

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ E C H A H I D HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

# MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

## Thème

**L'approximation par éléments finis d'une  
inéquation variationnelle elliptique**

Présenté par: Amira Laouini

Maroua Sahraoui

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président

Rapporteur

Examineur

Beggas Mohammed

MCA/Prof.

M.C.A

MCA/MC

Univ. El Oued

Univ. El Oued

Univ. El Oued

Année universitaire 2021 – 2022

# Dédication

*Je dédie ce travail à :*

*Mes parents*

*Mon mari*

*-A mes frères*

*et mes sœurs, et toute la famille*

*- A mes chers amies*

*- Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion.*

*-Et a tous mes professeurs*

# Remerciements

Avant tout, nous remercions **DIEU** le tout puissant de nous avoir donné la volonté d'accomplir et d'achever ce mémoire.

Tout d'abord, nous tenons à remercier le **Dr. Beggas Mohammed** , pour la disponibilité, la confiance, les conseils, l'encadrement tout au long la période de recherche.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de juger notre travail.

Nos remerciements s'adressent s'adressent au **doctorante Ahmima Afaf** pour son aide pratique et son soutien moral et ses encouragements.

D'ailleurs, nous remercions chaleureusement tous les membres de nos familles surtout nos parents pour leur effort et leur fatigue.

Nos remerciements s'adressent également à tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Nos profonds remerciements à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



# Notations générales

$\mathbb{R}$	corps des réels.
$\mathbb{R}^+$	l'ensemble des réels positif.
$\Omega$	est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière polygonale notée $\partial\Omega$ .
$\Psi$	fonction de l'obstacle.
$\sigma_{ij}$	les fonction chapeau.
$H^m(\Omega) = w^{m,2}(\Omega)$ ( $p = 2$ )	
$w^{m,p}$	espace de sobolev.
$w(x)$	les fonction de base.
$p_k$	opérateur de projection.
$V_h$	l'espace d'approximation interne.
$\varphi$	est une fonction de base.
$r_h$	opérateur de restriction.
$\pi_h$	opérateur d'interpolation.
$W^{1,p}(\Omega)$	espase de sobolev.
$\mathfrak{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions indefiniment differentiables à support compact.
$L^2(\Omega)$	l'espace des fonctions carré integrable pour la mesure de Lebiegue .
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions indefiniment integrable pour la mesure de Lebiegue $dx$ .
$H^1(\Omega)$	l'espaces de sobolev d'ordre1.
$H^2(\Omega)$	l'espaces de sobolev d'ordre2.
$H_0^1(\Omega)$	l'adherence de $\mathfrak{D}(\Omega_\varphi)$ dans $H^1(\Omega_\varphi)$ .
$\overline{B}(0, R)$	la boule fermé de centre $o$ et de rayon $R$ .
$\Delta$	l'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Définition de quelques espaces . . . . .	3
1.1.1 Espace de Hilbert . . . . .	3
1.1.2 Espaces $L^p$ . . . . .	4
1.1.3 Espaces Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	5
1.1.4 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	6
1.2 Théorème de point fixe . . . . .	6
1.3 Fonctions convexes . . . . .	7
1.4 Opérateur de projection dans un espace de Hilbert . . . . .	7
<b>2 Prèsentation de la méthode des élèments finis</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction . . . . .	9
2.2 Mise en oeuvre de la méthode en dimension 1 . . . . .	10
2.2.1 Résolution du problème continu . . . . .	10
2.2.2 Problème discret . . . . .	11
2.3 méthode des éléments finis en dimension 2 . . . . .	15
2.3.1 Généralités . . . . .	15
2.4 Approximation par des éléments finis triangulaires $P_1$ . . . . .	16
2.4.1 Espace discret . . . . .	17
2.4.2 Calcul de $u_h$ . . . . .	18

<b>3</b>	<b>Etude mathématique d'une Inéquation Variationnelles Elliptiques</b>	<b>20</b>
3.1	Généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques . . . . .	20
3.1.1	Introduction . . . . .	20
3.1.2	Définition des Inéquations Variationnelles elliptiques . . . . .	21
3.2	Le problème continu : . . . . .	21
3.2.1	Notation et hypothèses . . . . .	21
3.2.2	Problème d'inéquation variationnelle continue : . . . . .	22
3.2.3	Interprétation du problème à frontière libre . . . . .	27
3.2.4	Caractrisation de la solution continue . . . . .	28
3.2.5	Propriétés de monotonie de la solution continue . . . . .	29
<b>4</b>	<b>L'approximation en norme <math>L^\infty</math></b>	<b>32</b>
4.1	Le problème discret . . . . .	32
4.1.1	Elément finis triangulaires de degré 1, ( $P_1$ ) . . . . .	33
4.1.2	L'hypothèse du principe du maximum discret (pmd) . . . . .	34
4.1.3	Le problème discret . . . . .	34
4.1.4	Caractrisation de la solution discrete Comme enveloppe des sous- solutions discrètes : . . . . .	35
4.1.5	Propriétés de monotonie de la solution discrète . . . . .	35
4.2	L'approximation en norme $L^\infty$ . . . . .	36

# Introduction générale

Dans les cinquantes dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil pertinent dans l'étude des problèmes non linéaires en physique et en mécanique. La théorie des inéquations variationnelles a été faite à partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par A. Signorini [18] et G. Fichera [8]. La théorie mathématique a été obtenue par G. Stampacchia [19], J.L. Lions et G. Stampacchia [12] et puis développé par H. Brézis [4], G. Stampacchia [20], J.L. Lions [13], U. Mosco [15], D. Kinderlehrer et G. Stampacchia [11]. Pour l'approximation des inéquations variationnelles on rappelle, les contributions de U. Mosco [14], R. Glowinsky [10], J.L. Lions et R. Trémolières ou R. Glowinsky [9].

La théorie des inéquations variationnelles a été utilisée dans plusieurs domaines tels que la mécanique, la physique, l'optimisation, le contrôle optimal, la programmation linéaire, les mathématiques financières, etc... ; Aujourd'hui elle est considérée comme un outil indispensable dans plusieurs secteurs de mathématiques appliquées.

Depuis longtemps les chercheurs dans leurs étude des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles, des équations variationnelles en générale et en particulier des inéquations variationnelles, se sont intéressés aux différentes techniques d'approximations, à savoir les méthodes des différences finies, des éléments finis, des volumes finis et méthodes spectrales.

Ce travail est divisé en quatre chapitres. Le chapitre I est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales d'analyse et certaines définitions des espaces de Sobolev, qui seront très utiles pour le développement ultérieur de notre travail.

Nous faisons également un rappel de certains théorèmes et des résultats importants, que nous utiliserons dans les chapitres 2, 3, et 4.

Le chapitre II est consacré à présenter la méthode des éléments finis. La méthode des éléments finis est reconnue comme l'une des principales méthodes d'approximation des problèmes aux limites elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Cette méthode peut traiter des problèmes linéaires ou non linéaires, dans des géométries quelconques définies en dimension 1, 2 ou en dimension supérieure.

Tandis-que au troisième chapitre, nous avons établi une étude mathématique sur les inéquations variationnelles elliptique du premier espèce, dans la deuxième et troisième section de ce chapitre un théorème d'existence et d'unicité de la solution dû à Stampacchia a été démontré.

En étudiant quelques propriétés de la solution du problème continue.

Au chapitre III, L'introduction du problème discret et effectuer une étude similaire à celle entreprise précédemment pour le problème continue . pour insister sur la symétrie de l'étude, nous avons suivi exactement la même démarche qu'au chapitre précédente.

Avant de passer à ces démarches, nous avons donné quelques résultats concernant la discrétisation en éléments finis.

Les sous-sections six, sept et huit sont consacrées à l'approximation par éléments finis du problème où nous avons démontré un théorème de convergence et nous avons établi une estimation d'erreur de la solution, basée sur les estimations standards de Cortey-Dumont [1], en précisant l'ordre de l'erreur de convergence.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales d'analyse et certaines définitions des espaces de Sobolev qui seront très utiles pour le développement ultérieur de notre travail. Nous faisons également un rappel de certains théorèmes et des résultats importants que nous utiliserons dans les chapitres 2, 3 et 4.

