الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي
قسم علم النفس وعلوم التربية

# محاضرات في مقياس المعالجة الإحصائية للبيانات التربوية

موجهة لطلبة السنة أولى ماستر إرشاد وتوجيه

إعداد الأستـــــــاذ:

د. محمد سبـع

السنة الجامعية: 2022 / 2023

محتوى المادة:

مقدمة

- 1. مدخل إلى علم الإحصاء : مفاهيم أساسية
- 2. مراجعة عامة حول مبادئ الإحصاء الوصفي
  - 1.2. مقاييس النزعة المركزية
  - 2.2. مقاييس التشتت
- 3. مدخل إلى الإحصائ المعمق ( الاستدلالي)
  - 1.3. شرطيات الإحصاء البارامتري (المعلمي) والإحصاء اللابارامتري ( اللامعلمي)
  - 2.3. معايير اختيار الإحصاء البارامتري (المعلمي) والإحصاء اللابارامتري (اللامعلمي)
- 4. نماذج من المعالجة الإحصائية اللابارمترية ( اللامعلمية) في المستوى الاسمي
  - 1.4. إختبار كا$^2$ chi square لحسن المطابقة
  - 2.4. معامل ارتباط فاي
  - 3.4. معامل التوافق
- 5. نماذج من المعالجة الإحصائية اللابارمترية ( اللامعلمية) في المستوى الرتبي
  - 1.5. اختبار ويلكوكسن للفرق بين الرتب
  - 2.5. اختبار فريدمان لتحليل التباين
  - 3.5. اختبار مان ويتني
  - 4.5. اختبار فروق الرتب سبيرمان
- 6. نماذج من المعالجة الإحصائية البارمترية (المعلمي) في المستوبين النسبي / الفتري
  - 1.6. معامل ارتباط بيرسون
  - 2.6. اختبار ت لدلالة الفروق بين المتوسطات
  - 3.6. تحليل التباين الأحادي

- 
- قائمة المراجع
- قائمة الملاحق:
- جداول الدلالة الاحصائية

مقدمة:

لم يعد في الإمكان النظر إلى مادة الإحصاء كمعطى معرفي ثانوي يتلقاه الطالب خلال مشواره الدراسي بالنظر إلى جملة من المعطيات لعل أهمها الملمح العام الذي تتسم به الدراسات المنجزة في مجال العلوم النفسية والتربوية والاجتماعية، من حيث النزوع إلى الطابع الكمي والعزوف عن المنحى الكيفي وهو ما يحتم على الطالب التمكن من أدوات التحليل الإحصائي الدقيق من أجل الإفادة مما تقدمه هذه الأخيرة.

من أجل ذلك تقدم هذه الوثيقة البيداغوجية سندا معرفيا للطلبة في مجال علوم التربية والعلوم النفسية والاجتماعية بشكل عام من حيث تناولها لجل الانشغالات التي يطرحها الطالب أثناء مشواره الدراسي في تلقي هذه المادة العلمية أو عند إنجازه للبحوث المكملة لإجراءات التخرج، وقد حاولت أثناء تناولي لمضامين هذه المادة البيداغوجية الوقوف على جل المباحث الممكنة من حيث التدرج في تسلسل الدروس بداية من مراجعة عامة لمبادئ الإحصاء الوصفي التي ظلمها النظام الجديد للتعليم في الجامعات بعد أن أصبح الطالب في مجال العلوم الاجتماعية لا يتلقى إلى ما مجموعه سداسي واحد في مرحلة الليسانس وهو ما أفرز قصورا معرفيا لدى الطالب في هذا المبحث الذي انعكس بدوره على استيعاب الطالب لما يلحق من مباحث في المراحل اللاحقة من التكوين فيما يتصل بالإحصاء الاستدلالي، عطفا على هذا الانشغال تضمنت المادة العلمية المقدمة في هذه الوثقية البيداغوجية جملة من المباحث المتصلة بالإحصاء الوصفي مرفقة ببعض الأمثلة والتمارين، قبل الولوج إلى عمق الدرس الإحصائي من ناحية تناول الأساليب الإحصائية الاستدلالية الأكثر استخداما في معالجة الفرضيات في البحوث النفسية والتربوية والاجتماعية مع مراعاة تقديمها في قالب يسهّل على الطالب استيعابها من حيث تقسيمها إلى أساليب إحصائية بارامترية ولابارمترية وتصنيف آخر يعتمد على تقسيمها من حيث مستويات القياس والمعالجة الإحصائية، وهو ما نعتقد أنه يسهل على الطالب التمكن من مفاصل المادة العلمية.

## 1. مدخل إلى علم الإحصاء: مفاهيم أساسية

- **الإحصاء Statistical** :

وردت كلمة الإحصاء بمختلف اشتقاقاتها في القرآن الكريم في غير ما موضع منها :

ثُمَّ بَعَثْنَاهُمْ لِنَعْلَمَ أَيُّ الْحِزْبَيْنِ **أَحْصَى** لِمَا لَبِثُوا أَمَدًا (12) . الكهف .

إِنَّا نَحْنُ نُحْيِي الْمَوْتَى وَنَكْتُبُ مَا قَدَّمُوا وَآثَارَهُمْ وَكُلَّ شَيْءٍ **أَحْصَيْنَاهُ** فِي إِمَامٍ مُبِينٍ (12) . ياسين .

يَوْمَ يَبْعَثُهُمُ اللَّهُ جَمِيعًا فَيُنَبِّئُهُم بِمَا عَمِلُوا **أَحْصَاهُ** اللَّهُ وَنَسُوهُ وَاللَّهُ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ شَهِيدٌ (6) . المجادلة .

وَآتَاكُم مِّن كُلِّ مَا سَأَلْتُمُوهُ وَإِن تَعُدُّواْ نِعْمَتَ اللهِ لاَ **تُحْصُوهَا** إِنَّ الإِنسَانَ لَظَلُومٌ كَفَّارٌ (34) . إبراهيم .

في اللغة :عبر العرب عن كثرة الشيء وحجمه بالحصى، ويقال حصيت أي عددت وأحصيته أي ميزته بعضه عن بعض، والحصاة بمعنى العقل.

واختار الإمام ابن القيم في البدائع (164/1) من قوله صلى الله عليه وسلم إن لله تسع وتسعين إسما من أحصاها دخل الجنة أي أن الإحصاء على ثلاثة مراتب هي ( 1. إحصاء ألفاظها وعددها 2. فهم معانيها ومدلولها . 3. دعاؤه بها)

والإحصاء في الكلام: على ثلاث مراتب

(1العدد، ومنه قوله تعالى {وأحصى كل شيء عدداً} [الجن :28] . تخص أصحاب اليمين .

(2المفهم، ومنه يقال: رجل ذو حصاة أي: ذو لب وفهم، ومنه سمي العقل. . تخص السابقين .

(3الإطاقة على العمل والقوة، ومنه قوله تعالى: { علم ألن تحصوه } [ المزمل : 20]

أي: لن تطيقوا العمل بذلك. . للصديقين

استخدام كلمة إحصاء:

تستخدم بصيغة الجمع أي إحصائيات ( Statistics ) ومرادفتها بيانات وتستخدم كمفرد إحصاء أو إحصاءه بمعنى النتيجة التي توصلنا إليها من إجراء الرياضيات على البيانات فمتوسط العمر لمجموعة من الناس يطلق عليه إحصاء أو إحصاءه.

علماً : فرع من فروع العلم، فالإحصاء مجرد بيانات تعتبر المادة الخام لهذا العلم والبيانات تجمع من مصادرها المطلوبة حسب المطلوب فتبوب وتلخص وتقييم ومن ثم يستنتج المراد منها. (01)

فالإحصاء هو علم يبحث فى طريق جمع الحقائق الخاصة بالظواهر العلمية الاجتماعية التى تتمثل فى حالات أو مشاهدات متعددة ، وفى كيفية تسجيل هذه الحقائق فى صورة قياسية رقمية، وتلخيصها بطريقة يسهل بها معرفة اتجاهات الظواهر وعلاقات بعضها ببعض ، ويبحث أيضاً فى دراسة هذه العلاقات والاتجاهات واستخدامها فى تفهم حقيقة الظواهر ومعرفة القوانين التى تسير تبعاً لها . (02)

والإحصاء فرع من فروع العلم التى تتعامل مع البيانات وتحليلها وتنظيمها للإجابة عن التساؤلات والاستدلال منها وبذلك يستخدم الإحصاء فى فهم الكثير من المشكلات وأحياناً يساء استخدام الإحصاء فى عرض البيانات بشكل خاطئ أو خادع للاستدلال ويجب دائماً أن نفكر فى الإحصاء كوسائل لها وظائف ثلاث أساسية هي: **(03)**

أ- **الوصف Descriptive**: تعتبر طريقة جمع البيانات وتلخيصها وتبويبها من أهم وظائف علم الإحصاء، إذ لا يمكن الاستفادة من البيانات الخام، ووصف الظواهر المختلفة محل الاهتمام، إلا إذا تم جمع البيانات وعرضها في شكل جداول ورسومات بيانية توضيحية، وحساب بعض المؤشرات الإحصائية التي تدلنا على طبيعة البيانات.

ب-**الإحصاء الاستدلالي statistical Inference**: من بين أهم وظايف الإحصاء المستخدمة في مجال البحث العلمي، وتستند فكرة الإحصاء الاستدلالي على فكرة إختيار جزء من المجتمع يسمى عينة بطريقة علمية مناسبة بغرض استخدام بيانات هذه العينة في الوصول إلى نتائج يمكن تعميمها على بقية أفراد مجتمع الدراسة، ومن ثم فإن الاحصاء الاستدلالي يهتم بموضوعين رئيسين هما:

1. **التقدير estimate**: وفيه يتم حساب مؤشرات من بيانات العينة تسمى إحصاءة statistics تستخدم كتقدير لمؤشرات لتقديرات المجتمع تسمى معلمات

paramètres ويطلق على المقاييس الإحصائية المحسوبة من من بيانات العينة في هذه الجالة التقدير بنقطة point estimate كما يمكن أيضا استخدام المقاييس الإحصائية المحسوبة من بيانات العينة في تقدير المدى الذي يمكن ان يقع داخله معلمة المجتمع باحتمال معين، ويمسى ذلك بالتقدير بفترة interval estimate .

2. **اختبار الفروض tests of hypotheses** : وفيه يستخدم بيانات العينة للوصول إلى قرار علمي سليم بخصوص الفروض المحددة حول معلمات المجتمع.

**ج- التنبؤ forecasting**: وفيه تستخدم نتائج الإحصاء الاستدلالي والتي تدلنا على سلوك الظاهرة في الماضي في معرفة ما يمكن أن يحدث لها في الحاضر والمستقبل، وهناك العديد من الأساليب الإحصائية المعروفة التي تستخدم في التنبؤ، ومن أبسطها اسلوب الاتجاه العام، وهي معادلة رياضية يتم تقدير معاملاتها باستخدام بيانات العينة . **(04)**

- **البيانات الإحصائية (data statistical)** : المقصود هنا بالبيانات والمعلومات الإحصائية المتعلقة بالمجتمع وتختلف البيانات باختلاف الظاهرة محل الدراسة، وتختلف البيانات من حيث النوع والطبيعة حسب الظاهرة محل الدراسة فمنها البيانات السكانية والتربوية والصحية وغير ذلك مما هو موجود في المجتمع وما يتعلق بنشاطات المجتمع الرياضية والفكرية وغيرها ولكل منها طريقته الخاصة في البيانات المتوفرة في المجتمع محل الدراسة، وقد يتطلب الأمر في بعض الحالات تحويل البيانات الوصفية لكمية باستخدام أدوات القياس سواء الكمية منها أو النوعية. **(05)**
- **البيانات النوعية (data Qualitative)** : البيانات النوعية وهي تصف ظاهرة بصورة غير رقمية كالجنس (ذكر و أنثى) والتقدير (ممتاز و جيد و ... ) وقد تأخذ قيم كما هو الحال في استطلاعات الرأي فالقيمة هنا تعبر عن الشعور أو الرغبة للشخص المستجيب ويُعتقد أن هذا النوع من البيانات تساعد على حل العديد من المشاكل.
- **البيانات الكمية (data Quantitate)** والبيانات كما ذكرنا أما نوعية أو كمية (رقمية) وتعرف الرقمية بالبيانات المقيسة مثل الكيلوجرام للوزن والمتر للطول والدينار للسعر،

وهي تعبر عن ظاهرة في المجتمع بصورة رقمية كإنتاج القطن بالطن، والبيانات الكمية تعبر عن خاصية ما في المجتمع.

- **المجتمع (Population)**: المجتمع يمثل جميع المفردات الممكنة للظاهرة محل الدراسة، والمجتمع قد يكون سكان دولة ما أو أجور عمال مهنة ما في بلد ما أو العاطلين في بلد ما والمجتمع قد يكون محدوداً (يمكن عد مفرداته ولو من الناحية النظرية) أو يكون مجتمع غير محدود (لا يمكن عد مفرداته)، وتعرف خصائص المجتمع التي يمكن قياسها كمياً بمعالم المجتمع (Parameters) كمتوسط أجر المدرسيين في الدولة والمتوسط كقيمة يعبر عن القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع ونسبة الناجحين في امتحانات الباكالوريا هي من معالم مجتمع المتقدمين لامتحانات الباكالوريا وللمجتمع غير المحدود يستحيل الوصول للقيمة الحقيقية عند دراسة ظاهرة ما فلذا نستدل عليها بأخذ مفردات قليلة العدد من المجتمع (العينة) للاستدلال على معالم المجتمع، والمجتمع قد يكون مستهدف أو معاين فالمجتمع المستهدف هو ذلك المجتمع الذي يعمل الباحث لاتخاذ قرار بشأنه والمعاين هو مجموعة المفردات التي يختبرها الباحث والمعروف بالعينة الآتي تعريفها.
- **العينة (Sample)** : العينة هي جزء من المجتمع ودراستها وما ينجم عنها من خصائص يمكن بواسطتها الاستدلال على خواص المجتمع ككل، وإحصائية العينة أي أحد خصائصها كالمتوسط الحسابي لأفرادها وهو قياس كمي أو جزء من أفرادها للكل كنسبة الناجحين بين أفراد العينة ويعتبر الوسط الحسابي أو النسبة (الاحتمال) من خصائص العينة ومنها يستدل على معالم المجتمع المسحوب منه العينة فرسوب ثلاثة طلاب من بين 20 طالباً (العينة) أي $3 \div 50 = 0.06$ هي من خواص العينة ويمكن الاستدلال منها حال عدد مفردات المجتمع (1000 مثلاً) من الطلاب المتقدمون للامتحان السابق في العينة يستدل برسوب 1000 $\times 0.06 = 60$ طالب.
- **المعلمة والإحصاءة: المعلمة (Parameter)** وهي القياس المستنتج من بيانات المجتمع، والإحصاءة (Statistic) وهي المقياس المستخرج من بيانات العينة وهي محل التعامل مع بياناتها في معظم الأحوال، وعليه يكون للعينة أهمية قصوى في معرفة خصائص مجتمع أو أكثر

من خلال خصائص العينة محل الدراسة وباعتبار معلمة المجتمع مجهولة فتقدر بالمناسب من خلال حسابه من بيانات العينة. **(06)**

## 2. أنواع الإحصاء :

- يترتب على أي دراسة علمية ذات منحى كمي عادة مجموعة من الأرقام الناتجة عن استخدام المقاييس ويطلق على هذه الأرقام بيانات، والإحصاء هو دراسة طرق معالجة هذه الأرقام معالجة كمية بما فى ذلك أساليب تنظيم وتلخيص تلك الأرقام والخروج باستدلالات وتعميمات منها ويمكن تصنيف هذه الطرق على النحو التالى :
- (أ) الإحصاء الوصفى & الإحصاء الاستدلالى : (07)

| أنواع الإحصاء | |
|---|---|
| الوصفى Descriptive | الاستدلالىInferential |
| ● طرق تنظيم وتلخيص ووصف البيانات وصفاً كمياً.<br>● مجموعة من المفاهيم والأساليب الإحصائية التى تستخدم فى تنظيم وتلخيص وعرض مجموعة من البيانات بهدف إعطاء فكرة عامة عنها.<br>● ملخص جيد لمجموعة كبيرة من المعلومات والبيانات. | ● مجموعة من الأساليب الإحصائية المستخدمة للتوصل إلى استنتاجات من بيانات العينة إلى المجتمع الأكبر .<br>● يشير إلى طرق الاستدلال عن المجتمع من بيانات العينة.<br>● عملية اتخاذ قرار منطقى باستخدام بيانات العينة وأسلوب إحصائى مناسب.<br>● يعتمد على افتراضين أساسيين هما :العشوائية فى اختيار العينة المستخدمة فى الدراسة والتوزيع الاعتدالى للمتوسطات |

| | |
|---|---|
| • أهم صور التصنيف جداول التوزيع التكرارى والرسوم البيانية التى تعبر عن هذا التوزيع.<br>• أما التخليص فيتخذ ثلاثة صور هى:1. النزعة المركزية " المتوسط – الوسيط – المنوال " 2.التشتت " المدى – الانحراف المعيارى – نصف المدى الربيعى. | ومنه : اختبار"ت" – تحليل التباين – اختبار مان ويتنى – النسبة الحرجة – فريدمان –كروسكال واليز –ولكوكسون –كا2 |

## ➢ 2. مراجعة عامة حول مبادئ الإحصاء الوصفي

### 1.2. مقاييس النزعة المركزية

- نسعى من وراء دراستنا لظاهرة إحصائية معينة إلى استنتاج صفة مميزة ما أو أكثر من صفة فعند دراستنا لدرجات طلاب السنة التمهيدية في مادة الرياضيات نستنتج أن معظم الدرجات تميل إلى التمركز حول نقطة أو درجة معينة وهي درجة النجاح بينما نجد أن الدرجات المتطرفة الأخرى من الدرجات المدروسة ، قليلة نوعاً ما وهذه الدرجات ، المتطرفة ، هي الدرجات العالية جداً أو المنخفضة جداً أو كلاهما . نسمي هذا الميل بالتمركز أو بالنزعة المركزية ، ونسمي القيم التي تتمركز حولها القيم الأخرى مقاييس النزعة المركزية Measures of Central location ولهذه المقاييس أهمية كبيرة في علم الإحصاء فهي تعطينا فكرة عامة عن قيم الظاهرة المدروسة وبالتالي مقارنة مجموعتين أو أكثر . هناك عدة مقاييس لهذا الغرض منها الوسط الحسابي أو المتوسط (المعدل ) Mean الوسيط Median والمنوال Mode .

**(08)**

**أولا: الوسط الحسابي أو المتوسط: Mean :**

- يمثل الوسط الحسابي أو المتوسط (Arithmetic Average or Mean) مقياس النزعة المركزية الأكثر شهرة والأكثر أهمية في المقاييس المختلفة. وتمثل قيمة الوسط الحسابي القيمة التي تتمركز حولها جميع القيم المختلفة للمتغير الكمي. يمكن الحصول على القيمة الحقيقية لمتوسط متغير عشوائي في مجتمع محدود إذا تم التعامل مع كافة القيم في المجتمع. في هذه الحالة يرمز لقيمة الوسط الحسابي المحصل بالرمز $\mu$ والتي تمثل معلمة المجتمع. وبافتراض التعامل مع متغير عشوائي $X$ لمجتمع محدود حجمه $N$ فانه يمكن حساب قيمة الوسط الحسابي من خلال الدالة التالية: **(09)**

$$\mu_X = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \qquad \textbf{[ 1 ]}$$

أما في حال التعامل مع عينة عشوائية ممثلة لمجتمع الدراسة حجمها $n$ قراءة، فان معادلة تقدير قيمة الوسط الحسابي الذي يعبر عنه بالرمز $\bar{x}$ ويقرأ (xbar) لمجموعة من القيم $x_1, x_2, \ldots x_n$ هو حاصل قسمة مجموع القيم في العينة على عددها

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad \textbf{2 ]}$$

ويشار إليها في كتب الإحصاء المتخصصة بأحد المعادليتين التاليتين:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \textbf{3 ]}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad \textbf{]}$$

مثال (01):

تمثل الدرجات التالية درجات مجموعة من الطلبة في مقياس الإحصاء:

10 ، 11 ، 9 ، 15 ، 10 ، 12 ، 8 ، 5

فإن $\sum_{i=1}^{n} x_i$ = 10 +11+9+15+10+12+8+5

فإن المتوسط الحسابي وفق المعادلة **[ 3 ]**: $\bar{x} = \frac{1}{10}[10+11+9+15+10+12+8+5] = \frac{80}{10} = 8$

وهي ذات القيمة باستخدام المعادلة **[ 4 ]** : $\bar{x} = \frac{[10+11+9+15+10+12+8+5]}{10} = \frac{80}{10} = 8$

أما إذا كانت البيانات معطاة بجدول توزيع تكراري ذو قيم $x_1, x_2, \ldots x_n$ وتكراراتها على التوالي هي $f_1.f_2.f_3 \ldots f_K$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i \quad \textbf{[ 5 ]}$$

**مثال (02)**: تمثل القيم التالية تكرارات درجات 25 طالبا: **2 ، 3، 4، 5، 6، 7، 8، تكراراتهم على التوالي كانت 7، 10، 10، 4، 5، 3، 4، 7**

| درجات الطلبة $x_i$ | التكرار $f_i$ | الدرجة xالتكرار $x_i f_i$ |
|---|---|---|
| **2** | **1** | **2** |
| **3** | **2** | **6** |
| **4** | **3** | **12** |
| **5** | **4** | **20** |
| **6** | **5** | **30** |
| **7** | **4** | **28** |
| **8** | **2** | **16** |
| **9** | **4** | **36** |
| المجموع | **25** | **150** |

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i}^{k} x_i f_i}{\sum_{i}^{k} f_i} = \frac{\sum_{1}^{8} x_i f_i}{\sum_{1}^{8} f_i} = \frac{1}{25}[2(1)+3(2)+4(3)+5(4)+6(5)+7(4)+8(2)+9(4)] = \frac{150}{25} = 6$$

**مثال (03)**: باستخدام المعادلة نفسها يمكن حساب المتوسط الحسابي لبيانات مبوبة في شكل فئات انطلاقا من المثال التالي:

| فئات درجات قلق الامتحان | التكرار $f_i$ | مراكز الفئات $x_i$ | مركز الفئة x التكرار $x_i f_i$ | خطوات الحل: |
|---|---|---|---|---|
| **24–20** | **6** | **22** | **132** | **1. نحسب مراكز الفئات من خلال حاصل قسمة الحد الأعلى للفئة + الحد الأدنى للفئة /2** |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 29–25 | 4 | 27 | 108 | 2. نخصص عمود في الجدول لحساب حاصل ضرب مركز الفئة x تكرار الفئةمخ من خلال : $\sum f \cdot x$<br>3. نحسب مجموع التكرارات من خلال $\sum f$<br>4. نعوض النواتج في قانون حساب المتوسط $\bar{x} = \frac{\sum_i^k x_i f_i}{\sum_i^k f_i} = \frac{1665}{45} = 37$ |
| 34–30 | 9 | 32 | 288 | |
| 39–35 | 8 | 37 | 296 | |
| 44–40 | 6 | 42 | 252 | |
| 49–45 | 7 | 47 | 329 | |
| 54–50 | 5 | 52 | 260 | |
| المجموع | 45 | | 1665 | |

- الخواص الإحصائية للمتوسط:

- مجموع انحرافات قيم مجموعة بيانات عن وسطها الحسابي دائما يساوي الصفر أي:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

- يأخذ جميع القيم في الاعتبار.
- من أكثر المقاييس الوصفية استخداما
- يتأثر بالقيم المتطرفة الكبيرة والصغيرة.

## ثانيا: الوسيط Median

يعتبر الوسيط (Median) مقياس آخر للنزعة المركزية، حيث يتم من خلال الوسيط الوصول إلى رقم كمي يمثل القيمة التي تقع في منتصف قيم المتغير الكمي المدروس، لذا فإن الوسيط يمثل القيمة الكمية التي تكون نصف قراءات المتغير الكمي أقل منها بينما النصف الآخر أعلى منها، ولحساب الوسيط لابد أولا من أن يتم ترتيب القيم تصاعديا، حيث يتم ذلك من خلال الترتيب التصاعدي (أو الهابط) العادي في حال البيانات الخام ، والوسيط واحد من القيم الوضعية التي يمكن من خلالها معرفة تموضع الدرجات وعموما يمكن معرفة قيمة الوسيط بعد ترتيب الدرجات تصاعديا أو تنازليا ثم حساب قيمته باستخدام إحدى المعادلتين **[ 6 ] أو [ 7 ]** وذلك بحسب عدد القيم إما أن يكون فرديا أو زوجيا وهي المعادلة التي تسمح لنا بمعرفة رتبة الوسيط وليس الوسيط نفسه. **(10)**

المعادلة **[ 6 ]** إذا كان عدد القيم غير المبوبة فرديا $Med = X_{(n+1)/2}$ **[ 6 ]**

أما إذا كان عدد القيم زوجيا فإن المعادلة الخاصة بحساب قيمة الوسيط هي:

$$Med = \frac{1}{2}\left( X_{(n/2)} + X_{(n+2)/2} \right) \quad [7]$$

**مثال (04)**: إذا كان لدينا مجموعة من القيم عددها فردي هي : 2، 5، 3، 9، 12، 10، 8

1. نقوم بترتيب الدرجات تصاعديا: 2، 3، 5، 8، 9، 10، 12
2. عدد القيم n = 7 $/ \ Med = x\,(7+1)/2 = 4$
3. 4x = 8

**مثال (05)**: إذا كان لدينا مجموعة من القيم عددها زوجي هي: 2، 5، 3، 9، 12، 10، 8، 11

1. نقوم بترتيب القيم تصاعديا: 2، 3، 5، 8، 9، 10، 11، 12
2. عدد القيم هنا زوجي باستخدام المعادلة [ 7 ] نحصل على:

$$Med = \frac{1}{2}\{x\,(8)/2 + x(8+2)/2\} = \frac{1}{2}(8+9) = 8.5$$

أما إذا كانت البيانات مبوبة في فئات فإن قيمة الوسيط تحسب من خلال المعادلة ويتعين قبل ذلك تحديد الفئة الوسيطية وهي الفئة التي يزيد أو يساوي تكرارها المتجمع الصاعد رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$ حيث $n$ هو مجموع التكرارات .

$$Me = L_1 + \left(\frac{\frac{n_i}{2} - \Sigma f_1}{f_{Me}}\right) \times C$$

حيث:

Me: هو الوسيط

$L_1$ : الحد الأدنى الفعلي للفئة الوسيطية وهو قيمة الحد الأدنى – 0.5

$n_i$ : مجموع التكرارت $\left(\sum_{i=1}^{K} f_i\right)$

$\frac{n_i}{2}$ رتبة الوسيط

$\Sigma f_1$ التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية

$f_{Me}$ تكرار الفئة الوسيطية

$C$ طول الفئة

**مثال (06):** انطلاقا من القيم الواردة في الجدول أدناه أوجد قيمة الوسيط

| فئات درجات قلق الامتحان | الحدود الحقيقية للفئات | التكرار $f_i$ | مراكز الفئات $x_i$ | التكرار المتجمع الصاعد |
|---|---|---|---|---|
| 24–20 | 24.5–19.5 | 6 | 22 | 6 |
| 29–25 | 29.5–24.5 | 4 | 27 | 10 |
| 34–30 | 34.5–29.5 | 9 | 32 | 19 |
| 39–35 | 39.5–34.5 | 8 | 37 | 27 |
| 44–40 | 44.5–39.5 | 6 | 42 | 33 |
| 49–45 | 49.5–44.5 | 7 | 47 | 40 |
| 54–50 | 54.5–49.5 | 5 | 52 | 45 |

من خلال عمود التكرار التجميعي الصاعد نجد أن : $\frac{n}{2}=\frac{45}{2}=22.5$

وبالتالي فالفئة الرابعة تحتوي على الوسيط وحدها الأدنى 35 وبالتالي فان حدها الادنى الفعلي هو 34.5 فبتطبيق العلاقة **[ 8 ]** نجد أن وسيط البيانات هو

$$\tilde{x}=34.5+\frac{22.5-19}{8}5=36.68$$

## ثالثا: المنوال Mode :

يمثل المنوال (Mode) ويشار إليه عادة بالرمز Mod وهو القيمة الأكثر شيوعا من بين القيم المختلفة للمتغير العشوائي محل الدراسة، ويتم تحديد قيمة المنوال من خلال تحديد تكرار جميع القيم المختلفة للمتغير العشوائي محل الدراسة إذا كانت البيانات غير مبوبة (بيانات خام)، بينما يتم الاستعانة بقاعدة رياضية إذا كانت قيم المتغير العشوائي متوفرة في جدول تكراري (بيانات مبوبة).

بالنسبة للبيانات الخام، يتم تحديد قيمة وحيدة للمنوال إذا وجدت قيمة واحدة تكررت أكثر من باقي القيم المختلفة للمتغير العشوائي. كذلك يمكن أن يكون المنوال متمثل بأكثر من قيمة إذا كان هنالك أكثر من قيمة واحدة لها نفس التكرار الأكثر من بين جميع التكرارات المتوفرة. وفي حال عدم تكرر أي قيمة من قيم المتغير

العشـوائي المختلفـة فانـه في هـذه الحالـة لا يكـون هنالـك منـوال بـين قـيم المتغـير العشـوائي. **(11)**

وبمـا أن المنـوال هـو القيمـة الأكثـر تكـرارا فـإن المنـوال مـن القـيم التـاليـة: 1,1,2,3,3,4,5,5,5,6,7 منوالا واحدا وهو $Mod = 5$ ، قد لا يكون لمجموعة من القيم منوال كما هو الحال في القيم 1,2,3,4,5,6,7 وقد يكون لمجموعة من القيم أكثر من منوال واحد كما هو الحال في القيم 1,1,1,2,2,2,3,4,5,5,6 .

و إذا كانت البيانات غير عددية (أي نوعية ) كأن نسأل مثلا ستة أشخاص عن أي الألوان المحببة لهم ، قد تكون إجاباتهم كالتالي:

أزرق, أصـــفر, أبيض, أزرق, أبيض أو أزرق فســـيكون المنوال في هـذه الحالة هو اللون "الأزرق" .

