريقة ليندستيد والمتوسط ، وأخيراً درسنا شروط وجود الحلول الدورية ، كما قدمنا ذلك بأمثلة

كلمات مفتاحيه: : التقريب ، نظرية الإضطراب ، الحلول الدورية، طرق التقريب البسيط والمتوسط و لانديست بوانكارييه و طريقة مجموعة إعادة التطبيع.