### 1.1 Définition de quelques espaces

#### 1.1.1 Espace de Hilbert

Dans un espace vectoriel  $X$ , un produit scalaire est une forme bilinéaire  $\omega$  symétrique est définie positive, c'est à dire une application de  $X \times X$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant :

1. Symétrie :

$$\omega(x, y) = \omega(y, x),$$

2. Bilinéarité :  $\omega$  est linéaire continue par rapport à son premier argument (et donc par rapport à son deuxième argument par symétrie).

3. Définie positive :

$$\omega(x, x) \geq 0, \text{ et } \omega(x, x) = 0 \implies x = 0.$$

Un espace euclidien est un espace vectoriel normé dans lequel la norme est définie à partir d'un produit scalaire, c'est-à-dire que

$$\|x\| =^{def} \sqrt{\omega(x, x)}.$$

**Définition 1.1.1.** *Un espace de Hilbert un espace complet par rapport à la norm induite par produit scalaire ; en d'autre terme, un espace de Hilbert est un espase de banach dans la norme est introduite par un produit scalaire.*

**Définition 1.1.2.** *Une forme bilinière  $x, y \mapsto \omega(x, y)$  continue sur  $X \times X$  c'est-à-dire une forme bilinière pour laquelle il existe une constante  $M$  telle que :*

$$\forall (x, y) \in X \times X \quad \omega(x, y) \leq M\|x\|\|y\|. \quad (1.1)$$

**Définition 1.1.3.** *La forme bilinière  $\omega(., .)$  est dite  $V$ -elliptique s'il existe une constante  $\alpha \geq 0$  telle que :*

$$\forall x \in X \quad \omega(x, x) \geq \alpha\|x\|. \quad (1.2)$$

### 1.1.2 Espaces $L^p$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de frontière  $\partial\Omega$  régulière et sit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < +\infty$  ;

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et tels que } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

$dx$  : designera à la mesure de Lebesgue.

$L^p(\Omega)$  : est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (1.3)$$

Si  $p = \infty$ , on définit l'espace  $L^\infty(\Omega)$  par :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et tels que } \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \right\},$$

où

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{ c; |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

$L^\infty(\Omega)$  muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|. \quad (1.4)$$

### 1.1.3 Espaces Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \forall i = 1, 2, \dots, n; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

On pose

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega),$$

où

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

et

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}, \quad (1.5)$$

où bien de la norm équivalente suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left( \|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.6)$$

L'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2}, \quad (1.7)$$

où

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx. \quad (1.8)$$

La norme associée est

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.9)$$

et est équivalente à la norme de  $W^{1,2}(\Omega)$ .

### 1.1.4 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soient  $m \geq 2$  un entier, et soit  $p$  un réel avec  $1 < p < \infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m \right\}.$$

L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}, \quad (1.10)$$

est un espace de Banach.

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

$H^m(\Omega)$  muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2}, \quad (1.11)$$

est espace de Hilbert.

## 1.2 Théorème de point fixe

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

**Définition 1.2.1.**  $f$  est dite application lipschitzienne s'il existe une constante  $k > 0$  telle que :

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E \quad \forall x, y \in E.$$

**Remarque 1.2.1.** Si  $0 < k < 1$ , on dit que  $f$  est contractante de rapport  $k$ .

**Définition 1.2.2.** Soit  $f : E \rightarrow E$ , on dit que  $x$  est un point fixe de  $f$  si

$$f(x) = x.$$

**Théorème 1.2.1.** [5] Soient  $E$  un espace de Banach et  $f$  une application contractante définie sur  $E$  de rapport  $k$  alors  $f$  admet un point fixe unique.

## 1.3 Fonctions convexes

Soit  $V$  espace de Hilbert

**Définition 1.3.1.** *La fonction  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, si*

$$\forall x_1, x_2 \in K, \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

**Définition 1.3.2.** *La fonction  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement convexe, si*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in K, \text{ tel que } x_1 \neq x_2 \text{ et } \lambda \in ]0, 1[.$$

**Définition 1.3.3.** *Soit  $J$  une fonctionnelle convexe de  $V$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  semi continue inférieure faiblement (s.c.i) pour la topologie forte. Si  $v_n$  est une suite de  $V$  faiblement convergente vers  $v$  alors  $J(v) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf J(v_n)$ .*

**Définition 1.3.4.** *Soit  $J$  une fonctionnelle de  $V$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , convexe et semi-continue inférieurement. Soit  $K$  un sous-ensemble convexe, non vide et fermé de  $V$ .  $J$  est propre c'est-à-dire qu'il existe un élément  $v_0$  de  $K$  tel que  $J(v_0) < +\infty$ .*

## 1.4 Opérateur de projection dans un espace de Hilbert

On considère  $V$  un espace de Hilbert réel. Soit  $K \subset V$ , convexe, fermé et non vide. L'opérateur de projection  $P_K : v \rightarrow K$  est défini par :

$$\|P_K v - v\| \leq \|w - v\|, \forall w \in K. \quad (1.12)$$

**Théorème 1.4.1.** [1]  $\forall v \in V, P_K v \in K$  défini par (1.12) est caractérisé par

$$(P_K v - v, w - P_K v) \geq 0, \forall w \in K. \quad (1.13)$$

**Théorème 1.4.2.** [1] L'opérateur  $P_K$  satisfait

$$\|P_K u - P_K v\| \leq \|u - v\|, \forall u, v \in K. \quad (1.14)$$

Un sous espace vectoriel fermé de  $H$  un convexe fermé particulier, alors on a la proposition suivante :

**Proposition 1.4.1.** [3] Soit  $H$  un espace de Hilbert,  $V$  est un sous espace vectoriel fermé de  $H$ . soit  $u \in h$  donné alors il existe un seul élément  $u_0 \in H$  tel que :

$$\begin{cases} \langle u - u_0, f \rangle = 0, \quad \forall f \in V, \\ u_0 = Pu. \end{cases}$$

**Remarque 1.4.1.** On note :

$$V^\perp = \{x \in H; \langle x, v \rangle_H = 0, \quad \forall v \in V\}.$$

La proposition 3.1 montre que :

$$u - Pu = u - u_0 \in V^\perp.$$

Reciproquement, si  $u - u_0 \in V^\perp$  alors  $v_0 = Pu = u_0$ .

Tout élément  $u \in E$  s'écrit donc d'une manière unique :

$$\begin{cases} u = v + v^\perp, \quad v \in V; v^\perp \in V^\perp, \\ v = Pu. \end{cases}$$

Si  $Q$  désigne la projection orthogonal sur  $V^\perp$  l'élément  $u \in E$  s'écrit :

$$u = Pu + Qu.$$

Ce que est une très importante propriété des espaces de Hilbert qui le distingue parmi les espaces de Banach.

On dit que  $H$  se decompose en somme direct des sous-espaces orthogonaux  $V$  et  $V^\perp$  on écrit :

$$H = V \oplus V^\perp.$$

**Proposition 1.4.2.** [3] L'application d'orthogonalité  $P_V$  sur  $V$  c'est une application linéaire bornée vérifie :

1.  $P_V = P_V^2$ .
2.  $\|P_V\| \leq 1$ .
3.  $\forall x, y \in H; \langle P_V x, y \rangle = \langle x, P_V y \rangle$ .

C'est resultat est vraie aussi pour le projection sur  $V^\perp$  :  $P_{V^\perp}$ .

# Chapitre 2

## Présentation de la méthode des éléments finis

### 2.1 Introduction

La méthode des éléments finis est reconnue comme l'une des principales méthodes d'approximation des problèmes aux limites elliptiques, mais aussi paraboliques et hyperboliques. Incontournable en mécanique (fluides, solides, interactions, structures), elle a de nombreuses applications dans tous les domaines qui impliquent des équations aux dérivées partielles. Flexible, elle peut traiter des problèmes linéaires ou nonlinéaires, dans des géométries quelconques définies en dimension 1, 2 ou en dimension supérieure.

**But** : calculer une solution approchée du problème variationnel ce qui nous donnera une solution approchée du problème.