أما إذا كانت البيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري فنحســب المنوال كما يلي : نعين الفئة المنوالية وهي الفئة التي تقابل أكبر قيمة للتكرارات ثم نحسب الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي قبلها $\Delta_1$ ثم نحســب الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي بعدها وليكن $\Delta_2$ نرمز للحد الأدنى الفعلي للفئة المنوالية بالرمز $a$ ولطول الفئة بالرمز $\Delta$ فنحصـل على المنوال كما يلي: **(12)**

$$x^{\circ} = a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.\Delta \qquad \textbf{[ 9 ]}$$

وكتطبيق مباشر على ذلك ، المنوال للقيم المعطاة بالجدول مثال رقم 06 أعلاه هو

$$x^{\circ} = 29.5 + \frac{9-4}{5+1} \times 5 = 33.66 .$$

**سلسلة تمارين حول مقاييس النزعة المركزية**

**– احسب الوسط الحسابي والوسيط للدرجات الخام التالية :**

**10 . 4 . 17 . 8 . 2 . 3 . 5**

**من قيمة الوسط والوسيط احسب قيمة المنوال ثم حدد التواء التوزيع.**

**2– أوجد الوسط الحسابي والوسيط في كل حالة من الحالات التالية ومنها أوجد قيمة المنوال ثم حدد التواء التوزيع .**

- **8 – 11 – 9 – 12 – 7**
- **111 – 102 – 103 – 104 – 107 – 105**
- **24 - 20 - 9 - 18 - 35 - 3 - 39 - 3623 – 22**

**3– احسب الوسيط والمنوال لكل حالة من الحالات التالية:**

- **6 . 10 . 9 . 4 . 2 . 8 . 5**
- **8 . 5 . 4 . 10 . 7 . 9 . 6**
- **20 – 15 – 15 – 12 – 15 – 10 – 12 – 10**
- **70 – 60 – 40 – 20 – 30 – 25 – 20**
- **18 – 15 – 18 – 10 – 12 – 18 – 15 – 13**

**4– الجدول التالي يمثل فئات الأجر الأسبوعي لعمال مصنع .**

| الأجر الأسبوعي | –2 | –4 | –6 | –8 | 12–10 |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد العمال | 10 | 40 | 70 | 50 | 30 |

**والمطلوب :**

**– احسب الوسط الحسابي بطريقة مراكز الفئات**

**– احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات**

**– احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة**

**– احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد**

**– احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الهابط**

**– احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد**

**– احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الهابط**

**– احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد والهابط**

**5– من واقع بيانات الجدول التالي :–**

| ف | –20 | –30 | –40 | –50 | 70–60 |
|---|---|---|---|---|---|

| ك | 20 | 40 | 100 | 30 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|

- احسب الوسط الحسابي بطريقة مراكز الفئات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة
- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الهابط
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الهابط
- المنوال بطريقة بيرسون
- المنوال بيانياً بطريقة بيرسون

**6- من واقع بيانات الجدول التالي :-**

| ف | -100 | -200 | -300 | -400 | -500 | -600 | -700 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ك | 10 | 12 | 20 | 28 | 16 | 8 | 6 |

احسب الوسط الحسابي بطريقة مراكز الفئات

- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة
- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الهابط
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الهابط
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد والهابط معاً
- المنوال بطريقة بيرسون
- المنوال بيانياً بطريقة بيرسون

**7- من واقع بيانات الجدول التالي :-**

| ف | ك |
|---|---|
| -10 | 5 |
| -20 | 12 |
| -30 | 22 |
| -40 | 38 |

| | |
|---|---|
| 50– | 22 |
| 60– | 12 |
| 80–70 | 5 |
| المجموع | 116 |

- احسب الوسط الحسابي بطريقة مراكز الفئات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة
- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الهابط
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الهابط
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد والهابط معاً
- المنوال بطريقة بيرسون
- المنوال بيانياً بطريقة بيرسون

**8– من واقع بيانات الجدول التالي :–**

| ف | ك |
|---|---|
| 5– | 2 |
| 10– | 4 |
| 15– | 6 |
| 20– | 8 |
| 25– | 10 |
| 30– | 16 |
| 35– | 40 |
| 40– | 24 |
| 45– | 14 |
| 50– | 11 |
| 60–55 | 5 |

- احسب الوسط الحسابي بطريقة مراكز الفئات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة

- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد

**9- من واقع بيانات الجدول التالي :-**

| ف | ك |
|---|---|
| 40- | 11 |
| 50- | 20 |
| 60- | 16 |
| 70- | 28 |
| 80- | 13 |
| 100-90 | 12 |
| المجموع | 100 |

- احسب الوسط الحسابي بطريقة مراكز الفئات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة
- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الهابط
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الهابط
- المنوال بطريقة بيرسون
- المنوال بيانياً بطريقة بيرسون

**10- من واقع بيانات الجدول التالي :-**

| ف | ك |
|---|---|
| 100- | 10 |
| 200- | 25 |
| 300- | 13 |
| 400- | 28 |
| 500- | 15 |
| 700-600 | 9 |

| | |
|---|---|
| المجموع | 100 |

- احسب الوسط الحسابي بطريقة مراكز الفئات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات
- احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة
- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط باستخدام جدول التكرار المتجمع الهابط
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد
- احسب الوسيط بيانياً باستخدام منحنى التكرار المتجمع الهابط
- المنوال بطريقة بيرسون
- المنوال بيانياً

**المصدر: محمد عطا ،2011، ص181**

## 2.2. مقاييس التشتت (التباين): Measure of Variation

لا تكتمل الإفادة من مقاييس الإحصاء الوصفي دون مقاييس التشتت التي تشكل إضافة إلى مقاييس النزعة المركزة موضوع الشرح والتفصيل في الصفحات السابقة طرفي معادلة الإحصاء الوصفي، إذ غالبا ما تكون مقاييس النزعة المركزية لوحدها غير كافية لتمثل الواقع بشكل كامل أو لمقارنة مجموعتين من المشاهدات أو أكثر، فمن خلال معطيات القيم للمجموعتين التاليتين نقف على عدم كفاية مقاييس التمركز لوحدها كدالة لوصف معالم العينة والمجتمع المستهدف بالدراسة الإحصائية:

**مثال (07)**: المجموعة الأولى : 9، 10، 10، 11، 12، 12، 14، 18

المجموعة الثانية : 2، 8، 9، 11، 12، 16، 19، 19

لوجدنا أن الوسط الحسابي لكل مجموعة هو 12 كما أن الوسيط هو نفسه للمجموعتين ويساوي 11.5 ومع ذلك فهناك فرق واضح بين قيم المجموعتين حيث تختلف مفردات المجموعة الأولى عن مفردات المجموعة الثانية، كما أن قيم المجموعة الثانية موزعة على مدى أوسع من المجموعة الأولى ويمكن أن نقول إن تشتت المجموعة الثانية أكبر منه في المجموعة الأولى، لذلك تمثل مقاييس التشتت الجانب الآخر من المقاييس الإحصائية الأساسية بجانب مقاييس النزعة

المركزية، حيث تستخدم تلك المقاييس في وصف البيانات والتعرف على خصائصها، كما تعمل مقاييس التشتت كجزئية مكملة ومهمة جدا بجانب مقاييس النزعة المركزية في عمليات الاستدلال الإحصائي المبنية على عملية التعامل مع البيانات، وينصب الاهتمام عند التعامل مع مقاييس التشتت حول قياس درجة الاختلاف بين القيم المختلفة للمتغير الكمي المدروس، ويتم ذلك من خلال عدة مقاييس مختلفة يهتم كل واحد منها بقياس درجة الاختلاف من زاوية مختلفة، ويمثل التباين والانحراف المعياري بالإضافة إلى المدى مقاييس مختلفة لقياس تشتت المتغيرات الكمية.

يتم الحصول على تصور دقيق عن خصائص المتغير الكمي في حال توفر كل من مقياس النزعة المركزية ومقياس التشتت، حيث تعطي مقاييس النزعة المركزية تصور عن تمركز القيم بينما تعطي مقاييس التشتت تصور عن درجة اختلاف تلك القيم عن بعضها البعض، لذا يمكن القول بأن الاعتماد على مقياس واحد قد لا يغني عن الآخر في عملية الاستدلال الإحصائي، حيث ينتج عنه دوما قصور في المعلومة المعتمد عليها ومن ثم عدم القدرة على قراءة البيانات إحصائيا بشكل سليم.

يتم في الواقع حساب مقاييس التشتت للبيانات الكمية بصيغتيها الخام والمبوبة، ولكن الطريقة المتبعة في عمليات الحساب تختلف باختلاف طبيعة البيانات المدروسة. وبالطبع، كما تم الإشارة إليه سابقا، تمثل التقديرات المحصلة من البيانات الخام معلومة أدق وأكثر صحة من المعلومة المحصلة من البيانات المبوبة، لذا فانه يجب الاعتماد على البيانات الخام في حال توفرها في عملية حساب مقاييس التشتت، كما يجب قصر الاعتماد على البيانات المبوبة ليتم فقط في حالة عدم توفر الصيغة الخام للبيانات حيث أنها تعطي قيم تقريبية لا ترقى إلى دقة التقديرات المحصلة من خلال استخدام البيانات الغير مبوبة. **(13)**

تجدر الإشارة إلى أن جميع مقاييس التشتت هي قيم موجبة، وذلك شرط أساسي يجب توفره في جميع مقاييس التشتت. لذا فان مقاييس التشتت لا تأخذ قيم

سالبة أبدا بل تكون قيمها موجبة دوما أو مساوية للصفر فقط وذلك إذا كانت جميع قيم المتغير الكمي محل الدراسة متساوية، أي أنه لا يوجد تباين أو تشتت أصلا.

## أولا: المدى : Range

المدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في مجموعة ما، فمدى المجموعة الأولى 18- 9= 9 .

**مثال (07):**

بينما مدى المجموعة الثانية 19-2= 17 لاحظ أن المجموعة الثانية أكثر تشتتاً من المجموعة الأولى، أما المدى لقيم معطاة في جدول توزيع تكراري فيحسب من الفرق بين الحد الأعلى للفئة العليا والحد الأدنى للفئة الدنيا . ففي الجدول الخاص بالمثال رقم **(06)** المدى هو - 54 . 20 = 34

يستخدم المدى الممثل للفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة كمقياس بسيط وسطحي عن درجة تشتت قيم المتغير الكمي، ولكن لا يجب الأخذ بهذا المقياس والاعتماد عليه في العمليات الاستدلالية الإحصائية حيث أنه يتأثر بشدة بالقيم المتطرفة بالإضافة إلى عدم استخدامه لباقي قيم المتغير الكمي، وكمقياس أدق يعمل في حال وجود قيم متطرفة، يمكن استخدام الانحراف الربيعي والذي يعتمد على ترتيب القيم كما هو معمول به في عملية حساب الوسيط، في المقابل عندما لا تكون مشكلة القيم المتطرفة حاضرة فانه يمكن استخدام الانحراف المتوسط أو الانحراف المعياري كمقياس للتشتت، حيث يتم استخدام كافة القيم في عملية حساب المقاييس السابقة. **(14)**

## ثانيا: الإنحراف المعياري والتباين Standard Deviation and variance

يعتبر الانحراف المعياري والتباين من أهم مقاييس التشتت الإحصائية، ويرتبط المقياسين بعلاقة رياضية قوية، حيث يمكن دوما الحصول على المقياس الآخر في حال معرفة قيمة أحدهما، يرمز للتباين بالرمز $\sigma^2$ في حال الحصول على قيمته من خلال تغطية مجتمع الدراسة، بينما يتم استخدام الرمز $S^2$ للدلالة على مقدر التباين المحصل من خلال بيانات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع الدراسة، وبأخذ الجذر التربيعي

للتباين يتم الحصول على قيمة الانحراف المعياري وذلك في الحالتين، حالة المجتمع وحالة العينة،

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad \text{or} \quad S = \sqrt{S^2}$$

وبحكم العلاقة الرياضية القوية بين كل من التباين والانحراف المعياري فإنه يمكن اعتبارهما وجهين لعملة واحدة لهما نفس الأهمية.

يعتمد الانحراف المعياري والتباين على فكرة تربيع الفروق بين قيم المتغير الكمي $X$ ووسطها الحسابي، وتتأسس فكرة تربيع فروق القيم عن متوسطها الحسابي من مشكلة تتعلق بمجموع تلك الفروق، فقد لاحظنا في الجزء المتعلق بالمتوسط الحسابي أن مجموع الفروق (الانحرافات) دائما وأبدا تساوي 0، وبما التعريف الدقيق للانحراف المعياري هو في الحقيقة متوسط الانحرافات، ولأن مجموع الإنحرافات أصلا يساوي صفر فقد تم تربيع هذه الانحرافات للتخلص من الإشارة السالبة للفروق التي تقل عن قيمة المتوسط الحسابي، لذلك فإن حساب متوسط مربع الفروق يعطينا قيمة التباين بينما جذر القيمة المتحصل عليها يعطينا الإنحراف المعياري.

**مثال (08)**: انطلاقا من القيم التالية 9، 10، 10، 11، 12، 12، 14، 18

1. حساب المتوسط الحسابي: $\bar{x} = \frac{1}{8}[9+10+10+11+12+14+18] = \frac{96}{8} = 12$
2. حساب مجموع فروق القيم عن المتوسط (الانحرافات)

$$\sum (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) \ldots$$

نجد: (12-9) (12-10) + (12-10) + (12-11) + (12-12) + (12-14) + (12-18)

= (6+) + (2+) + (0) + (1−) + (2−) + (2−)+ (3−)= 0

وهو ما يعني أن مجموع الإنحرافات يساروي 0 لذلك نلجأ إلى تربيع تلك الانحرافات وهو ما يتضمنه قانون حساب قيمة الانحراف المعياري والتباين بما أن:

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$

1. تحسب قيمة التباين للبيانات غير المبوبة من القانون التالي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad \textbf{[10]}$$

ويستخدم الباحثون النسخة المختصرة للقانون

$$S^2 = \frac{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}{n(n-1)}$$

**[11]**

**مثال (09):** انطلاقا من القيم التالية: 18، 10، 11، 12، 6، 8، 5 أوجد قيمة التباين باستخدام المعادلتين [10] و [11]

الحل وفق المعادلة[10]

- حساب قيمة المتوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{1}{7}[5+8+6+12+11+10+18] = \frac{70}{7} = 10 \quad \bar{x} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i$$

- حساب مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي

| $X$ | 5 | 8 | 6 | 12 | 11 | 10 | 18 | $\sum = 70$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(X_i - \bar{X})$ | 5- | 2- | 4- | 2+ | 1+ | 0 | 8+ | $\sum = 0$ |
| $(X_i - \bar{X})^2$ | 25 | 4 | 16 | 4 | 1 | 0 | 64 | $\sum = 114$ |

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{114}{7-1} = 19$$

بما ان قيمة التباين هي 19

فإن قيمة الإنحراف المعياري هي $S = \sqrt{19} = 4.35$

الحل باستخدام المعادلة [11]

| X | 5 | 8 | 6 | 12 | 11 | 10 | 18 | $\sum X = 70$ | $(\sum X)^2 = 4900$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X^2$ | 25 | 64 | 36 | 144 | 121 | 100 | 324 | $\sum X^2 = 814$ | |

$$S^2 = \frac{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}{n(n-1)} = \frac{7(814) - (70)^2}{7(7-1)} = \frac{5698-4900}{42} = 19$$

بما ان قيمة التباين هي 19فإن قيمة الإنحراف المعياري هي $S = \sqrt{19} = 4.35$

2. حساب قيمة التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(X_i - \bar{X})^2 f_i}{n-1} \quad \textbf{[12]}$$

$$S^2 = \frac{n\sum f_i X_i^2 - (\sum f_i X_i)^2}{n(n-1)} \quad \textbf{[13]}$$

**مثال (010)**: انطلاقا من القيم الواردة في الجدول أدناه أوجد قيمة التباين والانحراف المعياري باستخدام المعادلة [13]

| الفئات | 4 – 0 | 9 – 5 | 14 – 10 | 19 – 15 | 24 – 20 | 29 – 25 | 34 - 30 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مراكز الفئات X | 2 | 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 | / |
| التكرار $fi$ | 8 | 10 | 9 | 5 | 7 | 12 | 5 | 56 |
| X $fi$ | 16 | 70 | 108 | 85 | 154 | 324 | 160 | 917 |
| $X^2$ | 4 | 49 | 144 | 289 | 484 | 729 | 1024 | |
| $X^2$ $fi$ | 32 | 490 | 1296 | 1445 | 3388 | 8748 | 5120 | 17519 |

$$S^2 = \frac{n\sum f_i X_i^2 - (\sum f_i X_i)^2}{n(n-1)} \qquad \frac{56(17519)-(917)^2}{56(56-1)} = \frac{981064-840889}{3080} = 45.51$$

قيمة التباين هي 45.51 وعليه فإن قيمة الانحراف المعياري $S = \sqrt{45.51} = 6.74$

**ملاحظات هامة :**

**(1)–**إن السبب في القسمة على ( n-1 ) عوضاً عن n لأن هناك (n-1 ) إنحرافاً مستقلاً من الشكل $x_i - \bar{x}$ . ولأن مجموع هذه الانحرافات يساوي الصفر دوماً فإن أيا منها يساوي مجموع كل البقية بإشارة سالبة و أي منها يعطى بدلالة مجموع القيم الأخرى وبإشارة معاكسة . ولتوضيح هذه الفكرة تصور أن لدينا ثلاث بيانات $x_1 , x_2 , x_3$ ولدينا $\bar{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ .

نعلم أن $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) = 0$

وبالتالي يمكن التعبير عن أي منهم وليكن الأول بـ $x_1 - \bar{x} = -[(x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x})]$

أو $x_2 - \bar{x} = -[(x_1 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x})]$

أو $x_3 - \bar{x} = -[(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x})]$

أي يمكن تمثيل أي انحراف بدلالة الاثنين الآخرين وحيث لدينا n = 3 فسنقسم على 3-1=2 .

**(15)**

## سلسلة تمارين حول مقاييس التشتت

**– فيما يلي مجموعة بيانات هي :**

**80 – 350 – 100 – 150 – 90 – 110 – 300 – 250 – 200 – 95**

**المطلوب حساب :**

- **المدى**
- **التباين**
- **الانحراف المعيارى**
- **المتوسط**
- **الوسيط**
- **المنوال**

**2– لمجموعة البيانات التالية احسب الانحراف المتوسط :–**

**9 – 8 – 8 – 7 – 6 – 5 – 3 – 2**

**3– فيما يلي الدرجات التي حصل عليها عشرة طلاب فى اختبار مادة الإحصاء وهى :**

**12 – 10 – 9 – 3 – 10 – 4 – 5 – 5 – 3 – 12**

**المطلوب حساب :**

- **المدى**
- **التباين**
- **الانحراف المعيارى**
- **المتوسط**
- **الوسيط**
- **المنوال**

**4– فيما يلي أعمار 10 طلاب بالفرقة الأولى قسم الاجتماع**

**19 – 18 – 17 – 22 – 20 – 18 – 17 – 19 – 18 – 17**

**المطلوب حساب :**

- **الانحراف المتوسط**
- **تحديد نوع الالتواء**

**5– من بيانات الجدول التالى احسب :–**

| الفئات | –16 | –20 | –24 | –28 | 36–32 |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد المبحوثين | 10 | 15 | 40 | 20 | 15 |

- **المدى**

| |
|---|
| • التباين<br>• الانحراف المعيارى<br>• المتوسط<br>• الوسيط<br>• المنوال<br>• الانحراف المتوسط<br>• حدد نوع الالتواء |
| المصدر: محمد عطا ، 2011، ص 202 |

## 3. مدخل إلى الاحصاء الاستدلالي

المعلم (parametric) مفردة تعني صفة أو خاصية لمجتمع معين في مقابل تقدير (estimate) التي تكون صفة أو خاصية لعينة ما ، وأهم ما يميز الاحصاء المعلمي عن اللامعلمي هو الوسط الحسابي والانحراف المعياري ولذلك فان علم الاحصاء يميز بين شروط اختبار (ت) للعينات المستقلة و (ت) للعينات المترابطة لأن الأخير لا يتعامل مع أوساط وانحرافات، بينما نلاحظ أن اختبار (ت) للعينات المستقلة يتعامل معها أسوة بقوانين تحليل التباين (F) وقوانين (Z) ، من هنا يمكن فهم الاحصاء المعلمي أنه مجموعة من الطرق التي تتطلب تحقق افتراضات محددة حول المجتمع الذي تسحب منه العينة –وهنا مقتضى الدقة الانتباه للتعبير (حول المجتمع) كونه يختلف عن (حول العينة)، وبالتالي فإن الاحصاء اللامعلمي هو مجموعة من الطرق البديلة التي تستخدم في حالات عدم تحقق الافتراضات حول المجتمع الذي تسحب منه العينة أو في حالة البيانات الإسمية والرتبية، وكلا الإحصائين (المعلمي،اللامعلمي) من طرق الاحصاء الاستدلالي التي يمكن تعميم نتائجها على المجتمع إلا أن لكل منها مستوى ثقة معين يتحدد على ضوء البيانات المتوفرة وكذلك شروط تحقق الافتراضات . **(16)**

### 1.3.شروط الإحصاء البارامتري (المعلمي)

لا يختلف الاحصائيون على أن هناك مجموعة من الافتراضات أو الشروط التي يجب توافرها لكي نستطيع أن نتعامل مع البيانات بالطرق المعلمية* والتي باختلال أي منها يحصل عدم اطمئنان من النتائج المستخرجة بهذه الطرق مما يعني اللجوء الى طرق أخرى لمعالجتها ، وهذه الشروط هي : **(17)**

**أولا: التوزيع الطبيعي :**

حسب نظرية النهاية المركزية فإنه كلما زاد عدد أفراد العينة كلما اقترب تباينها من تباين المجتمع ويمكن اعتبار أن التوزيع يكون طبيعيا بصورة تقريبية عندما يصبح حجم العينة (30) فما فوق.

ويعلق على هذا الشرط بكونه متعلق بقياس تباين العينة إلى تباين المجتمع، إذ وجد أنه كلما اقترب حجم العينة من (30) وصعوداً فإن تباينه سيقارب تباين حجم العينات الكبيرة (المئات والالاف) ومن هنا وضع الحد الفاصل (30) في التعامل مع بعض الوسائل الاحصائية من قبيل اختبار (ت) وتم التعامل معه كونه من المسلمات وعمم من خلاله فكرة أنه إذا كان عدد العينات أو المشاهدات أقل من (30) فإن شرط اعتدالية التوزيع (التوزيع الطبيعي) قد اختل وبالتالي وجب الانتقال إلى الإحصاء البديل (اللامعلمي) ، ويتفق العديد من الباحثين جزئيا مع هذه المقولة إذ أن شرط الاعتدالية

---

**.* يتعين على القارئ الانتباه هنا أننا أشرنا إلى شروط الإحصاء البارامتري (المعلمي) ولم نقل اللابارامتري لأن الأصل في اختيار أسلوب المعالجة الإحصائية هو أن يتبع الباحث الأساليب الاحصائية البارامترية التي تتطابق فيها خصائص العينة مع خصائص المجتمع الإحصائي وهو ما يمنح نتائج المعالجة الإحصائية موثوقية أعلى من تلك اللابرامترية التي تصبح بديلا للأولى في حالة عدم توفر الشروط الضامنة لاتباع أحد الاساليب البارامترية**

للتوزيع يتحقق بالعدد (30) ويكون التوزيع طبيعياً ولكن يكون الكلام فيما لو قل العدد عن (30) حيث لا يعني بالضرورة فقدان هذا الشرط (التوزيع الطبيعي) إذ أن الأمر يكون خاضعا حينها لخصائص البيانات المأخوذة من العينات، ومن هنا نلاحظ تساهل البعض مع هذا الشرط في حدود الاعداد من (20-29)، لكننا نجد

التشدد واضحا فيما لو قلت الأعداد عن (15) إذ ينصح الكثيرون باللجوء إلى البديل ، وهذا الكلام مدعوما بمعادلة الخطأ المعياري :

$$\text{الخطا المعياري} = \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

**[14]**

بمعنى أن التناسب بين الخطا المعياري وحجم العينة يكون عكسيا فكلما زاد حجم العينة كلما قل الخطأ المعياري وكلما قل حجم العينة (والحالة هذه) كلما زاد الخطأ المعياري أي أن الخطا إذا زاد فإن عملية تعميم النتائج لن تكون ممكنة.

أقول : إن القول السابق وإن كان لا يخلو من المنطقية إلا أنه يناقش من عدة وجوه :

أ. إن القول السابق معارض بقول مجموعة من كبار الاحصائيين العالميين من أمثال (Glass) و (Hopkins) اذ يرون أأن افتراض التوزيع الطبيعي يمكن مخالفته بدون تبعات تذكر.

ب. أن معادلة الخطأ المعياري تضع حجم العينة تحت الجذر بمعنى أنها تقلل من تأثيره إذ لا يخفى أن جذر أي عدد هو أقل من العدد نفسه ومثاله الفارق بين العدد (25) وجذره (5) وهنا نورد المثال التالي :

لو كان هناك عينتين الأولى حجمها (15) والثانية حجمها (30) ولكل منهما نفس الانحراف المعياري ولنفرض أنه 3 ، فاننا وبعد تطبيق المعادلة آنفة الذكر سيتبين أنه في الحالة الأولى (العينة 15) ستبلغ قيمة الخطأ المعياري (0.77) ، أما في الحالة الثانية (العينة 30) فانه ستبلغ قيمة الخطا المعياري (0.55) ومن ملاحظة القيمتين سنجد أن الفارق ليس بالشيء الكبير الذي يتوقف عليه تعميم النتائج .

جـ . إن فلسفة افتراض التوزيع الطبيعي أي الحد (30) هو ليس السبب في حد ذاته إذ أنه من الجدير بالذكر الاشارة بأنه كلما قل حجم العينة ستظهر مشكلة من نوع آخر وهي مشكلة القيم الشاذة أو الالتواء الحاصل نتيجة عدم توزع البيانات طبيعيا لقلتها.

الا أن هذه المشكلة –وإن كانت قائمة في حالات معينة– فأنه يمكن تخطيها وذلك بالتأكد من عدم إلتواء التوزيع باختبار القيم احصائيا بوسائل متعددة من قبيل (مربع كاي ، سميرنوف –كولموجروف) أو بالكشف عن اعتدالية التوزيع من خلال رسم البيانات على منحنى كاوس أو بطريقة الساق والأوراق وكل هذه الطرق يمكن استخدامها في البرنامج الاحصائي الشهير (SPSS)، فإن ظهر أن التوزيع طبيعي أو غير ملتوي فإننا نكون حينها بمأمن من تبعات هذا الشرط وإن ظهر وجود التواء فليس أمامنا إلا استبعاد القيم المسببة للالتواء من العينة (إن أمكن ذلك) وإن لم يمكن ذلك فإننا سنكون مضطرين الى استخدام أحد الأساليب اللابارامترية.

د. يرى البعض أن شرط التوزيع الطبيعي هو للمجتمع وليس للعينة إذ يذكر (عبد الجبار توفيق) أنه يجب الإيفاء بافتراض التوزيع الطبيعي للمجتمع والذي هو غالباً ما يكون متحققاً .

وأخيرا ومن كل ما تقدم فاننا نرى بأن هذا الشرط لا يمثل عائقا كبيرا أمام استخدام الأساليب البارامترية (المعلمية) إذ يمكن تجاوزه مبدئياً أو إجرائياً باحدى الطرق التي تم ذكرها .

**ثانيا: الاستقلالية**

مفهوم الاستقلالية في مقابل مفهوم الارتباط، فإذا كان الارتباط يعني الاقتران في التغير بين متغيرين أو أن التباين في المتغير (س) يرافقه تباين في المتغير (ص) فإن الاستقلالية تعني أن قيمة الارتباط بين (س) و (ص) منعدمة أو تساوي صفرا عند استخدام عدد من العينات أو المشاهدات وهذا يقتضي أن يتم اختيار كل من العينتين عشوائيا من مجتمعاتها ومن هنا نلاحظ أن هذا الشرط لا يتوفر في حالة إجراء اختبار قبلي وبعدي لنفس العينة أي اختبار (ت) للعينات المترابطة لأنه يكون على عينة واحدة وليس عينتين الأمر الذي يكون فيه هذا الاختبار مستغني عن هذا الشرط (الاستقلالية)، ومثال شرط الاستقلالية عينتين عشوائيتين من مجتمعين مختلفين أو عينتين عشوائيتين من مجتمع واحد مع عدم الخلط بين أفراد المجموعتين لأنه سيؤدي إلى خطر انهيار الشرط والذي يمنع استخدام الاحصاء البارامتري (المعلمي) وعندها يتم اللجوء إلى الطرق اللامعلمية للاستدلال.

وهنا لابد من الإشارة إلى أن هذا الشرط متوافر غالباً إذ نجد أن أكثر الباحثين يلجؤون إلى استخدام العينات العشوائية (من دون قصد ) وبالتالي هذا الشرط تحصيل حاصل في أغلب البحوث التربوية.

**ثالثا: تجانس التباين**

ويعني هذا الشرط أن لكل من العينتين تبايناً لا يختلف عن تباين العينة الثانية، وعدم الاختلاف هذا لا يعني بالضرورة التطابق في قيمة التباينين بل يعني أنه ليس بينهما فرق معنوي، ويجري اختبار تجانس التباينين باستخدام قانون (F) نسبة إلى Fisher:

$$F = \frac{S^2_{\text{Largest}}}{S^2_{Smallest}} \quad \textbf{[15]}$$

حيث تشير قيمة $S^2$ largest إلى قيمة التباين الأكبر

وتشير قيمة $S^2$ smallest إلى قيمة التباين الأصغر

إذ نستخرج القيمة المحسوبة لنقارنها بالقيمة الجدولية من جداول النسبة الفائية في الملاحق لغرض الحكم بتجانس التباين في حالة صغر القيمة المحسوبة عن الجدولية والعكس بالعكس ، وهنا نقترح التعامل بتسمية (تكافؤ التباين) كبديل عن الاسم المشهور لهذا الشرط (تجانس التباين) لأنه أنسب في المقام ، وممكن التعامل مع هذا الافتراض بعدة وجوه :

اولاً: اذا كانت العينتين متساويتين في عدد افرادهما أي أن (ن1=ن2) ، وهنا اتفق الاحصائيون بأنه يمكن مخالفة هذا الشرط وإهماله في حالة تساوي عدد أفراد العينتين ومثاله (إذا كان لدينا عينتين كل منهما تتكون من 20 فردا حيث ن1=20 و ن2=20 ) فهنا لاداعي للاستغراق في هذا الشرط وممكن غض النظر عنه ، ولعل السبب في ذلك يعود إلى أن الانحراف المعياري يعتمد بنسبة كبيرة على عدد العينة كون أن قانونه يحوي على قيمة (ن) في المقام وبتساوي قيمة الـ(ن) تتساوى الانحرافات تقريباً:

$$ع = \sqrt{\frac{مج (س - س-)^2}{ن - ١}}$$

ثانياً: اذا كانت العينتين غير متساويتين بالعدد أي أن ( ن1 ≠ ن2 ) بمعنى أن إحدى العينتين أكبر من الأخرى وفي هذه الحالة هناك احتمالان لا ثالث لهما :

أ.الاحتمال الاول : أن تكون العينة الكبيرة منتمية للمجتمع ذي التباين الكبير والعينة الصغيرة منتمية للمجتمع ذي التباين الصغير ، وفي هذه الحالة يمكن اغفال هذا الشرط إذ يكون الباحث في وضع آمن ، والسبب في ذلك أن احتمال ارتكاب خطأ من النوع الاول (أن تكون الفرضية الصفرية صحيحة ويتم رفضها) يكون قليل إلى درجة يمكن إهماله.

ب.الاحتمال الثاني : أن تكون العينة الكبيرة منتمية للمجتمع ذي التباين الأقل والعينة الصغيرة منتمية للمجتمع ذي التباين الأكبر ، وهنا تكمن المشكلة إذا يكون هذا الشرط معرض للانتهاك نتيجة ارتفاع خطر ارتكاب خطأ من النوع الأول إلا أنه أيضاً لا يخلو من حالتين لا ثالث لهما :

الاولى : اذا قبلت الفرضية الصفرية : أي أن القيمة المحسوبة أصغر من القيمة الجدولية مما يعني أن الفروق مرجعها للصدفة وهي ليست معنوية وهنا لا نقع بالخطأ من النوع الأول ويكون الباحث بالجهة الامينة .

الثانية : إذا رفضت الفرضية الصفرية : أي أن تكون القيمة المحسوبة أكبر من الجدولية وبالتالي ليس للصدفة دور في الفروق وأن هناك فروق معنوية، وهنا يحدث التوقف غالباً، إذ نرى أن شرط تجانس التباين من أهم الشروط الثلاثة التي تم ذكرها وبالتالي فإنه لا يمكن التغافل عنه في الحالة المذكورة (الثانية) ، إلا أنه ومع خطر اختلال هذا الشرط فقد وضعت مجموعة حلول ممكن استخدامها لتجعلنا في الجانب الأمين من هذا الشرط وبالتالي يمكن إغفاله وهذه الحلول هي :

1.يمكن اجراء اختبار ليفين (Leven) وهو الاختبار المسؤول عن تجانس التباين والذي يحدد هل أن التباينات متجانسة أم لا ، فإذا ظهر عدم تجانسها فإننا نلجأ للخيار التالي.

2.تطبيق اختبار ويلتش (Welch) الذي يقوم بتعديل درجات الحرية، حيث ومن خلال هذه المعادلة يتم استخراج درجة حرية معدلة وهي غير درجة الحرية في الحالات الطبيعية وباستخراجها يتم استخراج القيمة الجدولية ليتم مقارنتها بالقيمة المحسوبة لـ (ت)

ومن هنا يمكننا رفض أو قبول الفرضية الصفرية فإذا رفضت لا يكون أمامنا الا اللجوء الى الاحصاء اللامعلمي إذ أنه حينها ستكون نتائجه أوثق من الطرق المعلمية.

## 2.3. معايير اختيار الاحصاء البارامتري (المعلمي) واللابارمتري (اللامعلمي)

تبين مما تقدم أن نوع البيانات وخصائص الأفراد والمشاهدات هو الحاكم الرئيسي في توجيه البحث نحو استخدام النوع المناسب (البارامتري أو اللابارمتري) حيث نرى أن البيانات تصنف على أربعة مقاييس وهذه المقاييس (مع الاختصار) هي: **(18)**

**أ.المقاييس الاسمية** : مثل (ذكور–اناث) (عمال– موظفين) (أحمر–أصفر–....) وضابطه عملية التصنيف بمعنى التعامل مع أي متغير يمكن تصنيفه وهنا يعطى لكل صنف رقم لا يعبر إلا عن صنفه بحيث لا يمكن إجراء العمليات الحسابية الأربع عليه كأن يعطى للتصنيف (الذكور ) رقم (1) و (الاناث) رقم (2) وهنا لا يمكن أن تجرى عملية جمع فنقول (1+2)لأنها أرقام معبرة عن أصناف وليست أعداد ، ويتم التعامل مع هذا النوع من المقاييس بالطرق اللابارمترية بغض النظر عن عدد أفراد العينة فيتبدل الوسط الحسابي بالمنوال والانحراف المعياري بالمدى و(ت) لعينة واحدة باختبار ذي الحدين ومربع كاي وسميرنوف كل بحسبه و(ت) المستقلة بمربع كاي وت مترابطة بماكنمار وتحليل التباين للعينات المترابطة بكوجران وللعينات المستقلة بمربع كاي وكذا الأمر بالنسبة لقوانين الارتباط حيث تستبدل بقوانين (فاي ومعامل الارتباط الرباعي وبايسيريال وبوينت بايسيريال ...) كل بحسبه .

**ب.المقاييس الرتبية:** وهو أفضل من سابقه إحصائيا وفيه ترمز الأعداد إلى رتب لتبين المواقع النسبية للاشياء وضابطه الترتيب من أعلى إلى أدنى مثل (أكبر – أصغر ..) أو (ممتاز–جيد جدا – جيد ...) أو (أثقل من – أخف من ..) إذ ترتب المشاهدات تصاعديا أو تنازليا ولا تمثل الأرقام فيها كميات بل رتب لذا لا تجرى عليها العمليات الأربع وأغلب استخدامه في استمارات الاستبيان (موافق– غير موافق) (موافق بدرجة عالية ...— موافق بدرجة منخفضة) إذ تعطى

الدرجة (5) لـ (موافق بشدة) والدرجة (4) لـ (موافق بدرجة عالية ) ...وهكذا ، وهنا يتم استخدام الاحصاء اللابارمتري فتستخدم اختبارات سبيرمان وكندال بدل ارتباط بيرسون وتستخدم قوانين ويلكوكسن ومان وتني بدل اختبارات (ت) المترابطة والمستقلة على التوالي وكذا يستخدم اختبار كوسكال واليز وفريدمان بدل تحليل التباين للعينات المستقلة والمترابطة على التوالي، وكذا يستخدم اختبار الوسيط وسميرنوف لعينتين مستقلتين على وفق تفصيلات سيأتي ذكرها لاحقا.

