



République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur
et de La Recherche Scientifique
Université Echahid Hamma Lakhdar d'ElOued



FACULTE DE TECHNOLOGIE

Département d'Hydraulique et de Génie Civil

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Génie Civil:

Filière : Génie Civil

Spécialité: Matériaux en Génie Civil

Thème

Modélisation numérique des poutres

Présenté par:

- Haithem Dou
- Krama abdelbari
- Mecheri mouhammed Elmahdi

Devant le jury composé de :

Président :

Examineur :

Encadreur : Bachir labioth

02/10/2023

Année universitaire : 2022/2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

La recherche a traversé de nombreux obstacles, mais j'ai essayé de les surmonter avec persévérance , louange à dieu et de sa part pour mes parents, mes frères et sœurs et mes amis, ils ont été comme un soutien et un soutien pour mener à bien la recherche.

Je ne dois pas oublier mes professeurs qui ont eu les plus grand rôle en me soutenant et en me donnant de précieuses informations ...

Je te donne mon message ...

Nous demandons à dieu tout-puissant de prolonger votre vie et de vous accorder le bien.

Nous remercions Dieu Tout-Puissant qui nous a permis de mener à bien cette recherche scientifique et qui l'a inspiré avec santé, bien-être et détermination.

Dieu merci, merci beaucoup.

*Nous adressons nos sincères remerciements et notre reconnaissance au professeur superviseur **labiodhbachir** pour tous les précieux conseils et informations qu'il nous a fournis et qui ont contribué à compléter le sujet de notre étude dans ses différents aspects.*

Et n'oubliez pas de soumettre l'aimable formulaire à tous les professeurs et professeurs d'université respectés..., Nous vous disons merci beaucoup pour tous vos efforts.

DEDICACE

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents. Que Dieu me les garde et que vie nous donne temps pour les remercier.

- *Mes beaux-parents*
- *Mes frères et mes sœurs,*
- *Toute ma famille*
- *A mes camarades de classe*
- *A tous mes fidèles amis*

DOU HAITHEM

DEDICACE

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents. Que Dieu me les garde et que vie nous donne temps pour les remercier.

- *Mes beaux-parents*
- *Mes frères et mes sœurs,*
- *Toute ma famille*
- *A mes camarades de classe*
- *A tous mes fidèles amis*

KRAMA ABDELBARI

DEDICACE

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents. Que Dieu me les garde et que vie nous donne temps pour les remercier.

- *Mes beaux-parents*
- *Mes frères et mes sœurs,*
- *Toute ma famille*
- *A mes camarades de classe*
- *A tous mes fidèles amis*

MECHERI MOUHAMMED ELMAHDI

Sommaire

Remerciements.....	III
DEDICACE.....	IV
DEDICACE.....	V
DEDICACE.....	VI
Sommaire.....	VII
Résumé.....	IX
Liste des figures	XII
Liste des tableaux:	XIII
NOTATIONS	XIV
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Recherche bibliographique sur la théorie des poutres	2
1.1-Introduction:	3
1.2-Historique:	3
1.3-Principes de modélisation:.....	3
1.3.1-Démarche:	3
1.3.2-modèle de la poutre:.....	4
1.3.3-Hypothèses pour les calculs:.....	6
1.4-Calculs de résistance et de déformée:.....	6
1.5-Théorie des poutres de Bernoulli:.....	7
1.5.1-Historique:.....	7
1.6-théorie poutres de timochincko:	7
1.7-Mécanique des milieux continus (MMC):.....	7
1.7.1-Le milieu continu:	8
1.7.2-Descriptions des milieux continus:	9
1.7.3- Loi de comportement:	10
1.7.4-Essais mécaniques :.....	10
Chapitre 2 : FORMULATION DES ELEMENTS FINIS EXISTANTS	11
2.1-Introduction:	12
2.2-Description:	12
2.3-Méthode des éléments finis:	12
2.3.1-Principe générale:.....	13
2.4-Dimensions:	15
2.5-Présentation de la méthode des éléments finis:	15
2.5.1-Domains d’application de la méthode des éléments finis:	16
2.5.2-Principe de la méthode des éléments finis:	17
2.6-Formulation de l’élément finis SB6-18:	17
2.6.1-Variables cinématiques et interpolation:.....	18