**Question.** *comment calculer explicitement une solution approchée qui soit facilement calculable tout en ayant une idée assez précise de l'erreur commise par rapport à la solution exacte ?*

**Stratégie utilisée** : *L'idée de base consiste à résoudre le problème **contunie** dans un espace de dimension finie  $V_h$  inclus dans  $V$  approchant l'espace  $V$  dans un sens à définir : c'est le principe de la méthode de **Galerkin**. En outre, la construction de l'espace  $V_h$  repose sur la notion géométrique de **maillage**. Dans ce contexte le paramètre  $h$  correspond à la taille **maximale des mailles** ou cellules qui composent le maillage ; il est strictement positif*

et dans la limite  $h \rightarrow 0$ , l'espace  $V_h$  sera de plus en plus gros et approchera de mieux en mieux l'espace  $V$  tout entier. On cherchera à résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h. \end{array} \right.$$

ce problème s'appelle le problème **discret** du problème **continu**

**Pourquoi  $V_h$  est de dimension finie ?**

pour n'avoir qu'un nombre fini d'inconnues ou **degrés de liberté** qui seront les composantes de la solution approchée dans une base de  $V_h$  ; ces composantes pourront facilement être calculées en résolvant un système linéaire qui est la version matricielle du problème **discet**.

D'un point de vue théorique, il est nécessaire que ce nombre de degrés de liberté puisse être aussi grand que l'on veut, de manière à approcher la solution exacte de façon la plus précise possible. Autrement dit si  $N_h$  désigne la dimension de  $V_h$ , on souhaite que  $N_h \rightarrow \infty$  quand  $h \rightarrow 0$ . Plus précisément .

## 2.2 Mise en oeuvre de la méthode en dimension 1

Prenons l'exemple suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -u''(x) = f(x) \quad \forall x \in ]a, b[ \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où  $f \in L^2(]a, b[)$ ,  $\forall x \in ]a, b[$ .

### 2.2.1 Résolution du problème continu

On suppose que (2.1) admet une solution unique  $u \in H_0^2(]a, b[)$ .

Soit  $v \in H_0^1(]a, b[)$ , on multiplie la première équation par  $v$ , on intègre sur  $]a, b[$  et on fait une intégration par parties :

$$\int_a^b -u''(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

$$\int_a^b -u''(x)v(x)dx = -([u'(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v'(x)dx) = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

donc :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx - u'(b)v(b) + u'(a)v(a) = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

puisque  $v \in H_0^1(]a, b[)$  :  $v(b) = v(a) = 0$  d'où :

$$\int_a^b (u'(x)v'(x)) dx = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

On propose la formulation variationnelle de (2.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

1.  $V = \{v \in H_0^1(]a, b[), v(a) = v(b) = 0\}$ ,
2.  $a(u, v) = \int_a^b (u'(x)v'(x))dx$ ,
3.  $L(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx$ .

## 2.2.2 Problème discret

### Construction de l'espace $V_h$

La construction de  $V_h$  doit satisfaire

1.  $V_h \subset H_0^1(]a, b[)$  c'est pour cela que l'on va construire  $V_h$  tel que  $V_h \subset C^0([a, b])$ ,
2. la matrice  $A$  du système doit être creuse,
3. la base de  $V_h$  est facile à définir.

Soit  $N$  un entier positif,  $h = \frac{b-a}{N+1}$ , on désigne par

$$x_i = a + ih, i \in \{0, N + 1\}. \quad (2.3)$$

les  $N + 2$  points du maillage.  $h$  s'appelle **le pas du maillage**. On a en particulier  $x_0 = a$  et  $x_{N+1} = b$ .

On introduit l'espace de dimension finie  $V_h$  défini par :

$$V_h = \{v_h \in \tilde{V}_h, v_h(a) = v_h(b) = 0\}, \quad (2.4)$$

avec

$$\tilde{V}_h = \left\{ v_h : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, v_h \in C^0([a, b]), v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1, \forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \right\}, \quad (2.5)$$

où  $p_1$  est l'espace de degré inférieur ou égal à un.

**Lemme 2.2.1.** [16]

1. Les fonctions de  $\tilde{V}_h$  sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des points  $x_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, N + 1\}$ .

2. La dimension de  $\tilde{V}_h$  est  $N + 2$  et une base de  $\tilde{V}_h$  est formée des fonctions  $w_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, N + 1\}$  suivantes :  $w_i \in \tilde{V}_h, w_i(x_j) = \delta_{ij}$  (indice de Kronecker).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ces fonctions sont appelées fonctions chapeaux en raison de leur graphe et on a :

$$\forall v_h \in \tilde{V}_h, v_h(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v_h(x_i) w_i(x). \quad (2.6)$$

Les scalaires  $v_h(x_i), i \in \{0, 1, 2, \dots, N + 1\}$  sont les **degrés de liberté** de la fonction  $v_h \in \tilde{V}_h$ .

3.  $\tilde{V}_h \subset H_0^1(]a, b[)$ .

$$(v_h)_{|[x_i, x_{i+1}]} = cx + d, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

**Corollaire 2.2.1.** [16]

1. Les fonctions de  $V_h$  sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des points  $x_i, i \in \{1, 2, \dots, N + 1\}$ .

2. La dimension de  $V_h$  est  $N + 1$  et une base de  $V_h$  est formée des fonctions  $w_i, i \in \{1, 2, \dots, N + 1\}$  suivantes :  $w_i \in \tilde{V}_h, w_i(x_j) = \delta_{ij}$  (indice de Kronecker). On a :

$$\forall v_h \in V_h, v_h(x) = \sum_{i=1}^{N+1} v_h(x_i) w_i(x). \quad (2.7)$$

Les scalaires  $v_h(x_i), i \in \{1, 2, \dots, N + 1\}$  sont les degrés de liberté de la fonction  $v_h \in V_h$ .

3.  $V_h \subset V$ .

## Calcul de la solution approchée

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique  $u_h$  au problème variationnel discret :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que ,} \\ a(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (2.8)$$

$$1. a(u, v) = \int_a^b (u'(x)v'(x)) dx,$$

$$2. L(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

D'après le corollaire précédent, cette solution est de la forme :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N+1} u_i w_i(x),$$

où le vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$  de composantes  $u_j$  est la solution du système linéaire :

$$AX = b.$$

$$1. A = (A_{ij}), 1 \leq i, j \leq N + 1$$

$$A_{ij} = \int_a^b ((w_i)'(x)(w_j)'(x)) dx.$$

$$2. b = (b_i)_{1 \leq i \leq N+1}$$

$$b_i = \int_a^b f(x)w_i(x)dx.$$

Ainsi pour connaître la solution approchée  $u_h$ , il suffit de calculer la matrice  $A$  et le second membre  $b$ .

Pour cela explicitons les fonctions de base  $w_i$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, N + 1\}$ . La fonction  $w_i$  a son support dans  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  et par un calcul simple on a pour  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sur les autres intervalles .} \end{cases} \quad (2.9)$$

et la fonction  $w_{N+1}$  est à support dans  $[x_N, b]$  et on a :

$$w_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_N}{h} & \text{si } x \in [x_N, b], \\ 0 & \text{sur les autres intervalles .} \end{cases} \quad (2.10)$$

Ces fonctions de base peuvent toutes s'exprimer à l'aide des fonctions de base de **l'élément de référence**  $w_0$  et  $w_1$  qui sont

$$w_0(x) = 1 - x \text{ et } w_1(x) = x \quad (w_0(x_i) = \delta_{0i} \text{ et } w_1(x_i) = \delta_{1i}). \quad (2.11)$$

On a en effet, pour chaque indice  $i \in \{1, 2, \dots, N + 1\}$ ,

$$w_i(x) = \begin{cases} w_1\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ w_0\left(\frac{x-x_i}{h}\right) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sur les autres intervalles.} \end{cases} \quad (2.12)$$

### Calcul de la matrice $A$

Comme les fonctions de base ont leur support dans  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , on

$$A_{i,j} = 0 \text{ si } |i - j| \geq 2.$$

Ainsi on est amené à calculer :

1. si  $i \leq N$ ,  $A_{i,i}$ ,  $A_{i,i-1}$  et  $A_{i,i+1}$  et comme la matrice est symétrique, on aura  $A_{i-1,i} = A_{i+1,i}$ .
2. si  $i = N + 1$ ,  $A_{i,i}$  et  $A_{i-1,i}$ .