**ج.المقياس الفتري (الفاصل)**: وهو أعلى من سابقيه ويتميز بخاصية الفواصل والمسافات المتساوية التي تفصل بين درجة وأخرى ومن أمثلته (درجة الحرارة ) و (مستوى الذكاء) إذ يختلف هذا المقياس عن سابقيه بأنه يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح عليه وبالتالي إمكانية استخدام الأوساط الحسابية والانحرافات المعيارية وبالتالي استخدام الإحصاء البارامتري الذي يكون الأنسب معه وأهمها اختبار (ت) و (ف) ، وأهم ما يميز هذا المقياس أن الصفر فيه لايعتبر مطلقا أي أن الدرجة (صفر) لا تعني انعدام الصفة فعندما نقول إن درجة الحرارة هي (صفر) فهذا لا يعني انعدام درجة الحرارة بل إنها درجة كبقية الدرجات لها دلالة معينة على خلاف ما إذا قلنا بأن طالبا ما في اختبار ما حصل (صفر) أي انعدام الإجابة وعدم تحقق أي شيء ، وتعتبر هذه الميزة (الصفر النسبي) هي ما يميز هذا المقياس عن المقياس النسبي.

وتجدر الاشارة الى أنه لا يمكن استخدام معامل الاختلاف في هذا المقياس وهي ميزة أخرى لهذا المقياس عن المقياس النسبي.

**د.المقياس النسبي:**

وهو أعلى مستويات القياس وأهمها وأكثرها ثقة من حيث النتائج الصادرة منه ويستخدم معه الإحصاء البارامتري (المعلمي) مثل (الطول –الوزن–المسافات–الزمن) ويكون فيه الصفر دال على انعدام الحالة فعندما نقول أن (س) من الأفراد حصل على صفر في مقياس ما فإنه يدل أن ليس لديه هذه الخاصية ويمكن إجراء جميع العمليات الحسابية عليه ويستخدم معه معامل الاختلاف أيضاً.

وبعد هذه الاشارة إلى مستويات القياس نقول أن المستويين الأولين (الاسمي والرتبي) يستخدم معها الطرق اللابارامترية (اللامعلمية) أما المقياسين (الفاصل والنسبي) فيستخدم معها الاحصاء البارامتري (المعلمي) إلا في حالات عدم توافر الافتراضات المذكورة سابقاً والتي تبين إمكانية التغلب على أكثر مشاكلها وبالتالي فلا يبقى هناك أي داع لاستخدام الأساليب اللامعلمية في المقاييس الفاصلة والنسبية إلا في حالات نادرة جدا، ومن هنا يتبين أن عملية العدول عن الإحصاء البارامتري المعلمي لمجرد عدم اكتمتال العدد (30) أو تجانس التباين أو الاستقلالية هو من الأخطاء الشائعة الاستخدام كما تم تفصيل شرحه سابقاً.

وهنا على الباحثين أن يضعوا في اعتبارهم أن الاختبارات البارامترية (المعلمية) هي أقوى وأدق في اختبار الفرضيات الإحصائية من الاختبارات اللابارمترية (اللامعلمية) وذلك لأنها تتحسس الفروق الموجودة في البيانات كونها تتعامل مع الانحرافات المعيارية وهذا ما يجعلها أعلى قدرة في ايجاد الفروقات وبالتالي فهي أكفأ وأقدر على رفض الفرضية الصفرية من الاختبارات اللابارمترية (اللامعلمية).

والجدول التالي يلخص بعض الأساليب الإحصائية ومستوى القياس الملائم.

| عدد العينات | الفرض | التصميم التجريبى | نوع البيانات | الاختبار الإحصائى |
|---|---|---|---|---|
| عينة واحدة | التحقق من جودة المطابقة | مجموعة واحدة ذات الاختبار الواحد | اسمية | ذى الحدين – كا$^2$ –سمير نوف |
| | | | رتبية | سمير نوف – الإشارة |
| | | | فترية | – اختبار تZاختبار |
| عينتان مستقلتان | الفروق بين المجموعات | مجموعتان تجريبية – ضابطة | اسمية | كا$^2$ – فيشر – سمير نوف |
| | | | رتبية | الوسيط – مان ويتنى – التتابع |
| | | | فترية | اختبار ت |
| عينتان مترابطتان | الفروق بين القياسات | مجموعة واحدة ذات اختبارين قبلى وبعدى | اسمية | ماكنمار |
| | | | رتبية | ولكوكسن – الإشارة |
| | | | فترية | اختبار ت |
| عدة عينات مستقلة | الفروق بين المجموعات | المجموعات المتعددة | اسمية | كا$^2$ |
| | | | رتبية | الوسيط– كروسكال ولاس |
| | | | فترية | تحليل التباين – تحليل التغاير |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| عدة عينات مترابطة | الفروق بين القياسات | مجموعة واحدة ذات الاختبارات المتعددة | اسمية | كوجران |
| | | | رتبية | فريدمان |
| | | | فترية | تحليل التباين ذى القياسات المتكررة |
| عينة واحدة أو عينتان أو عدة عينات | الارتباط بين القياسات أو العلاقة بين المتغيرات "دراسات ارتباطية" | مجموعة واحدة ذات اختبار قبلى أو بعدى أو عدة اختبارات | اسمية | معامل ارتباط فاى– معامل التوافق – معامل الاقتران الرباعى |
| | | | رتبية | معامل ارتباط سبيرمان– معامل ارتباط كندال |
| | | | فترية | معامل ارتباط بيرسون – الارتباط القانونى – الارتباط المتعدد |
| عينة واحدة أو عينتان أو عدة عينات | "دراسات تنبؤية " للمتغيرات أو عضوية الجماعة | مجموعة واحدة أو عدة مجموعات مع عدة اختبارات | فترية | تحليل الانحدار بأنواعه المختلفة– السلاسل الزمنية |
| | | | | التحليل التمييزى بأنواعه المختلفة |
| عينة واحدة أو عينتان أو عدة عينات | " دراسات عاملية" البناء العاملى | مجموعة واحدة أو عدة مجموعة مع عدة اختبارات | فترية | التحليل العاملى الاستكشافى – التحليل العاملى التوكيدى |

- . نماذج من المعالجة الإحصائية اللابارمترية ( اللامعلمية) في المستوى الاسمي
  - 1.4. إختبار كا$^2$ chi square
  - 2.4. معامل ارتباط فاي
  - 3.4. معامل التوافق

## • 1.4. إختبار كا$^2$ chi square test

ترجع النشأة الأولى لاختبار كا$^2$ إلى البحث الذي نشره كارل بيرسون فى أوائل القرن العشرين وهى تعد من أهم اختبارات الدلالة الإحصائية وأكثرها شيوعاً لأنها لا تعتمد على شكل التوزيع ولذا فهى تعد من المقاييس اللابارامترية أى مقاييس التوزيعات الحرة ولأنها تحسب لكل خلية من خلايا أى جدول تكرارى ثم تجميع القيم الجزئية للحصول على القيمة الكارلية لـكا $^2$.**(19)** ورغم شيوع استخدام كا$^2$ لحساب دلالة فروق التكرار أو البيانات العددية التي يمكن تحويلها إلى تكرار مثل النسب والاحتمال إلا أن استخدامات اختبار متعددة منها**(20)**:

1. تقدير فترة الثقة
2. أختبار تساوي التباين والاستقلالية
3. اختبار حسن المطابقة
4. اختبار عدد النسب

وسيرتكز الحديث ههنا على الاستخدامات الأوسع لاختبار كا$^2$ chi square test $\chi^2$ وهي:

**أولا اختبار مربع كاي لحسن المطابقة chi square Testing of Goodness of Fit test**

$\chi^2$يتم استخدام في البيانات التي تقع في تصنيفات متعددة والتي يبلغ عددها اثنين أو أكثر ، مثل الإجابة عن أسئلة الاستبيان ( نعم ، لا ) ( موافق بشدة، موافق، محايد معارض، معارض بشدة) والتي تتطلب الإجابة عنها اختيار بديل من عدة بدائل، كنوع التخصص الذي يرغب الطالب في الالتحاق به، أي أن كا$^2$ تستخدم في حالة البيانات الإسمية، ويطلق عليه في هذه الحالة Testing of Goodness of Fit نظرا لأنه يستخدم في حالة الكشف عن دلالة الفروق بين الأعداد المشاهدة، أو التكرارات الملاحظة، أو الاستجابات الواقعة في كل تصنيف وتسمى observed frequency وبين العدد المتوقع المعتمد على الفرض الصفري، أو التكرارات المتوقعة وهي التكرارات النظرية للمتغير موضوع الدراسة في المجتمع الأصلي وتسمى expected frequency .

فإذا كانت قيمة كا$^2$ = 0 فهذا يدل على أن عينة البحث ممثلة للمجتمع في تكرارها ومتطابقة معه، أما إذا كانت كا$^2$ > 0 فهذا يدل على وجود فروق بين تكرارات العينة الملاحظة وبين تكرارات التوزيع النظري للمجتمع (التكرارات المتوقعة) ويكون الفرض الصفري هنا حول المجتمع الأصلي الذي تسحب منه العينة، فهو يفترض عدم وجود فروق دالة إحصائيا بين تكرارات العينة الملاحظة أو المشاهدة والتكرارات المتوقعة فإذا ما تم رفض الفرض الصفري (تطابق العينة مع المجتمع) فيتم قبول الفرض البديل للبحث والذي عادة ما يكون عكس الفرض الصفري ويتم حساب قيمة كا$^2$ إجمالا انطلاقا من صيغة المعادلة التالية: (21)

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \qquad \textbf{[16]}$$

حيث أن $f_o$ يمثل التكرارات المشاهدة و $f_e$ يمثل التكرارات المتوقعة

فى جميع الحالات نخرج من الحسابات بقيمة كا$^2$ المحسوبة نقارنها بقيمة كا$^2$ الجدولية كالتالى :

إذا كانت كا$^2$ المحسوبة > كا$^2$ الجدولية فان كا$^2$ تكون دالة إحصائية .

إذا كانت كا$^2$ المحسوبة < كا$^2$ الجدولية فان كا$^2$ ليست دالة إحصائية .

مثال (11): الجدول التالي يوضح آراء 80 طالبا سنة أولى ماستر حول إمكانية تأجيل الامتحانات فكانت استجاباتهم على النحو التالي :

| الرأي | موافق | غير موافق | المجموع |
|---|---|---|---|
| التكرار | 60 | 40 | 100 |

السؤال: هلة هناك فروق دالة احصائيا عند مستوى 0.05 بين تكرارات استجابات الطلبة

الفرضية

ليس هناك فرق بين التكرارات $f_E = f_O$ $H_0 : \chi^2 = 0$

هناك فروق بين التكرارات $f_E \neq f_O$ $H_1 : \chi^2 > 0$

$f_e$ = حاصل قسمة مجموع التكرارات على عدد البدائل $f_e = \frac{\sum f}{C}$

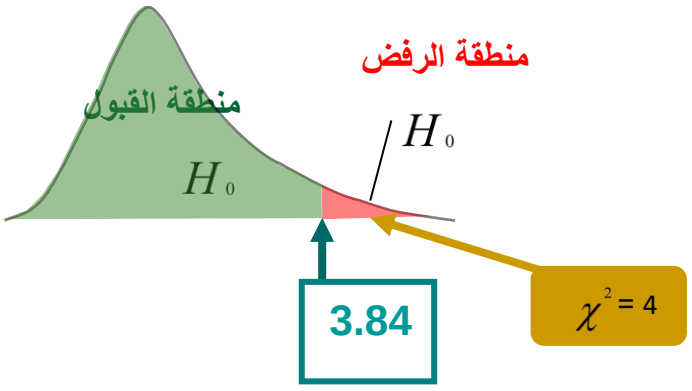
لحساب قيمة كا$^2$ نتبع الخطوات الموضحة في الجدول

| البدائل | التكرارات المشاهدة $f_o$ | التكرارات المتوقعة $f_e$ | $f_o - f_e$ | $(f_o - f_e)^2$ | $\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| موافق | 60 | 50 | 10 | 100 | 2=50/100 |
| غير موافق | 40 | 50 | 10 | 100 | 2=50/100 |
| المجموع | 100 | 100 | / | / | 4 |

حســـاب درجة الحرية : $df = c-1$ حيث أن c هو عدد البدائل (موافق/ غير موافق) أو الاعمدة

بالبحث فى جداول كا$^2$ عند درجة حرية = 1 ومستوى دلالة 0.05 نجد قيمة كا$^2$ الجدولية = 3.84

$\cdot \chi^2_{(df\ 1,\alpha 0.05)} = 3.84$



اتخاذ القرار : بما أن القيمة المحسوبة $\chi^2 = 4$ أكبر تماما من القيمة الجدولية (3.84) نرفض الفرض الصفري ونقبل الفرض البديل الذي يقول هناك فروق دالة احصائيا بين تكرارات استجابات الطلبة

## ثانيا اختبار مربع كاي للاستقلالية chi Teting of Independences square test

كاي تربيع للاستقلالية (Chi-Square test of independency) هو اختبار بسيط يقوم به الباحث لمعرفة ما إذا كان هناك علاقة بين متغيرين. اسميين في جدول تقاطعي يقرن بين المتغيرين فإذا كان المتغير الأول مثل الجنس ينقسم إلى قيمسن (ذكور/ إناث) والمتغير الثاني التحصيل ينقسم بدوره إلى قسمين (ناجح/ راسب)نسمي هذا الجدول التقاطعي بجدول 2x2 وهكذا ...الخ.

يجرى هذا الاختبار عن طريقة مقارنة قيمة يحددها الباحث مسبقا تعرف بمستوى المعنوية (الفا) بالقيمة المسماة p-Value تحسب من البيانات التوفرة، حيث سيتضح عن طريق المقارنة بين القيمتين ما إذا كانت هنالك علاقة بين الاثنين أم لا

فرضية العدم (Null hypothesis): لا توجد أي علاقة بين المتغيرين ويرمز لهذه الفرضية H0 والذي يتم افتراض صحته عند القيام بالاختبار.

عند القيام بالاختبار لمتغيرين، تكتب هذه الفرضية بهذه الطريقة: V1مستقل عن V2 ، حيث V1 و V2 تمثل المتغيرين تحت الدراسة. ويمكن كتابة فرض العدم الإحصائي بالشكل التالي:

H0: V1 is independent of V2

الفرض البديل (Alternative hypothesis): توجد علاقة بين المتغيرين تحت الدراسة ويرمز لهذه الفرضية HA وتكتب الطريقة التالية: V1 غير مستقل أو يتبع لـ V2 ، حيث V1 و V2 المتغيرين تحت الدراسة. ويمكن كتابة الفرض البديل بالشكل التالي:

HA: V1 is dependent on V2

مستوى المعنوية (Level of Significance) الفا:

عند إجراء إختبار كاي تربيع فإن على الباحث اختيار قيمة تسمى Level of Significance أو مستوى المعنوية (الفا) وهذه القيمة يمكن القول بأنها تمثل احتمال الوقوع في خطأ في الاختبار يسمى الخطأ من النوع الأول وهو رفض فرض العدم H0مع أنه صحيح. بمعنى أن يستنتج الباحث بناء على البيانات المتوفرة أن هنالك علاقة بين المتغيرين مع أنه لا توجد علاقة وهو استنتاج خاطئ.

هذه القيمة التي يحددها الباحث يقوم بمقارنتها بقيمة تسمى p-value والتي يمكن حسابها يدويا أو باستخدام أحد البرامج الإحصائية وذلك من البيانات التي جمعها الباحث.

غالبا في الأبحاث ما يتم استخدام قيمة الفا أو Level of Significance على أنها 0،01 أو 0،05، و الاختيار يرجع للباحث ومدى مجال الخطأ الذي يود أن يسمح به، حيث في حالة إختيار الفا = 0،01 فإن نتيجة الاختبار تكون أدق.

اعتمادا على القانون العام لاختبار كا$^2$ رقم [16]

$$f_e = \frac{(\sum r)\times(\sum c)}{n}$$

**مجموع الصف × مجموع العمود**

**التكرار المتوقع للخلية=**

**حجم العينة**

نكرر تطبيق هذه المعادلة لجميع على كل الخلايا في الصفوف والأعمدة لكلا المتغيرين

تحديد درجات الحرية:

درجات الحرية = (عدد الصفوف − 1) × (عدد الأعمدة − 1)

تحديد قيمة كا$^2$ المجدولة:

يتم بعد ذلك تحديد قيمة كا$^2$ المجدولة من خلال الرجوع إلى جدول كا$^2$ عند درجة حرية محددة وفقا لمعطيات الدراسة

القرار:

نقارن كا$^2$ المحسوبة بالجدولية، فعندما تكون قيمة كا$^2$ المحسوبة أكبر من قيمة كا$^2$المجدولة فإننا نرفض الفرضية الصفرية أو فرض العدم والتي تنص على أنه لا توجد أي علاقة بين المتغيرين ونقبل الفرض البديل والتي تثبت وجود علاقة بين المتغيرين تحت الدراسة.

أما إذا كانت قيمة كا$^2$ المحسوبة أقل من قيمة كا$^2$ المجدولة فإننا نقبل الفرضية الصفرية أو فرض العدم **(22)**

مثال رقم (11) أراد الفريق العامل باحد المستشيات معرفة العلاقة بين التدخين والإصابة بسرطان الرئة لدى عينة بلغ عدد أفرادها 200 فرد فتحصلوا على الجدول التالي:

| | مصاب | غير مصاب | المجموع |
|---|---|---|---|
| مدخن | 78 | 32 | 110 |
| غير مدخن | 30 | 60 | 90 |
| المجموع | 108 | 92 | 200 |

السؤال: هل هناك علاقة بين التدخين والإصابة بمرض السرطان

ملاحظة: التساؤل هنا عن العلاقة بمعنى اللااستقلالية ويمكن معرفته بالتأكد من وجود اختلاف معنوي بين المدخنين وغير المدخنين، أومن خلال البحث عن العلاقة بين المتغيرين وفي كلا الحالتين نتبع الخطوات التالية باستخدام كاي تربيع. ( أنظر 23)

الفرضية الصفرية H0 – ليس هناك علاقة بين التدخين والإصابة بالسرطان

أو يمكن القول H0 – لا توجد فروق دالة بين تكرارات المصابين وغير المصابين تبعا لمتغير التدخين

| | مصاب | | غير مصاب | | مج | مصاب | غير مصاب | مصاب | غير مصاب | غير مصاب |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $f_o$ | $f_e$ | $f_o$ | $f_e$ | | $f_o - f_e$ | $f_o - f_e$ | $(f_o - f_e)^2$ | $(f_o - f_e)^2$ | $\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ |
| **مدخن** | **78** | 59.4 | **32** | 50.6 | **110** | 18.6 | -18.6 | 345.96 | 345.96 | 6.83 |
| **غير مدخن** | **30** | 48.6 | **60** | 41.4 | **90** | -18.6 | 18.6 | 345.96 | 345.96 | 8.35 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مج | 108 | | 92 | | 200 | | / | / |
| المجموع= 28.11=8.35+7.11+6.83+5.82 | | | | | | | | |

القيمة المحسوبة : كا$^2$ =28.11

حساب درجة الحرية: df = ( عدد الاعمدة -1) x ( عدد الصفوف -1)

بالبحث فى جداول كا$^2$ عند درجة حرية = 1 ومستوى دلالة 0.05 نجد قيمة كا$^2$ الجدولية = 3.84

$$\chi^2_{(df\ 1,\alpha 0.05)} = 3.84$$

اتخاذ القرار : بما أن القيمة المحسوبة $\chi^2$=28.11 أكبر تماما من القيمة الجدولية (3.84) نرفض الفرض الصفري ونقبل الفرض البديل الذي يقول هناك فروق دالة احصائيا بين تكرارات استجابات الطعلاقة بين التدخين والإصابة بالسرطان.

## ثانيا معامل ارتباط فاي (Phi Correlation Coefficient)

يستخدم معامل ارتباط فاي في حساب العلاقة بين متغيرين منفصلين اسميين وتحديدا في الحالات التي ينقسم فيها كل متغير إلى نوعين مختلفين مثل الصفات ونقيضها ذكور إناث ، علمي أدبي، لذا فهو يصلح لتحليل مفردات أسئلة الاختبارات النفسية التي تنقسم إلى قسمين مثل (نعم، لا) **(24)**.

ويتم حساب قيمة معامل فاي انطلاقا من المعادلة رقم [17]

$$R\phi = \frac{AD-BC}{\sqrt{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}} \qquad \textbf{[17]}$$

مثال رقم (12)

لمعرفة العلاقة الارتباطية بين نوع الجنس والتحصيل الدراسي جرى تقسيم عينة من الطلبة وفق ما هو موضح في الجدول

| المتغير | ناجح | راسب | المجموع |
|---|---|---|---|
| ذكور | A 35 | B 37 | A+B 72 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| إناث | C 14 | D 34 | C+D 48 |
| المجموع | A+C 49 | B+D 71 | 120 |

الفرضية الصفرية H0 . لا توجد علاقة ارتباطية دالة إحصائيا بين الجنس والتحصيل الدراسي

الفرضية البديلة: توجد علاقة ارتباطية دالة احصائيا بين الجنس والتحصيل الدراسي إذا كانت القيمة المحسوبة كا$^2$ أكبر من كا$^2$ الجدولية

ملاحظة: يتم تحويل قيمة فاي إلى كا$^2$ من خلال القانون التالي:

$= \chi^2 (R\text{ø})^2 \times N$

حساب قيمة فاي: $R\text{ø} = \frac{(35x34)-(37x14)}{\sqrt{(49)(71)(48)(72)}}$

$= 0.19$

هناك علاقة ارتباطية طردية ضعيفة

للتحقق من دلالة قيمة فاي تحولها إلى كا$^2$ حيث أن

كا2 = فاى2 × ن

كا2 = 2(0.19) × 120 = 4.33

حساب كا2 الجدولية :

لحسابها يلزم حساب درجة الحرية ومستوى الدلالة :

درجة الحرية = (عدد الصفوف − 1) × (عدد الأعمدة − 1)

= (2 − 1) × (2 − 1) = 1 × 1 = 1

مستوى الدلالة = 0.05 .

بالبحث فى جداول كا2 عند درجة حرية = 1 ومستوى دلالة 0.05 نجد قيمة كا2 الجدولية = 3.841

تحديد مدى دلالة كا2 :

نقارن قيمة كا2 المحسوبة بقيمة كا2 الجدولية نجد أن :

قيمة كا2 المحسوبة = 4.33 < قيمة كا2 الجدولية = 3.841

لذا فان كا2 دالة إحصائية عند مستوى دلالة 0.05 .وهو ما يشير إلى رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل الذي يشير إلى وجود علاقة ارتباطية دالة احصائيا بين الجنس والتحصيل الدراسي.

## 3.4. معامل التوافق: contingency coeficient of correlation

يستخدم معامل ارتباط التوافق في حساب العلاقة الارتباطية بين متغيرات اسمية غير قابلة للقياس العددي بعد رصدها في جداول تقاطعية عدد خلايا أعمدتها أو صفوفها أكبر من 2 مثل الحالة الاجتماعية ( أعزب، متزوج، مطلق، أرمل) أو الجنسية ( جزائري، مصري، تونسي، ...الخ) وغيرها من المتغيرات التي لا نستطيع ياسها كميا على ان يزيد عدد عن اربعة (04) خلايا (25) وتعرف قيمته انطلاقا من قيمة كا$^2$ انطلاقا من القانون التالي:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}} \qquad \textbf{[18]}$$

كما يمكن حساب قيمته بشكل مباشر من خلال القانون التالي:

$$C = \sqrt{1 - \frac{1}{L}} \qquad \textbf{[19]}$$

C = معامل التوافق

L= مج [مربع تكرار الخلية / مجموع التكرارات عمود الخلية x مجموع تكرارات صف الخلية]

مثال رقم 13: لمعرفة دلالة العلاقة بين المستوى الاقتصادي للطالب والتحصيل الدراسي تحصل باحث على بيانات عينة تتكون من 80 طالبا وفق ما هو موضح في الجدول التالي:

| | مستوى اق ضعيف | مستوى اق متوسط | مستوى اق جيد | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| ناجح | 22 | 18 | 10 | 50 |
| راسب | 13 | 12 | 5 | 30 |
| | 35 | 30 | 15 | 80 |

السؤال: هل هناك علاقة ارتباطية دالة احصائيا بين المستوى الاقتصادي للطالب والتحصيل الدراسي

الفرضية الصفرية: H0 لا توجد علاقة ارتباطية دالة احصائيا بين المستوى الاقتصادي للطالب والتحصيل الدراسي

الفرضية البديلة : إذا ثبت أن قيمة كا$^2$المحسوبة أكبر من قيمة كا$^2$ الجدولية فإننا نرفض الفرض الصفري ونقبل الفرض البديل الذي يشير إلى وجود علاقة ارتباطية دالة احصائيا بين المستوى الاقتصادي والتحصيل الدراسي نحصل على قيمة كا$^2$ المحسوبة انطلاقا من القانون التالي:

$$\chi^2 = \frac{N\,x\,c^2}{1-c^2}$$

N = عدد أفراد العينة

$C^2$ = مربع معامل التوافق

- حساب قيمة معامل التوافق $C = \sqrt{1-\frac{1}{L}}$

$$L = \frac{22^2}{50x35} + \frac{18^2}{50x30} + \frac{10^2}{50x15} + \frac{13^2}{30x30} + \frac{12^2}{30x30} + \frac{5^2}{30x15} = 1.21$$

$$C = \sqrt{1-\frac{1}{1.21}} = \sqrt{1-0.82} = \sqrt{0.18} = 0.42$$ علاقة ارتباطية طردية متوسطة

حساب قيمة كا$^2$

$$\chi^2 = \frac{N\,x\,c^2}{1-c^2} = \frac{80\,x\,(0.42)^2}{1-(0.42)^2}\ \frac{13.6}{0.83} = 16.38$$

حساب كا2 الجدولية :

لحسابها يلزم حساب درجة الحرية ومستوى الدلالة :

درجة الحرية = (عدد الصفوف $-$ 1) $\times$ (عدد الأعمدة $-$ 1)

$= (3-1) \times (2-1) = 2 \times 1 = 2$

مستوى الدلالة = 0.05 .

بالبحث فى جداول كا$^2$ عند درجة حرية = 2 ومسـتوى دلالة 0.05 نجد قيمة كا$^2$الجدولية = 5.99

تحديد مدى دلالة كا$^2$ :

نقارن قيمة كا$^2$ المحسوبة بقيمة كا$^2$ الجدولية نجد أن :

قيمة كا$^2$ المحسوبة = 16.38 > قيمة كا$^2$ الجدولية = 5.99

لذا فان كا$^2$ دالة إحصائية عند مستوى دلالة 0.05 .وهو ما يشير إلى رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل الذي يشير إلى وجود علاقة ارتباطية دالة احصائيا بين المستوى الاقتصادي والتحصيل الدراسي.

سلسلة تمارين حول اختبار كا تربيع، فاي ، معامل التوافق

**– من الجدول الرباعي التالي :**

| س / ص | نعم | لا | مج |
|---|---|---|---|
| مؤيد | 25 | 15 | 40 |
| معارض | 23 | 27 | 50 |
| مج | 48 | 42 | 90 |

**احسب قيمة كا2 في كل من الحالات التالية :**

- **بالقانون العام**
- **بالطريقة المختصرة**

**ثم بين مدى دلالتها إحصائيا عند مستوى دلالة 0.05 .**

**2– احسب كا$^2$ من الجدول التالي :**

**ثم بين مدى دلالتها إحصائيا عند مستوى 0.05**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ذكور | 4 | 6 | 8 | 3 | 6 |
| إناث | 2 | 10 | 25 | 9 | 14 |

**3– من الجدول التالي :**

| الجنس / الإجابة | ذكور | إناث | مج |
|---|---|---|---|
| موافق | 32 | 22 | 54 |
| معارض | 14 | 10 | 24 |
| محايد | 4 | 8 | 12 |
| مج | 50 | 40 | 90 |

**احسب قيمة كا2**

**ثم بين مدى دلالتها إحصائيا عند مستوى دلالة 0.05 .**

**4– احسب كا$^2$ لدلالة فروق النسب المرتبطة التالية مع بيان دلالتها الإحصائية .**

| | |
|---|---|
| **30** | **10** |
| **23** | **27** |

5- احسب قيمة معامل ارتبا فاي من القيم التالية

| | مصاب | غير مصاب |
|---|---|---|
| مدخن | 12 | 13 |
| غير مدخن | 28 | 17 |

6- أوجد دلالة العلاقة الارتباطية بين التحصيل والجنس

| | ناجح | راسب |
|---|---|---|
| ذكر | 12 | 13 |
| أنثى | 28 | 17 |

7- أوجد قيمة العلاقة الاترباطية بين المتغيرين

| | موافق بشدة | موافق | محايد | معارض | معارض بشدة |
|---|---|---|---|---|---|
| ذكر | 12 | 14 | 15 | 11 | 16 |
| أنثى | 18 | 11 | 15 | 14 | 19 |

8- أوجد قيمة العلاقة الارتباطية بين المتغيرين

| | موافق | محايد | معارض |
|---|---|---|---|
| ابتدائي | 12 | 18 | 20 |
| متوسط | 15 | 11 | 12 |
| ثانوي | 16 | 23 | 14 |
| جامغعي | 19 | 25 | 16 |

- 5. نماذج من المعالجة الإحصائية اللابارمترية (اللامعلمية) في المستوى الرتبي
  - 1.5. اختبار ويلكوكسن للفروق ذات الإشارة الأقل عددا
  - 2.5. اختبار فريدمان لتحليل التباين
  - 3.5. اختبار مان ويتني
  - 4.5. معامل سبيرمان لارتباط الرتب

## 1.5. اختبار ويلكوكسن للفروق ذات الإشارة الأقل عددا

يستخدم الباحثون اختبار ويلكوكسن حينما يتعذر عليهم استخدام اختبار "ت" لمتوسطين مرتبطين )عينة واحدة) أي حينما لا تتفر الشروط اللازمة لاستخدام اختبار "ت" – سيأتي تفصيلها لاحقا- ويصلح اختبار ويلكوكسن في حالة المقارنة بين دراجات المجموعة التجريبية في القياسين القبلي والبعدي كما يصلح في حساب الفروق بين درجات مجموعة من الأفراد في اختبار ما ودرجات نفس المجموعة من الألإراد في اختبار آخر ، وبصفة عامة يصلح هذا الاختبار في المجموعات المتكافئة التي يناظر فيها كل درجة في القياس الاول درجة في القياس الثاني لنفس المجموعة من الأفراد وقد أطلقت رمزية الغريب على هذا الاختبار اسم اختبار الأزواج المتماثلة، ولا يستخدم هذا الاختبار في التصنيفات الاسمية أي انه يشترط أن تكون البيانات في شكل درجات وذلك حينما تتراوح أعدادها بين (6- 25) ويمكن حساب قيمة ويلكوكسن إذا تجاوز عدد الأفراد (25) باستخدام قانون خاص بهذه الحالة **(26)**

ملاحظة: ويلكوكسن ليس له قانون تتم من خلاله حساب القيمة المحسوبة بل تتم حساب قيمته اعتمادا على الخطوات الموضحة في الجدول للمثال التالي:

مثال رقم (14) طبق باحث مقياسا لقياس الدافعية نحو التعلم (قياس قبلي) على عينة تتكون من (12) طالبا وبعد تطبيق برنامج لزيادة درجة الدافعية قام بتطبيق نفس المقياس على نفس المجموعة من الأفراد(قياس بعدي) فتحصل على النتائج التالية:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| القياس القبلي | 12 | 14 | 15 | 18 | 16 | 13 | 14 | 18 | 16 | 15 | 12 | 11 |
| القياس البعدي | 11 | 12 | 11 | 12 | 19 | 13 | 16 | 19 | 12 | 13 | 16 | 16 |

السؤال: هل هناك فروق دالة إحصائيا بين درجات القياس القبلي والبعدي

الفرضية الصفرية H0 لا توجد فروق دالة إحصائيا بين درجات القياس القبلي والبعدي

الفرض البديل H1 توجد فروق دالة احصائيا بين درجات القياس القبلي والبعدي إذا تحقق أن قيمة w ويلكوكسن المحسوبة أقل من القيمة w الجدولية عند مستوى دلالة 0.05 بدلالة الطرفين

خطوات الحل:

1. نضع درجات القياس القبلي والبعدي في عمودين متتاليين .
2. نحسب الفروق بين القياس القبلي والبعدي كما هو موضح في العمود الثالث من الجدول اللاحق.
3. نرتب الفروق ترتيبا تصاعديا بغض النظر عن الإشارة وتجاهل الفروق المنعدمة.
4. نسجل رتب الفروق الموجبة في العمود الرابع ومجموعها .w1
5. نسجل رتب الفروق السالبة ومجموعها في العمود الخامس w2
6. قيمة وسلكوكسن هي مجموع رتب الفروق ذات الإشارة الأقل عددا، وفي حال التساوي في العدد نأخذ الأقل مجموعا، وإذا تساوو في المجموع نأخذ واحدة منهما.

| القياس القبلي | القياس البعدي | الفرق | رتبة الفرق الموجب | رتبة الفرق السالب |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 14 | -2 | | 4 |
| 14 | 12 | +2 | 4 | |
| 15 | 11 | +4 | 8 | |
| 18 | 12 | +6 | 11 | |
| 16 | 19 | -3 | | 6 |
| 13 | 13 | 0 | / | / |
| 14 | 16 | -2 | | 4 |
| 18 | 19 | -1 | | 1.5 |
| 16 | 12 | +4 | 8 | |
| 15 | 14 | +1 | 1.5 | |
| 12 | 16 | -4 | | 8 |
| 11 | 16 | -5 | | 10 |
| | | المجموع | w1=32.5 | w2 =33.5 |

بما أن الفروق الأقل عددا هي الفروق الموجبة فإن قيمة ويلكوكسن هي مجموع رتب هه الفروق أي w1= 32.5

حساب درجة الحرية: ن – 1 مع استبعاد الفروق الصفرية أي أن ن = 11-1 = 10

بالعودة إلى جداول ويلكوكسن نجد أن قيمة w الجدولية عند مستوى دلالة 0.05 وبدلالة الطرفين تساوي w=8

اتخاذ القرار : بما ان القيمة المحسوبة 32.5 أكبر من القيمة المجدولة فإننا نقبل الفرض الصفري الذي يقول بعدم وجود فروق معنوية بين القياسين القبلي والبعدي.