2.6.2-Déformation de membrane:	19
2.6.3-Déformation de flexion:.....	19
2.6.4-Forme discrétisée de W_{int}^e :	22
2.6.5-Matrice de masse:	24
2.6.6-Expression de W^e dans le repère global:.....	25
Chapitre 3 : ANALYSE NUMERIQUE	27
3.1-MATLAB:	28
3.1.1-Introduction au logiciel 'MATLAB':.....	28
3.1.2-Interface de MATLAB:.....	29
3.1.3-Lancer , et quitter MATLAB:	30
3.1.4-Fonction général et commandes :	30
3.2- Présentation du programme élément finis SB6-18:	32
3.3-Description du programme:	33
Chapitre 4:APPLICATION NUMERIQUE	35
4.1- Introduction:	36
4.2- Poutre mince modèle de bernouli:	36
4.2.1- Maillage $(2 \times 1 \times 1) \times 2$:.....	37
4.2.2- Maillage $(3 \times 1 \times 1) \times 2$:.....	38
4.2.3- Maillage $(4 \times 1 \times 1) \times 2$:.....	39
4.2.4- Maillage $(5 \times 1 \times 1) \times 2$:.....	40
4.2.5- Maillage $(6 \times 1 \times 1) \times 2$:.....	41
4.3-Poutre épaisse modèle de Timochincko:	42
4.3.1- Maillage $(2 \times 1 \times 1) \times 2$:.....	43
4.3.2- Maillage $(3 \times 1 \times 1) \times 2$:.....	44
4.3.3- Maillage $(4 \times 1 \times 1) \times 2$:.....	45
4.3.4- Maillage $(5 \times 1 \times 1) \times 2$:.....	46
4.3.5- Maillage $(6 \times 1 \times 1) \times 2$:.....	47
4.4- Poutre en flexion avec divers élancement:	48
4.4.1-Maillage $(10 \times 4 \times 1) \times 2$:.....	49
4.4.2-Maillage $(10 \times 5 \times 1) \times 2$:.....	50
4.4.3-Maillage $(10 \times 6 \times 1) \times 2$:.....	51
4.4.4-Maillage $(10 \times 7 \times 1) \times 2$:	52
4.5- Conclusion:.....	53
Conclusion générale.....	55
Bibliographie.....	57

Résumé

Les poutres c'est des éléments de structure qui sont suffisamment traitées par les théories de la résistance des matériaux, Cependant l'existence d'autres types de structures (plaques, coques ...), pouvant être raccordées avec les poutres pose un problème de liaison entre deux types d'éléments. Donc, l'utilisation des éléments finis qui peuvent à la fois représenter efficacement le comportement de ces structures et assurer la jonction entre ces éléments est devenue importante. Pour répondre à cette problématique, dans cette étude nous allons utiliser un élément fini de géométrie tridimensionnelle, La mise en œuvre numérique a été effectuée en utilisant le logiciel Matlab et les applications numériques réalisées ont montré la bonne performance de l'élément en terme de convergence vers la solution de référence, ces tests ont permis aussi de valider le comportement élastique linéaire de cet élément.

Mots clés : Poutre, Élément fini, Modélisation, Matlab.

Abstract

The beams are structural elements which are sufficiently treated by the theories of the resistance of materials, However the existence of other types of structures (plates, shells ...), which can be connected with the beams poses a problem of connection between two types of elements. Therefore, the use of finite elements which can both effectively represent the behavior of these structures and ensure the junction between these elements has become important. To answer this problem, in this study we will use a finite element of three-dimensional geometry, the numerical implementation was carried out using the Matlab software and the numerical applications carried out showed the good performance of the element in terms of convergence. towards the reference solution, these test have also makes it possible to validate the linear elastic behavior of this element.