La matrice  $A$  est **tridiagonale**

Pour  $i \neq N + 1$

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (w_i(x)')^2 dx \\ A_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (w_i(x))' (w_{i-1}(x))' dx \\ A_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (w_i(x))' (w_{i+1}(x))' dx \end{aligned}$$

et pour  $i = N + 1$

$$\begin{aligned} A_{N+1,N+1} &= \int_{x_N}^b (w_{N+1}(x))'^2 dx \\ A_{N+1,N} &= \int_{x_N}^b (w_{N+1}(x))' (w_N(x))' dx. \end{aligned}$$

Prenons  $f(x) = f_0$  sur  $[a, b]$ . On va utiliser les fonctions de base de l'élément de référence pour calculer les coefficients. Par exemple :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} w_i(x) w_{i-1}(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} w_1\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) w_0\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) dx.$$

On fait le changement de variable  $y = \frac{x-x_{i-1}}{h}$ ,  $dy = \frac{1}{h}dx$ ,  $w_1 + w_0 = 1$ . D'où,

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_i} w_1 \left( \frac{x-x_{i-1}}{h} \right) w_0 \left( \frac{x-x_{i-1}}{h} \right) dx \\ &= h \int_0^1 w_1(y)w_0(y)dy \\ &= h \int_0^1 (1-y)ydy = \frac{h}{6}. \end{aligned}$$

De même, on a pour  $i \neq N+1$

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= \frac{2}{h} \\ A_{i,i-1} &= A_{i,i+1} = \frac{-1}{h} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_{N+1,N+1} &= \frac{1}{h} \\ A_{N,N+1} &= \frac{-1}{h}, \end{aligned}$$

et tous les autres coefficients sont nuls.

## Calcul de $b$

On a de la même manière :

$$\begin{cases} b_i = hf_0 \text{ pour } i \neq N+1, \\ b_{N+1} = \frac{hf_0}{2} + \beta. \end{cases}$$

## 2.3 méthode des éléments finis en dimension 2

### 2.3.1 Généralités

On doit résoudre un problème du type :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \\ u(x) = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné non vide et régulier du plan.

Le principe consiste à écrire une formulation variationnelle associée à (2.13) puis de résoudre ce problème sur un espace de dimension finie inclus dans  $H_0^1(\Omega)$ .

La construction de l'espace de dimension finie exige un maillage de  $\Omega$  qui satisfait certaines règles.

On recouvre  $\Omega$  par des éléments de forme simple par exemple des triangles.

Soit  $(T_k), k \in \{1, \dots, N_T\}$  les éléments de petite taille qui recouvrent  $\Omega$ .

On note

$$h = \max_{k \in \{1, \dots, N_T\}} (\text{diam}(T_k)), \quad (2.14)$$

où  $\text{diam}(T_k)$  est le diamètre de l'élément  $T_k$ .

On désigne par  $\tau_h$  l'ensemble de tous de les éléments  $\{T_k\}$ ;  $\tau_h$  s'appelle une **triangulation** de  $\Omega$ . Pour simplifier, supposons que  $\Omega$  est à frontière polygonale.

Donc, on a

$$\bar{\Omega} = \cup_{T \in \tau_h} T. \quad (2.15)$$

On dit que la triangulation est **admissible** si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit réduite à un point, soit un côté tout entier.

Pour la convergence de la méthode, il est nécessaire que la condition suivante soit satisfaite : il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $h > 0$ ,

$$\sup_{T \in \tau_h} \frac{h(T)}{\rho(T)} \leq C, \quad (2.16)$$

où  $\rho(T)$  désigne le diamètre du cercle inscrit dans l'élément  $T$ . On dit que la triangulation est régulière si la condition est remplie. Cette condition permet d'éviter des éléments trop aplatis.

## 2.4 Approximation par des éléments finis triangulaires

### $P_1$

$\Omega$  est supposé de frontière polygonale de sorte qu'il est entièrement recouvert par  $N_T$  triangles  $T_k, \forall k \in \{1, 2, \dots, N_T\}$  de taille maximale  $h$ . On note  $q^i, i \in \{1, 2, \dots, N_S\}$  les points du maillage et  $N_i$  le nombre de sommets internes.

## 2.4.1 Espace discret

On désigne par  $P_1$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à un. Il est engendré par  $1, x_1$  et  $x_2$ . On définit

$$V_h = \left\{ v_h \in \tilde{V}_h, v_{h/\Gamma} = 0 \right\},$$

avec

$$\tilde{V}_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_{h/T_k} \in P_1, \forall k \in \{1, \dots, N_T\} \right\}.$$

**Proposition 2.4.1.** [17]

1. Les fonctions de  $\tilde{V}_h$  sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des  $N_S$  sommets  $q^i$  du maillage.
2. La dimension de  $\tilde{V}_h$  est  $N_S$  et une base de  $\tilde{V}_h$  est formée des fonctions  $w_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, N_S\}$  suivantes :  $w_i \in \tilde{V}_h, w_i(q^j) = \delta_{ij}$  (indice de Kronecker).

Ces fonctions sont appelées fonctions chapeaux en raison de leur graphe et on a :

$$\forall v_h \in \tilde{V}_h, v_h(x) = \sum_{i=0}^{N_S} v_h(q_i) w_i(x).$$

Les scalaires  $v_h(q_i), i \in \{0, 1, 2, \dots, N_S\}$  sont les degrés de liberté de la fonction  $v_h \in \tilde{V}_h$ .

3.  $\tilde{V}_h \subset H^1(\Omega)$  et pour toute fonction  $v_h \in \tilde{V}_h$  on a au sens des distributions

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{N_T} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{h/R_k}).$$

**Corollaire 2.4.1.** [17]

1. Les fonctions de  $V_h$  sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des  $N_i$  sommets internes du maillage.
2.  $\dim V_h = N_i$  et

$$\forall v_h \in V_h, v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_i} v_h(q_i) w_i(x).$$

Les scalaires  $v_h(q^i)$  pour  $i \in \{1, N_i\}$  sont les degrés de libertés de la fonction  $v_h$ .

3.  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ .

## 2.4.2 Calcul de $u_h$

Le problème discret est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v) = L(v) \forall v \in V_h, \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $V_h$  est l'espace décrit dans le corollaire précédent. On cherche alors  $u_h$  sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_s} x_i w_i(x),$$

où les coefficients  $x_i$  pour  $i \in \{1, N_i\}$  sont déterminés en résolvant le système

$$AX = b,$$

avec

1.  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{N_i})$ .
2.  $A = (A_{i,j}), 1 \leq i \leq N_i, 1 \leq j \leq N_i$

$$A_{i,j} = a(w_j, w_i).$$

3.  $b = (b_i)_{i=1, N_i}$

$$b_i = L(w_i).$$

Ce qui suit explique le calcul de la matrice  $A$  et du second membre  $b$  par un procédé appelé assemblage.

On a

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \int_{\Omega} \nabla w_i \nabla w_j \\ &= \sum_{k=1}^{N_T} A_{i,j}(T_k) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{i,j}(T_k) &= \int_{T_k} \nabla w_i \nabla w_j \\ b_i &= \int_{\Omega} f w_i = \sum_{k=1}^{N_T} b_i(T_k) \end{aligned}$$

où

$$b_i(T_k) = \int_{T_k} f w_i.$$

### Programmation de la méthode

La matrice étant symétrique et définie positive, plusieurs méthodes sont possibles pour résoudre le système, voir [5], [16] et [2] :

1. méthodes directes, **factorisation de Gauss ou de Choleski**.
2. méthodes itératives de type **Jacobi ou Gauss-Seidel**.