- **2.5. اختبار فريدمان لتحليل التباين للعينات المترابطة**

اقترح الباحث Milton Friedman سنة (1937) طريقة لاختبار وجود فروق في تأثير المعالجة المختلفة من عدمه إذا أعطيت المشاهدات رتبا بدل القيم الاصلية **(27)** وهو من الأساليب الإحصائية اللابارمترية في المستوى الرتبي التي تستخدم لاختبار دلالة الفرق بين رتب أكثر من مجموعتين مترابطتين أو مجموعات متشابهة من الأفراد، ويستخدم أيضا في التجارب التي يتم فيها إعادة القياس عددا من المرات على نفس المجموعة، ويعتمد اختبار فريدمان على افتراض أن مجموعات القيم المترابطة تأتي من مجموعات متشابهة (الفرض الصفري) باستخدام البيانات الرتبية بدلا من بيانات نسبية أو المسافة.**(28)** واستنادا إلى المعادلة رقم [20] أو [21] **(29)** يمكن اختبار صحة الفرضية الصفرية التي تشير إلى أن مجموعات الدرجات التالية تنتمي إلى مجموعات متشابهة

[20]

$$\chi_F^2 = \left[\frac{12}{nr(r+1)}\sum R_j^2\right] - 3n\,(r+1)$$

[21]

$$\chi_F^2 = 12n[r\,(r+1)]^{-1}\sum_{j=1}^{r}(\overline{R_j} - \frac{r+1}{2})^2$$

مثال رقم (15) لمعرفة أثر طريقة التدريس على تحصيل مجموعة من الطلبة قام أحد الباحثين بقياس درجات تحصيل الطلبة بعد الفراغ من تطبيق طريقة من طرق التدريس في نهاية كل فصل دراسي فتحصل على النتائج الموضحة في الجدول أدناه.

| الأفراد | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 | مج الرتب |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الطريقة 1 | 12 | 14 | 12 | 14 | 15 | 11 | 16 | 13 | 11 | 14 | / |
| الطريقة 2 | 12 | 12 | 16 | 14 | 15 | 11 | 18 | 13 | 15 | 12 | / |
| الطريقة 3 | 15 | 15 | 16 | 14 | 12 | 16 | 12 | 14 | 12 | 12 | / |
| رتبة طريقة 1 | 1.5 | 2 | 1 | 2 | 2.5 | 1.5 | 2 | 1.5 | 1 | 3 | 18 |
| رتبة طريقة 2 | 1.5 | 1 | 2.5 | 2 | 2.5 | 1.5 | 3 | 1.5 | 3 | 1.5 | 20 |
| رتبة طريقة 3 | 3 | 3 | 2.5 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1.5 | 22 |

خطوات الحل: يمثل الصف الأول أرقام أفراد العينة بينما تمثل الصفوف الثلاث التالية درجات كل فرد من أفراد العينة حسب طرق التدريس الثلاث

1. نقوم بترتيب درجات كل فرد من أفراد العينة ترتيبا تصاعديا فمثلا درجات الفرد 01 هي ( 12، 12، 15) فتعطى الرتب ( 1.5، 1.5، 3) على التوالي وهكذا مع بقية أفراد العينة
2. نحسب مجموع رتب كل طريقة من طرق التدريس
3. اعتمادا على نص المعادلة رقم [20] حيث أن r هي عدد البدائل (طرق التدريس) و n تمثل عدد الأفراد

بينما $\sum_{j=1}^{r}(\overline{R_j})$ تمثل مجموع مربعات مجاميع رتب كل صف

$$\chi_F^2 = \frac{12}{10x3x\,(3+1)}\,x[\,(18)^2 + (20)^2 + (22)^2] - 3x10x(3+1) = 0.8$$

القيمة المحسوبة هي 0.8

نقارن الفقيمة المحسوبة بالقيمة الجدولية في جداول كا$^2$ التي تحسب من خلال درجة الحرية ( عدد البدائل –1)

مستوى الدلالة = 0.05 .

بالبحث فى جداول كا$^2$ عند درجة حرية = 2 ومسـتوى دلالة 0.05 نجد قيمة كا$^2$الجدولية = 5.99

تحديد مدى دلالة كا$^2$ :

نقارن قيمة كا$^2$ المحسوبة بقيمة كا$^2$ الجدولية نجد أن :

قيمة كا$^2$ المحسوبة = 0.8 < قيمة كا$^2$ الجدولية = 5.99

لذا فان كا$^2$ دالة إحصائية عند مستوى دلالة 0.05 .وهو ما يشير إلى قبول الفرض الصفري الذي يشير إلى أن مجموعات الدرجات تنتمي إلى مجموعات متشابهة.

## 3.5. اختبار مان وتني لعينتي مستقلتين Mann–Whitney– U Test

يستخدم اختبار مان وتني "ى" للمقارنة بين عينتين مستقلتين عندما تكون البيانات الرتبية أو البيانات العددية التي حولت إلى بيانات رتبيه، وهو يستخدم في الإحصاء اللابارامتري عوضا عن اختبار "ت" في الإحصاء البارامتري.

- متى يمكننا استخدام اختبار "ى"؟

يمكن استخدام اختبار "ى" في حالات العينات الصغيرة جدا التي لا تتجاوز عدد أفرادها "8" ،كذلك يمكننا استخدامه في حالة العينات ذات الأحجام المتوسطة(9-20)؛وكذلك مع العينات التي يزيد عدد أفرادها عن (20)لذلك فان قيمة "ى"يمكن أن تحسب بواحدة من ثلاث طرق مختلفة ويكون اختيار الطريقة المناسبة في ضوء حجم كل من العينتين التي تجرى المقارنة بينهم.

***أولا عندما تكون ن<9***

1. ندمج درجات المجموعتين وكأنهما مجموعة واحدة مع ترتيب الدرجات من الأصغر إلى الأكبر.
2. نرمز بالرمز (س) لدرجات المجموعة الأولى ،ونرمز بالرمز (ص) لدرجات المجموعة الثانية،ويكتب الرمز أسفل الدرجات في الجدول.
3. نحسب قيمة "ى$_1$"وهى عدد (س)الأقل من (ص).
4. نحسب قيمة "ى$_2$"وهي عدد (ص)الأقل من(س).

**5.** نحدد أي القيمتين اصـغر ونكشـف عنها بجدول مان وتني للعينات الصـغيرة..وذلك باستخدام "ى" الصغرى ،ن الكبرى ،ن الصغرى..

وإذا وجدنا أن الرقم الجدولي المكتوب0.05فأقل فإن ذلك يشير إلى وجود دلالة إحصائية بين العينتين؛وإذا وجدنا أن الرقم الجدولى اكبر من 0.05فإن ذلك يشـير إلى عدم وجود فروق بين المجموعتين "العينتين"

❖ *تطبيق:*

فيما يلي درجات لسمة العصابية لدى مجموعة من مرضى آلام أسفل الظهر ومجموعة من غير المرضى والمطلوب التحقق من دلالة الفروق.

| درجات العصـابية لدى مجموعة من غير المرضى(**ص**) | | | درجات العصـابية لدى مرضى آلام الظهر(**س**) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | **15** | **16** | **11** | **13** | **14** | **18** |
| | | | **22** | | | |

❖ الحل

**ص** هي درجات المجموعة الأولى

**س** هي درجات المجموعة الثانية

**ن1** هو عدد أفراد المجموعة الأولى

**ن2** هو عدد أفراد المجموعة الثانية

يتم ترتيب درجات المجموعتين في جدول واحد كالتالي:

| ***الدرجات*** | ***10*** | ***11*** | ***13*** | ***14*** | ***15*** | ***16*** | ***18*** | ***22*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **الرمز** | ص | س | س | س | ص | ص | س | س |

لحساب "**ى1**" نحسب عدد السينات ذات القيم الأقل من الصادات.

فنجد انه عندما "**ص=10**" لا توجد قيم في (**س**) اقل من **10**

وعندما "**ص=15**" فهناك ثلاث قيم في (**س**)اقل من **15** هم"**11،13،14**" وهكذا

**ى$_1$=0+3+3=6**

لحساب"ى$_2$" نحسب عدد الصادات ذات القيم الأقل من السينات

**ى$_2$=1+1+1+3+3=9**

بعد حساب قيمة "**ى**" في الحالتين تؤخذ القيمة الصغرى وهى

ى$_1$ =6 وعندما ن1=3، ن$_2$=5

ونجد أن القيمة الجدولية لاختبار ذيل واحد هي 0.393

وتكون بالنسبة لاختبار ذيلين 0.786 وهي اكبر من 0.05

*ومن ثم فلا توجد فروق ذات دلالة إحصـــائية بين المجموعتين وبالتالي يتم قبول الفرض الصفري..*

***ثانيا عندما تكون9< ن<20:***

لاســتخراج قيم "ى"في حالة العينات ذات الأحجام المتوســطة(9:20)فردا نســتخدم المعادلة التالية:

$$ى_1 = ن_1 ن_2 + \frac{ن_1 (ن_1 + 1)}{2} - ر_1$$

$$ى_2 = ن_1 ن_2 + \frac{ن_2 (ن_2 + 1)}{2} - ر_2$$

حيث أن:

**ن$_1$** هو أفراد العينة الأولى

**ن$_2$** هو عدد أفراد العينة الثانية

**ر$_1$** هو مجموع رتب درجات أفراد العينة الأولى

ر2 هو مجموع رتب درجات أفراد العينة

*تطبيق:*

أراد احد المدرســـين اختبار اثر برنامج لتنمية الابتكار على التفكير الابتكاري لدى طلاب المرحلة الثانوية ،ولأجل اختبار فرضيته الإحصائية التي تقول بعدم وجود تأثير للبرنامج ،فإن هذا المدرس قد اختار عينتين عشـوائيتين ،حيث تلقت المجموعة الأولى البرنامج بينما لم تتلق المجموعة الثانية ذات البرنامج ،وبعد الانتهاء من إجراء البرنامج أجرى على المجموعتين اختبارا في التفكير الابتكاري وكانت النتائج كما هي موضحة بالجدول التالي:

**درجات ورتب مجموعتين من الطلاب على اختبار التفكير الابتكاري**

| المجموعة أ | | المجموعة ب | |
|---|---|---|---|
| الدرجة | الرتبة | الدرجة | الرتبة |
| 60 | 13 | 65 | 20 |
| 62 | 16 | 62 | 16 |
| 47 | 2 | 59 | 11 |
| 54 | 7.5 | 62 | 16 |
| 60 | 13 | 67 | 22 |
| 48 | 3 | 51 | 6 |
| 64 | 18.5 | 56 | 10 |
| 50 | 5 | 68 | 23 |
| 54 | 7.5 | 69 | 24 |
| 49 | 4 | 45 | 1 |
| | | 66 | 21 |
| | | 64 | 18.5 |
| | | 55 | 9 |
| | | 60 | 13 |
| | | 70 | 25 |
| ن1=10 | مج ر1=89.5 | ن2=15 | مج ر2=235.5 |

ومن اجل اختبار الفرضية الصفرية نقوم بإتباع التالي:

◄ ترتـب درجـات المجموعتين وكـأنهـا درجـات مجموعـة واحـدة حيـث يعطى الترتيـب (1)لأصـــغر درجـة وهى في المثـال (45)ثم يعطى(2) إلى الـدرجـة التـاليـة وهى (47)وهكذا..

◄ تجمع رتب كل مجموعة على حده لاستخراج قيمة (ر)

◄ تحسب قيمة "ى" وفقا للمعادلات الذكورة:

$$ى_1 = ن_1 ن_2 + \frac{ن_1 (ن_1 +1)}{2} - ر_1$$

$$ى_1 = (10)(15) + \frac{10(10+1)}{2} - 89.5$$

$$ى_1 = 150 + \frac{10 (11)}{2} - 89.5$$

$$ى_1 = 115.5$$

◄ وتحسب قيمة "ى2" بنفس الطريقة

$$ى_2 = ن_1 ن_2 + \frac{ن_2 (ن_2 +1)}{2} - ر_2$$

$$ى_2 = (10)(15)+ \frac{15(15 +1)}{2} - 235.5$$

$$ى_2 = 150+ \frac{(15 )(16)}{2} - 235.5$$

ى2 = 34.5

- وبعد حساب قيمة "ى" في الحالتين تؤخذ القيمة الصغرى وهى (34.5) ثم تقارن بالقيمة النظرية من جدول (القيم النظرية في اختبار مان –وتني "حجم العينة المتوسطة")حيث نجد ان مستوى الدلالة 0.05عندما تكون ن1=10، ن2=15 هي 39
- وحيث أن 34.5(المحسوبة)اصغر من 39(الجدوليه) فان هذا يعني أن المجموعتين تختلفان من حيث التفكير الابتكاري مما يعني أن البرنامج قد اثر تأثير دال إحصائيا على المجموعة التجريبية عنها لدى المجموعة الضابطة....

***ثالثا: عندما ن> 20***

نطبق نفس خطوات الحالة الثانية ولكن لا نكتفي بتحديد القيمة الصغرى "ى" ولكن نقوم بالتعويض في المعادلة التالية:

$$Z = \frac{\text{ى الصغرى} - \frac{\text{ن1ن2}}{2}}{\sqrt{\frac{\text{ن1ن2}(\text{ن1}+\text{ن2}+1)}{3}}}$$

## 4.5. معامل سبيرمان لارتباط الرتب: Spearman rank Correlation Coefficient

يستخدم معامل ارتباط سبيرمان في الحالات التي ينقسم فيها كلا المتغيرين إلى فئات منفصلة، وإذا كانت المتغيران في صورة رتب، أو إذا كان المتغيران متصلين ضمن شروط معينة، ويفضل استخدام الرتب بدل الدرجات الخام حيث يعد معامل ارتبط سبيرمان حالة خاصة من معامل ارتباط بيرسون الذي يستخدم مع المتغيرات التي

يكون قياسها في المستوى الفئوي أو النسبي، ويفضل استخدام معامل ارتباط سبيرمان في الحالات التي يقل فيها عدد أفراد العينة عن (10) ومن الممكن اســـتخدامه بوجه خاص حينما لا يتجاوز حجم أفراد العينة (30) فردا ويعتمد في حســابه على الفروق بين الرتب في كلا المتغيرين ولا يعتمد على الدرجات الخام، فهو من أســاليب المعالجة الإحصـائية اللابارامترية التي تعتمد المعالجة غير المباشـرة للبيانات، وهو واحد من أقدم طرق المعالجة الإحصائية للفرضيات الارتباطية. **(30)**

لحسـاب معامل سـبيرمان لارتباط الرتب يقوم بترتيب كل من المتغيرين ترتيباً تصـاعدياً أو تنازلياً (أما تصاعدياً لكلا المتغيرين أو تنازلياً لكليهما). وفي حالة الترتيب التصاعدي تأخذ أقل قيمة من قيم المتغير الرتبة رقم 1، والقيمة الأعلى منها مباشرة الرتبة رقم 2 وهكذا (بالنسبة لكل من المتغيرين). أما في حالة الترتيب التنازلي تأخذ أكبر قيمة من قيم المتغير الرتبة رقم 1، والقيمة الأقل منها مباشـرة الرتبة رقم 2 وهكذا (بالنسـبة لكل من المتغيرين). وعند تسـاوي قيمتين (أو أكثر) من قيم المتغير نعطي كل قيمة رتبة مختلفة (كما لو كانت القيم غير متسـاوية) ثم نحسـب متوسط هذه الرتب، ويعطى هذا المتوسط لكل من هذه القيم المتساوية.

وبعد ترتيب المتغيرين نحســب الفروق بين رتب كل من المتغيرين (ونرمز للفروق بالرمز d) ثم نقوم بتربيع هذه الفروق ونحصـــل على مجموعها أي نحصـــل على $\sum d^2$ ثم نعوض في معامل سبيرمان لارتباط الرتب والذي يأخذ الشكل التالي : **( 31)**

**[22]**

$$r_s = 1 - \frac{6(\sum d^2)}{n(n^2 - 1)}$$

حيـث : $\sum d^2$ هو مجموع مربعـات الفروق بين رتـب المتغيرين، n هي عـدد أزواج القيم.

مثال رقم (16) لمعرفة نوع العلاقة بين تحصيل الطالب في مادة الإحصاء والقياس النفسي قام أحد الأساتذة برصد درجات عينة من الطلبة في كلا المقياسين فتحصل على النتائج التالية:

| الأفراد | الاحصاء (س) | القياس (ص) | رتبة (س) | رتبة (ص) | الفرق d | مربع الفرق $d^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6.25 | 2.5 | 1 | 3.5 | 11 | 14 | 01 |
| 1 | -1 | 2.5 | 1.5 | 12 | 12 | 02 |
| 0.25 | 0.5 | 4.5 | 5 | 14 | 15 | 03 |
| 1 | -1 | 7 | 6 | 18 | 16 | 04 |
| 1 | 1 | 6 | 7 | 15 | 18 | 05 |
| 1 | 1 | 2.5 | 3.5 | 12 | 14 | 06 |
| 9 | 3 | 4.5 | 1.5 | 14 | 12 | 07 |
| 19.5 | | | | | | المجموع |

$$r_s = 1 - \frac{6(Sd^2)}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(\sum d^2)}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(19.5)}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{117}{336} = 1 - 0.35$$

$$r_s = 0.65$$

من أجل معرفة نوع العلاقة بين درجات الاحصاء والقياس يمكن الرجوع إلى السلم التالي:

**(32 )**

| | |
|---|---|
| ضعيفة جدا | صفر – أقل من 0.20 |
| ضعيفة | 0.20 – أقل من 0.40 |
| متوسطة | 0.40 – أقل من 0.60 |
| قوية | 0.60 – أقل من 0.80 |
| قوية جدا | 0.80 – أقل من 1.00 |
| تام | 1.00 |

وبما أن قيمة معامل الارتباط في المثال هي 0.65 فإن العلاقة بين التحصـــيل في مقياس الإحصاء ومقياس القياس النفسي هي علاقة ارتباطية طردية قوية.

مثال رقم (17) بما أن معامل سبيرمان لارتباط الرتب يصلح للبيانات الكمية والنوعيةـــ تمثل التقديرات التالية تقديرات مجموعة من الطلبة في مقياسي الإحصاء والقياس النفسي، والمطلوب هو معرفة نوع العلاقة الارتباطية بين المتغيرين.

| الاحصاء | مقبول | حسن | ممتاز | جيد | جيد جداً | ممتاز | جيد |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| القياس | جيد جداً | مقبول | جيد جداً | جيد جدا | جيد | حسن | ممتاز |

والمطلوب حساب معامل سبيرمان لارتباط الرتب بين هذين المتغيرين ؟

الحل :

تنظم الحل في الجدول التالي مع ملاحظة ما يلي :

1 – بالنسبة للمتغير الأول، فإن التقدير الأعلى سيحصل على الرتبة رقم 1 والأقل منه مباشرة سـيحصـل على الرتبة رقم 2 وهكذا.. أي أن الترتيب تنازلي. ونكرر العمل نفسـه مع السؤال الثاني.

2 – عند حصـول إجابتين أو أكثر على التقدير نفسـه نعطي لكل إجابة مبدئياً رتبة كما لو كانوا مختلفين ثم نحسب متوسط هذه الرتب، وهذا المتوسط هو الذي يعطى لكل إجابة.

3 – ثم نحسب الفروق بين رتب السؤالين ونرمز لها بالرمز d ثم نربع هذه الفروق فنحصل على d2 ونعوض في القانون عن $\sum d^2$ مع ملاحظة أن $n = 7$. ( **مطبوعة الارتباط، ص 188**)

| الاحصاء X | القياس Y | رتب X | رتب Y | d الفرق بين الرتب | $d^2$ مربعات الفرق |
|---|---|---|---|---|---|
| مقبول | جيد جدا | 7 | 3.5 | 3.5 | 12.25 |
| حسن | مقبول | 6 | 7 | −1 | 1 |
| ممتاز | جيد | 1.5 | 5.5 | −4 | 16 |
| جيد | جيد جدا | 4.5 | 3.5 | 1 | 1 |
| جيد جداً | جيد | 3 | 5.5 | −1.5 | 2.25 |
| ممتاز | ممتاز | 1.5 | 1.5 | 0 | 0 |
| جيد | ممتاز | 4.5 | 1.5 | 3 | 9 |
| | | | | **Zero** | **41.5** |

$$r_s = 1 - \frac{6(\sum d^2)}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(\sum d^2)}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(41.5)}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{348}{336} = 1 - 0.74$$

$$r_s = 0.26$$

وهذا يعني أن الارتباط بين تقديرات الطلبة في مقياسي الإحصاء والقياس النفسي هو ارتباط طردي ضعيف.

**اختبار معنوية ارتباط الرتب :**

عند اختبار الفرض العدمي بعدم وجود ارتباط رتب بين المتغيرين لسنا في حاجة لوضع أي شروط عن طبيعة المجتمع المسحوبة منه العينة.

وتحت الفرض العدمي بعدم وجود ارتباط فإن توزيع المعاينة للمعامل يكون له متوسط يساوي صفر وانحراف معياري يساوي : $\sigma rs = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ وأن هذا التوزيع يكون له – تقريباً – توزيع طبيعي فإن خطوات الاختبار تكون كما يلي :

**1 – الفرض العدمي** : لا يوجد ارتباط بين المتغيرين (أو معامل الارتباط يساوي الصفر):

$$Ho : R = 0$$

**2 – الفرض البديل** : يوجد ارتباط بين المتغيرين (أو معامل الارتباط لا يساوي الصفر):

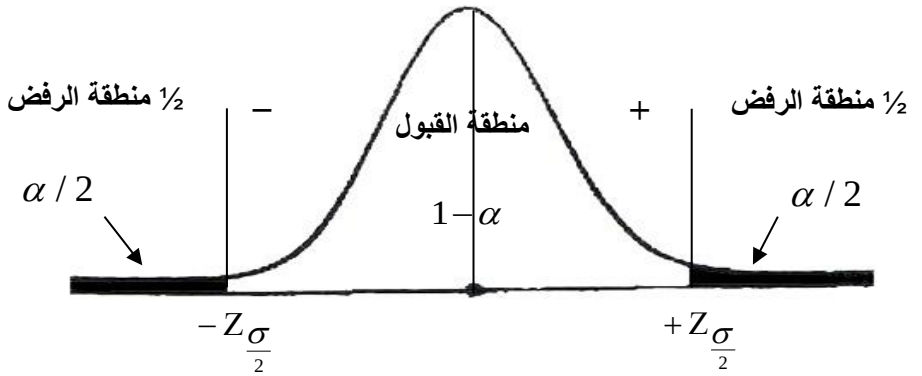
$$H1 : R \# 0$$

3 – الإحصائية : والتي تكتب – اختصاراً – كما يلي :

$$Z = r_s \sqrt{n-1}$$

والتي لها توزيع طبيعي معياري.

**4 – حدود منطقتي القبول والرفض** : (اختبار الطرفين للتوزيع الطبيعي)



**5 – المقارنة والقرار:** حيث نقارن قيمة الإحصائية بحدود منطقتي القبول والرفض. فإذا وقعت في منطقة القبول نقبل الفرض العدمي والعكس صحيح.

لبيانات المثال السابق رقم (16) حيث n = 7، $r_s = 0.65$

اختبر الفرض العدمي بعدم وجود ارتباط بين عدد السـاعات التي يذاكرها الطالب والدرجات التي يحصل عليها في الامتحان وذلك بمستوى معنوية 1 %.

**الحل :**

**1 – الفرض العدمي** :_لا يوجد ارتباط بين المتغيرين. أي أن :

Ho : R = 0

**2 – الفرض البديل** : يوجد ارتباط بينهما. أي أن :

H1 = R # 0

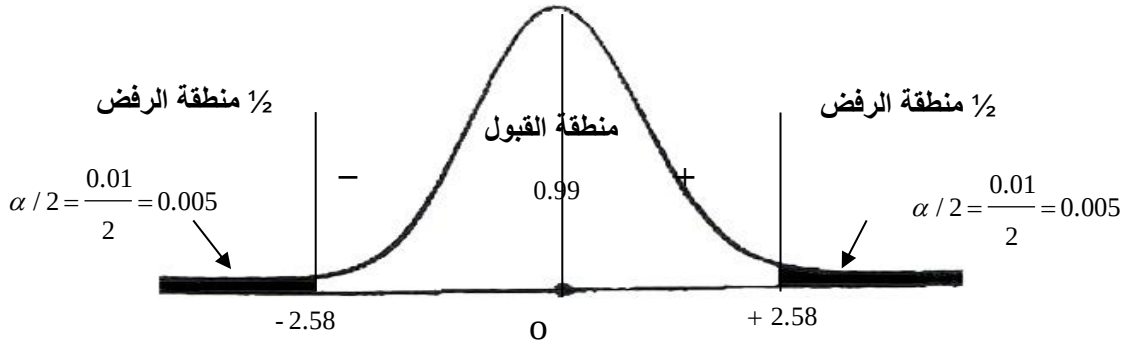
**3 – الإحصائية** :

$$Z = r_s \sqrt{n-1} = 0.65\sqrt{7-1} = 0.65\sqrt{6}$$

$$Z = 1.59$$

**4 – حدود منطقتي القبول والرفض** :

(توزيع Z، واختبار الطرفين، ومستوى المعنوية 1 % = &)



**5 – المقارنة والقرار** : وحيث أن قيمة الإحصـــائية (1.59) تقع في منطقة القبول (أقل من 2.58) فإن القرار هو قبول الفرض العدمي أي أنه لا توجد علاقة ارتباطية دالة إحصـائيا بين المتغيرين عند مستوى دلالة 1%.

لبيانات المثال السابق رقم (17) حيث n = 7، $r_s = 0.26$

اختبر الفرض العدمي بعدم وجود ارتباط بين عدد الســـاعات التي يذاكرها الطالب والدرجات التي يحصل عليها في الامتحان وذلك بمستوى معنوية 1 %.

**الحل :**

**1 – الفرض العدمي** :_لا يوجد ارتباط بين المتغيرين. أي أن :

Ho : R = 0

**2 – الفرض البديل** : يوجد ارتباط بينهما. أي أن :

H1 = R # 0

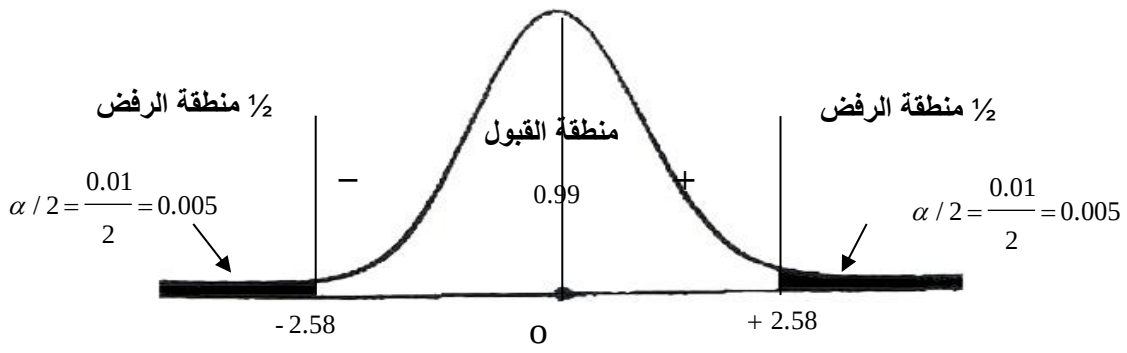
**3 – الإحصائية** :

$$Z = r_s \sqrt{n-1} = 0.26\sqrt{7-1} = 0.26\sqrt{6}$$

$$Z = 0.63$$

**4 – حدود منطقتي القبول والرفض** :

(توزيع Z، واختبار الطرفين، ومستوى المعنوية 1 % = &)



**5 – المقارنة والقرار** : وحيث أن قيمة الإحصـــائية (0.63) تقع في منطقة القبول (أقل من 2.58) فإن القرار هو قبول الفرض العدمي أي أنه لا توجد علاقة ارتباطية دالة إحصـــائيا بين المتغيرين عند مستوى دلالة 1%.

- 6. نماذج من المعالجة الإحصائية البارامتربة (المعلمية) في المستوين النسبي / الفتري
  - 1.6. معامل ارتباط بيرسون
  - 2.6. اختبار ت لدلالة الفروق بين المتوسطات
  - 3.6. تحليل التباين الأحادي

## 1.6. معامل بيرسون للارتباط الخطي البسيط :

معامل بيرسون للارتباط الخطي من أكثر معاملات الارتباط استخداماً خاصة في العلوم الإنسانية والاجتماعية، ومستوى القياس المطلوب عند تطبيقه هو أن يكون كلا المتغيرين مقياس فترة أو نسبي أو بمعنى اخر أن تكون بيانات كلا المتغيرين( الظاهرتين) بيانات كمية .**(33)**

يفترض بيرســـون Pearson أن المتغيرين كميان، وأن العلاقة بينهما خطية (أي تأخذ شكل خط مستقيم). كما يرى بيرسون أن أفضل مقياس للارتباط بين متغيرين قد يختلفان في وحدات القياس و / أو في مستواهما العام – حسب رأي بيرسون – هو عن طريق حساب انحرافات كل من المتغيرين عن وسطه الحسابي وقسمة هذه الانحرافات على الانحراف المعياري لكل منهما، فنحصـــل على ما يســـمى بالوحدات المعيارية لكل متغير. ويكون معامل ارتباط بيرسون هو " متوسط حاصل ضرب هذه الوحدات المعيارية ". ومعامل الارتباط يكون بدون تمييز. **(34)**

وبالرموز، إذا فرضنا أن المتغيرين هما $X$ , $Y$ وأن لدينا عدد $n$ من أزواج القيم هي :

$$(x_1 , y_1),(x_2 , y_2),...,(x_n , y_n)$$

وأن الوسط الحسابي للمتغير $X$ هو $\overline{X}$ وللمتغير $Y$ هو $\overline{Y}$ وأن الانحراف المعياري للمتغير $X$ هو $Sx$ وللمتغير $Y$ هو $Sy$ فإن معامل بيرسون للارتباط الخطي والذي يرمز له بالرمز $r$ هو :

**الصيغة التعريفية لمعامل الارتباط** **[23]**

$$r = \frac{1}{n} \sum \left( \frac{x - \overline{x}}{S_x} \right) \left( \frac{y - \overline{y}}{S_y} \right)$$

ونلاحظ من تعريف معامل بيرسون للارتباط الخطي البسيط أنه يجب أولاً حساب كل من $\overline{X}, \overline{Y}, S_x, S_y$، ثم حساب $\frac{x-\overline{x}}{S_x}$ لكل قيمة من قيم X، وحساب $\frac{y-\overline{y}}{S_y}$ لكل قيمة من قيم y ثم ضرب $\frac{x-\overline{x}}{S_x}$ في $\frac{y-\overline{y}}{S_y}$ لكل زوج من القيم وأخذ مجموع حاصل الضرب ثم القسمة على n.

إن هذه العملية كما نرى تستغرق وقتاً طويلاً ونحتاج عمليات حسابية معقدة، لذلك فإنه عادة لا تستخدم الصيغة السابقة في حساب معامل الارتباط وتستخدم بدلاً منه الصيغة المختصرة التالية والتي تعطي بطبيعة الحال النتائج نفسها : -**(35)**

$$r=\frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n\sum x^2-(\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2-(\sum y)^2}}$$

**[24]**

وكل ما نحتاجه لحساب معامل [illegible] المختصرة رقم **[24]** هو حساب : $\sum xy$ , $\sum x^2$ , $\sum y^2$ أي مجموع مربعات قيم x ومجموع مربعات قيم y ومجموع حاصل ضربهما بعد معرفة $\sum X$، $\sum Y$ ، n (حيث n هي عدد أزواج القيم)

مثال رقم (18): لمعرفة العلاقة بين الدافعية ومستوى الطموح لدى عينة عشوائية تتكون من 10 أفراد ، وتمثل القيم في العمود الأول من الجدول درجات الدافعية بينما تمثل القيم الواردة في العمود الثاني درجات أفراد العينة على مقياس مستوى الطموح.