Keywords: Beam, Finite element, Modeling, Matlab.

الملخص

الروافد هي عناصر إنشائية يتم معالجتها بشكل كاف من خلال نظريات مقاومة المواد، إلا أن وجود أنواع أخرى من الهياكل (صفائح، كمرات ...) والتي يمكن ربطها مع الروافد يطرح مشكلة الارتباط بين نوعين من العناصر. لذلك، أصبح استخدام العناصر المحدودة التي يمكن أن تمثل سلوك هذه الهياكل بشكل فعال وتضمن الوصل بين هذه العناصر أمراً مهماً.

للإجابة على هذه المشكلة سنستخدم في هذه الدراسة عنصراً محدوداً للهندسة ثلاثية الأبعاد، وتم التنفيذ العددي باستخدام برنامج الماتلاب وأظهرت التطبيقات العددية التي تم تنفيذها الأداء الجيد للعنصر من حيث التقارب نحو المرجع الحل، تتيح هذه الاختبارات أيضاً التحقق من صحة السلوك المرن الخطي لهذا العنصر.

الكلمات المفتاحية : الرافدة ، العناصر المحدودة، تصميم، الماتلاب.

Liste des figures

Chapitre 1 : Recherche bibliographique sur la théorie des poutres

Figure(1.1):Démarche pour l'étude des poutre	4
Figure(1.2):Quelques poutres classiques.....	5
Figure(1.3):Definition des termes.....	5
Figure(1.4):La modélisation consiste	5
Figure(1.5): hypothèse des petites et les grandes déformations	6

Chapitre 2 : FORMULATION DES ELEMENTS FINIS EXISTANTS

Figure(2.1): Classification des problèmes de la mécanique	16
Figure(2.2): Elément de référence SB6-18 et ses points d'intégration.....	18
Figure (2.3): Elément SB6–18 : les nœuds d'interpolations pour les deux faces supérieure et inférieure du prisme.....	20

Chapitre 3 : ANALYSE NUMERIQUE

Figure(3.1):image de candidature	29
Figure(3.2):interface de MATLAB	30
Figure(3.3):Fenêtre de commandes MATLAB	31
Figure (3.4): Description du programme élément fini SB6-18	32

Chapitre 4 : APPLICATION NUMERIQUE

Figure (4.1) :poutre console.....	36
Figure 4.2 :Courbe charges-Déplacements[15]	36
Figure 4.3 :Courbe charges-DéplacementsMaillage $(2 \times 1 \times 1) \times 2$	37
Figure 4.4 :Courbe charges-DéplacementsMaillage $(3 \times 1 \times 1) \times 2$	38
Figure 4.5 :Courbe charges-DéplacementsMaillage $(4 \times 1 \times 1) \times 2$	39
Figure 4.6 :Courbe charges-DéplacementsMaillage $(5 \times 1 \times 1) \times 2$	40
Figure 4.7 :Courbe charges-DéplacementsMaillage $(6 \times 1 \times 1) \times 2$	41
Figure 4.8 :Courbe charges-Déplacements.....	42
Figure 4.9 :Courbe charges-DéplacementsMaillage $(2 \times 1 \times 1) \times 2$	43
Figure 4.10 :Courbe charges-DéplacementsMaillage $(3 \times 1 \times 1) \times 2$	44
Figure 4.11 :Courbe charges-DéplacementsMaillage $(4 \times 1 \times 1) \times 2$	45
Figure 4.12 :Courbe charges-DéplacementsMaillage $(5 \times 1 \times 1) \times 2$	46
Figure 4.13 :Courbe charges-DéplacementsMaillage $(6 \times 1 \times 1) \times 2$	47
Figure 4.14 :Poutre en flexion	48
Figure 4.15 :Déplacements au point A Maillage $(10 \times 4 \times 1) \times 2$	49
Figure 4.16 :Déplacements au point A Maillage $(10 \times 5 \times 1) \times 2$	50
Figure 4.17 :Déplacements au point A Maillage $(10 \times 6 \times 1) \times 2$	51
Figure 4.18 :Déplacements au point A Maillage $(10 \times 7 \times 1) \times 2$	52