# Chapitre 3

## Etude mathématique d'une Inéquation Variationnelles Elliptiques

### 3.1 Généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques

#### 3.1.1 Introduction

*La théorie des inéquations variationnelles a été faite à partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par A. Signorini [18] et G. Fichera [8]. La théorie mathématique a été obtenue par G. Stampacchia [19], J.L. Lions et G. Stampacchia [12]. La théorie des inéquations variationnelles a été utilisée dans plusieurs domaines tels que la mécanique, la physique, l'optimisation, le contrôle optimal, la programmation linéaire, les mathématiques financières, etc... ; Aujourd'hui elle est considérée comme un outil indispensable dans plusieurs secteurs de mathématiques appliquées.*

*Dans ce chapitre, on va présenter des inéquations variationnelles de première et deuxième espèce .*

*On s'intéresse par l'étude mathématique des inéquations variationnelles de première espèce.*

### 3.1.2 Définition des Inéquations Variationnelles elliptiques

1<sup>ere</sup> espèce

On appelle inéquation variationnelle elliptique de 1<sup>ere</sup> espèce toute inéquation de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tq :} \\ a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (3.1)$$

2<sup>eme</sup> espèce

On appelle Inéquation variationnelle elliptique de 2<sup>eme</sup> espèce toute inéquation de la forme

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K. \quad (3.2)$$

**Théorème 3.1.1.** [12] Soient  $V$  est un espace de Hilbert,  $K \neq \emptyset$  convexe fermé de  $V$   $j : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  propre convexe et semi continue inférieurement  $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  forme bilinéaire continue et coercive  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  continue et de forme linéaire. Alors l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K, \end{cases}$$

admet une solution unique.

Nous nous intéressons pour étudier l'existence et l'unicité pour la solution des inéquations variationnelles de première espèce .

## 3.2 Le problème continue :

### 3.2.1 Notation et hypothèses

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\partial\Omega$  suffisamment régulière. Pour  $u, v \in V$  ( $V = H_0^1(\Omega)$ ) ou  $V = H^1(\Omega)$  on pose :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{1 \leq j, k \leq N} a_{jk}(x) \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^N b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} v + b_0(x) uv \right) dx. \quad (3.3)$$

la forme bilinéaire associée à l'opérateur  $A$  définit par :

$$Au = - \sum_{1 \leq j, k \leq N} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^N b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + b_0(x)u. \quad (3.4)$$

Les coefficients  $a_{jk}(x), b_k(x), b_0(x)$  sont suffisamment réguliers, et

$$b_0(x) \geq \beta > 0; \forall x \in \Omega. \quad (3.5)$$

On suppose que la forme bilinéaire est continue, et fortement coercive :

$$\forall v \in V, \exists \alpha > 0 : a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2. \quad (3.6)$$

De plus, on considère un second membre  $f$  tel que :

$$f \in L^\infty(\Omega), \quad (3.7)$$

et un obstacle  $\Psi \in W^{2,\infty}(\Omega)$  tel que  $\Psi > 0$  sur  $\partial\Omega$ .

### 3.2.2 Problème d'inéquation variationnelle continue :

On cherche  $u$  la solution de l'inéquation variationnelle suivante : trouver  $u \in V$  tel que :

$$\begin{cases} a(u, v - u) \geq (f, v - u) & \forall v \in V \\ u \leq \Psi & v \leq \Psi \end{cases} \quad (3.8)$$

#### Existence et l'unicité

On va énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème (3.8), qui est donnée par J.L.lions et Stampachia.

Soit  $K = \{v \in V; v \leq \Psi \text{ p.p dans } \Omega\}$   $K$  est un ensemble convexe, fermé et non vide.

La solution  $u$  de problème (3.8) est caractériser par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K & \forall v \in K \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u). \end{cases}$$

**Théorème 3.2.1.** [12] Soit  $K$  un ensemble convexe, fermé non vide, et une forme bilinéaire continue et coercive, alors le problème (3.8) admet une solution unique.

**Preuve.** 1) L'existence : le théorème de Lax-milligram, montre qu'il existe un opérateur continue :

$$A : V \longrightarrow V$$

$$(Au, v) = a(u, v).$$

Alors le problème (3.8) peut s'écrire sous la forme :

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u). \quad (3.9)$$

En multipliant (3.9) par une constante  $\rho > 0$ , il vient :

$$u - (u - \rho(Au - f), v - u) \geq 0. \quad (3.10)$$

Le théorème (1.4.1) montre que (3.8) est équivalent à :

$$u = P_K(u - \rho(Au - f)). \quad (3.11)$$

où  $P_K$  est l'opérateur de projection de  $V$  dans  $K$ .

Introduisons l'opérateur :

$$S_\rho : V \longrightarrow K$$

$$S_\rho(v) = P_K(v - \rho(Au - f)). \quad (3.12)$$

Alors (3.9) peut s'écrire sous la forme :

$$u = S_\rho(u), \quad (3.13)$$

l'inégalité (3.8) est équivalente à l'équation de point fixe.

Montrons maintenant que l'opérateur  $S_\rho$  est une contraction.

D'après le théorème (1.4.2) on a :

$$\|S_\rho(v_1) - S_\rho(v_2)\|^2 \leq \|(v_1 - v_2) - A(v_1 - v_2)\|^2$$

$$= \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2) + \rho^2 \|A(v_1 - v_2)\|^2$$

mais :

$$(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2) = a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \geq \alpha \|v_1 - v_2\|^2$$

alors :

$$-2\rho(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2) \leq -2\alpha\rho \|v_1 - v_2\|^2$$

Donc on obtient :

$$\|S_\rho(v_1) - S_\rho(v_2)\|^2 \leq (1 - 2\alpha\rho + \beta^2\rho^2) \|v_1 - v_2\|^2,$$

où  $\beta = \|A\|$ .

Il suffit de montrer qu'il existe  $\rho > 0$ , tel que :

$$0 < 1 - 2\alpha\rho + \beta^2\rho^2 < 1.$$

L'inégalité de droite donne  $\rho \in ]0, \frac{2\alpha}{\beta^2}[$ .

Soit maintenant l'inégalité :

$$1 - 2\alpha\rho + \beta^2\rho^2 > 0, \quad (3.14)$$

et soit l'équation :

$$\varphi(\rho) = 1 - 2\alpha\rho + \beta^2\rho^2 = 0, \quad (3.15)$$

si le discriminant ( $\Delta = \alpha^2 - \beta^2 < 0$ ), alors (3.14) est satisfaite quelque soit le réel  $\rho$ , d'où l'opérateur  $S_\rho$  est une contraction  $\rho \in ]0, \frac{2\alpha}{\beta^2}[$ .

Si  $\Delta \geq 0$ , alors il suffit de remarquer que :

$$\varphi(0) = \varphi\left(\frac{2\alpha}{\beta^2}\right) = 1,$$

d'où l'on a :

$$0 < \rho_1 \leq \rho_2 < \frac{2\alpha}{\beta^2},$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les racines de (3.15).

Donc l'opérateur  $S_\rho$  est une contraction.

Lorsque  $\rho \in ]0, \rho_1[ \cup ]\rho_2, \frac{2\alpha}{\beta^2}[$ . Alors d'après le théorème du point fixe, on a l'existence de la solution de (3.13), d'où la solution de (3.8).

2) L'unicité :

Soit  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions de problème (3.8).

Pour  $u = u_1$ , on prend  $v = u_2$ .

Pour  $u = u_1$ , on prend  $v = u_1$ , alors il vient :

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq (f, u_2 - u_1)$$

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq (f, u_1 - u_2).$$

En additionnant les deux inégalités ci-dessous, il vient :

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

On déduit de la coercivité de  $a$  que :

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq 0.$$

D'où  $u_1 = u_2$ .

□

**Remarque 3.2.1.** Si  $K = V$ , le théorème se réduit au lemme de Lax-Milgram et l'inéquation dévient une équation.

### Problème de minimisation

Soit  $a(., .)$  symétrique. Considérons la fonctionnelle  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v), \quad v \in K.$$

Alors

(i)

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} J(v) = +\infty,$$

en effet,  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 - \|L\|\|v\| \rightarrow \infty$ .

(ii)  $J$  est **strictement convexe**. En effet, comme  $L$  est linéaire, il suffit de prouver que  $v \rightarrow a(v, v)$  est **strictement convexe**. Soit  $0 < \theta < 1$  et  $u, v \in V$  ; alors

$$0 < a(v - u, v - u) = a(u, u) + a(v, v) - 2a(u, v),$$

ainsi on a

$$2a(u, v) < a(u, u) + a(v, v). \tag{3.16}$$

En utilisant (3.16) nous avons

$$\begin{aligned} a(\theta u + (1 - \theta)v, \theta u + (1 - \theta)v) &= \theta^2 a(u, u) + 2\theta(1 - \theta)a(u, v) + (1 - \theta)^2 a(v, v), \\ &< \theta a(u, u) + (1 - \theta)a(v, v), \end{aligned}$$

alors  $v \rightarrow a(v, v)$  est **strictement convexe**.