**الحل :**

لحساب معامل بيرسون للارتباط الخطي يلزم حساب المجاميع:

$\sum x, \sum y, \sum xy, \sum x^2, \sum y^2$ لذلك يتم تنظيم حساب هذه المجاميع كما في الجدول التالي:

| **x** الدافعية | **y** الطموح | **xy** | $\mathbf{x^2}$ | $\mathbf{y^2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 35 | 490 | 196 | 1225 |
| 18 | 42 | 756 | 324 | 1764 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1444 | 256 | 608 | 38 | 16 |
| 1225 | 225 | 525 | 35 | 15 |
| 2025 | 169 | 585 | 45 | 13 |
| 1024 | 196 | 448 | 32 | 14 |
| 1369 | 225 | 555 | 37 | 15 |
| 1444 | 324 | 684 | 38 | 18 |
| 1225 | 361 | 665 | 35 | 19 |
| 2025 | 324 | 810 | 45 | 18 |
| 14770 | 2600 | 6126 | 382 | 160 |

ثم نطبق في الصيغة المختصرة رقم [24] لمعامل الارتباط حيث n = 10 :

$$r = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\ \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$= \frac{10(6126) - (160)(382)}{\sqrt{10(2600) - (160)^2}\ \sqrt{10(14770) - (382)^2}}$$

$$= \frac{61260 - 61120}{\sqrt{26000 - 25600}\ \sqrt{147700 - 145924}}$$

$$= \frac{12184}{\sqrt{400}\ \sqrt{1776}}$$

$$= \frac{140}{824.85}$$

$$r = 0.16$$

أي أن معامل بيرسـون للارتباط الخطي بين الدافعية ومسـتوى الطموح يسـاوي 0.16 وهو ارتباط طردي (لأن إشارته موجبة) وضعيف جدا لأنه أقل من 0.20.

**اختبار معنوية الارتباط Significance Of Correlation Coefficient :**

إذا كانت قيمة معامل ارتباط العينة r قريبة من + 1 أو – 1 فإن هناك علاقة خطية قوية بين المتغيرين، وإذا كانت r = 0 فإنه لا توجد علاقة خطية بينهما، أما إذا كانت قيم r متوسـطة فإنه يجب اختبار معنوية (أو دلالة) معامل ارتباط العينة، وهل هناك ارتباط حقيقي

بين المتغيرين في المجتمع، أم أن الارتباط بينهما زائف وغير حقيقي. وفيما يلي نتناول بالتفصيل اختبار معنوية معامل ارتباط المجتمع والذي نرمز له بالرمز R.

إذا كان المطلوب هو اختبار ما إذا كان هناك ارتباط بين المتغيرين أم لا أي إذا كان المطلوب هو اختبار الفرض العدمي : $R = 0$ أي أنه لا يوجد ارتباط حقيقي بين المتغيرين في المجتمع، مقابل الفرض البديل : $R \neq 0$ أي يوجد ارتباط حقيقي بين المتغيرين في المجتمع.

بافتراض أن المجتمع له توزيع طبيعي فإن معامل ارتباط العينة r يكون له توزيع t بوسط حسابي يساوي R وانحراف معياري يساوي $\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$ وذلك بدرجات حرية $n - 2$. وبالتالي تكون خطوات اختبار أن معامل ارتباط المجتمع يساوي صفر كما يلي:

**1 – الفرض العدمي** : أن معامل ارتباط المجتمع يساوي صفر، أي لا يوجد ارتباط بين المتغيرين. وبالرموز : $Ho: R = o$

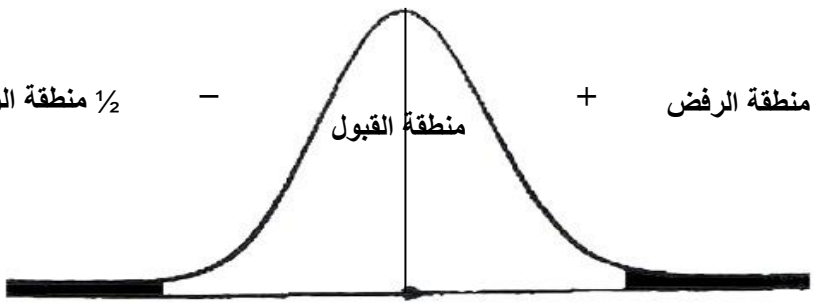
**2 – الفرض البديل** : معامل ارتباط المجتمع لا يساوي صفر، أي ويجد ارتباط بين المتغيرين، وبالرموز : $H_1: R \# 0$

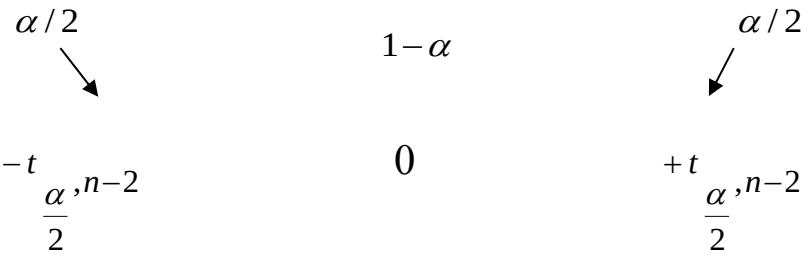
**3 – إحصائية الاختبار** : ستكون إحصائية الاختبار في هذه الحالة هي t والتي تأخذ الشكل التالي:

$$T = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

والتي لها توزيع t بدرجات حرية $n - 2$.

**4 – حدود منطقتي القبول والرفض** : والتي نحصل عليها من جدول t لمستوى معنوية يساوي $\frac{\alpha}{2}$ ودرجات حرية تساوي $n - 2$ (اختبار الطرفين) :






**– المقارنة والقرار** : حيث نقارن قيمة إحصـائية الاختبار (المحسـوبة في الخطوة رقم 3) بحدود منطقتي القبول والرفض (من الخطوة رقم 4). فإذا وقعت قيمة الإحصـائية في منطقة القبول فإن القرار هو قبول الفرض العدمي بأن R = o أي لا يوجد ارتباط بين المتغيرين والعكس إذا وقعت قيمة الإحصـــائية في منطقة الرفض فإن القرار هو رفض الفرض العدمي، وفي هذه الحالة نقبل الفرض البديل بأن هناك ارتباط بين المتغيرين وذلك بمستوى معنوية يساوي $\alpha$. **(36)**

من أجل اختبار معنوية معامل الارتباط المحســوب في المثال رقم (18) وذلك بمســتوى معنوية 0.05

**الحل :**

r = 0.16 ، n = 10

وتكون خطوات اختبار معنوية الارتباط كما يلي :

**1 – الفرض العدمي** : Ho : R = o

**2 – الفرض البديل** : H1 : R # o

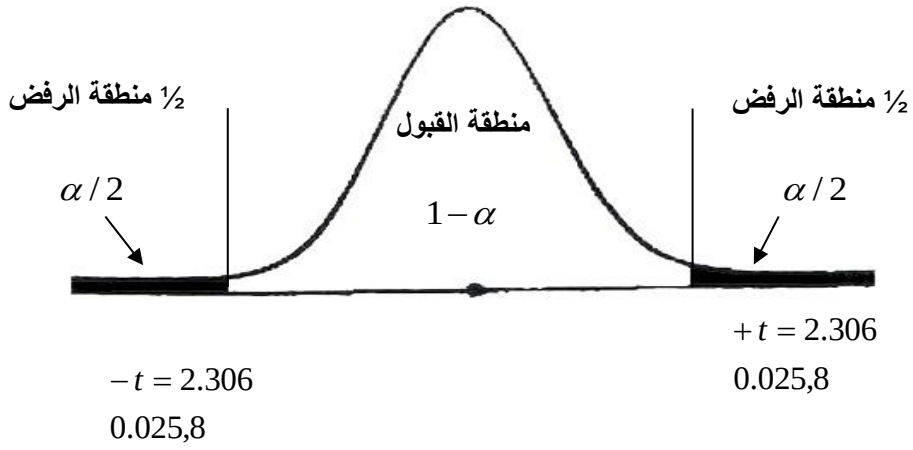
**3 – الإحصائية** :

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{0.16}{\sqrt{\frac{1-(0.16)^2}{10-2}}} = \frac{0.16}{\sqrt{\frac{0.98}{8}}} = \frac{0.16}{0.12}$$

$$t = 1.33$$

**4 – حدود منطقتي القبول والرفض** :

من جدول t حيث مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ , $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ودرجات الحرية تساوي $(n - 2 = 10 - 2 = 8)$ نجد أن قيمة t تساوي 2.306 وتكون حدود منطقتي القبول والرفض كما يلي:




5 – المقارنة والقرار : بمقارنة قيمة الإحصائية المحسوبة في الخطوة رقم 3 والتي تساوي 1.33 بحدود منطقتي القبول والرفض (أو قيم t الجدولية في الخطوة رقم 4) نجد أنها تقع في منطقة القبول (حيث أنها أقل من 2.306) لذلك فإن القرار هو : قبول الفرض العدمي أي لا توجد علاقة معنوية دالة عند مستوى 0.05.

## 2.6. اختبار ت لدلالة الفروق بين المتوسطات:

يعد اختبار "ت" من أكثر اختبارات الدلالة شيوعاً فى الأبحاث النفسية والاجتماعية والتربوية، وترجع نشأته الأولى إلى أبحاث العالم "ستودنت" ولهذا سمى الاختبار بأكثر الحروف تكراراً فى اسمه وهو حرف التاء، .ومن أهم المجالات التى يستخدم فيها هذا الاختبار الكشف عن الفروق بين تحصيل الذكور والإناث فى مادة دراسية ما وذلك عن طريق حساب دلالة فرق متوسط تحصيل الذكور عن متوسط تحصيل الإناث، ويمكن القول أن اختبار "ت" يستخدم لقياس دلالة فروق المتوسطات غير المرتبطة والمرتبطة للعينات المتساوية والغير متساوية . **(37)**
ويشترط اختبار "ت" لتطبيقه جملة من الشروط يمكن إجمالها حسب **(38)**

1. حجم كل عينة.
2. الفرق بين حجم عينتي البحث.
3. مدى تجانس العينة.

4. مدى اعتدالية التوزيع التكرارى لكل من عينتى البحث.

1. **حجم كل عينة:** بما أن اختبار "ت" من الأساليب الإحصائية البارامترية فهو يقوم على نفس الاشتراطات التي تتطلبها الأساليب الإحصائية البارامترية وهي أن يزيد حجم أفراد العينة عن 30، غير أنه يمكن استخدام اختبار " ت" إذا قل حجم العينة عن 30 مع توفر بقية شروط الاحصاء البارامتري بشرط ان يزيد عن 5.
2. **الفرق بين حجم عينتى البحث** :بما أن حجم العينة يؤثر على قيمة المتوسط الحسابي لكل مجموعة من مجموعتي المقارنة فمن المهم جدا أن لا يكون الفرق بين حجمي العينتين كبيرا جدا.
3. **مدى تجانس العينتين:** يقصد بتجانس العينات مدى انتسابها إلى أصل واحد أو أصول متعددة . فإذا انتسبت العينات إلى أصل واحد فهى متجانسة وإذا لم تنتسب العينات إلى أصل واحد فهى غير متجانسة.

يحدد تجانس العينتين من خلال حساب قيمة النسبة الفائية حيث تحسب من العلاقة :

$$F = \frac{s^2 largest}{s^2 smallest}$$

حيث أن $s^2 largest$ تعني التباين الأكبر بين المجموعتين و$s^2 smallest$ تعني التباين الأصغر هو الأصغر فى القيمة دون التحيز لأحد العينتين .

ومنه نحصل على قيمة لـــ "F" تسمى بقيمة F المحسوبة ولتحديد التجانس تتم مقارنتها بقيمة F الجدولية ونحصل عليها من جداول "F" الإحصائية عند درجة حرية التباين الأكبر ودرجة حرية التباين الأصغر ومستوى الدلالة الذى قيمته إما "0.05" أو "0.01" حيث نحسب درجات الحرية من القانون التالى :

درجة حرية التباين الأكبر البسط $df = n - 1$

حيث "ن" هى عدد أفراد العينة التى تبيانها هو الأكبر .

درجة حرية التباين الأصغر المقام $df = n - 1$

حيث "ن" هى عدد أفراد العينة التى تبيانها هو الأصغر .

تحديد التجانس

- إذا كانت قيمة "F" المحسوبة > قيمة "F" الجدولية فلا يوجد هناك تجانس .
- أما إذا كانت قيمة "F" المحسوبة < قيمة "F" الجدولية فيوجد هناك تجانس .

### 4. مدى اعتدالية التوزيع التكرارى لكل من العينتين

يكون التوزيع التكرارى معتدلاً عندما تكون قيمة الالتواء الخاص به محصـــورة بين القيمتين [ -3 ، +3 ] أى واقعة فى الفترة المغلقة -3 و +3 .

ويحسب الالتواء من القانون التالى :-

$$\text{الالتواء} = \frac{3\ (\text{متوسط} - \text{وسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

بعد التحقق من توافر الشروط اللازمة لاستخدام اختبار "ت" يمكن الإشارة إلى أنه إذا سقط أحد الشروط تســـقط بقية الشـــروط أي أنه لا يمكن اســـتخدام اختبار "ت" ويتم اللجوء حينها لاســـتخدام البديل اللابارامتري بحسب العلاقة بين المجموعتين، باستثناء الشرط الخاص بالتجانس حيث أنه في حل عدم تحقق هذا الشـــرط يتم اللجوء للحالة الرابعة الموضـــحة في الجدول أدناه وهي الحالة الخاصـــة بحســـاب قيمة "ت" لعينتين غير متجانستين، ويتضمن الجدول كل الحالات الممكنة لاختبار "ت"

| الحالات المختلفة | التعيين | القانون | DF | اتخاذ القرار |
|---|---|---|---|---|
| *متوسطين مرتبطين* *(ن1 = ن 2)* | مجموعة واحدة ونوعين من الدرجات مثل (درجات اختبار قبلي وبعدي، درجات مجموعة من الطلبة في اختبارين مختلفين) | $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sum \mathrm{Div^2 d}}{\mathrm{n(n-1)}}}}$ | $DF = \mathrm{n} - 1$ القيمة تَ الجدولية من جداول ت بدلالة الطرفين أو الطرف حسب صياغة الفرض | إذا كانت ت المحسوبة > ت المجدولة نقبل **H0** إذا كنت ت المحسوبة ≤ تَ المجدولة نرفض **Ho** ونقبل الفرض البديل |
| *متوسطين غير مرتبطين* *(ن1 = ن 2)* | مجموعتين مختلفتين مثل (ذكور وإناث ، العمال والبطالون) (ن1 = ن2) | $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s^2 1 + s^2 2}{n-1}}}$ | $DF = 2\mathrm{n} - 2$ القيمة تَ الجدولية من جداول ت بدلالة الطرفين أو الطرف حسب صياغة الفرض | إذا كانت ت المحسوبة > ت المجدولة نقبل **H0** إذا كنت ت المحسوبة ≤ تَ المجدولة نرفض **Ho** ونقبل الفرض البديل |
| *متوسطين غير مرتبطين* *(ن1 ≠ ن 2)* | مجموعتين مختلفتين مثل (ذكور وإناث ، العمال والبطالون) (ن1 ≠ ن2) | $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2(n_1-1) + s_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$ | $DF = \mathrm{n1} + \mathrm{n2} - 2$ القيمة تَ الجدولية من جداول ت بدلالة الطرفين أو الطرف حسب صياغة الفرض | إذا كانت ت المحسوبة > ت المجدولة نقبل **H0** إذا كنت ت المحسوبة ≤ تَ المجدولة نرفض **Ho** ونقبل الفرض البديل |
| *متوسطين غير متجانسين* | يمكن تمييز هذا الصنف انطلاقا من قيمة معامل **Fisher** (أي أن هناك فرقا كبيرا بين تباين المجموعتين ( | $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\mathrm{S^2 1}}{n1} + \frac{\mathrm{S^2 2}}{n2}}}$ | تَ المجدولة تحسب بإتباع الخطوات التالية:<br>1. حساب **df1 = ن1 – 1** $t1$ من جداول ت<br>2. حساب **df2 = ن2 – 1** $t2$ من جداول ت<br>3. نعوض قيمة تَ**1** وتَ**2** في المعادلة التالية:<br>$t = \frac{t1\ \frac{\mathrm{S^2 1}}{n1} + \mathrm{t2}\ \frac{\mathrm{S^2 2}}{n2}}{\sqrt{\frac{\mathrm{S^2 1}}{n1} + \frac{\mathrm{S^2 2}}{n2}}}$ | إذا كانت ت المحسوبة > ت المجدولة نقبل **H0** إذا كنت ت المحسوبة ≤ تَ المجدولة نرفض **Ho** ونقبل الفرض البديل |

## سلسلة تمارين حول اختبار ت T test

تمارين حول اختبار "ت" لدلالة الفروق بين المتوسطات

كيف يؤثر تجانس العينتين في قيمة "ت". التمرين الأول :

1. ضمن أية شروط ينبغي تطبيق اختبار "ت" لدلالة الفروق بين المتوسطات .
2. حدد ما يميز اختبار "ت" عن غيره من اختبارات دلالة الفروق .
3. ما الذي يميز اختبار "ت" عن اختبار تحليل التباين one way Anova
4. ما درجة الإخلال التي يتركها عدم تحقق إحدى شروط استخدام اختبار "ت" لدلالة الفروق بين المتوسطات .
5. ما الفرق بين دلالة الطرفين ودلالة الطرف الواحد.

**التمرين الثاني:**

1) لو أن باحثا في مجال علم النفس العمل والتنظيم أراد معرفة الأثر الذي تتركه الضوضاء على أداء عمال مصنع الكوابل في مدينة بسكرة ENICAB فقام بتصميم مجموعتين إحداهما ضابطة لم تتعرض لمثير الضوضاء والثانية تجريبية تعرضت لذلك المثير طيلة فترة الدراسة التجريبية وتحصل الباحث على النتائج التالية .

| | المجموعة الضابطة | المجموعة التجريبية |
|---|---|---|
| المتوسط | 54.5 | 50.5 |
| الوسيط | 52 | 53 |
| عدد أفراد العينة | 145 | 145 |
| الانحراف المعياري | 8.56 | 9.10 |

السؤال : أوجد دلالة الفرق بين المتوسطين بين المجموعتين الضابطة والتجريبية عند مستوى 0.05

2) ضمن دراسة تبحث في أثر العلاج المعرفي السلوكي على درجات الرُهَاب لدى عينة من المصابين بهذا الاضطراب السيكولوجي، قام الأخصائي القائم بالعمل بتطبيق مقياس الرهاب على عينة بلغ عدد أفرادها 15 لرصد درجة الخواف قبل وبعد تطبيق البرنامج العلاجي فتحصل على النتائج التالية :

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| نتائج الاختبار البعدي | 18 | 19 | 15 | 16 | 17 | 21 | 16 | 16 | 18 | 17 | 15 | 18 | 18 | 19 | 16 |
| نتائج الاختبار القبلي | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 18 | 19 | 12 | 18 | 20 | 16 | 12 | 17 | 16 |

**السـؤال** : اختبر صـحة الفرضـية التالية :0H ليسـت هناك فروق دالة بين نتاج الاختبار القبلي والبعدي

3) طبق باحث مقياس لقياس ديناميكية الجماعة التربوية ، وذلك على عينة عنقودية من أساتذة المرحلة المتوسطة من 48 ولاية جزائرية (240 أستاذا و280 أستاذة ) علما بأن المقياس يقيس جملة من الأبعاد هي (الصـــراع التنظيمي ، التعاون التنظيمي، التنافس الوظيفي ، الإنتماء التنظيمي، التماسك ) فتحصل على النتائج الموضحة في الجدول أدناه :

| | بعد الصراع | | بعد التعاون | | بعد التنافس | | بعد الانتماء | | بعد التماسك | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ذكور | إناث | ذكور | إناث | ذكور | إناث | ذكور | إناث | ذكور | إناث |
| المتوسط | 25 | 23 | 26 | 22 | 45 | 40 | 55 | 53 | 26 | 24.5 |
| المنوال | 24 | 24 | 23 | 25 | 46 | 43 | 52 | 51 | 23 | 22 |
| التباين | 25 | 24 | 26.3 | 22.5 | 15.5 | 12.25 | 24 | 22.23 | 21.5 | 20.3 |

السؤال : أوجد دلالة الفروق بين الأساتذة والأستاذات حسب متغيرات أبعاد مقياس ديناميكة الجماعة التربوية.

4) وضع باحث جملة من الفروض هذا نصها

- 0 H لا توجد فروق دالة إحصـــائيا بين متوســـطي الأطفال ذوي نقص الانتباه المصـــحوب بالنشـــاط الزائد ADHA والأطفال العاديين في درجات العدوانية لصـــالح الأطفال ذوي ADHD.
- H0 ليت هناك فروق دالة إحصائيا بين متوسطي درجات أفراد المجموعتين في بعد القلق.
- هناك فروق دالة إحصائيا لصالح الأفراد العاديين في درجاتهم على بعد الانتباه.

وقد كشفت نتائج التحليل الإحصائي القيم التالية :

| | العدوانية | | القلق | | الانتباه | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ADHD | العاديون | ADHD | العاديون | ADHD | العاديون |
| المتوسط | 140.20 | 95.64 | 90.23 | 84.65 | 85.60 | 80.63 |
| الوسيط | 139.8 | 95.12 | 90.9 | 83.75 | 84.65 | 81.22 |
| ن | 72 | 72 | 72 | 72 | 72 | 72 |
| الانحـــــراف المعياري | 6.42 | 5.58 | 3.65 | 3.84 | 4.55 | 5.25 |

5) اختبر دلالة الفرق بين متوسطي درجات القياس القبلي والبعدي لعينة تتكون من 33 تلميذا على مقياس حب الاستطلاع قبل وبعد تطبيق برنامج تنمية حب الاستطلاع من البيانات الآتية:

| القياس القبلي | القياس البعدي |
|---|---|
| م1 = 35.81 | م2 =48.30 |
| و1 = 36.20 | و2 = 49.11 |
| $S^2$ = 8.51 | $S^2$ = 6.65 |

6) اختبر دلالة الفرق بين تحصيل مجموعتين من الطلبة على مقياس القياس النفسي:

| المجموعة الأولى | المجموعة الثانية |
|---|---|
| ن1= 100 | ن2 = 120 |
| م1 = 15.62 | م2 = 14.62 |
| و1 = 36.20 | و2 = 49.11 |
| $S^2$1 = 28.43 | $S^2$2 = 6.72 |

7) بعد إجراء المداولات المتعلقة بالسـداسـي الأول من السـنة الجامعية الحالية لقسـم علم النفس تبين أن نتائج السنة الثانية ج.م.علم النفس في مقياس القياس النفسي تشير إلى التالي:

| | الفوج الأول | الفوج الثاني | الفوج الثالث | الفوج الرابع | الفوج الخامس |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد الأفراد | 25 | 28 | 26 | 24 | 22 |
| المتوسط | 14.52 | 13.25 | 9.85 | 10.25 | 13.36 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| المنوال | 14.49 | 12.85 | 9.45 | 11.2 | 13.89 |
| التباين | 7.87 | 6.56 | 5.25 | 4.35 | 5.85 |

H0= ليســت هناك فروق دالة إحصــائيا بين متوســطات درجات الأفواج على مقياس القياس النفسي.

## 3.6. تحليل التباين الأحادي: one way annova

دلت الأبحاث الإحصائية التي قام بها فيشر على أهمية التباين الاحادي كأسلوب احصائي في الميادين المختلفة لعلوم الحياة في الكشف عن مدى تجانس العينات ومدى انتسابها إلى أصل واحد او أصول متعددة وقد كان لبيرت Burt فضل تطبيق هذا الأسلوب في ميادين العلوم النفسية والتربوية، (39) ونظر لقلة المراجع التي تتناول هذا المبحث تحديدا بالطريقة الحسابية –بما أن أغلب المراجع المتوفرة تتحدث عن طرق حساب الأسلوب باستخدام الحزم الإحصائية المختلفة لذا سيجد الطالب في هذ العنصر اعتمادا على المرجع (40) وذلك من أجل فهم كيفية حساب أسلوب تحليل التباين بطريقة سهلة ومبسطة، ويستخدم تحليل التباين في كثير من الحالات لغرض المقارنة بين عدد من المجموعات لمعرفة ما إذا كان يوجد فروق معنوية بينهم أم لا حيث يعتبر تحليل التبيان من أكثر الأساليب الإحصائية لأهمية واستخداما في التطبيقات والدراسات العلمية.

من أجل ذلك يقوم الأسلوب على عدد من الافتراضات الرئيسية:

يجب أن تكون بيانات كل مجموعة متجانسة.

يجب أن يتبع المتغير المطلوب دراسته التوزيع الطبيعي.

يجب أن تكون المجموعات مستقلة عن بعضها البعض.

الفرض العدمي (الصفري) لتحليل التباين في اتجاه واحد هو:

$$(H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \mu_k)$$

الفرض البديل لتحليل التباين في اتجاه واحد هو:

($H_1$: At least two means are not equal يوجد على الأقل متوسطين مختلقين)

**خطوات إجراء تحليل التباين**

اختبار تحليل التباين يعتمد على توزيع F ، ولذلك يجب علينا الوصول إلى قيمة المختبر الاحصائي المسمى بنفس الاسم أي قسمة (f).

- ثم مقارنة هذه القيمة المحسوبة مع قيمة (f) الجدولية فإذا كانت ( f) المحسوبة أكبر من (f)الجدولية فإننا نرفض الفرض العدمي القائل بعدم وجود فروق ذات دلالة احصائية عند مستوى معنوية $\alpha$ معين ، وبالتالي نقبل الفرض البديل الذي ينص على وجود فروق معنوية بين متوسطات المجموعات.
- للوصول إلى قيمة (f) المحسوبة نحتاج إلى إجراء مجموعة من الخطوات الحسابية التي يمكن تجميعها في جدول يسمى جدول تحليل التباين ، والذي يأخذ الصورة التالية:
- يتكون جدول تحليل التباين من خمسة أعمدة وأربعة صفوف :
- العمـود الأول مخصص لمصادر التباين.
- العمود الثـاني مخصص لدرجات الحرية df.
- العمود الثـالث مخصص لمجموع المربعات.
- العمود الـرابع مخصص لمتوسط المربعات.
- العمود الخامس مخصص لقيمة (f) المحسوبة.

| مصادر التباين Sources of Variation | مصادر التباين df | مصادر التباين SS | مصادر التباين MS | F |
|---|---|---|---|---|
| تباين بين المجموعات Between | k–1 | $SS_B$ | $MS_B$ | $\frac{MS_B}{MS_E}$ |
| تباين داخل (الخطأ) Erroe | n–k | $SS_E$ | $MS_E$ | |
| التباين الكلي Total | n–1 | $SS_{Tot}$ | | |

مثال : أراد أحد الباحثين معرفة أثر طريقة التدريس على درجة التحصيل لدى مجموعة من الطلبة، فاختار لذلك 18 طالبا متقاربين في مستوى التحصيل وقسمهم إلى ثلاث مجموعات، وقدم الدروس للمجموعات الثلاث باستخدم طرق تدريس مختلفة فتحصل على النتائج الموضحة في الجدول

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الطريقةA | 16 | 17 | 11 | 15 | 18 | 19 |
| الطريقة B | 9 | 13 | 12 | 11 | 15 | 12 |
| الطريقةC | 14 | 19 | 13 | 11 | 13 | 14 |

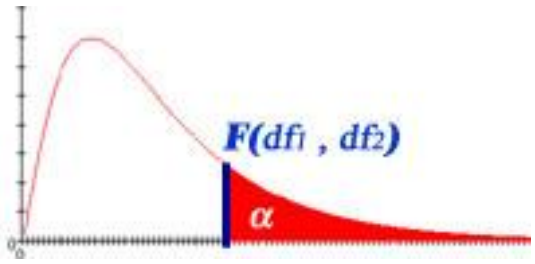
المطلوب هو اختبار ما إذا كان بين هذه المجموعات فروق ذات دلالة إحصائية أم لا عند مستوى دلالة(0.05).

صياغة الفروض : الصياغة ثابتة

$\boldsymbol{H_0}$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$\boldsymbol{H_1}$: At least two means are not equal يوجد على الأقل متوسطين مختلفين

دائما اختبار تحليل التباين من طرف واحد



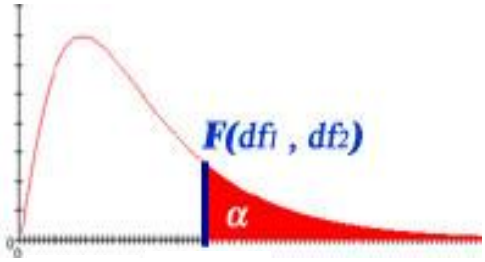

| | |
|---|---|
| **k** :( عدد المجموعات) | **n** : (عدد جميع الأفراد في جميع المجموعات) |
| $\boldsymbol{CF} = \frac{(\sum x_{ij})^2}{n}$ (معامل التصحيح) | |
| $\boldsymbol{SS_{Tot}} = (x_{i1}^2 + x_{i2}^2 \dots\dots x_{in}^2) - \boldsymbol{CF}$ | |
| $\boldsymbol{SS_B} = \sum\left(\frac{T_k^2}{n_k}\right) - \boldsymbol{CF}$ | $\boldsymbol{T_k^2}$ : تعني مربع مجموع درجات كل مجموعة لوحدها |
| $\boldsymbol{SS_E} = \boldsymbol{SS_{Tot}} - \boldsymbol{SS_B}$ | |
| إذا قسمنا الخلية $SS_B$ على $k-1$ يعطينا $MS_B$ | $\boldsymbol{MS_B} = \frac{SS_B}{k-1}$ |
| إذا قسمنا الخلية $SS_E$ على $n-k$ يعطينا $MS_E$ | $\boldsymbol{MS_E} = \frac{SS_E}{n-k}$ |

| $C^2$ | $B^2$ | $A^2$ | C الطريقة | B الطريقة | A الطريقة | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 196 | 81 | 256 | **14** | **9** | **16** | |
| 361 | 169 | 289 | **19** | **13** | **17** | |
| 169 | 144 | 121 | **13** | **12** | **11** | |
| 121 | 121 | 225 | **11** | **11** | **15** | |
| 169 | 225 | 324 | **13** | **15** | **18** | |
| 196 | 144 | 361 | **14** | **12** | **19** | |
| 1212 | 884 | 1576 | **84** | **72** | **96** | المجموع |
| 3672 | | | $(\sum x_{ij})$=252 | | | المجموع الكلي |

| | |
|---|---|
| **k** | **k=3 :(عدد المجموعات )** |
| **n** | **n=18 : (عدد جميع الأفراد في جميع المجموعات)** |
| $CF$ | $CF = \frac{(\sum x_{ij})^2}{n}$ **(معامل التصحيح)** $CF = \frac{(\sum x_{ij})^2}{n} = \frac{(252)^2}{18} = \frac{63504}{18} = 3528$ |
| $SS_{Tot}$ | $SS_{Tot} = (x_{i1}^2 + x_{i2}^2 \dots \dots . x_{in}^2) - CF = 3672 - 3528 = 144$ |
| $SS_B$ | $SS_B = \sum \left(\frac{T_k^2}{n_k}\right) - CF = \frac{96^2}{6} + \frac{72^2}{6} + \frac{96^2}{6} - 3528 = 3276 - 3528 = 48$ <br> $T_k^2$ تعني مربع مجموع درجات كل مجموعة لوحدها : |
| $SS_E$ | $SS_E = SS_{Tot} - SS_B = 144 - 48 = 96$ |
| $MS_B$ | $MS_B = \frac{SS_B}{k-1} = \frac{48}{2} = 24$ إذا قسمنا الخلية $SS_B$ على $k-1$ يعطينا $MS_B$ |
| $MS_E$ | $MS_E = \frac{SS_E}{n-k} = \frac{96}{15} = 6.4$ إذا قسمنا الخلية $SS_E$ على $n-k$ يعطينا $MS_E$ |

| مصادر التباين Sources of Variation | مصادر التباين df | مصادر التباين SS | مصادر التباين MS | F المحسوبة |
|---|---|---|---|---|
| Betweenتباين بين المجموعات | 2 | 48 | 24 | 3.75 |
| Erroeتباين داخل (الخطأ) | 15 | 95 | 6.4 | |
| Totalالتباين الكلي | 17 | 144 | | |

- **قيمة f الجدولية هي:** $f_{(df_B, df_E, \alpha)} = f_{(2,15,0.01)} = 6.35$
- **القرار:** قيمة f المحسوبة أقل من قيمة f الجدولية أي أنها تقع في منطقة القبول ، وبالتالي يكون القرار هو قبول الفرض العدمي القائل بعدم وجود فروق بين المتوسطات الثلاثة




## 1-7 مفهوم اختبار الفرضيات

تم التطرق في المحور الأول من المطبوعة إلى وسائل دراسة معالم المجتمع المجهولة وذلك من خلال إنشاء فترات ثقة لهذه المعالم واستخدامها كمعلومة مساندة لاتخاذ القرارات، حيث يتم استخدام بيانات عينة عشوائية مسحوبة من المجتمع المراد تقدير معالمه لإنشاء فترة الثقة المطلوبة عند مستوى ثقة $(1-\alpha)$ . وعليه فان النتيجة المحصلة من خلال فترات الثقة يمكن غالبا صياغتها نصيا بالشكل التالي:
باحتمال $(1-\alpha)$ نحن متأكدون بان فترة الثقة المنشأة سوف تحتوي على القيمة الحقيقية المجهولة لمعلمة المجتمع.