Liste des tableaux:

Chapitre 2 : FORMULATION DES ELEMENTS FINIS EXISTANTS

Tableau 2.1. Indices k et m.....	21
Tableau 2.2. Valeurs de PK et Pm.....	21
Tableau 2.3. Indices k et m.....	22
Tableau 2.4. Valeurs de PK et Pm.....	22
Tableau 2.6. Intégration numérique (1×2 points de Gauss-Hammer).....	25

Chapitre 4 : APPLICATION NUMERIQUE

Tableau 4.1 :Maillage (2×1×1)×2	37
Tableau 4.2:Maillage(3×1×1)×2	38
Tableau 4.3:Maillage(4×1×1)×2	39
Tableau 4.4 :Maillage(5×1×1)×2	40
Tableau 4.5 :Maillage(6×1×1)×2	41
Tableau 4.6 :Maillage(2×1×1)×2	43
Tableau 4.7 :Maillage(3×1×1)×2	44
Tableau 4.8 :Maillage(4×1×1)×2	45
Tableau 4.9 :Maillage(5×1×1)×2	46
Tableau 4.10 :Maillage(6×1×1)×2	47
Tableau 4.11 :Maillage(10×4×1)×2	49
Tableau 4.12 :Maillage(10×5×1)×2	50
Tableau 4.13 :Maillage(10×6×1)×2	51
Tableau 4.14 :Maillage(10×7×1)×2	52

NOTATIONS

Symbole	Notation
u	le champ de déplacement de l'élément
u_i	termes des déplacements nodaux
N_i	fonctions de forme iso-paramétriques linéaires
e	Déformation de membrane
W_{int}^e	Forme discrétisée
$V_{réf}$	volume de l'élément de référence
m	représente le nombre de points d'intégration (PI)
ρ	la masse volumique du matériau
Ω	Volume d'un corps solide
X, Y, Z	Coordonnées cartésiennes
u, v, w	Composantes du vecteur déplacement
ε	Tenseur des déformations
$\bar{\sigma}$	Tenseur des contraintes
$[Hm], [Hf]$	Matrice de comportement homogénéisées de membrane, et de flexion
$[T]$	Matrice de changement de base
C	matrice de comportement
ξ, η	coordonnées paramétriques
A	surface de l'élément
β	la rotation
$\langle u_n \rangle_{glob}$	variables nodales de l'élément dans le repère global
$[K]_{glob}$	matrice de rigidité dans le repère global

Introduction générale

Introduction générale

Les poutres c'est des éléments de structure qui sont suffisamment traitées par les théories de la résistance des matériaux, d'après ces théories on distingue :

- la théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement pour les poutres minces.
- la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du cisaillement pour les poutres épaisses.

Sachant que dans l'étude des structures généralement il existe d'autres types (plaques, coques ...), qui peuvent être raccordées avec les poutres, ce raccordement pose un problème de liaison entre deux types d'éléments de géométrie et de comportement différents.

Parmi les solutions adoptées pour résoudre cette difficulté on peut utiliser des éléments finis tridimensionnels qui peuvent à la fois représenter efficacement le comportement de ces structures et assurer la jonction entre ces deux types d'éléments. L'élément fini tridimensionnel utilisé dans cette étude, est un élément fini appartenant aux éléments de type solide-coque, ces éléments représentent aujourd'hui une alternative intéressante aux éléments finis solides et coques conventionnels. En effet, les éléments finis solide-coque combinent les avantages des formulations des éléments solides et des éléments coques

Dans le premier chapitre on donne une brève présentation de la théorie des poutres et une recherche bibliographique sur les éléments finis de types poutre existants dans la littérature.