(iii)  $J$  est continue car  $L$  et  $a(.,.)$  sont continus.

(iv) Supposons  $J(.)$  est Gâteaux différentiable en  $u$ , i.e différentiable dans toutes les directions  $v \in V$ , c.à.d :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = (J'(u), v), \quad \forall v \in V.$$

Soit le problème de minimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in K \text{ telle que :} \\ J(u) = \min_{v \in K} J(v). \end{array} \right. \quad (3.17)$$

**Théorème 3.2.2.** [12] Supposons que  $J(.)$  vérifie les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) alors le problème de minimisation (3.17) est équivalent au problème (3.1).

**Preuve.** Soit  $u \in K$  solution de problème (3.1), nous avons

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u + v - u) \\ &= \frac{1}{2}a(u + v - u, u + v - u) - L(u + v - u) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}a(v - u, v - u) + \frac{1}{2}a(u, v - u) + \frac{1}{2}a(v - u, u) - L(u) - L(v - u) \\ &= J(u) + [a(u, v - u) - L(v - u)] + \frac{1}{2}a(v - u, v - u), \end{aligned}$$

comme  $a(.,.)$  est V-elliptique, le troisième terme est positif, et le deuxième terme est non négatif, ce qui implique que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K.$$

Inversement : soit  $u \in K$  solution de ( ). comme  $j(.)$  est Gateaux différentiable en  $u$ , alors

$$(J'(u), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
0 &\leq (J'(u), v - u) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + t(v - u)) - J(u)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}a(u + t(v - u), u + t(v - u)) - L(u + t(v - u)) - \frac{1}{2}a(u, u) + L(u)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}a(u, u) + ta(u, v - u) + \frac{1}{2}t^2a(v - u, v - u) - L(u) - tL(v - u) - \frac{1}{2}a(u, u) + L(u)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ta(u, v - u) + \frac{1}{2}t^2a(v - u, v - u) - tL(v - u)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left( a(u, v - u) + \frac{1}{2}ta(v - u, v - u) - L(v - u) \right) \\
&= a(u, v - u) - L(v - u).
\end{aligned}$$

Donc  $u \in K$  est solution de problème (3.1)

$$a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K.$$

□

### 3.2.3 Interprétation du problème à frontière libre

De la solution  $u$  de (3.8) nous définissons

$$\Omega^+ = \{x \mid x \in \Omega, u(x) < \Psi(x)\}$$

$$\Omega^0 = \{x \mid x \in \Omega, u(x) = \Psi(x)\}$$

$$\gamma = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0; \quad u^+ = u|_{\Omega^+}; \quad u^0 = u|_{\Omega^0}.$$

Classiquement le problème (3.8) est formulé comme suit : Trouver  $\gamma$  (la frontière libre) et  $u$  tel que :

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega \tag{3.18}$$

$$u = \Psi \text{ sur } \Omega^0 \tag{3.19}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{3.20}$$

$$u_{|\gamma}^+ = u_{|\gamma}^0. \quad (3.21)$$

L'interprétation physique de ces relations est la suivante : (3.18) indique que sur  $\Omega^+$  la membrane est strictement au-dessus de l'obstacle ; (3.19) indique que la membrane touche l'obstacle sur la partie  $\Omega^0$  ; (3.21) est une relation de transmission sur la frontière libre.

En étudiant maintenant quelques propriétés de la solution du problème (3.8), on commence par introduire la notation de sous-solution.

### 3.2.4 Caractrisation de la solution continue

comme Enveloppe des sous-solution continue.

**Définition 3.2.1.** Soit  $X$  l'ensemble de sous-solution pour l'inéquation variationnelle, c'est à dire, l'ensemble de  $z \in V$  tel que :

$$\begin{cases} a(z, v) \leq (f, v) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \\ z \leq \Psi. \end{cases} \quad (3.22)$$

**Théorème 3.2.3.** [7] sous les hypothèses précédentes, la solution  $u$  de l'inéquation variationnelle (3.8), est le plus grand élément de  $X$ .

*Preuve.* On a :

$$\begin{cases} a(u, \tilde{v} - u) \geq (f, \tilde{v} - u) \quad \forall \tilde{v} \in V \\ u \leq \Psi, \tilde{v} \leq \Psi. \end{cases}$$

Soit  $\tilde{v} = u - v$ , et  $v \geq 0$  alors :

$$a(u, \tilde{v} - u) = a(u, -v) \geq (f, -v),$$

donc :  $a(u, v) \leq (f, v)$ .

C'est à dire  $u \in X$  Montrons maintenant que

$$u = \sup_{z \in X} z.$$

Soit  $z \in X$  tel que  $u \leq z$ . Ainsi  $z$  est une sous-solution

$$\begin{cases} a(z, v) \leq (f, v) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \\ z \leq \Psi. \end{cases}$$

Posons :  $v = (z - u)^+ \geq 0$ , où  $(z - u)^+ = \sup(z - u, 0)$  donc :

$$\begin{cases} a(z, (z - u)^+) \leq (f, (z - u)^+) \\ z \leq \Psi. \end{cases}$$

D'autre part :

$$\begin{cases} a(z, (z - u)^+) \geq (f, (z - u)^+) \\ u \leq \Psi. \end{cases} \quad (3.23)$$

Alors :  $-a((z - u)^+, (z - u)^+) \geq 0$

i.e :  $a((z - u)^+, (z - u)^+) \leq 0$

et puisque la forme bilinéaire est coercive, on résulte que  $(z - u)^+ = 0$ , donc  $z \leq u$ .  $\square$

### 3.2.5 Propriétés de monotonie de la solution continue

On note la solution  $u$  de l'I.V par  $\partial(f, \Psi)$ , où  $f$  est le seconde membre et  $\Psi$  l'obstacle.

**Proposition 3.2.1.** [7] La solution de l'I. V est croissante par rapport à l'obstacle  $\Psi$ , et au seconde membre  $f$ , i.e :

Si  $f \leq g$ , et  $\Psi \leq \tilde{\Psi}$ , alors  $\partial(f, \Psi) \leq \partial(g, \tilde{\Psi})$ .

**Preuve.** Soient  $f \leq g$  et  $\Psi \leq \tilde{\Psi}$ , posons :  $u = \partial(f, \Psi)$ , et  $w = \partial(g, \tilde{\Psi})$ , on a :

$$\begin{cases} a(u, v) \leq (f, v) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \\ u \leq \Psi, \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} a(u, v) \leq (f, v) \leq (g, v) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \\ u \leq \Psi \leq \tilde{\Psi}, \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} a(u, v) \leq (g, v) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \\ u \leq \tilde{\Psi}, \end{cases}$$

alors  $u$  est une sous-solution pour  $w$ , c'est à dire :  $u \leq w$  D'où :  $\partial(f, \Psi) \leq \partial(g, \tilde{\Psi})$ .

On va citer un lemme de monotonie de la solution, mais cette fois par rapport au condition au bord et l'obstacle.

Soit l'ensemble convexe non vide :

$$K_g = \{v \in V, v = g \text{ sur } \partial\Omega, v \leq \Psi \text{ dans } \Omega\}, \quad (3.24)$$

où  $g$  est une fonction régulière définie sur  $\partial\Omega$  □

**Lemme 3.2.1.** [7] Posons  $u = \partial(g, \Psi); \tilde{u} = \partial(\tilde{g}, \tilde{\Psi})$

Si  $\Psi \geq \tilde{\Psi}$  et  $g \geq \tilde{g}$ , alors  $\partial(g, \Psi) \geq \partial(\tilde{g}, \tilde{\Psi})$ .