يلاحظ هنا أن فترة الثقة يتم إنشاؤها بالاعتماد على بيانات عينة عشوائية، ليتم استخدام تلك الفترة في عمليات لاستدلال الإحصائي حول القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع، ولكن في الواقع العملي غالبا ما يكون هنالك ادعاء مسبق حول قيمة المعلمة المجهولة، وليس بالضرورة أن يكون الادعاء مرتبط بقيمة محددة حيث يمكن أن يكون الادعاء ذا صيغة رياضية، كان ينص مثلا على أن قيمة المعلمة لا تزيد عن قيمة محددة أو أن تكون أكبر من قيمة محددة، في هذه الحالة يكون الهدف من الاستدلال الإحصائي أكثر تحديدا منه في عملية إنشاء فترة ثقة، حيث يكون منصباً حول البحث في مصداقية الادعاء المطروح وبالتالي الوصول إلى قرار بقبول أو رفض الادعاء.

يطلق على عملية التعامل مع الافتراضات والحكم على مصداقيتها بعملية اختبار الفرضيات. وتوجد علاقة بين كل من إنشاء فترة ثقة واختبار الفرضيات، حيث يمكن القول بأن اختبار الفرضيات تعطي معلومة أكثر استخداماً في اتخاذ القرارات من المعلومة المحصلة من إنشاء فترات الثقة، بيد أنه يمكن الاعتماد على فترات الثقة في بعض الحالات للوصول إلى نتائج حول صحة فرضية من عدمها.
في عمليات اختبار الفرضيات يكون هنالك ادعاء أو افتراض يراد اختباره، ويتم في البداية افتراض عدم صحة الادعاء ومن ثم استخدام بيانات الدراسة لإثبات العكس، أي إثبات صحة الادعاء، وتلك الآلية تعطي اختبار الفرضيات قوة نابعة من تلافي التحيز وعدم الدقة، حيث أن الضعف في أداء

الدراسة وجمع البيانات يصب في مصلحة عكس الادعاء ومن ثم لا يمكن قبول ادعاء إلا إذا كان هنالك مؤشر إحصائي قوي على ذلك، وتحاكي تلك السياسة في التعامل مع الفرضيات آلية التحقيق في القضايا الجنائية، حيث تقوم على قاعدة أساسية فحواها أن المتهم بريئا حتى تثبت إدانته، وعليه فإن الادعاء بأن المتهم مذنب يوضع جانبا ويتم تبني العكس، وتتمثل قوة تلك الآلية في أنه لا يمكن قبول الفرض بأن المتهم مذنب إلا في حال كان هنالك أدلة قوية تشير إلى ذلك، أما في حال كون الأدلة ضعيفة أو أن يكون المتهم بريئا فإنه لا يتم قبول الإدعاء أو بالأحرى لا يتم رفض الافتراض بأن المتهم بريء في الأصل، تحتوى تلك الآلية أيضا هدف جوهري يتمثل في تفضيل عدم رفض افتراض بان متهم بريء وهو مذنب على أن يتم رفض الافتراض بأنه بريء ومن ثم أدانته وهو بريء في الأصل.

في عملية اختبار الفرضيات تمثل العينة العشوائية والبيانات المستخلصة منها دور الأدلة المستخدمة لإثبات إدانة المتهم في القضايا الجنائية. لذا فإنه يمكن استخدام بيانات عينة عشوائية وبياناتها لإثبات صحة ادعاء من عدمه. وبالطبع يتم قبول الادعاء في حال كون الأدلة المتمثلة في العينة العشوائية وبياناتها تشير بقوة إلى صحة الادعاء، أما إذا كانت البيانات لا تدعم الادعاء بقوة أو أن يكون الادعاء غير صحيح في الأصل فإننا لا نرفض الافتراض بان الادعاء غير صحيح.

## 2-7 فرضية العدم والفرضية البديلة

- الفرض الاحصائي statistical hypothesis

هو عبارة عن إدعاء او تخمين معين حول معلمة من معالم المجتمع ويكون المطلوب اختبار صحة هذا الادعاء أو التخمين ...هناك نوعين من الفروض :

- فرض العدم (null hypothesis ) ويرمز له بالرمز $H_o$ ويصاغ في صورة عدم وجود فرق أو عدم وجود علاقة أو عدم وجود تغير – مثال : في مثال أعمار الطلاب وطالبات الجامعة فإن فرض العدم هو

$H_o$ : نفترض عدم وجود اختلاف بين متوسطي اعمار الطلاب والطالبات

- الفرض البديل (alternative hypothesis ) ويرمز له بالرمز $H_1$ وهو الفرض الذي يجب أن يكون صحيحا اذا كان فرض العدم غير صحيح – مثال : في مثال أعمار الطلاب وطالبات الجامعة فإن الفرض البديل هو

$H_1$: يوجد اختلاف حقيقي وليس ظاهري بين متوسط اعمار الطلاب والطالبات .

في عمليات الاستدلال الإحصائي يتم وضع رموز تمثل الادعاء وعكس الادعاء، فبالنسبة للفرض الذي ينص على عدم وجود ظاهرة ومن ثم عدم صحة الادعاء يتم استخدام الرمز $H_0$ ويطلق عليها فرضية العدم دلالة على عدم وجود أدلة قوية تساند الادعاء المطروح، يتم في المقابل استخدام الرمز $H_1$ للدلالة على الفرض المغاير للفرض العدمي، وبالطبع عند إجراء اختبار لفرضية باستخدام الطرق المطلوبة فان الادعاء يقع دوما في الفرضية البديلة، وبمعنى آخر يمكن القول بأن الادعاء الجيد والقابل للاختبار إحصائيا يجب أن يكون في الفرضية البديلة لا في فرضية العدم، وذلك تجنبا للتحيز وتجنبا لنتائج قد يكون سببها غياب المعلومة وضعف العينة المسحوبة لإجراء الاختبار.

تتطلب عملية اختبار الفرضيات أن يكون الادعاء المرغوب في اختباره عبارة عن جملة كاملة تحتمل الصواب والخطأ، كذلك يفترض أن يكون الادعاء متعلق بقيمة معلمة محددة كمتوسط متغير مستمر أو نسبة حدوث حدث معين، وبهدف الحصول على ادعاء جيد يتطلب الأمر أن يكون الادعاء متعلق بإحدى حالات ثلاث هي:

- أن تكون قيمة معلمة المجتمع اقل من قيمة محددة
- أن تكون قيمة معلمة المجتمع أكثر من قيمة محددة
- أن تكون قيمة معلمة المجتمع مختلفة عن قيمة محددة

وبالطبع يتم صياغة الفرضية المقابلة للادعاء بالصياغة المغايرة لجملة الادعاء لتقع في فرضية العدم، حيث لا تخرج عن إحدى ثلاث صياغات تقابل الصياغات السابقة على التوالي،

- قيمة معلمة المجتمع لا تقل من قيمة محددة
- أن تكون قيمة معلمة المجتمع لا تزيد عن قيمة محددة
- أن تكون قيمة معلمة المجتمع لا تختلف عن قيمة محددة

افترض انه يرغب في إجراء اختبارات لثلاث معالم مجهولة القيم هي $\gamma$ و $\eta$ و $\phi$، وان تلك الاختبارات مرتبطة بادعاءات مستقلة هي

الادعاء الأول: قيمة معلمة المجتمع المجهولة $\gamma$ اقل من 65

الادعاء الثاني: قيمة معلمة المجتمع المجهولة $\eta$ أكثر من 88

الادعاء الثالث: قيمة معلمة المجتمع المجهولة $\phi$ لا تساوى 0.25

حيث يمكن صياغة الادعاءات الثلاث السابقة رياضيا كالتالي:

الادعاء الأول: $\gamma < 65$

الادعاء الثاني: $\eta > 88$

الادعاء الثالث: $\phi \neq 0.25$

وبما أن الادعاءات الثلاثة السابقة لا تحتوي في مضمونها على افتراض قيم مساوية لقيمة المعلمة فانه يمكن اعتبارها ادعاءات جيدة. وعليه فان عكس تلك الادعاءات يمثل فرضيات العدم للاختبارات لها. وبحكم أسلوب اختبار الفرضيات يتم كتابة فرضية العدم أولا، ثم يليها كتابة الفرضية البديلة. وبتطبيق تلك السياسة فان فرضيات العدم والفرضية البديلة يتم كتابتها بالشكل الرياضي للادعاءات الثالث كالتالي:

الادعاء الأول:

$$H_o : \gamma \geq 65$$
$$H_1 : \gamma < 65$$

الادعاء الثاني:

$$H_o : \eta \leq 88$$
$$H_1 : \eta > 88$$

الادعاء الثالث:

$$H_o : \phi = 65$$
$$H_1 : \phi \neq 65$$

لاحظ هنا أن فرضية العدم قد احتوت دوما على إشارة التساوي (=)، وذلك في الواقع شرط جوهري يجب توفره لتصبح عملية اختبار الفرضيات ممكنة، يطلق أيضا على الفرضيات السابقة بأنها فرضيات مركبة، حيث لا تحتوي الفرضية البديلة على قيمة واحدة فقط بل تقع دوما في فترة أو مجموعات فترات. في المقابل عندما يكون الاهتمام منصباً على مقارنة قيمتين لمعلمة المجتمع تحت الاختبار فان فرضية العدم والفرضية البديلة تأخذ الشكل التالي:

$$H_o : \mu = a$$
$$H_1 : \mu = b$$

والتي تمثل فرضيات بسيطة وليست مركبه، وبالطبع يمثل الرمزان $a$ و $b$ قيم محددة مسبقاً بواسطة متخذ القرار، بيد أن عملية اختبار الفرضيات المركبة تتميز على اختبار الفرضيات البسيطة بأنها تقدم معلومة أفضل واشمل بالإضافة إلى أنها أكثر عملية في الواقع الحقيقي، لذلك فان الأسلوب المستخدم في جزئيات اختبار الفرضيات سيعتمد على فرضيات مركبة وليست بسيطة.

وكمحصلة يمكن القول بأنه لكي يتم وضع فرضية عدم وفرضية بديلة رياضيا لابد من تحقيق عدة شروط هي:

يجب في البداية تحديد المعلمة المجهولة القيمة والمطلوب إجراء الاختبار عليها، حيث يمكن أن تكون متوسط مجتمع أو الفرق بين متوسطين أو نسبة حدوث حدث في مجتمع أو الفرق بين نسبتين أو تباين مجتمع أو نسبة تباينين.

يتم تحديد القيمة المقابلة للمعلمة المجهولة والمتعلقة بالادعاء المطلوب اختباره.

يتم تحديد اتجاه العلاقة بين المعلمة والقيمة المقابلة، والتي يلزم أن تكون في إحدى ثلاث صيغ هي $>$ أو $<$ أو $\neq$، والتي ستكون الفرضية البديلة الممثلة للادعاء.

يتم في هذه الخطوة صياغة فرضية العدم، حيث تضم مكونات الفرضية البديلة مع تبديل العلاقة الرياضية بين المعلمة والقيمة المقابلة مع تغيير إشارة المتباينة لتعكس الحالة المقابلة للفرضية البديلة، وبالتالي لتمثل عكس الادعاء.

**مثال 5-2-1**

بين فيما يلي معطيات الادعاء (المعلمة، القيمة المقابلة والعلاقة الرياضية) وقم بصياغة كل من فرضية العدم والفرضية البديلة.

أ ) ادعاء مدير إدارة الصيانة في إحدى الشركات بأن الوقت المستغرق في المتوسط لصيانة أي آلة اقل من 12 ساعة.

ب ) يدعي أحد المصانع الوطنية للبطاريات الكهربائية بأن متوسط عمر البطارية المنتجة بواسطة المصنع أكثر من 1.5 سنة.

ج ) يدعي إحدى الباحثين بأن نسبة الطلاب الحاصلين على إنذارات أكاديمية في جامعة ما أقل من 0.30 من إجمالي عدد الطلاب في الجامعة.

د ) يدعي إحدى المستثمرين بأن نسبة الربح في المتوسط من الاستثمار في الأسهم السعودية لا تساوي (تختلف عن) 0.10

**الحل**

أ )

المعلمة: متوسط الوقت المستغرق لصيانة آلة ( $\mu$ )

القيمة المقابلة: 12 يوم

العلاقة الرياضية: اقل من (<)

الفرضيات:

$H_o : \mu \geq 12$

$H_1 : \mu < 12$

ب )

المعلمة: متوسط عمر البطارية ($\mu$)

القيمة المقابلة: 1.5 سنة

العلاقة الرياضية: أكثر من (>)

الفرضيات:

$H_o : \mu \leq 1.5$

$H_1 : \mu > 1.5$

جـ )

المعلمة: نسبة الطلاب الحاصلين على إنذارات ($P$)

القيمة المقابلة: 30% (0.30)

العلاقة الرياضية: أقل من (<)

الفرضيات:

$H_o : P \geq 0.3$

$H_1 : P < 0.3$

د )

المعلمة: نسبة الربح من الاستثمار في الأسهم $P$

القيمة المقابلة: 10%

العلاقة الرياضية: لا تساوي ($\neq$)

الفرضيات:

$H_o : P = 0.1$

$H_1 : P \neq 0.1$

## 7-3. أخطاء اختبار الفرضيات وأنواعها

يرتبط الاستدلال الإحصائي بالتعامل مع المجاهيل، ومن ثم لا يمكن الجزم أبدا بأن النتائج المحصلة صحيحة تماما، عندما توجد فرضية قائمة على ادعاء فان القرار النهائي يكون أما قبول الفرضية أو

رفضها، وبحكم احتواء عملية اختبار الفرضيات على فرضيتان شاملتان ومتضادتان (فرضية العدم والفرضية البديلة) لذا فإن القرار المتعلق بإحداها يمثل القرار المعاكس للفرضية الأخرى، فقبول فرضية العدم يعني رفض الفرضية البديلة، والعكس صحيح.

يوجد نوعان من الأخطاء التي يحتمل حدوثها في عملية اختبار الفرضيات، لتوضيح هذين النوعين نفترض أننا على علم بالوضع الحقيقي أو القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع الواقع عليها الاختبار، وأننا نرغب في إجراء الاختبار دون استخدام تلك المعلومة، أي على افتراض أننا نجهل قيمة المعلمة الحقيقية، في هذه الحالة نصبح أمام إحدى خيارين إما أن نفشل في رفض فرضية العدم (لكون اختبار الفرضيات قائم في الأصل على تبني فرضية العدم ومحاولة أثبات عدم صحتها) أو أن ننجح في رفضها ومن ثم إثبات صحة الادعاء الموجود في الفرضية البديلة.

**جدول القرارات الخاطئة والصائبة في عملية اختبار الفرضيات**

| نتيجة الاختبار | الوضع الحقيقي | |
|---|---|---|
| | الادعاء غير صحيح $H_o$ صحيحة | الادعاء صحيح رفض $H_o$ وإقرار $H_1$ |
| عدم رفض $H_o$ | قرار صائب | قرار خاطئ خطاء من النوع الثاني |
| رفض $H_o$ وقبول $H_1$ | قرار خاطئ خطاء من النوع الأول | قرار صائب |

عندما نفشل في رفض فرضية العدم وتكون في الأصل صحيحة فإن هذا القرار يعتبر قرار صائب وليس خاطئ، كذلك الوضع عند رفض فرضية عدم خاطئة، بينما عندما نقبل فرضية عدم خاطئة أو نرفض فرضية عدم صحيحة فإن القرار هنا يصبح خاطئ، يطلق على خطأ رفض فرضية عدم صحيحة بالخطأ من النوع الأول ويرمز لاحتمال حدوثه بالرمز $\alpha$، كما يطلق على خطأ قبول فرضية عدم خاطئة بالخطأ من النوع الثاني ويرمز لاحتمال حدوثه بالرمز $\beta$.

**جدول رموز احتمالات الأخطاء في اختبار الفرضيات**

| نتيجة الاختبار | الوضع الحقيقي | |
|---|---|---|
| | الادعاء غير صحيح $H_o$ صحيحة | الادعاء صحيح رفض $H_o$ وإقرار $H_1$ |

| | | |
|---|---|---|
| عدم رفض $H_o$ | $(1-\alpha)$ | $\beta$ |
| رفض $H_o$ وقبول $H_1$ | $\alpha$ | $(1-\beta)$ |
| المجموع | 1 | 1 |

وتبعا لسياسة اختبار الفرضيات يعتبر الخطأ من النوع الأول أكثر خطورة وضررا من الخطأ من النوع الثاني، فإدانة بريء أكثر ضرراً وخطورتهاً من تبرئة مذنب، كما أن الادعاء محل الاهتمام في عملية اختبار الفرضيات يقع دوماً في الفرضية البديلة، وبالتالي يفضل في المقام الأول تقليل احتمال قبول ادعاء خاطئ، وعليه فان قيمة احتمال الخطأ من النوع الأول $\alpha$ تصبح محدودة بسقف يضعه متخذ القرار إشارة إلى أن احتمال رفض فرضية عدم صحيحة ومن ثم قبول ادعاء خاطئ يجب أن لا يتجاوز حد معين. يطلق إحصائيا على ذلك الحد بمستوى المعنوية (Level of Significance) للاختبار.

تتحدد قيمة $\beta$ (احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني) من خلال عدة عوامل من أهمها مستوى المعنوية للاختبار ($\alpha$) وحجم العينة ($n$) والقيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع. وبتقدير احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني يتم الحصول على قوة الاختبار حيث تمثل المكمل لاحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني $(1-\beta)$. تمثل قوة الاختبار احتمال قبول الفرضية البديلة (الادعاء) عندما تكون صحيحة فعلا. وبالطبع لا يمكن حسابها إلا تحت افتراض أن القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع تحت الاختبار معلومة، كاختبار أن متوسط مجتمع يساوي قيمة مختلفة عن القيمة الموجودة في فرضية العدم والتي تمثل الفرضيات البسيطة. وبحكم أن جزئيات اختبار الفرضيات في هذا الكتاب مرتبطة فقط بالتعامل مع فرضيات مركبة، فإننا نكتفي فقط بالإشارة السابقة إلى قوة الاختبار دون الدخول في آلية حسابها.

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلي:

الخطأ من النوع الأول هو رفض فرضية عدم صحيحة ويرمز لاحتمال وقوعه بالرمز $\alpha$ ويطلق علية مصطلح مستوى المعنوية.

الخطأ من النوع الثاني هو قبول فرضية عدم خاطئة ويرمز لاحتمال وقوعه بالرمز $\beta$.

مستوى الثقة $(1-\alpha)$ هو احتمال قبول فرضية عدم صحيحة.

قوة الاختبار $(1-\beta)$ هو احتمال رفض فرضية عدم خاطئة.

## 4-7 مستوى المعنوية $\alpha$ ودرجة الثقة $(1-\alpha)$:

إن القرار الذي سوف نتخذه بناء على الاختبار الإحصائي لا يمكن اعتباره صحيح % 100 فهناك مقدار من الخطأ لأن المعلومات التي نتخذ قرارنا بناء عليها بيانات مأخوذة من عينة وليس من المجتمع الأصلي.

- في اختبار فرض معين، فإن مقدار ثقتنا في القرار المتخذ بالرفض أو القبول يسمى بدرجة الثقة ويرمز له بالرمز $(1-\alpha)$ كما وأن مقدار عدم الثقة أو مقدار الخطأ يسمى بمستوى المعنوية ويرمز له بالرمز $\alpha$

وعادة يحدد الباحث مستوى المعنوية أو درجة الثقة قبل البدء في عملية الاختبار.

عند اختبار فرض العدم $H_o$ ضد الفرض البديل $H_1$ نجد أننا امام احدى الحالات الاربع الاتية التي سبق الأشارة إليها آنفا :

| H0 خطأ | H0 صحيح | |
|---|---|---|
| خطأ من النوع الثاني | قرار سليم | قبول H0 |
| قرار سليم | خطأ من النوع الاول | رفض H0 |

1) أن يكون فرض العدم صحيحا ويكون القرار بقبوله ....وهذا قرار سليم

2) أن يكون فرض العدم صحيحا ويكون القرار برفضه ... وهذا قرار خاطئ

(الخطأ من النوع الأول : رفض $H_o$ عندما يكون $H_o$ صحيحا ويرمز لحجم هذا الخطأ بالرمز $\alpha$ )

3) أن يكون فرض العدم خطأ ويكون القرار برفضه وهذا قرار سليم

4) أن يكون فرض العدم خطأ ويكون القرار بقبوله ..وهذا قرار خاطئ ( الخطأ من النوع الثاني : قبول $H_o$ عندما يكون $H_o$ خاطئ ويرمز لحجم هذا الخطأ بالرمز$\beta$ )

- احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول يسمى مستوى المعنوية ويرمزله بالرمز $\alpha$ أي ان $\alpha$ = احتمال رفض فرض العدم $H_o$ عندما يكون صحيح = مستوى المعنوية

- احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني يرمز له بالرمز $\beta$ أي أن

$\beta$ = احتمال قبول فرض العدم $H_o$ عندما يكون خطأ

---

## 5-7 خطوات اختبار الفرض الإحصائي حول متوسط المجتمع لعينة كبيرة

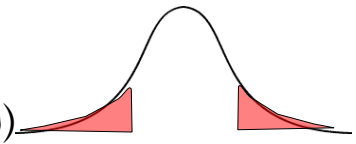
لإجراء الاختبار الإحصائي فإننا نتبع الخطوات التالية:

1-صياغة فرض العدم Ho

$$Ho : \mu = \mu 0$$

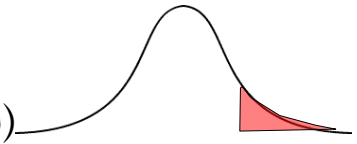
والفرض البديل هو احد الحالات التالية:

$$H1: \mu \neq \mu 0 \quad -1$$



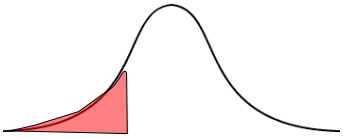
(اختبار من طرفين)

$$H1: \mu > \mu 0 \quad -2$$



(اختبار من طرف واحد ،الجهة اليمنى)

$$H1: \mu < \mu 0 \quad -3$$



(اختبار من طرف واحد ،الجهة اليسرى)

2- تحديد قيمة احصاءة الاختبار( قيمة Z المحسوبة):

حيث أن هذا الاحصاءة يتبع تقريبا توزيعا طبيعيا قياساً

$$Z_C = \frac{\overline{X} - \mu_O}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

3- تحديد القيمة الجدولية و تحدد على حسب نوع الاختبار وقيمة $\alpha$ :

| نوع الاختبار | مستوى المعنوية $\alpha$ | درجه الثقة $(1-\alpha)$ | الدرجة المعيارية |
|---|---|---|---|
| اختبار من طرفين | $5\%=0.05$ | $95\%=0.95$ | $Z_{\alpha/2}=\pm 1.96$ |
| | $1\%=0.01$ | $99\%=0.99$ | $Z_{\alpha/2}=\pm 2.58$ |

95%=0.95

| نوع الاختبار | مستوى المعنوية $\alpha$ | درجه الثقة $(1-\alpha)$ | القيمة الجدولية (القيمة الحرجة) |
|---|---|---|---|
| اختبار من طرف واحد (الجهة اليمنى) | $5\%=0.05$ | $95\%=0.95$ | $Z\alpha=1.64$ |
| | $1\%=0.01$ | $99\%=0.99$ | $Z\alpha=2.33$ |
| اختبار من طرف واحد(الجهةاليسرى) | $5\%=0.05$ | $95\%=0.95$ | $Z\alpha=-1.64$ |
| | $1\%=0.01$ | $99\%=0.99$ | $Z\alpha=-2.33$ |

4- اتخاذ القرار:

نتخذ القرار بناءاً على قيمة احصاءة الاختبار

نرفض H0 إذا وقعت قيمة احصاءة الاختبار في منطقة الرفض

لا نرفض H0 إذا وقعت قيمة احصاءة الاختبار في منطقة القبول

إذا كان الاختبار من طرفين : نقبل فرض العدم إذا تحققت المعادلة التالية : $-Z_{\alpha/2} < Z_C < Z_{\alpha/2}$

$Z_C > Z_{\alpha/2}$

نرفض فرض العدم إذا تحققت إحدى المعادلتين : $Z_C < -Z_{\alpha/2}$

إذا كان الاختبار من طرف واحد الجهة اليمنى :

نقبل فرض العدم إذا تحققت المعادلة : $Z_C < Z_\alpha$

نرفض فرض العدم إذا تحققت المعادلة : $Z_C > Z_\alpha$

إذا كان الاختبار من طرف واحد الجهة اليسرى :

نقبل فرض العدم إذا تحققت المعادلة : $Z_C > -Z_\alpha$

نرفض فرض العدم إذا تحققت المعادلة : $Z_C < -Z_\alpha$

قائمة المراجع:


01 محمد شكري الجماصي، الإحصاء، نقلا عن
https://www.jmasi.com/ehsa/index.htm

02 محمد محمد عطا (2011)، مبادئ الإحصاء، كلية المجتمع ، جامعة الملك سعود، ص4.

03 محمود محمد سليم صالح (2011) مبادئ التحليل الإحصائي ، ط1، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية ، ص 20.

04 محمود محمد سليم صالح (2011)، المرجع نفسه، ص 20.

05 محمد شكري الجماصي، مرجع سابق.

06 محمد شكري الجماصي، مرجع سابق.

08 مقاييس النزعة المركزية والتشتت، مطبوعة بيداغوجية، جامعة البحرين ص28، نقلا عن
http://staff.uob.edu.bh/files/540148784_files/achapter3.doc

09 مقدمة في الإحصاء، مطبوعة بيداغوجية، جامعة الملك سعود ص25 نقلا عن
https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/mqdm_hsyy.doc

10 مقدمة في الإحصاء، مرجع سابق ، ص23

11 مقدمة في الإحصاء، مرجع سابق، ص22

12 مقاييس النزعة المركزية والتشتت، مرجع سابق، ص35

13 مقدمة في الإحصاء، مرجع سابق، ص28.

14 مقدمة في الإحصاء، مرجع سابق، ص28.

15 مقاييس النزعة المركزية والتشتت، مرجع سابق، ص39

16 هشام هنداوي، الإحصاء المعلمي واللامعلمي، نقلا عن
http://www.husseinmardan.com/DrHisham-08.htm

17 هشام هنداوي، المرجع نفسه.

18 هشام هنداوي، المرجع نفسه .

19 فؤاد بهي السيد، قؤاد بهي السيد (1979) علم النفس الإحصائي وقياس العقل البشري، ط3، دار الفكر العربي، القاهرة مصر . ص498

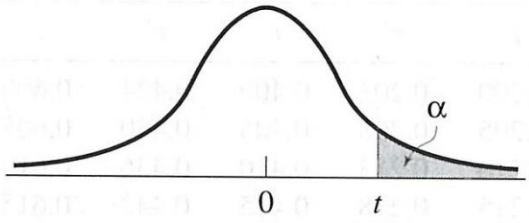
20 محمود محمد سليم صالح (2011)، مرجع سابق، ص260.

21 عبد المنعم الدردير (2006) الاحصاء البارامتري و اللابارامتري : في اختبار فروض البحوث النفسية والتربوية والاجتماعية ، ط1، عالم الكتب، القاهرة مصر.ص 130.

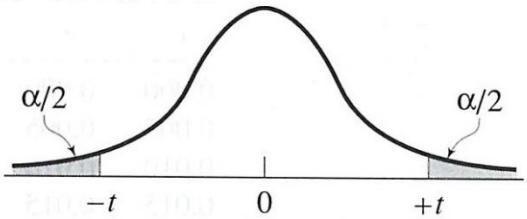
22 نافذ محمد محمد بركات، ( ب ت) كاي تربيع، مطبوعة بيداغوجية نقلا عن http://site.iugaza.edu.ps/nbarakat
23 محمود محمد سليم صالح (2011)، مرجع سابق، ص389.
24 مهدي محمد القصاص (2007) مبادئ الإحصاء والقياس الاجتماعي، منشورات كلية الآداب جامعة المنصورة، مصر .ص 300.
25 عبد المنعم الدردير (2006)، مرجع سابق، ص217.
26 عبد المنعم الدردير (2006)، مرجع سابق، ص151.
27 ظافر حسين رشيد، سجى محمد حسين (2007)، مقارنة بعض الطرق المعلمية واللامعلمية لتصميم القطاعات العشوائية للقياسات المتكررة، مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية، مج 13، ع 48، ص283
28 عبد المنعم الدردير (2006)، مرجع سابق، ص164
29 ظافر حسين رشيد، سجى محمد حسين (2007)، مرجع سابق، ص284.
30 عبد المنعم الدردير (2006)، مرجع سابق، ص205.
31 الارتباط دراسة لاقة بين متغيرين، مطبوعة بيداغوجية، جامعة الدمام، ص 186نقلا عن https://vb.ckfu.org
32 عبد المحسن المبدل (1437) محاضرات في مقرر الإحصاء النفسي، جامعة الملك سعود ، ص 25
33 عبد المحسن المبدل (1437)، المرجع نفسه ص25.
34 الارتباط دراسة لاقة بين متغيرين، المرجع نفسه، ص172.
35 الارتباط دراسة لاقة بين متغيرين، المرجع نفسه ، ص 173.
36 الارتباط دراسة لاقة بين متغيرين، المرجع نفسه ص ص 176- 179.
37 مهدي القصاص ،(2007)، مرجع سابق ص 236.
38 عبد المنعم الدردير (2006) مرجع سابق ، ص 65
39 فؤاد بهي السيد، قؤاد بهي السيد (1979)، مرجع سابق ،ص666.
40 عبد المحسن المبدل (1437)، المرجع نفسه ص ص 56-58.

# قائمة الملاحق

# Table $t$ : points de pourcentage supérieurs de la distribution $t$



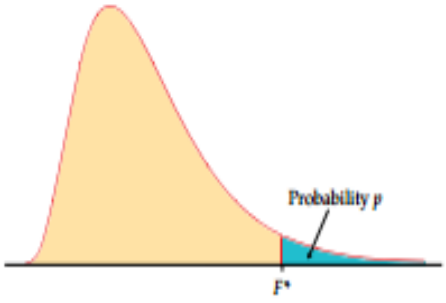

Test unilatéral




Test bilatéral

| | Seuil de signification pour le test unilatéral | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | .25 | .20 | .15 | .10 | .05 | .025 | .01 | .005 | .0005 |
| | Seuil de signification pour le test bilatéral | | | | | | | | |
| *dl* | .50 | .40 | .30 | .20 | .10 | .05 | .02 | .01 | .001 |
| 1 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.620 |
| 2 | 0.816 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.599 |
| 3 | 0.765 | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.924 |
| 4 | 0.741 | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | 0.727 | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 6.869 |
| 6 | 0.718 | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.959 |
| 7 | 0.711 | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.408 |
| 8 | 0.706 | 0.889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 5.041 |
| 9 | 0.703 | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.781 |
| 10 | 0.700 | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.587 |
| 11 | 0.697 | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | 0.695 | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | 0.694 | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | 0.692 | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | 0.691 | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | 0.690 | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | 0.689 | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | 0.688 | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | 0.688 | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | 0.687 | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 21 | 0.686 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.819 |
| 22 | 0.686 | 0.858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.792 |
| 23 | 0.685 | 0.858 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.768 |
| 24 | 0.685 | 0.857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.745 |
| 25 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 26 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.707 |
| 27 | 0.684 | 0.855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.690 |
| 28 | 0.683 | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.674 |
| 29 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.659 |
| 30 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 40 | 0.681 | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.551 |
| 50 | 0.679 | 0.849 | 1.047 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 3.496 |
| 100 | 0.677 | 0.845 | 1.042 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 | 3.390 |
| ∞ | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291 |

Table entry for $p$ is the critical value $F^*$ with probability $p$ lying to its right.