Le deuxième chapitre aborde les détails de la formulation théorique de l'élément fini tridimensionnel SB6-18.

Le troisième chapitre consacré à la mise en œuvre numérique de l'élément fini tridimensionnel SB6-18, pour cela on présente en bref le logiciel Matlab, ensuite on donne l'algorithme général du programme Matlab pour l'élément fini SB6-18.

Des applications numériques ont été effectuées dans le quatrième chapitre en utilisant l'élément fini SB6-18, qui constitue une extension du travail de recherche commencé par Labiodh[12].

Enfin, les principales conclusions et perspectives concernant ce travail sont présentées dans la partie conclusion générale.

Chapitre 1

Recherche bibliographique sur la théorie des poutres

1.1-Introduction:

La **théorie des poutres** est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. On utilise deux modèles :

- la théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement ;
- la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du cisaillement.

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). *Stricto sensu*, une poutre est un élément de structure utilisé pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions.

1.2-Historique:

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. Ce dernier avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et l'on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au dix-neuvième siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

1.3-Principes de modélisation:

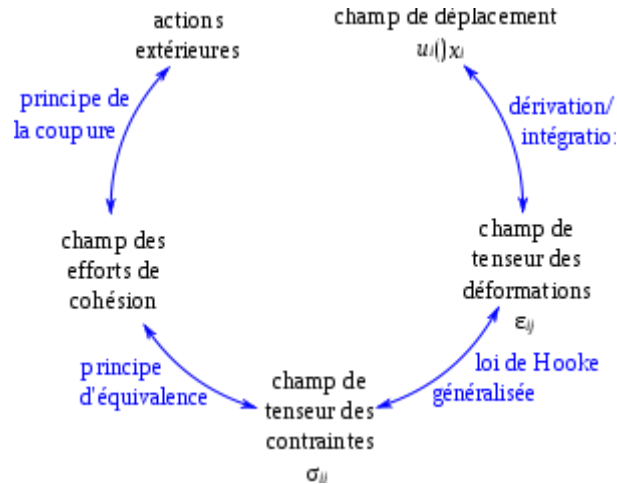
1.3.1-Démarche:

Pour étudier les poutres, on met en relation :

- les efforts de cohésion avec les efforts extérieurs, grâce au principe de la coupure ;
- les efforts de cohésion avec le tenseur des contraintes, grâce au principe d'équivalence ;
- le tenseur des contraintes avec le tenseur des déformations, grâce à la loi de Hooke généralisée ;

- et la forme finale de la poutre, c'est-à-dire le champ des déplacements, avec le champ de tenseur des déformations.

Le modèle de poutre permet de passer des efforts de cohésion au tenseur des contraintes ; il permet d'appliquer le principe d'équivalence.[1]



Figure(1.1):Démarche pour l'étude des poutre

1.3.2-modèle de la poutre:

On appelle « poutre » un solide engendré par des surfaces finies, appelées « sections droites », telles que :

- l'ensemble des centres de gravité des sections droites est une courbe continue et différentiable, appelée « courbe moyenne » ; son rayon de courbure est grand devant sa longueur ;
- les sections droites sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles « varient de manière continue et lente » ;
- la racine carrée de la surface des sections droites est petite devant la longueur de la courbe moyenne ;
- le matériau est homogène et isotrope.

Si le rayon de courbure est faible ou que la section varie brutalement, il faudra considérer les concentrations de contrainte.

Dans les cas les plus simples, notamment celui des poutres au sens « élément de structure » (fer, tube, etc.) la courbe moyenne est droite et les sections droites sont identiques.