*Preuve.* posons :  $v = \min(0, u - \tilde{u})$

dans le region ou  $v$  est negative ( $v \leq 0$ ) on a :

$$u < \tilde{u} \leq \tilde{\Psi} \leq \Psi.$$

C'est à dire que l'obstacle n'est pas active pour  $u$ , donc on a :

$$a(u, v) = (f, v), \quad \text{car } (u < \Psi \text{ et } \tilde{u} + v \leq \tilde{\Psi}). \quad (3.25)$$

Alors :

$$a(\tilde{u}, v) \geq a(\tilde{u} + v, v) = (f, v), \quad (\text{car } v < 0).$$

Donc :

$$a(\tilde{u}, v) \geq (f, v). \quad (3.26)$$

Par soustraction de (3.26) et (3.25), on obtient :

$$a(\tilde{u} - u, v) \geq 0 \quad (\tilde{u} - u = -v),$$

mais :

$$a(v, v) = a(u - \tilde{u}, v) = -a(\tilde{u} - u, v) \leq 0.$$

Donc :  $v = 0$  et par consequence :  $u \geq \tilde{u}$  c.a.d  $\partial(g, \Psi) \geq \partial(\tilde{g}, \tilde{\Psi})$ .

Considéons maintenant l'application  $\sigma$  définie comme suit :

$$\sigma : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$$

$$\Psi \longmapsto \sigma(\Psi) = u,$$

où  $u$  est la solution de l'I.V (3.8). □

**Proposition 3.2.2.** [7] *L'application  $\sigma$  est croissante, et lipschitzienne (de constante 1 dans  $L^\infty(\Omega)$ ).*

**Proposition 3.2.3.** [7] *Soit  $\delta$  une constante positive. Alors :*

$$\sigma(\Psi + \delta) \leq \sigma(\Psi) + \delta.$$

**Proposition 3.2.4.** [7] *Sous les notations et les conditions du lemme (3.2.1) on a :*

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\Psi - \tilde{\Psi}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}. \quad (3.27)$$

**Remarque 3.2.2.** *Si  $\Psi = \tilde{\Psi}$ , (3.27) devient :*

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}. \quad (3.28)$$

# Chapitre 4

## L'approximation en norme $L^\infty$

### 4.1 Le problème discret

*On va introduire le problème discret et effectuer une étude similaire à celle entreprise précédemment pour le problème continue. pour insister sur la symétrie de l'étude, on suivra exactement la même démarche qu'au paragraphe précédente. Avant de passer à ces démarches, on va donner quelques resultats et défintion pour fixer les idées.*

**Définition 4.1.1.** *On dit que les espaces  $V_h$ ,  $h > 0$  forment une approximation interne (on parle aussi d'approximation conforme de  $V$ ) si :*

1. *Pour tout  $h > 0$ ,  $V_h \subset V$ .*
2. *Pour tout  $v \in V$ , il existe  $v_h \in V_h$  tel que :*

$$\|v - v_h\|_V \longrightarrow 0, \quad \text{quand } h \longrightarrow 0.$$

*Il est également souhaitable que cet espace  $V_h$  soit facile a construire, on pourra choisir un espace formé de polynomes de degré 1. L'introduction de degré superieur n'a pas été en visagée dans la mesure où les proppriété de régularité rencontrées ne semblent pas permettre d'entirer partie .*

### 4.1.1 Elément finis triangulaires de degré 1, $(P_1)$

Nous voulons construire un sous-espace  $V_h$  de type éléments finis triangulaires (rappelons que  $\Omega$  est un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^2$ ). Pour ce faire, nous construisons une triangulation  $\tau_h$  de  $\bar{\Omega}$  en subdivisant  $\bar{\Omega}$  en triangles  $K_1, K_2, \dots, K_m$  tels que :

1.  $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \tau_h} K$ .

2. Pour  $i \neq j$ ,

$$K_j \cap K_i = \begin{cases} \text{un côté commun} \\ \text{un sommet } M_s \text{ commun} \\ \text{disjoints} \end{cases}$$

3. Les éléments ne sont pas dégénérés i.e : il sont d'aire non nulle.

4. Tous les coins, de  $\partial\Omega$  sont des sommets d'éléments de  $\tau_h$  Nous introduisons encore un paramètre  $h$  mesure le degré de finesse de la triangulation  $\tau_h$  :

$$h = \max_{K \in \tau_h} (\text{diam}(K)).$$

On établit sur  $\Omega$  une triangulation régulière quasi-uniforme et on introduit  $V_h$  l'espace des éléments finis conformes suivant :

$$V_h = \{v_h \in C(\Omega) \cap V, \text{ telque } v_h/\tau_h \in P_1\}.$$

Soit  $M_s, s = 1, 2, \dots, m(h)$  les sommets de la triangulation  $\tau_h$  qui n'appartiennent pas à  $\partial\Omega$  ou les nœuds intérieurs.

Pour décrire une fonction  $g \in V_h$ , nous pouvons choisir comme paramètres les valeurs  $g(M_s)$  de la fonction  $g$  aux nœuds  $M_s$ . Ces valeurs sont appelées degrés de liberté.

Les fonctions de base pour l'espace  $V_h$   $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$  sont alors définies par :

$$\varphi_s(M_l) = \delta_{sl} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = l \\ 0 & \text{si } s \neq l \end{cases} \quad s, l = 1, 2, \dots, m(h)$$

puisque toute fonction  $g$  de  $V_h$  peut être représentée par une combinaison linéaire des  $\varphi_s$ , nous avons :

$$g(x) = \sum_{s,l=1}^{m(h)} g(M_l) \varphi_s(x, y).$$

On introduit également l'opérateur de restriction  $r_h(\cdot)$  :

Pour  $v \in C(\bar{\Omega} \cap I_0^1(\Omega))$ ,

$$r_h v = \sum_{s,l=1}^{m(h)} v(M_l) \rho_s(x, y).$$

L'ordre sur  $V_h$  sera celui induit par  $\mathbb{R}^{m(h)}$ .

Nous introduisons d'une manière naturelle la matrice de discrétisation  $A$  de coefficients générique  $a(\varphi_l, \varphi_s)$ , où  $\varphi_s, s=1, 2, \dots, m(h)$  sont les coefficients de base usuelles.

### 4.1.2 L'hypothèse du principe du maximum discet(pmd)

On suppose que la matrice  $A$  est une  $M$ -matrice i.e :

$A^{-1}$  existe et non négative, de plus :

$a_{ss} > 0$  ;  $a_{sl} \leq 0$  pour  $l \neq s$  (On trouvera dans [17] des conditions géométriques simples pour lesquelles l'hypothèse du pmd satisfait).

### 4.1.3 Le problème discret

Considérons maintenant le problème discret associé :

Trouver  $u_h \in V_h$  qui vérifie :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h \leq r_h \Psi, \quad v_h \leq r_h \Psi. \end{cases} \quad (4.1)$$

**Théorème 4.1.1.** [6] Sous les hypothèses précédentes, le problème (4.1) admet une solution unique

*Preuve.* Similaire au cas continu

□

#### 4.1.4 Caractrisation de la solution discrete Comme enveloppe des sous-solutions discrètes :

**Définition 4.1.2.** Soit  $X_h$  l'ensemble des sous-solutions pour l'I.V; c'est à dire l'ensemble des  $z_h \in V_h$  tel que :

$$\begin{cases} a(z_h, \varphi_s) \leq (f, \varphi_s), & \forall s = 1, 2, \dots, m(h) \\ z \leq r_h \Psi. \end{cases}$$

**Théorème 4.1.2.** [6] Sous les hypothèses précédentes, la solution  $u_h$  du problème est le plus grand élément de  $X_h$ .

*Preuve.* Simillaire au cas continue. □

#### 4.1.5 Propriétés de monotonie de la solution discrète

On note la solution  $u_h$  de l'I. V discrète par  $\partial_h(f, r_h \Psi)$  où  $f$  est le second membre et l'obstacle  $\Psi$ .

**Proposition 4.1.1.** [6] Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution de l'I.V est croissante par rapport à l'obstacle  $\Psi$  et aux second membre  $f$  :

Si  $f \leq g$  et  $\Psi \leq \tilde{\Psi}$  alors :  $\partial_h(f, r_h \Psi) \leq \partial_h(g, r_h \tilde{\Psi})$ .