## TABLE E

*F* critical values

| Degrees of freedom in the denominator | p | Degrees of freedom in the numerator: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .100 | 39.86 | 49.50 | 53.59 | 55.83 | 57.24 | 58.20 | 58.91 | 59.44 | 59.86 |
| | .050 | 161.45 | 199.50 | 215.71 | 224.58 | 230.16 | 233.99 | 236.77 | 238.88 | 240.54 |
| | .025 | 647.79 | 799.50 | 864.16 | 899.58 | 921.85 | 937.11 | 948.22 | 956.66 | 963.28 |
| | .010 | 4052.2 | 4999.5 | 5403.4 | 5624.6 | 5763.6 | 5859.0 | 5928.4 | 5981.1 | 6022.5 |
| | .001 | 405284 | 500000 | 540379 | 562500 | 576405 | 585937 | 592873 | 598144 | 602284 |
| 2 | .100 | 8.53 | 9.00 | 9.16 | 9.24 | 9.29 | 9.33 | 9.35 | 9.37 | 9.38 |
| | .050 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 |
| | .025 | 38.51 | 39.00 | 39.17 | 39.25 | 39.30 | 39.33 | 39.36 | 39.37 | 39.39 |
| | .010 | 98.50 | 99.00 | 99.17 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.37 | 99.39 |
| | .001 | 998.50 | 999.00 | 999.17 | 999.25 | 999.30 | 999.33 | 999.36 | 999.37 | 999.39 |
| 3 | .100 | 5.54 | 5.46 | 5.39 | 5.34 | 5.31 | 5.28 | 5.27 | 5.25 | 5.24 |
| | .050 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 |
| | .025 | 17.44 | 16.04 | 15.44 | 15.10 | 14.88 | 14.73 | 14.62 | 14.54 | 14.47 |
| | .010 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.35 |
| | .001 | 167.03 | 148.50 | 141.11 | 137.10 | 134.58 | 132.85 | 131.58 | 130.62 | 129.86 |
| 4 | .100 | 4.54 | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 |
| | .050 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 |
| | .025 | 12.22 | 10.65 | 9.98 | 9.60 | 9.36 | 9.20 | 9.07 | 8.98 | 8.90 |
| | .010 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 |
| | .001 | 74.14 | 61.25 | 56.18 | 53.44 | 51.71 | 50.53 | 49.66 | 49.00 | 48.47 |
| 5 | .100 | 4.06 | 3.78 | 3.62 | 3.52 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 |
| | .050 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 |
| | .025 | 10.01 | 8.43 | 7.76 | 7.39 | 7.15 | 6.98 | 6.85 | 6.76 | 6.68 |
| | .010 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 |
| | .001 | 47.18 | 37.12 | 33.20 | 31.09 | 29.75 | 28.83 | 28.16 | 27.65 | 27.24 |
| 6 | .100 | 3.78 | 3.46 | 3.29 | 3.18 | 3.11 | 3.05 | 3.01 | 2.98 | 2.96 |
| | .050 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 |
| | .025 | 8.81 | 7.26 | 6.60 | 6.23 | 5.99 | 5.82 | 5.70 | 5.60 | 5.52 |
| | .010 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 |
| | .001 | 35.51 | 27.00 | 23.70 | 21.92 | 20.80 | 20.03 | 19.46 | 19.03 | 18.69 |
| 7 | .100 | 3.59 | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.72 |
| | .050 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 |
| | .025 | 8.07 | 6.54 | 5.89 | 5.52 | 5.29 | 5.12 | 4.99 | 4.90 | 4.82 |
| | .010 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 |
| | .001 | 29.25 | 21.69 | 18.77 | 17.20 | 16.21 | 15.52 | 15.02 | 14.63 | 14.33 |

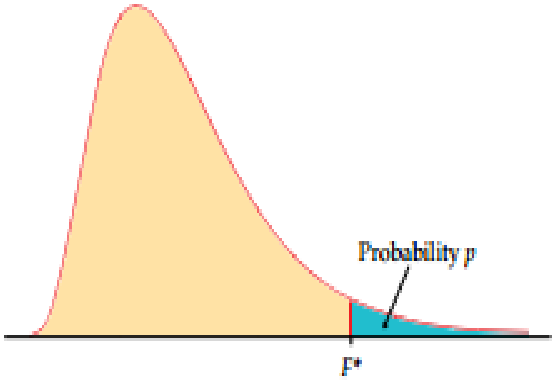



Table entry for $p$ is the critical value $F^*$ with probability $p$ lying to its right.

## TABLE E

*F* critical values (continued)

| Degrees of freedom in the numerator | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 | 120 | 1000 |
| 60.19 | 60.71 | 61.22 | 61.74 | 62.05 | 62.26 | 62.53 | 62.69 | 62.79 | 63.06 | 63.30 |
| 241.88 | 243.91 | 245.95 | 248.01 | 249.26 | 250.10 | 251.14 | 251.77 | 252.20 | 253.25 | 254.19 |
| 968.63 | 976.71 | 984.87 | 993.10 | 998.08 | 1001.4 | 1005.6 | 1008.1 | 1009.8 | 1014.0 | 1017.7 |
| 6055.8 | 6106.3 | 6157.3 | 6208.7 | 6239.8 | 6260.6 | 6286.8 | 6302.5 | 6313.0 | 6339.4 | 6362.7 |
| 605621 | 610668 | 615764 | 620908 | 624017 | 626099 | 628712 | 630285 | 631337 | 633972 | 636301 |
| 9.39 | 9.41 | 9.42 | 9.44 | 9.45 | 9.46 | 9.47 | 9.47 | 9.47 | 9.48 | 9.49 |
| 19.40 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.46 | 19.46 | 19.47 | 19.48 | 19.48 | 19.49 | 19.49 |
| 39.40 | 39.41 | 39.43 | 39.45 | 39.46 | 39.46 | 39.47 | 39.48 | 39.48 | 39.49 | 39.50 |
| 99.40 | 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.47 | 99.48 | 99.48 | 99.49 | 99.50 |
| 999.40 | 999.42 | 999.43 | 999.45 | 999.46 | 999.47 | 999.47 | 999.48 | 999.48 | 999.49 | 999.50 |
| 5.23 | 5.22 | 5.20 | 5.18 | 5.17 | 5.17 | 5.16 | 5.15 | 5.15 | 5.14 | 5.13 |
| 8.79 | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.63 | 8.62 | 8.59 | 8.58 | 8.57 | 8.55 | 8.53 |
| 14.42 | 14.34 | 14.25 | 14.17 | 14.12 | 14.08 | 14.04 | 14.01 | 13.99 | 13.95 | 13.91 |
| 27.23 | 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.58 | 26.50 | 26.41 | 26.35 | 26.32 | 26.22 | 26.14 |
| 129.25 | 128.32 | 127.37 | 126.42 | 125.84 | 125.45 | 124.96 | 124.66 | 124.47 | 123.97 | 123.53 |
| 3.92 | 3.90 | 3.87 | 3.84 | 3.83 | 3.82 | 3.80 | 3.80 | 3.79 | 3.78 | 3.76 |
| 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.77 | 5.75 | 5.72 | 5.70 | 5.69 | 5.66 | 5.63 |
| 8.84 | 8.75 | 8.66 | 8.56 | 8.50 | 8.46 | 8.41 | 8.38 | 8.36 | 8.31 | 8.26 |
| 14.55 | 14.37 | 14.20 | 14.02 | 13.91 | 13.84 | 13.75 | 13.69 | 13.65 | 13.56 | 13.47 |
| 48.05 | 47.41 | 46.76 | 46.10 | 45.70 | 45.43 | 45.09 | 44.88 | 44.75 | 44.40 | 44.09 |
| 3.30 | 3.27 | 3.24 | 3.21 | 3.19 | 3.17 | 3.16 | 3.15 | 3.14 | 3.12 | 3.11 |
| 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.52 | 4.50 | 4.46 | 4.44 | 4.43 | 4.40 | 4.37 |
| 6.62 | 6.52 | 6.43 | 6.33 | 6.27 | 6.23 | 6.18 | 6.14 | 6.12 | 6.07 | 6.02 |
| 10.05 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.45 | 9.38 | 9.29 | 9.24 | 9.20 | 9.11 | 9.03 |
| 26.92 | 26.42 | 25.91 | 25.39 | 25.08 | 24.87 | 24.60 | 24.44 | 24.33 | 24.06 | 23.82 |
| 2.94 | 2.90 | 2.87 | 2.84 | 2.81 | 2.80 | 2.78 | 2.77 | 2.76 | 2.74 | 2.72 |
| 4.06 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.83 | 3.81 | 3.77 | 3.75 | 3.74 | 3.70 | 3.67 |
| 5.46 | 5.37 | 5.27 | 5.17 | 5.11 | 5.07 | 5.01 | 4.98 | 4.96 | 4.90 | 4.86 |
| 7.87 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.30 | 7.23 | 7.14 | 7.09 | 7.06 | 6.97 | 6.89 |
| 18.41 | 17.99 | 17.56 | 17.12 | 16.85 | 16.67 | 16.44 | 16.31 | 16.21 | 15.98 | 15.77 |
| 2.70 | 2.67 | 2.63 | 2.59 | 2.57 | 2.56 | 2.54 | 2.52 | 2.51 | 2.49 | 2.47 |
| 3.64 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.40 | 3.38 | 3.34 | 3.32 | 3.30 | 3.27 | 3.23 |
| 4.76 | 4.67 | 4.57 | 4.47 | 4.40 | 4.36 | 4.31 | 4.28 | 4.25 | 4.20 | 4.15 |
| 6.62 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.06 | 5.99 | 5.91 | 5.86 | 5.82 | 5.74 | 5.66 |
| 14.08 | 13.71 | 13.32 | 12.93 | 12.69 | 12.53 | 12.33 | 12.20 | 12.12 | 11.91 | 11.72 |

**TABLE E**

*F* critical values (continued)

| Degrees of freedom in the denominator | p | Degrees of freedom in the numerator: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | .100 | 3.46 | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.56 |
| | .050 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 |
| | .025 | 7.57 | 6.06 | 5.42 | 5.05 | 4.82 | 4.65 | 4.53 | 4.43 | 4.36 |
| | .010 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 |
| | .001 | 25.41 | 18.49 | 15.83 | 14.39 | 13.48 | 12.86 | 12.40 | 12.05 | 11.77 |
| 9 | .100 | 3.36 | 3.01 | 2.81 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 |
| | .050 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 |
| | .025 | 7.21 | 5.71 | 5.08 | 4.72 | 4.48 | 4.32 | 4.20 | 4.10 | 4.03 |
| | .010 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 |
| | .001 | 22.86 | 16.39 | 13.90 | 12.56 | 11.71 | 11.13 | 10.70 | 10.37 | 10.11 |
| 10 | .100 | 3.29 | 2.92 | 2.73 | 2.61 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.38 | 2.35 |
| | .050 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 |
| | .025 | 6.94 | 5.46 | 4.83 | 4.47 | 4.24 | 4.07 | 3.95 | 3.85 | 3.78 |
| | .010 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 |
| | .001 | 21.04 | 14.91 | 12.55 | 11.28 | 10.48 | 9.93 | 9.52 | 9.20 | 8.96 |
| 11 | .100 | 3.23 | 2.86 | 2.66 | 2.54 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.27 |
| | .050 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 |
| | .025 | 6.72 | 5.26 | 4.63 | 4.28 | 4.04 | 3.88 | 3.76 | 3.66 | 3.59 |
| | .010 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 |
| | .001 | 19.69 | 13.81 | 11.56 | 10.35 | 9.58 | 9.05 | 8.66 | 8.35 | 8.12 |
| 12 | .100 | 3.18 | 2.81 | 2.61 | 2.48 | 2.39 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.21 |
| | .050 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 |
| | .025 | 6.55 | 5.10 | 4.47 | 4.12 | 3.89 | 3.73 | 3.61 | 3.51 | 3.44 |
| | .010 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 |
| | .001 | 18.64 | 12.97 | 10.80 | 9.63 | 8.89 | 8.38 | 8.00 | 7.71 | 7.48 |
| 13 | .100 | 3.14 | 2.76 | 2.56 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.23 | 2.20 | 2.16 |
| | .050 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 |
| | .025 | 6.41 | 4.97 | 4.35 | 4.00 | 3.77 | 3.60 | 3.48 | 3.39 | 3.31 |
| | .010 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 |
| | .001 | 17.82 | 12.31 | 10.21 | 9.07 | 8.35 | 7.86 | 7.49 | 7.21 | 6.98 |
| 14 | .100 | 3.10 | 2.73 | 2.52 | 2.39 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 |
| | .050 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 |
| | .025 | 6.30 | 4.86 | 4.24 | 3.89 | 3.66 | 3.50 | 3.38 | 3.29 | 3.21 |
| | .010 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 |
| | .001 | 17.14 | 11.78 | 9.73 | 8.62 | 7.92 | 7.44 | 7.08 | 6.80 | 6.58 |
| 15 | .100 | 3.07 | 2.70 | 2.49 | 2.36 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 |
| | .050 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 |
| | .025 | 6.20 | 4.77 | 4.15 | 3.80 | 3.58 | 3.41 | 3.29 | 3.20 | 3.12 |
| | .010 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 |
| | .001 | 16.59 | 11.34 | 9.34 | 8.25 | 7.57 | 7.09 | 6.74 | 6.47 | 6.26 |
| 16 | .100 | 3.05 | 2.67 | 2.46 | 2.33 | 2.24 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 |
| | .050 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 |
| | .025 | 6.12 | 4.69 | 4.08 | 3.73 | 3.50 | 3.34 | 3.22 | 3.12 | 3.05 |
| | .010 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 |
| | .001 | 16.12 | 10.97 | 9.01 | 7.94 | 7.27 | 6.80 | 6.46 | 6.19 | 5.98 |
| 17 | .100 | 3.03 | 2.64 | 2.44 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 |
| | .050 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 |
| | .025 | 6.04 | 4.62 | 4.01 | 3.66 | 3.44 | 3.28 | 3.16 | 3.06 | 2.98 |
| | .010 | 8.40 | 6.11 | 5.19 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 |
| | .001 | 15.72 | 10.66 | 8.73 | 7.68 | 7.02 | 6.56 | 6.22 | 5.96 | 5.75 |

**TABLE E**

*F* critical values (continued)

| Degrees of freedom in the numerator | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 | 120 | 1000 |
| 2.54 | 2.50 | 2.46 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.35 | 2.34 | 2.32 | 2.30 |
| 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.11 | 3.08 | 3.04 | 3.02 | 3.01 | 2.97 | 2.93 |
| 4.30 | 4.20 | 4.10 | 4.00 | 3.94 | 3.89 | 3.84 | 3.81 | 3.78 | 3.73 | 3.68 |
| 5.81 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.26 | 5.20 | 5.12 | 5.07 | 5.03 | 4.95 | 4.87 |
| 11.54 | 11.19 | 10.84 | 10.48 | 10.26 | 10.11 | 9.92 | 9.80 | 9.73 | 9.53 | 9.36 |
| 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.27 | 2.25 | 2.23 | 2.22 | 2.21 | 2.18 | 2.16 |
| 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.89 | 2.86 | 2.83 | 2.80 | 2.79 | 2.75 | 2.71 |
| 3.96 | 3.87 | 3.77 | 3.67 | 3.60 | 3.56 | 3.51 | 3.47 | 3.45 | 3.39 | 3.34 |
| 5.26 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.71 | 4.65 | 4.57 | 4.52 | 4.48 | 4.40 | 4.32 |
| 9.89 | 9.57 | 9.24 | 8.90 | 8.69 | 8.55 | 8.37 | 8.26 | 8.19 | 8.00 | 7.84 |
| 2.32 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.17 | 2.16 | 2.13 | 2.12 | 2.11 | 2.08 | 2.06 |
| 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.73 | 2.70 | 2.66 | 2.64 | 2.62 | 2.58 | 2.54 |
| 3.72 | 3.62 | 3.52 | 3.42 | 3.35 | 3.31 | 3.26 | 3.22 | 3.20 | 3.14 | 3.09 |
| 4.85 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.31 | 4.25 | 4.17 | 4.12 | 4.08 | 4.00 | 3.92 |
| 8.75 | 8.45 | 8.13 | 7.80 | 7.60 | 7.47 | 7.30 | 7.19 | 7.12 | 6.94 | 6.78 |
| 2.25 | 2.21 | 2.17 | 2.12 | 2.10 | 2.08 | 2.05 | 2.04 | 2.03 | 2.00 | 1.98 |
| 2.85 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.60 | 2.57 | 2.53 | 2.51 | 2.49 | 2.45 | 2.41 |
| 3.53 | 3.43 | 3.33 | 3.23 | 3.16 | 3.12 | 3.06 | 3.03 | 3.00 | 2.94 | 2.89 |
| 4.54 | 4.40 | 4.25 | 4.10 | 4.01 | 3.94 | 3.86 | 3.81 | 3.78 | 3.69 | 3.61 |
| 7.92 | 7.63 | 7.32 | 7.01 | 6.81 | 6.68 | 6.52 | 6.42 | 6.35 | 6.18 | 6.02 |
| 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 2.01 | 1.99 | 1.97 | 1.96 | 1.93 | 1.91 |
| 2.75 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.50 | 2.47 | 2.43 | 2.40 | 2.38 | 2.34 | 2.30 |
| 3.37 | 3.28 | 3.18 | 3.07 | 3.01 | 2.96 | 2.91 | 2.87 | 2.85 | 2.79 | 2.73 |
| 4.30 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.76 | 3.70 | 3.62 | 3.57 | 3.54 | 3.45 | 3.37 |
| 7.29 | 7.00 | 6.71 | 6.40 | 6.22 | 6.09 | 5.93 | 5.83 | 5.76 | 5.59 | 5.44 |
| 2.14 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.96 | 1.93 | 1.92 | 1.90 | 1.88 | 1.85 |
| 2.67 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.41 | 2.38 | 2.34 | 2.31 | 2.30 | 2.25 | 2.21 |
| 3.25 | 3.15 | 3.05 | 2.95 | 2.88 | 2.84 | 2.78 | 2.74 | 2.72 | 2.66 | 2.60 |
| 4.10 | 3.96 | 3.82 | 3.66 | 3.57 | 3.51 | 3.43 | 3.38 | 3.34 | 3.25 | 3.18 |
| 6.80 | 6.52 | 6.23 | 5.93 | 5.75 | 5.63 | 5.47 | 5.37 | 5.30 | 5.14 | 4.99 |
| 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.93 | 1.91 | 1.89 | 1.87 | 1.86 | 1.83 | 1.80 |
| 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.39 | 2.34 | 2.31 | 2.27 | 2.24 | 2.22 | 2.18 | 2.14 |
| 3.15 | 3.05 | 2.95 | 2.84 | 2.78 | 2.73 | 2.67 | 2.64 | 2.61 | 2.55 | 2.50 |
| 3.94 | 3.80 | 3.66 | 3.51 | 3.41 | 3.35 | 3.27 | 3.22 | 3.18 | 3.09 | 3.02 |
| 6.40 | 6.13 | 5.85 | 5.56 | 5.38 | 5.25 | 5.10 | 5.00 | 4.94 | 4.77 | 4.62 |
| 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 | 1.89 | 1.87 | 1.85 | 1.83 | 1.82 | 1.79 | 1.76 |
| 2.54 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.28 | 2.25 | 2.20 | 2.18 | 2.16 | 2.11 | 2.07 |
| 3.06 | 2.96 | 2.86 | 2.76 | 2.69 | 2.64 | 2.59 | 2.55 | 2.52 | 2.46 | 2.40 |
| 3.80 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.28 | 3.21 | 3.13 | 3.08 | 3.05 | 2.96 | 2.88 |
| 6.08 | 5.81 | 5.54 | 5.25 | 5.07 | 4.95 | 4.80 | 4.70 | 4.64 | 4.47 | 4.33 |
| 2.03 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.86 | 1.84 | 1.81 | 1.79 | 1.78 | 1.75 | 1.72 |
| 2.49 | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.11 | 2.06 | 2.02 |
| 2.99 | 2.89 | 2.79 | 2.68 | 2.61 | 2.57 | 2.51 | 2.47 | 2.45 | 2.38 | 2.32 |
| 3.69 | 3.55 | 3.41 | 3.26 | 3.16 | 3.10 | 3.02 | 2.97 | 2.93 | 2.84 | 2.76 |
| 5.81 | 5.55 | 5.27 | 4.99 | 4.82 | 4.70 | 4.54 | 4.45 | 4.39 | 4.23 | 4.08 |
| 2.00 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.83 | 1.81 | 1.78 | 1.76 | 1.75 | 1.72 | 1.69 |
| 2.45 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.18 | 2.15 | 2.10 | 2.08 | 2.06 | 2.01 | 1.97 |
| 2.92 | 2.82 | 2.72 | 2.62 | 2.55 | 2.50 | 2.44 | 2.41 | 2.38 | 2.32 | 2.26 |
| 3.59 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.07 | 3.00 | 2.92 | 2.87 | 2.83 | 2.75 | 2.66 |
| 5.58 | 5.32 | 5.05 | 4.78 | 4.60 | 4.48 | 4.33 | 4.24 | 4.18 | 4.02 | 3.87 |

**TABLE E**

*F* critical values (continued)

| Degrees of freedom in the denominator | p | Degrees of freedom in the numerator: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | .100 | 3.01 | 2.62 | 2.42 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.00 |
| | .050 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 |
| | .025 | 5.98 | 4.56 | 3.95 | 3.61 | 3.38 | 3.22 | 3.10 | 3.01 | 2.93 |
| | .010 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 |
| | .001 | 15.38 | 10.39 | 8.49 | 7.46 | 6.81 | 6.35 | 6.02 | 5.76 | 5.56 |
| 19 | .100 | 2.99 | 2.61 | 2.40 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 |
| | .050 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 |
| | .025 | 5.92 | 4.51 | 3.90 | 3.56 | 3.33 | 3.17 | 3.05 | 2.96 | 2.88 |
| | .010 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 |
| | .001 | 15.08 | 10.16 | 8.28 | 7.27 | 6.62 | 6.18 | 5.85 | 5.59 | 5.39 |
| 20 | .100 | 2.97 | 2.59 | 2.38 | 2.25 | 2.16 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.96 |
| | .050 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 |
| | .025 | 5.87 | 4.46 | 3.86 | 3.51 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.91 | 2.84 |
| | .010 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 |
| | .001 | 14.82 | 9.95 | 8.10 | 7.10 | 6.46 | 6.02 | 5.69 | 5.44 | 5.24 |
| 21 | .100 | 2.96 | 2.57 | 2.36 | 2.23 | 2.14 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.95 |
| | .050 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 |
| | .025 | 5.83 | 4.42 | 3.82 | 3.48 | 3.25 | 3.09 | 2.97 | 2.87 | 2.80 |
| | .010 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 |
| | .001 | 14.59 | 9.77 | 7.94 | 6.95 | 6.32 | 5.88 | 5.56 | 5.31 | 5.11 |
| 22 | .100 | 2.95 | 2.56 | 2.35 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 |
| | .050 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 |
| | .025 | 5.79 | 4.38 | 3.78 | 3.44 | 3.22 | 3.05 | 2.93 | 2.84 | 2.76 |
| | .010 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 |
| | .001 | 14.38 | 9.61 | 7.80 | 6.81 | 6.19 | 5.76 | 5.44 | 5.19 | 4.99 |
| 23 | .100 | 2.94 | 2.55 | 2.34 | 2.21 | 2.11 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.92 |
| | .050 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 |
| | .025 | 5.75 | 4.35 | 3.75 | 3.41 | 3.18 | 3.02 | 2.90 | 2.81 | 2.73 |
| | .010 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 |
| | .001 | 14.20 | 9.47 | 7.67 | 6.70 | 6.08 | 5.65 | 5.33 | 5.09 | 4.89 |
| 24 | .100 | 2.93 | 2.54 | 2.33 | 2.19 | 2.10 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 |
| | .050 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 |
| | .025 | 5.72 | 4.32 | 3.72 | 3.38 | 3.15 | 2.99 | 2.87 | 2.78 | 2.70 |
| | .010 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 |
| | .001 | 14.03 | 9.34 | 7.55 | 6.59 | 5.98 | 5.55 | 5.23 | 4.99 | 4.80 |
| 25 | .100 | 2.92 | 2.53 | 2.32 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.97 | 1.93 | 1.89 |
| | .050 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 |
| | .025 | 5.69 | 4.29 | 3.69 | 3.35 | 3.13 | 2.97 | 2.85 | 2.75 | 2.68 |
| | .010 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 |
| | .001 | 13.88 | 9.22 | 7.45 | 6.49 | 5.89 | 5.46 | 5.15 | 4.91 | 4.71 |
| 26 | .100 | 2.91 | 2.52 | 2.31 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 |
| | .050 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 |
| | .025 | 5.66 | 4.27 | 3.67 | 3.33 | 3.10 | 2.94 | 2.82 | 2.73 | 2.65 |
| | .010 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 |
| | .001 | 13.74 | 9.12 | 7.36 | 6.41 | 5.80 | 5.38 | 5.07 | 4.83 | 4.64 |
| 27 | .100 | 2.90 | 2.51 | 2.30 | 2.17 | 2.07 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.87 |
| | .050 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 |
| | .025 | 5.63 | 4.24 | 3.65 | 3.31 | 3.08 | 2.92 | 2.80 | 2.71 | 2.63 |
| | .010 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 |
| | .001 | 13.61 | 9.02 | 7.27 | 6.33 | 5.73 | 5.31 | 5.00 | 4.76 | 4.57 |

**TABLE E**

*F* critical values (continued)

| Degrees of freedom in the numerator | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 | 120 | 1000 |
| 1.98 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.78 | 1.75 | 1.74 | 1.72 | 1.69 | 1.66 |
| 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.14 | 2.11 | 2.06 | 2.04 | 2.02 | 1.97 | 1.92 |
| 2.87 | 2.77 | 2.67 | 2.56 | 2.49 | 2.44 | 2.38 | 2.35 | 2.32 | 2.26 | 2.20 |
| 3.51 | 3.37 | 3.23 | 3.08 | 2.98 | 2.92 | 2.84 | 2.78 | 2.75 | 2.66 | 2.58 |
| 5.39 | 5.13 | 4.87 | 4.59 | 4.42 | 4.30 | 4.15 | 4.06 | 4.00 | 3.84 | 3.69 |
| 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.78 | 1.76 | 1.73 | 1.71 | 1.70 | 1.67 | 1.64 |
| 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 2.00 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| 2.82 | 2.72 | 2.62 | 2.51 | 2.44 | 2.39 | 2.33 | 2.30 | 2.27 | 2.20 | 2.14 |
| 3.43 | 3.30 | 3.15 | 3.00 | 2.91 | 2.84 | 2.76 | 2.71 | 2.67 | 2.58 | 2.50 |
| 5.22 | 4.97 | 4.70 | 4.43 | 4.26 | 4.14 | 3.99 | 3.90 | 3.84 | 3.68 | 3.53 |
| 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.76 | 1.74 | 1.71 | 1.69 | 1.68 | 1.64 | 1.61 |
| 2.35 | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.07 | 2.04 | 1.99 | 1.97 | 1.95 | 1.90 | 1.85 |
| 2.77 | 2.68 | 2.57 | 2.46 | 2.40 | 2.35 | 2.29 | 2.25 | 2.22 | 2.16 | 2.09 |
| 3.37 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.84 | 2.78 | 2.69 | 2.64 | 2.61 | 2.52 | 2.43 |
| 5.08 | 4.82 | 4.56 | 4.29 | 4.12 | 4.00 | 3.86 | 3.77 | 3.70 | 3.54 | 3.40 |
| 1.92 | 1.87 | 1.83 | 1.78 | 1.74 | 1.72 | 1.69 | 1.67 | 1.66 | 1.62 | 1.59 |
| 2.32 | 2.25 | 2.18 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.94 | 1.92 | 1.87 | 1.82 |
| 2.73 | 2.64 | 2.53 | 2.42 | 2.36 | 2.31 | 2.25 | 2.21 | 2.18 | 2.11 | 2.05 |
| 3.31 | 3.17 | 3.03 | 2.88 | 2.79 | 2.72 | 2.64 | 2.58 | 2.55 | 2.46 | 2.37 |
| 4.95 | 4.70 | 4.44 | 4.17 | 4.00 | 3.88 | 3.74 | 3.64 | 3.58 | 3.42 | 3.28 |
| 1.90 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.65 | 1.64 | 1.60 | 1.57 |
| 2.30 | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 2.02 | 1.98 | 1.94 | 1.91 | 1.89 | 1.84 | 1.79 |
| 2.70 | 2.60 | 2.50 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.21 | 2.17 | 2.14 | 2.08 | 2.01 |
| 3.26 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.73 | 2.67 | 2.58 | 2.53 | 2.50 | 2.40 | 2.32 |
| 4.83 | 4.58 | 4.33 | 4.06 | 3.89 | 3.78 | 3.63 | 3.54 | 3.48 | 3.32 | 3.17 |
| 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.74 | 1.71 | 1.69 | 1.66 | 1.64 | 1.62 | 1.59 | 1.55 |
| 2.27 | 2.20 | 2.13 | 2.05 | 2.00 | 1.96 | 1.91 | 1.88 | 1.86 | 1.81 | 1.76 |
| 2.67 | 2.57 | 2.47 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.18 | 2.14 | 2.11 | 2.04 | 1.98 |
| 3.21 | 3.07 | 2.93 | 2.78 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.48 | 2.45 | 2.35 | 2.27 |
| 4.73 | 4.48 | 4.23 | 3.96 | 3.79 | 3.68 | 3.53 | 3.44 | 3.38 | 3.22 | 3.08 |
| 1.88 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.62 | 1.61 | 1.57 | 1.54 |
| 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.97 | 1.94 | 1.89 | 1.86 | 1.84 | 1.79 | 1.74 |
| 2.64 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.26 | 2.21 | 2.15 | 2.11 | 2.08 | 2.01 | 1.94 |
| 3.17 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.64 | 2.58 | 2.49 | 2.44 | 2.40 | 2.31 | 2.22 |
| 4.64 | 4.39 | 4.14 | 3.87 | 3.71 | 3.59 | 3.45 | 3.36 | 3.29 | 3.14 | 2.99 |
| 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.68 | 1.66 | 1.63 | 1.61 | 1.59 | 1.56 | 1.52 |
| 2.24 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.84 | 1.82 | 1.77 | 1.72 |
| 2.61 | 2.51 | 2.41 | 2.30 | 2.23 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.05 | 1.98 | 1.91 |
| 3.13 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.60 | 2.54 | 2.45 | 2.40 | 2.36 | 2.27 | 2.18 |
| 4.56 | 4.31 | 4.06 | 3.79 | 3.63 | 3.52 | 3.37 | 3.28 | 3.22 | 3.06 | 2.91 |
| 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.71 | 1.67 | 1.65 | 1.61 | 1.59 | 1.58 | 1.54 | 1.51 |
| 2.22 | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.82 | 1.80 | 1.75 | 1.70 |
| 2.59 | 2.49 | 2.39 | 2.28 | 2.21 | 2.16 | 2.09 | 2.05 | 2.03 | 1.95 | 1.89 |
| 3.09 | 2.96 | 2.81 | 2.66 | 2.57 | 2.50 | 2.42 | 2.36 | 2.33 | 2.23 | 2.14 |
| 4.48 | 4.24 | 3.99 | 3.72 | 3.56 | 3.44 | 3.30 | 3.21 | 3.15 | 2.99 | 2.84 |
| 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.70 | 1.66 | 1.64 | 1.60 | 1.58 | 1.57 | 1.53 | 1.50 |
| 2.20 | 2.13 | 2.06 | 1.97 | 1.92 | 1.88 | 1.84 | 1.81 | 1.79 | 1.73 | 1.68 |
| 2.57 | 2.47 | 2.36 | 2.25 | 2.18 | 2.13 | 2.07 | 2.03 | 2.00 | 1.93 | 1.86 |
| 3.06 | 2.93 | 2.78 | 2.63 | 2.54 | 2.47 | 2.38 | 2.33 | 2.29 | 2.20 | 2.11 |
| 4.41 | 4.17 | 3.92 | 3.66 | 3.49 | 3.38 | 3.23 | 3.14 | 3.08 | 2.92 | 2.78 |