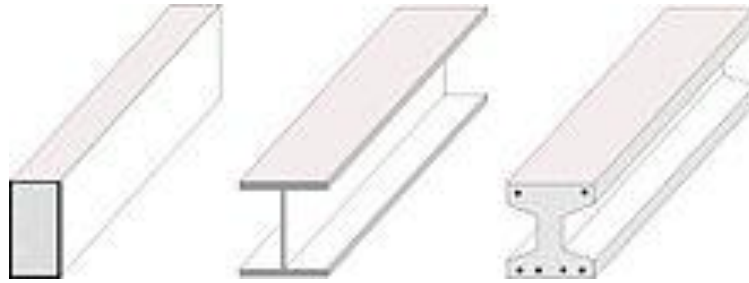
Mais on peut modéliser d'autres types de pièces. Par exemple, un arbre de transmission, un axe, un levier, un tuyau, un réservoir, ou même la coque d'un navire peuvent être modélisés par une poutre ; un ressort hélicoïdal (ressort à boudin) peut être considéré comme une poutre dont la courbe moyenne est hélicoïdale, et dont les sections droites sont des disques de même rayon.

On appelle « fibre » un volume généré par une petite portion d^2S de la section droite suivant une courbe parallèle à la courbe moyenne. On appelle « fibre neutre » la fibre générée par la courbe moyenne elle-même.

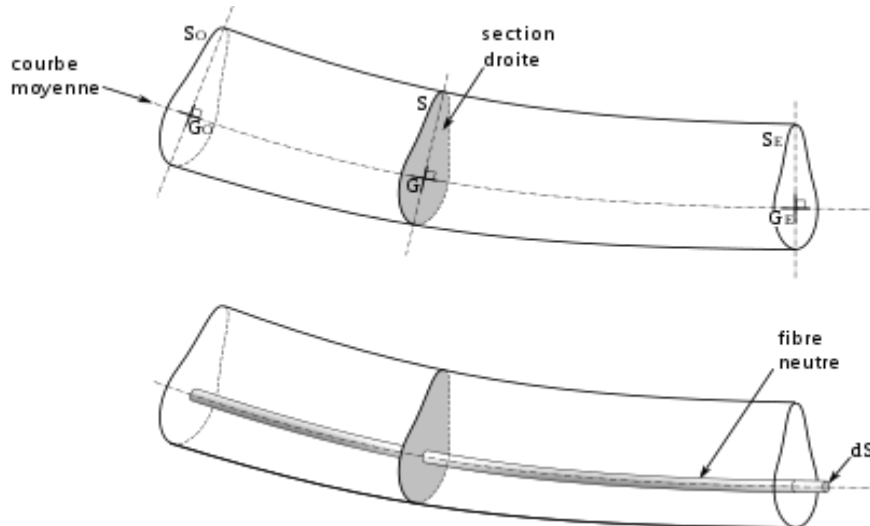
Pour simplifier, sauf indication contraire, nous dessinerons des poutres dont la courbe moyenne est une droite avant déformation.

Finalement, l'étape de modélisation consiste à :

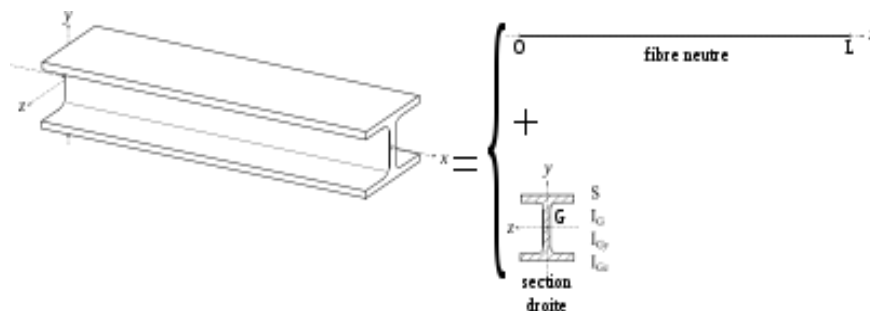
- d'une part considérer la fibre neutre seule, caractérisée par sa longueur L (et si la poutre n'est pas droite, par une fonction $y(x)$) ;
- d'autre part à considérer les sections droites, caractérisées par leur aire S (pour la traction-compression) et leurs moments quadratiques I_G (pour la torsion), I_{Gy} et I_{Gz} (pour la flexion).[1]