*Preuve.* Simillaire aux proposition dans le cas du problème continue.

On va citer comme dans le cas du problème continue un lemme de monotonie de la solution de l'I.V discrète mais cette fois par rapport au condition au bord et l'obstacle soit :

$$K_{gh} = \{v_h \in V_h; v_h = \pi_h g \text{ sur } \partial\Omega, v \leq r_h \Psi\}.$$

où  $\pi_h$  l'opérateur d'interpolation sur  $\partial\Omega$ . □

**Lemme 4.1.1.** [6] Posons  $u_h = \partial_h(\pi_h g, r_h \Psi)$ ;  $\tilde{u}_h = \partial_h(\pi_h \tilde{g}, r_h \tilde{\Psi})$   
si  $\pi_h g \geq \pi_h \tilde{g}$ , et  $r_h \Psi \geq r_h \tilde{\Psi}$ , alors  $u_h \geq \tilde{u}_h$ .

*Preuve.* Simillaire au lemme (3.2.1).

Par analogie au cas continue,

$$\begin{aligned} \sigma_h : L^\infty &\longrightarrow L^\infty \\ \Psi &\longmapsto \sigma_h(\Psi) = u_h, \end{aligned}$$

où  $u_h$  est la solution de l'I.V (4.1). □

**Proposition 4.1.2.** [6] *L'application  $\sigma_h$  est croissante, et 1-lipschitzienne ( $k = 1$ ).*

*Preuve.* Similaire aux proposition (3.2.2) dans le cas du problème continue.  $\square$

**Proposition 4.1.3.** [6] *Sous les notations et les conditions du lemme (4.1.1) on a :*

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty} \leq \left\| r_h \Psi - r_h \tilde{\Psi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\pi_h g - \pi_h \tilde{g}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

*Preuve.* Similaire au proposition (3.2.4).  $\square$

**Remarque 4.1.1.** *Si  $r_h \Psi = r_h \tilde{\Psi}$  on a :*

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty} \leq \|\pi_h g - \pi_h \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

## 4.2 L'approximation en norme $L^\infty$

*Exataisons maintenant l'erreur comise lorsqu'on approche la solution du probleme (3.8) par la solution  $u_h$  du pobleme (4.1) On va citer quelques resultats d'estimation en norene  $L^\infty$ , qui forment ensuite la base de notre travail.*

**Lemme 4.2.1.** [6] *Sous les hypothéses et notations précédentes on a :*

$$\begin{aligned} \|u - \Psi\|_{L^\infty} &\leq Ch^2 |\log h|^2, \\ \|\Psi - r_h \Psi\|_{L^\infty} &\leq Ch^2 |\log h|^2. \end{aligned}$$

**Théorème 4.2.1.** [6] *Sous les hypothéses et notations précédentes on a :*

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

**Idée du démonstration :**

*Avant d'aborder la d'emonstration, il est intéressant d'introduire quelques notations.*

*Soit  $\bar{u}_h$  la solution du problème discret suivant :*

$$\begin{cases} a(\bar{u}_h, v_h - \bar{u}_h) \geq (f, v_h - \bar{u}_h) \\ \bar{u}_h \leq r_h \Psi; v_h \leq r_h \Psi. \end{cases}$$

*En poson :*

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2.$$

*La d'emonstration se décompose en trois partie.*

## Prémière partie

Construons une fonction discrète  $\alpha_h$  proche de  $u$ , qui vérifie :

$$\alpha_h \leq u_h \quad (\text{sous-solution discrète}).$$

Posons :  $\alpha_h = \bar{u}_h - ch^2 |\log h|^2$ .

Alors  $\alpha_h$  vérifie :

$$\|\alpha_h - u\|_{L^\infty} \leq ch^2 |\log h|^2$$

car

$$\begin{aligned} \|\alpha_h - u\|_{L^\infty} &= \|\bar{u}_h - ch^2 |\log h|^2 - u\|_{L^\infty} \\ &= \|u - \bar{u}_h + ch^2 |\log h|^2\|_{L^\infty} \\ &\leq \|u - \bar{u}_h\|_{L^\infty} + ch^2 |\log h|^2 \\ &\leq ch^2 |\log h|^2. \end{aligned}$$

## Deuxième partie :

Construons une fonction discrète  $\beta_h$  proche de  $u_h$  qui vérifie :

$$\beta_h \leq u.$$

Posons :  $\beta_h = \bar{u}_h + ch^2 |\log h|^2$ .

La fonction  $\beta_h$  est une sur solution discrète, on obtient :

$$\alpha_h \leq u_h \leq \beta_h$$

et

$$\|u - \beta_h\|_{L^\infty} \leq ch^2 |\log h|^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} \|u - \beta_h\|_{L^\infty} &= \|\beta_h - u\|_{L^\infty} \\ &= \|\bar{u}_h + ch^2 |\log h|^2 - u\|_{L^\infty} \\ &\leq \|\bar{u}_h - u\|_{L^\infty} + ch^2 |\log h|^2 \\ &\leq ch^2 |\log h|^2. \end{aligned}$$

**Troisième partie :**

*concluons comme suit :*

$$\begin{aligned} u &\leq \alpha_h + ch^2 |\log h|^2 \\ &\leq u_h + ch^2 |\log h|^2 \quad (\alpha_h \leq u_h) \\ &\leq \beta_h + ch^2 |\log h|^2 \quad (\Psi_h \leq \beta_h) \\ &\leq u + ch^2 |\log h|^2. \end{aligned}$$

*Donc :*

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq ch^2 |\log h|^2.$$

# Bibliographie

- [1] R. Adams, *Sobolev Space*, New York : Academic Press, 1975.
- [2] G. Ailaine, S. M. KABER, *Algèbre linéaire numérique*, Ellipses, 2002.
- [3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle théories et application*. Dunod 1999.
- [4] H. Brézis, *Problèmes unilatéraux*, *J. Math. Pures Appl.*, 51, 1,1-168, 1972.
- [5] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique et matricielle*, Masson, 1988.
- [6] Ph. Cortey-Dumont. *On finite element approximation in the  $L^\infty$  norm of variational inequalities*. *Numerische mathematic* 47, 1985.
- [7] Ph. Cortey-Dumont *Sur les inéquations variationnelles à opérateur non coercif M2AN*. *Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 19, no 2 (1985),
- [8] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, *Mem. Accad. Naz. dei Lincei*, VIII(7), 1964.
- [9] R. Glowinsky, J.L.Lions , R.Tremolieres : *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, *studies in mathematics and its applications*, volume 8,(North-holland, Amsterdam, 1981).
- [10] R. Glowinsky : *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems* springer,1984.
- [11] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An introduction to Variational Inequalities an their Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [12] J. L. Lions, G. Stampacchia, *Variational inequalities*, *Comm. Pure Appl. Math.*, XX, 1967.
- [13] J. L. Lions, *Quelques m ethodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

- [14] U. Mosco, *An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.*
- [15] U. Mosco, *Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975*
- [16] J. Rappaz, M. Picasso, *Introduction à l'analyse numérique, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.*
- [17] P. A. Raviart, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1992.*
- [18] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Progresso della Scienze, 1933*
- [19] G. Stampacchia, *Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.*
- [20] G. Stampacchia, *Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.*

## ملخص

في هذا العمل درسنا مسألة تتعلق بالحاجز ممثلة بمراجعة تغيراتية ناقصية. من خلال دراسة المسألة المستمرة و المتقطعة. حيث يتم حصر الرتياب بواسطة التقريب بالعناصر المنتهية من الرتبة الاولى. الكلمات المفتاحية: المراجعة التغيراتية الناقصية - العناصر المنتهية - التقريبات.

## Résumé

Dans ce travail, nous étudions un problème d'obstacle représenté par une inéquation variationnelle elliptique, en étudiant le problème continu et discret.

On donne l'estimation d'erreur de l'approximation par éléments finis de degré 1.

Mots clés : Inéquation variationnelle elliptique- Éléments finis- Approximations.

## Abstract

In this work, we study an obstacle problem represented by an elliptic variational inequality, studying the continuous and discrete problem.

We give the error estimate by the finite element approximation of degree 1.

Key words : Elliptic variational inequalities- Finite element- Approximation .