TABLE E

*F* critical values (continued)

| Degrees of freedom in the denominator | p | Degrees of freedom in the numerator: 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | .100 | 2.89 | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 |
| | .050 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 |
| | .025 | 5.61 | 4.22 | 3.63 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.78 | 2.69 | 2.61 |
| | .010 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 |
| | .001 | 13.50 | 8.93 | 7.19 | 6.25 | 5.66 | 5.24 | 4.93 | 4.69 | 4.50 |
| 29 | .100 | 2.89 | 2.50 | 2.28 | 2.15 | 2.06 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.86 |
| | .050 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 |
| | .025 | 5.59 | 4.20 | 3.61 | 3.27 | 3.04 | 2.88 | 2.76 | 2.67 | 2.59 |
| | .010 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 |
| | .001 | 13.39 | 8.85 | 7.12 | 6.19 | 5.59 | 5.18 | 4.87 | 4.64 | 4.45 |
| 30 | .100 | 2.88 | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.85 |
| | .050 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 |
| | .025 | 5.57 | 4.18 | 3.59 | 3.25 | 3.03 | 2.87 | 2.75 | 2.65 | 2.57 |
| | .010 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 |
| | .001 | 13.29 | 8.77 | 7.05 | 6.12 | 5.53 | 5.12 | 4.82 | 4.58 | 4.39 |
| 40 | .100 | 2.84 | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 2.00 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 |
| | .050 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 |
| | .025 | 5.42 | 4.05 | 3.46 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.62 | 2.53 | 2.45 |
| | .010 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 |
| | .001 | 12.61 | 8.25 | 6.59 | 5.70 | 5.13 | 4.73 | 4.44 | 4.21 | 4.02 |
| 50 | .100 | 2.81 | 2.41 | 2.20 | 2.06 | 1.97 | 1.90 | 1.84 | 1.80 | 1.76 |
| | .050 | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 |
| | .025 | 5.34 | 3.97 | 3.39 | 3.05 | 2.83 | 2.67 | 2.55 | 2.46 | 2.38 |
| | .010 | 7.17 | 5.06 | 4.20 | 3.72 | 3.41 | 3.19 | 3.02 | 2.89 | 2.78 |
| | .001 | 12.22 | 7.96 | 6.34 | 5.46 | 4.90 | 4.51 | 4.22 | 4.00 | 3.82 |
| 60 | .100 | 2.79 | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.95 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.74 |
| | .050 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 |
| | .025 | 5.29 | 3.93 | 3.34 | 3.01 | 2.79 | 2.63 | 2.51 | 2.41 | 2.33 |
| | .010 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 |
| | .001 | 11.97 | 7.77 | 6.17 | 5.31 | 4.76 | 4.37 | 4.09 | 3.86 | 3.69 |
| 100 | .100 | 2.76 | 2.36 | 2.14 | 2.00 | 1.91 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.69 |
| | .050 | 3.94 | 3.09 | 2.70 | 2.46 | 2.31 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.97 |
| | .025 | 5.18 | 3.83 | 3.25 | 2.92 | 2.70 | 2.54 | 2.42 | 2.32 | 2.24 |
| | .010 | 6.90 | 4.82 | 3.98 | 3.51 | 3.21 | 2.99 | 2.82 | 2.69 | 2.59 |
| | .001 | 11.50 | 7.41 | 5.86 | 5.02 | 4.48 | 4.11 | 3.83 | 3.61 | 3.44 |
| 200 | .100 | 2.73 | 2.33 | 2.11 | 1.97 | 1.88 | 1.80 | 1.75 | 1.70 | 1.66 |
| | .050 | 3.89 | 3.04 | 2.65 | 2.42 | 2.26 | 2.14 | 2.06 | 1.98 | 1.93 |
| | .025 | 5.10 | 3.76 | 3.18 | 2.85 | 2.63 | 2.47 | 2.35 | 2.26 | 2.18 |
| | .010 | 6.76 | 4.71 | 3.88 | 3.41 | 3.11 | 2.89 | 2.73 | 2.60 | 2.50 |
| | .001 | 11.15 | 7.15 | 5.63 | 4.81 | 4.29 | 3.92 | 3.65 | 3.43 | 3.26 |
| 1000 | .100 | 2.71 | 2.31 | 2.09 | 1.95 | 1.85 | 1.78 | 1.72 | 1.68 | 1.64 |
| | .050 | 3.85 | 3.00 | 2.61 | 2.38 | 2.22 | 2.11 | 2.02 | 1.95 | 1.89 |
| | .025 | 5.04 | 3.70 | 3.13 | 2.80 | 2.58 | 2.42 | 2.30 | 2.20 | 2.13 |
| | .010 | 6.66 | 4.63 | 3.80 | 3.34 | 3.04 | 2.82 | 2.66 | 2.53 | 2.43 |
| | .001 | 10.89 | 6.96 | 5.46 | 4.65 | 4.14 | 3.78 | 3.51 | 3.30 | 3.13 |

TABLE E

*F* critical values (continued)

| Degrees of freedom in the numerator | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 | 120 | 1000 |
| 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.65 | 1.63 | 1.59 | 1.57 | 1.56 | 1.52 | 1.48 |
| 2.19 | 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.82 | 1.79 | 1.77 | 1.71 | 1.66 |
| 2.55 | 2.45 | 2.34 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.91 | 1.84 |
| 3.03 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.51 | 2.44 | 2.35 | 2.30 | 2.26 | 2.17 | 2.08 |
| 4.35 | 4.11 | 3.86 | 3.60 | 3.43 | 3.32 | 3.18 | 3.09 | 3.02 | 2.86 | 2.72 |
| 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.68 | 1.64 | 1.62 | 1.58 | 1.56 | 1.55 | 1.51 | 1.47 |
| 2.18 | 2.10 | 2.03 | 1.94 | 1.89 | 1.85 | 1.81 | 1.77 | 1.75 | 1.70 | 1.65 |
| 2.53 | 2.43 | 2.32 | 2.21 | 2.14 | 2.09 | 2.03 | 1.99 | 1.96 | 1.89 | 1.82 |
| 3.00 | 2.87 | 2.73 | 2.57 | 2.48 | 2.41 | 2.33 | 2.27 | 2.23 | 2.14 | 2.05 |
| 4.29 | 4.05 | 3.80 | 3.54 | 3.38 | 3.27 | 3.12 | 3.03 | 2.97 | 2.81 | 2.66 |
| 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.63 | 1.61 | 1.57 | 1.55 | 1.54 | 1.50 | 1.46 |
| 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.79 | 1.76 | 1.74 | 1.68 | 1.63 |
| 2.51 | 2.41 | 2.31 | 2.20 | 2.12 | 2.07 | 2.01 | 1.97 | 1.94 | 1.87 | 1.80 |
| 2.98 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.45 | 2.39 | 2.30 | 2.25 | 2.21 | 2.11 | 2.02 |
| 4.24 | 4.00 | 3.75 | 3.49 | 3.33 | 3.22 | 3.07 | 2.98 | 2.92 | 2.76 | 2.61 |
| 1.76 | 1.71 | 1.66 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.47 | 1.42 | 1.38 |
| 2.08 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.78 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.64 | 1.58 | 1.52 |
| 2.39 | 2.29 | 2.18 | 2.07 | 1.99 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.80 | 1.72 | 1.65 |
| 2.80 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.27 | 2.20 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.92 | 1.82 |
| 3.87 | 3.64 | 3.40 | 3.14 | 2.98 | 2.87 | 2.73 | 2.64 | 2.57 | 2.41 | 2.25 |
| 1.73 | 1.68 | 1.63 | 1.57 | 1.53 | 1.50 | 1.46 | 1.44 | 1.42 | 1.38 | 1.33 |
| 2.03 | 1.95 | 1.87 | 1.78 | 1.73 | 1.69 | 1.63 | 1.60 | 1.58 | 1.51 | 1.45 |
| 2.32 | 2.22 | 2.11 | 1.99 | 1.92 | 1.87 | 1.80 | 1.75 | 1.72 | 1.64 | 1.56 |
| 2.70 | 2.56 | 2.42 | 2.27 | 2.17 | 2.10 | 2.01 | 1.95 | 1.91 | 1.80 | 1.70 |
| 3.67 | 3.44 | 3.20 | 2.95 | 2.79 | 2.68 | 2.53 | 2.44 | 2.38 | 2.21 | 2.05 |
| 1.71 | 1.66 | 1.60 | 1.54 | 1.50 | 1.48 | 1.44 | 1.41 | 1.40 | 1.35 | 1.30 |
| 1.99 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.69 | 1.65 | 1.59 | 1.56 | 1.53 | 1.47 | 1.40 |
| 2.27 | 2.17 | 2.06 | 1.94 | 1.87 | 1.82 | 1.74 | 1.70 | 1.67 | 1.58 | 1.49 |
| 2.63 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.10 | 2.03 | 1.94 | 1.88 | 1.84 | 1.73 | 1.62 |
| 3.54 | 3.32 | 3.08 | 2.83 | 2.67 | 2.55 | 2.41 | 2.32 | 2.25 | 2.08 | 1.92 |
| 1.66 | 1.61 | 1.56 | 1.49 | 1.45 | 1.42 | 1.38 | 1.35 | 1.34 | 1.28 | 1.22 |
| 1.93 | 1.85 | 1.77 | 1.68 | 1.62 | 1.57 | 1.52 | 1.48 | 1.45 | 1.38 | 1.30 |
| 2.18 | 2.08 | 1.97 | 1.85 | 1.77 | 1.71 | 1.64 | 1.59 | 1.56 | 1.46 | 1.36 |
| 2.50 | 2.37 | 2.22 | 2.07 | 1.97 | 1.89 | 1.80 | 1.74 | 1.69 | 1.57 | 1.45 |
| 3.30 | 3.07 | 2.84 | 2.59 | 2.43 | 2.32 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.83 | 1.64 |
| 1.63 | 1.58 | 1.52 | 1.46 | 1.41 | 1.38 | 1.34 | 1.31 | 1.29 | 1.23 | 1.16 |
| 1.88 | 1.80 | 1.72 | 1.62 | 1.56 | 1.52 | 1.46 | 1.41 | 1.39 | 1.30 | 1.21 |
| 2.11 | 2.01 | 1.90 | 1.78 | 1.70 | 1.64 | 1.56 | 1.51 | 1.47 | 1.37 | 1.25 |
| 2.41 | 2.27 | 2.13 | 1.97 | 1.87 | 1.79 | 1.69 | 1.63 | 1.58 | 1.45 | 1.30 |
| 3.12 | 2.90 | 2.67 | 2.42 | 2.26 | 2.15 | 2.00 | 1.90 | 1.83 | 1.64 | 1.43 |
| 1.61 | 1.55 | 1.49 | 1.43 | 1.38 | 1.35 | 1.30 | 1.27 | 1.25 | 1.18 | 1.08 |
| 1.84 | 1.76 | 1.68 | 1.58 | 1.52 | 1.47 | 1.41 | 1.36 | 1.33 | 1.24 | 1.11 |
| 2.06 | 1.96 | 1.85 | 1.72 | 1.64 | 1.58 | 1.50 | 1.45 | 1.41 | 1.29 | 1.13 |
| 2.34 | 2.20 | 2.06 | 1.90 | 1.79 | 1.72 | 1.61 | 1.54 | 1.50 | 1.35 | 1.16 |
| 2.99 | 2.77 | 2.54 | 2.30 | 2.14 | 2.02 | 1.87 | 1.77 | 1.69 | 1.49 | 1.22 |

## Quantiles of the Mann-Whitney Test Statistic

**Table C-6 Quantiles of the Mann-Whitney Test Statistic**

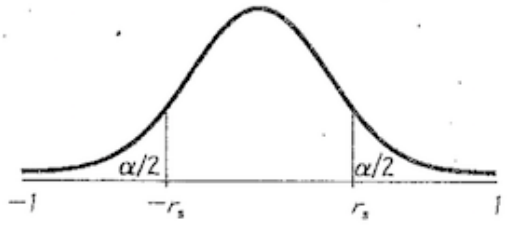
| n | p | m=2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | .001 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | _ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | .005 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| | .01 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| | .025 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | .05 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 |
| | .10 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 |
| 3 | .001 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| | .005 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | |
| | .01 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 |
| | .025 | 6 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 |
| | .05 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 14 | 14 | 15 | 16 | 16 | 17 | 18 |
| | .10 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| 4 | .001 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 |
| | .005 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 19 |
| | .01 | 10 | 10 | 10 | 11 | 12 | 12 | 13 | 14 | 14 | 15 | 16 | 16 | 17 | 18 | 18 | 19 | 20 | 20 | 21 |
| | .025 | 10 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| | .05 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| | .10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 26 | 27 | 28 | 29 | 31 | 32 | 33 |
| 5 | .001 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 19 | 20 | 21 | 21 | 22 | 23 | 23 |
| | .005 | 15 | 15 | 15 | 16 | 17 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| | .01 | 15 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| | .025 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| | .05 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 | 28 | 29 | 31 | 32 | 34 | 35 | 36 | 38 | 39 | 41 |
| | .10 | 17 | 18 | 20 | 21 | 23 | 24 | 26 | 28 | 29 | 31 | 33 | 34 | 36 | 38 | 39 | 41 | 43 | 44 | 46 |
| 6 | .001 | 21 | 21 | 21 | 21 | 21 | 21 | 23 | 24 | 25 | 26 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |
| | .005 | 21 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| | .01 | 21 | 21 | 23 | 24 | 25 | 26 | 28 | 29 | 30 | 31 | 33 | 34 | 35 | 37 | 38 | 40 | 41 | 42 | 44 |
| | .025 | 21 | 23 | 24 | 25 | 27 | 28 | 30 | 32 | 33 | 35 | 36 | 38 | 39 | 41 | 43 | 44 | 46 | 47 | 49 |
| | .05 | 22 | 24 | 25 | 27 | 29 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 48 | 50 | 52 | 54 |
| | .10 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 56 | 58 | 60 |
| 7 | .001 | 28 | 28 | 28 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 42 | 43 | 44 | 45 |
| | .005 | 28 | 28 | 29 | 30 | 32 | 33 | 35 | 36 | 38 | 39 | 41 | 42 | 44 | 45 | 47 | 48 | 50 | 51 | 53 |
| | .01 | 28 | 29 | 30 | 32 | 33 | 35 | 36 | 38 | 40 | 41 | 43 | 45 | 46 | 48 | 50 | 52 | 53 | 55 | 57 |
| | .025 | 28 | 30 | 32 | 34 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 |
| | .05 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 53 | 55 | 57 | 59 | 62 | 64 | 66 | 68 |
| | .10 | 30 | 33 | 35 | 37 | 40 | 42 | 45 | 47 | 50 | 52 | 55 | 57 | 60 | 62 | 65 | 67 | 70 | 72 | 75 |
| 8 | .001 | 36 | 36 | 36 | 37 | 38 | 39 | 41 | 42 | 43 | 45 | 46 | 48 | 49 | 51 | 52 | 54 | 55 | 57 | 58 |
| | .005 | 36 | 36 | 38 | 39 | 41 | 43 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 |
| | .01 | 36 | 37 | 39 | 41 | 43 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 59 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 |
| | .025 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 | 50 | 52 | 54 | 56 | 59 | 61 | 63 | 66 | 68 | 71 | 73 | 75 | 78 |
| | .05 | 38 | 40 | 42 | 45 | 47 | 50 | 52 | 55 | 57 | 60 | 63 | 65 | 68 | 70 | 73 | 76 | 78 | 81 | 84 |
| | .10 | 39 | 42 | 44 | 47 | 50 | 53 | 56 | 59 | 61 | 64 | 67 | 70 | 73 | 76 | 79 | 82 | 85 | 88 | 91 |
| 9 | .001 | 45 | 45 | 45 | 47 | 48 | 49 | 51 | 53 | 54 | 56 | 58 | 60 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 | 71 | 72 |
| | .005 | 45 | 46 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 73 | 75 | 77 | 79 | 82 |
| | .01 | 45 | 47 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 60 | 62 | 64 | 67 | 69 | 72 | 74 | 77 | 79 | 82 | 84 | 86 |
| | .025 | 46 | 48 | 50 | 53 | 56 | 58 | 61 | 63 | 66 | 69 | 72 | 74 | 77 | 80 | 83 | 85 | 88 | 91 | 94 |
| | .05 | 47 | 50 | 52 | 55 | 58 | 61 | 64 | 67 | 70 | 73 | 76 | 79 | 82 | 85 | 88 | 91 | 94 | 97 | 100 |
| | .10 | 48 | 51 | 55 | 58 | 61 | 64 | 68 | 71 | 74 | 77 | 81 | 84 | 87 | 91 | 94 | 98 | 101 | 104 | 108 |
| 10 | .001 | 55 | 55 | 56 | 57 | 59 | 61 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 73 | 75 | 77 | 79 | 81 | 83 | 85 | 88 |
| | .005 | 55 | 56 | 58 | 60 | 62 | 65 | 67 | 69 | 72 | 74 | 77 | 80 | 82 | 85 | 87 | 90 | 93 | 95 | 98 |
| | .01 | 55 | 57 | 59 | 62 | 64 | 67 | 69 | 72 | 75 | 78 | 80 | 83 | 86 | 89 | 92 | 94 | 97 | 100 | 103 |
| | .025 | 56 | 59 | 61 | 64 | 67 | 70 | 73 | 76 | 79 | 82 | 85 | 89 | 92 | 95 | 98 | 101 | 104 | 108 | 111 |
| | .05 | 57 | 60 | 63 | 67 | 70 | 73 | 76 | 80 | 83 | 87 | 90 | 93 | 97 | 100 | 104 | 107 | 111 | 114 | 118 |
| | .10 | 59 | 62 | 66 | 69 | 73 | 77 | 80 | 84 | 88 | 92 | 95 | 99 | 103 | 107 | 110 | 114 | 118 | 122 | 126 |

**Table C-6 (Continued) Quantiles of the Mann-Whitney Test Statistic**

| n | p | m=2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | .001 | 66 | 66 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 | 82 | 84 | 87 | 89 | 91 | 94 | 96 | 99 | 101 | 104 |
| | .005 | 66 | 67 | 69 | 72 | 74 | 77 | 80 | 83 | 85 | 88 | 91 | 94 | 97 | 100 | 103 | 106 | 109 | 112 | 115 |
| | .01 | 66 | 68 | 71 | 74 | 76 | 79 | 82 | 85 | 89 | 92 | 95 | 98 | 101 | 104 | 108 | 111 | 114 | 117 | 120 |
| | .025 | 67 | 70 | 73 | 76 | 80 | 83 | 86 | 90 | 93 | 97 | 100 | 104 | 107 | 111 | 114 | 118 | 122 | 125 | 129 |
| | .05 | 68 | 72 | 75 | 79 | 83 | 86 | 90 | 94 | 98 | 101 | 105 | 109 | 113 | 117 | 121 | 124 | 128 | 132 | 136 |
| | .10 | 70 | 74 | 78 | 82 | 86 | 90 | 94 | 98 | 103 | 107 | 111 | 115 | 119 | 124 | 128 | 132 | 136 | 140 | 145 |
| 12 | .001 | 78 | 78 | 79 | 81 | 83 | 86 | 88 | 91 | 93 | 96 | 98 | 102 | 104 | 106 | 110 | 113 | 116 | 118 | 121 |
| | .005 | 78 | 80 | 82 | 85 | 88 | 91 | 94 | 97 | 100 | 103 | 106 | 110 | 113 | 116 | 120 | 123 | 126 | 130 | 133 |
| | .01 | 78 | 81 | 84 | 87 | 90 | 93 | 96 | 100 | 103 | 107 | 110 | 114 | 117 | 121 | 125 | 128 | 132 | 135 | 139 |
| | .025 | 80 | 83 | 86 | 90 | 93 | 97 | 101 | 105 | 108 | 112 | 116 | 120 | 124 | 128 | 132 | 136 | 140 | 144 | 148 |
| | .05 | 81 | 84 | 88 | 92 | 96 | 100 | 105 | 109 | 111 | 117 | 121 | 126 | 130 | 134 | 139 | 143 | 147 | 151 | 156 |
| | .10 | 83 | 87 | 91 | 96 | 100 | 105 | 109 | 114 | 118 | 123 | 128 | 132 | 137 | 142 | 146 | 151 | 156 | 160 | 165 |
| 13 | .001 | 91 | 91 | 93 | 95 | 97 | 100 | 103 | 106 | 109 | 112 | 115 | 118 | 121 | 124 | 127 | 130 | 134 | 137 | 140 |
| | .005 | 91 | 93 | 95 | 99 | 102 | 105 | 109 | 112 | 116 | 119 | 123 | 126 | 130 | 134 | 137 | 141 | 145 | 149 | 152 |
| | .01 | 92 | 94 | 97 | 101 | 104 | 108 | 112 | 115 | 119 | 123 | 127 | 131 | 135 | 139 | 143 | 147 | 151 | 155 | 159 |
| | .025 | 93 | 96 | 100 | 104 | 108 | 112 | 116 | 120 | 125 | 129 | 133 | 137 | 142 | 146 | 151 | 155 | 159 | 164 | 168 |
| | .05 | 94 | 98 | 102 | 107 | 111 | 116 | 120 | 125 | 129 | 134 | 139 | 143 | 148 | 153 | 157 | 162 | 167 | 172 | 176 |
| | .10 | 96 | 101 | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 | 130 | 135 | 140 | 145 | 150 | 155 | 160 | 166 | 171 | 176 | 181 | 186 |
| 14 | .001 | 105 | 105 | 107 | 109 | 112 | 115 | 118 | 121 | 125 | 128 | 131 | 135 | 138 | 142 | 145 | 149 | 152 | 156 | 160 |
| | .005 | 105 | 107 | 110 | 113 | 117 | 121 | 124 | 128 | 132 | 136 | 140 | 144 | 148 | 152 | 156 | 160 | 164 | 169 | 173 |
| | .01 | 106 | 108 | 112 | 116 | 119 | 123 | 128 | 132 | 136 | 140 | 144 | 149 | 153 | 157 | 162 | 166 | 171 | 175 | 179 |
| | .025 | 107 | 111 | 115 | 119 | 123 | 128 | 132 | 137 | 142 | 146 | 151 | 156 | 161 | 165 | 170 | 175 | 180 | 184 | 189 |
| | .05 | 109 | 113 | 117 | 122 | 127 | 132 | 137 | 142 | 147 | 152 | 157 | 162 | 167 | 172 | 177 | 183 | 188 | 193 | 198 |
| | .10 | 110 | 116 | 121 | 126 | 131 | 137 | 142 | 147 | 153 | 158 | 164 | 169 | 175 | 180 | 186 | 191 | 197 | 203 | 208 |
| 15 | .001 | 120 | 120 | 122 | 125 | 128 | 133 | 135 | 138 | 142 | 145 | 149 | 153 | 157 | 161 | 164 | 168 | 172 | 176 | 180 |
| | .005 | 120 | 123 | 126 | 129 | 133 | 137 | 141 | 145 | 150 | 154 | 158 | 163 | 167 | 172 | 176 | 181 | 185 | 190 | 194 |
| | .01 | 121 | 124 | 128 | 132 | 136 | 140 | 145 | 149 | 154 | 158 | 163 | 168 | 172 | 177 | 182 | 187 | 191 | 196 | 201 |
| | .025 | 122 | 126 | 131 | 135 | 140 | 145 | 150 | 155 | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 | 185 | 191 | 196 | 201 | 206 | 211 |
| | .05 | 124 | 128 | 133 | 139 | 144 | 149 | 154 | 160 | 165 | 171 | 176 | 182 | 187 | 193 | 198 | 204 | 209 | 215 | 221 |
| | .10 | 126 | 131 | 137 | 143 | 148 | 154 | 160 | 166 | 172 | 178 | 184 | 189 | 195 | 201 | 207 | 213 | 219 | 225 | 231 |
| 16 | .001 | 136 | 136 | 139 | 142 | 145 | 148 | 152 | 156 | 160 | 164 | 168 | 172 | 176 | 180 | 185 | 189 | 193 | 197 | 202 |
| | .005 | 136 | 139 | 142 | 146 | 150 | 155 | 159 | 164 | 168 | 173 | 178 | 182 | 187 | 192 | 197 | 202 | 207 | 211 | 216 |
| | .01 | 137 | 140 | 144 | 149 | 153 | 158 | 163 | 168 | 173 | 178 | 183 | 188 | 193 | 198 | 203 | 208 | 213 | 219 | 224 |
| | .025 | 138 | 143 | 148 | 152 | 158 | 163 | 168 | 174 | 179 | 184 | 190 | 196 | 201 | 207 | 212 | 218 | 223 | 229 | 235 |
| | .05 | 140 | 145 | 151 | 156 | 162 | 167 | 173 | 179 | 185 | 191 | 197 | 202 | 208 | 214 | 220 | 226 | 232 | 238 | 244 |
| | .10 | 142 | 148 | 154 | 160 | 166 | 173 | 179 | 185 | 191 | 198 | 204 | 211 | 217 | 223 | 230 | 236 | 243 | 249 | 256 |
| 17 | .001 | 153 | 154 | 156 | 159 | 163 | 167 | 171 | 175 | 179 | 183 | 188 | 192 | 197 | 201 | 206 | 211 | 215 | 220 | 224 |
| | .005 | 153 | 156 | 160 | 164 | 169 | 173 | 178 | 183 | 188 | 193 | 198 | 203 | 208 | 214 | 219 | 224 | 229 | 235 | 240 |
| | .01 | 154 | 158 | 162 | 167 | 172 | 177 | 182 | 187 | 192 | 198 | 203 | 209 | 214 | 220 | 225 | 231 | 236 | 242 | 247 |
| | .025 | 156 | 160 | 165 | 171 | 176 | 182 | 188 | 193 | 199 | 205 | 211 | 217 | 223 | 229 | 235 | 241 | 247 | 253 | 259 |
| | .05 | 157 | 163 | 169 | 174 | 180 | 187 | 193 | 199 | 205 | 211 | 218 | 224 | 231 | 237 | 243 | 250 | 256 | 263 | 269 |
| | .10 | 160 | 166 | 172 | 179 | 185 | 192 | 199 | 206 | 212 | 219 | 226 | 233 | 239 | 246 | 253 | 260 | 267 | 274 | 281 |
| 18 | .001 | 171 | 172 | 175 | 178 | 182 | 186 | 190 | 195 | 199 | 204 | 209 | 214 | 218 | 223 | 228 | 233 | 238 | 243 | 248 |
| | .005 | 171 | 174 | 178 | 183 | 188 | 193 | 198 | 203 | 209 | 214 | 219 | 225 | 230 | 236 | 242 | 247 | 253 | 259 | 264 |
| | .01 | 172 | 176 | 181 | 186 | 191 | 196 | 202 | 208 | 213 | 219 | 225 | 231 | 237 | 242 | 248 | 254 | 260 | 266 | 272 |
| | .025 | 174 | 179 | 184 | 190 | 196 | 202 | 208 | 214 | 220 | 227 | 233 | 239 | 246 | 252 | 258 | 265 | 271 | 278 | 284 |
| | .05 | 176 | 181 | 188 | 194 | 200 | 207 | 213 | 220 | 227 | 233 | 240 | 247 | 254 | 260 | 267 | 274 | 281 | 288 | 295 |
| | .10 | 178 | 185 | 192 | 199 | 206 | 213 | 220 | 227 | 234 | 241 | 249 | 256 | 263 | 270 | 278 | 285 | 292 | 300 | 307 |
| 19 | .001 | 190 | 191 | 194 | 198 | 202 | 206 | 211 | 216 | 220 | 225 | 231 | 236 | 241 | 246 | 251 | 257 | 262 | 268 | 273 |
| | .005 | 191 | 194 | 198 | 203 | 208 | 213 | 219 | 224 | 230 | 236 | 242 | 248 | 254 | 260 | 265 | 272 | 278 | 284 | 290 |
| | .01 | 192 | 195 | 200 | 206 | 211 | 217 | 223 | 229 | 235 | 241 | 247 | 254 | 260 | 266 | 273 | 279 | 285 | 292 | 298 |
| | .025 | 193 | 198 | 204 | 210 | 216 | 223 | 229 | 236 | 243 | 249 | 256 | 263 | 269 | 276 | 283 | 290 | 297 | 304 | 310 |
| | .05 | 195 | 201 | 208 | 214 | 221 | 228 | 235 | 242 | 249 | 256 | 263 | 271 | 278 | 285 | 292 | 300 | 307 | 314 | 321 |
| | .10 | 198 | 205 | 212 | 219 | 227 | 234 | 242 | 249 | 257 | 264 | 272 | 280 | 288 | 295 | 303 | 311 | 319 | 326 | 334 |

**Table C-6 (Continued) Quantiles of the Mann-Whitney Test Statistic**

| $n$ | $p$ | $m=2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | .001 | 210 | 211 | 214 | 218 | 223 | 227 | 232 | 237 | 243 | 248 | 253 | 259 | 265 | 270 | 276 | 281 | 287 | 293 | 299 |
| | .005 | 211 | 214 | 219 | 224 | 229 | 235 | 241 | 247 | 253 | 259 | 265 | 271 | 278 | 284 | 290 | 297 | 303 | 310 | 316 |
| | .01 | 212 | 216 | 221 | 227 | 233 | 239 | 245 | 251 | 258 | 264 | 271 | 278 | 284 | 291 | 298 | 304 | 311 | 318 | 325 |
| 20 | .025 | 213 | 219 | 225 | 231 | 238 | 245 | 251 | 259 | 266 | 273 | 280 | 287 | 294 | 301 | 309 | 316 | 323 | 330 | 338 |
| | .05 | 215 | 222 | 229 | 236 | 243 | 250 | 258 | 265 | 273 | 280 | 288 | 295 | 303 | 311 | 318 | 326 | 334 | 341 | 349 |
| | .10 | 218 | 226 | 233 | 241 | 249 | 257 | 265 | 273 | 281 | 289 | 297 | 305 | 313 | 321 | 330 | 338 | 346 | 354 | 362 |




## Critical Values of Spearman's Rank Correlation Coefficient $r_s$

| $n$ | $\alpha = 0.10$ | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.02$ | $\alpha = 0.01$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | .900 | — | — | — |
| 6 | .829 | .886 | .943 | — |
| 7 | .714 | .786 | .893 | .929 |
| 8 | .643 | .738 | .833 | .881 |
| 9 | .600 | .700 | .783 | .833 |
| 10 | .564 | .648 | .745 | .794 |
| 11 | .536 | .618 | .709 | .755 |
| 12 | .503 | .587 | .678 | .727 |
| 13 | .484 | .560 | .648 | .703 |
| 14 | .464 | .538 | .626 | .679 |
| 15 | .446 | .521 | .604 | .654 |
| 16 | .429 | .503 | .582 | .635 |
| 17 | .414 | .485 | .566 | .615 |
| 18 | .401 | .472 | .550 | .600 |
| 19 | .391 | .460 | .535 | .584 |
| 20 | .380 | .447 | .520 | .570 |
| 21 | .370 | .435 | .508 | .556 |
| 22 | .361 | .425 | .496 | .544 |
| 23 | .353 | .415 | .486 | .532 |
| 24 | .344 | .406 | .476 | .521 |
| 25 | .337 | .398 | .466 | .511 |
| 26 | .331 | .390 | .457 | .501 |
| 27 | .324 | .382 | .448 | .491 |
| 28 | .317 | .375 | .440 | .483 |
| 29 | .312 | .368 | .433 | .475 |
| 30 | .306 | .362 | .425 | .467 |

*NOTES:*

1. For $n > 30$, use $r_s = \pm z/\sqrt{n-1}$ where $z$ corresponds to the level of significance. For example, if $\alpha = 0.05$, then $z = 1.96$.
2. If the absolute value of the test statistic $r_s$ exceeds the positive critical value, then reject $H_0$: $\rho_s = 0$ and conclude that there is a correlation.

| *df* =N-2 | Level of significance for a one-tailed test | | | |
|---|---|---|---|---|
| | .05 | .025 | .01 | .005 |
| | Level of significance for a two-tailed test | | | |
| | .10 | .05 | .02 | .01 |
| 1 | .988 | .997 | .9995 | .9999 |
| 2 | .900 | .950 | .980 | .990 |
| 3 | .805 | .878 | .934 | .959 |
| 4 | .729 | .811 | .882 | .917 |
| 5 | .669 | .754 | .833 | .874 |
| 6 | .622 | .707 | .789 | .834 |
| 7 | .582 | .666 | .750 | .798 |
| 8 | .549 | .632 | .716 | .765 |
| 9 | .521 | .602 | .685 | .735 |
| 10 | .497 | .576 | .658 | .708 |
| 20 | .360 | .423 | .492 | .537 |
| 30 | .296 | .349 | .409 | .449 |
| 40 | .257 | .304 | .358 | .393 |
| 50 | .231 | .273 | .322 | .354 |
| 60 | .211 | .250 | .295 | .325 |
| 70 | .195 | .232 | .274 | .302 |
| 80 | .183 | .217 | .256 | .284 |
| 90 | .173 | .205 | .242 | .267 |
| 100 | .164 | .195 | .230 | .254 |
| ∞ | .073 | .087 | .103 | .114 |

## Chi-square Distribution Table

| d.f. | .995 | .99 | .975 | .95 | .9 | .1 | .05 | .025 | .01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 |
| 2 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.21 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 |
| 3 | 0.07 | 0.11 | 0.22 | 0.35 | 0.58 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 |
| 4 | 0.21 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 1.06 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 |
| 5 | 0.41 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 1.61 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 |
| 6 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 |
| 7 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 |
| 24 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 |
| 32 | 15.13 | 16.36 | 18.29 | 20.07 | 22.27 | 42.58 | 46.19 | 49.48 | 53.49 |
| 34 | 16.50 | 17.79 | 19.81 | 21.66 | 23.95 | 44.90 | 48.60 | 51.97 | 56.06 |
| 38 | 19.29 | 20.69 | 22.88 | 24.88 | 27.34 | 49.51 | 53.38 | 56.90 | 61.16 |
| 42 | 22.14 | 23.65 | 26.00 | 28.14 | 30.77 | 54.09 | 58.12 | 61.78 | 66.21 |
| 46 | 25.04 | 26.66 | 29.16 | 31.44 | 34.22 | 58.64 | 62.83 | 66.62 | 71.20 |
| 50 | 27.99 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 37.69 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.15 |
| 55 | 31.73 | 33.57 | 36.40 | 38.96 | 42.06 | 68.80 | 73.31 | 77.38 | 82.29 |
| 60 | 35.53 | 37.48 | 40.48 | 43.19 | 46.46 | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 88.38 |
| 65 | 39.38 | 41.44 | 44.60 | 47.45 | 50.88 | 79.97 | 84.82 | 89.18 | 94.42 |
| 70 | 43.28 | 45.44 | 48.76 | 51.74 | 55.33 | 85.53 | 90.53 | 95.02 | 100.43 |
| 75 | 47.21 | 49.48 | 52.94 | 56.05 | 59.79 | 91.06 | 96.22 | 100.84 | 106.39 |
| 80 | 51.17 | 53.54 | 57.15 | 60.39 | 64.28 | 96.58 | 101.88 | 106.63 | 112.33 |
| 85 | 55.17 | 57.63 | 61.39 | 64.75 | 68.78 | 102.08 | 107.52 | 112.39 | 118.24 |
| 90 | 59.20 | 61.75 | 65.65 | 69.13 | 73.29 | 107.57 | 113.15 | 118.14 | 124.12 |
| 95 | 63.25 | 65.90 | 69.92 | 73.52 | 77.82 | 113.04 | 118.75 | 123.86 | 129.97 |
| 100 | 67.33 | 70.06 | 74.22 | 77.93 | 82.36 | 118.50 | 124.34 | 129.56 | 135.81 |