Figure(1.2):Quelques poutres classiques

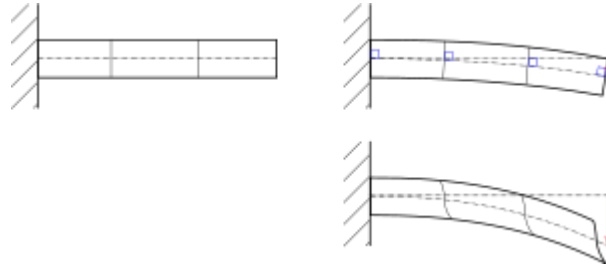


Figure(1.3):Definition des termes



Figure(1.4):La modélisation consiste

1.3.3-Hypothèses pour les calculs:



Figure(1.5): hypothèse des petites et les grandes déformations

Hypothèse des petites déformations (haut) : les sections droites restent planes et perpendiculaires à la courbe moyenne ;

pour les grandes déformations (bas), les hypothèses ne sont plus respectées, les sections droites deviennent gauches et ne sont plus perpendiculaires à la courbe moyenne.

La théorie des poutres est une application de la théorie de l'élasticité isotrope. Pour mener les calculs de résistance des matériaux, on considère les hypothèses suivantes :

- hypothèse de Bernoulli : au cours de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne ;
- les sections droites restent planes selon Navier-Bernoulli (pas de gauchissement).

L'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion : le risque de rupture est alors dû à l'extension des fibres situées à l'extérieur de la flexion, et la flèche est due au moment fléchissant. Cette hypothèse n'est pas valable pour les poutres courtes car ces dernières sont hors des limites de validité du modèle de poutre, à savoir que la dimension des sections doit être petite devant la longueur de la courbe moyenne. Le cisaillement est pris en compte dans le modèle de Timoshenko et Mindlin.[2]

1.4-Calculs de résistance et de déformée:

Le but est de déterminer pour chaque point :

- le tenseur des contraintes afin de vérifier qu'il n'y a pas rupture (état limite ultime, ELU) ;
- la déformée finale, afin de vérifier que la poutre garde des dimensions compatibles avec son utilisation (état limite en service, ELS).[2]

1.5-Théorie des poutres de Bernoulli:

- L'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion : le risque de rupture est alors dû à l'extension des fibres situées à l'extérieur de la flexion, et la flèche est due au moment fléchissant .

- La théorie des poutres d'Euler – Bernoulli (également connue sous le nom de théorie des poutres de l'ingénieur, théorie classique des poutres ou même théorie des poutres) est une simplification de la mécanique des solides qui donne des propriétés de calcul pour la portance et la déviation des poutres. Elle a été autorisée vers 1750, mais elle n'a été largement mise en œuvre qu'après l'aménagement de la tour Eiffel et de la grande roue. Après ces applications réussies, cette théorie est devenue la pierre angulaire de l'ingénierie et le début de la deuxième révolution industrielle. [3]

1.5.1-Historique:

Il existe un quasi consensus sur le fait que Galilée a fait les premières tentatives pour développer une théorie des poutres, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci a été le premier à faire des observations critiques dans ce sens. Da Vinci manquait de la loi de Hooke et du calcul différentiel pour compléter la théorie, tandis que les fausses hypothèses de Galilée entravaient ses progrès dans cette direction.

Le prix de Bernoulli porte le nom de Jacob Bernoulli, qui a fait les découvertes importantes. Leonhard Euler et Daniel Bernoulli ont été les premiers à développer une théorie utile vers 1750. La science et l'ingénierie étaient alors généralement considérées comme deux domaines très différents, et il y avait des doutes quant à la fiabilité des résultats mathématiques académiques pour des applications pratiques et sûres. Les ponts et les bâtiments ont continué à être conçus selon l'expérience antérieure (sans calculs mathématiques), lorsque la tour Eiffel et la grande roue ont prouvé la validité de la théorie pour une utilisation à grande échelle.[4]

1.6-théorie poutres de timochincko:

La théorie des poutres de Timoshenko considère que la section plane reste plane après déformation, mais pas nécessairement perpendiculaire à l'axe neutre. Elle est souvent choisie parce qu'elle peut prendre (approximativement) en compte l'influence des contraintes de cisaillement.[5]

1.7-Mécanique des milieux continus (MMC):

La **mécanique des milieux continus** est le domaine de la mécanique qui s'intéresse à la déformation des solides et à l'écoulement des fluides. Ce dernier point faisant l'objet de

l'article *Mécanique des fluides*, cet article traite donc essentiellement de la mécanique des solides déformables.

Le tableau suivant indique les divers domaines couverts par la mécanique des milieux continus.[6]

Mécanique des milieux continus	Mécanique des solides déformable	Elasticité	
		Déformation plastique	Rhéologie
	Mécanique des fluides	Fluides non newtoniens	
		Fluides newtoniens	

1.7.1-Le milieu continu:

Si l'on regarde la matière de « très près » (échelle nanoscopique), la matière est granulaire, faite de molécules. Mais à l'œil nu (donc en se plaçant à notre échelle), un objet solide semble continu, c'est-à-dire que ses propriétés semblent varier progressivement, sans à-coups.

L'hypothèse des milieux continus consiste à considérer des milieux dont les propriétés caractéristiques, c'est-à-dire celles qui nous intéressent — densité, élasticité, etc. — sont continues. Une telle hypothèse permet d'avoir recours aux outils mathématiques reposant sur les fonctions continues et/ou dérivables. En pratique, cela revient à considérer que le volume élémentaire de matière, bien que de taille très réduite à l'échelle usuelle (macroscopique) demeure important devant les « volumes » atomiques ou moléculaires, plus précisément possède une taille telle que l'on puisse négliger à tout instant les fluctuations du nombre de particules (atomes ou molécules) contenues dedans (cf. discussion dans l'article sur la notion solide parfait). Tout passage à la limite, auquel on procède pour définir les grandeurs mécaniques locales, sera sous-entendu en respectant ce critère : on définit donc des grandeurs « nivelées ». On procède de même en électromagnétisme classique pour définir les notions de densité de charge ou de courant, de façon à s'abstraire du caractère granulaire de la matière à l'échelle nanoscopique.

Des hypothèses supplémentaires peuvent éventuellement être faites ; ainsi un milieu continu peut être :

- homogène : ses propriétés sont les mêmes en tout point ;

- isotrope : ses propriétés ne dépendent pas du repère dans lequel elles sont observées ou mesurées.

De nombreux matériaux utilisés dans l'industrie sont à la fois homogènes et isotropes (métaux usinés ou bruts de fonderie). Cependant, de nombreux matériaux ne sont pas isotropes (tôles laminées, pièces forgées, pièces tréfilées, etc.) ; par ailleurs, l'utilisation de plus en plus fréquentes des matériaux composites a amené à étudier les milieux qui ne sont ni homogènes (sandwichs, béton granuleux), ni isotropes (fibres de verre, de carbone ou de kevlar maintenues dans une résine) mais pour lesquels l'hypothèse de continuité reste valable.[6]

1.7.2-Descriptions des milieux continus:

Pour décrire le milieu, on se donne les outils suivants :

1.7.2.1-Représentation lagrangienne:

En représentation lagrangienne, les fonctions décrivant les grandeurs dépendent des variables suivantes :

- la particule considérée (ou sa position M_0 à un temps de référence t_0)
- le temps

Si X est un champ lagrangien, alors on a :

$$X = X(M_0, t) = X(x_0, y_0, z_0, t) \quad (1.1)$$

La représentation lagrangienne suit chaque particule. Le champ lagrangien donne la valeur de la grandeur considérée portée par la particule qui au temps t_0 occupait le point M_0

1.7.2.2-Représentation eulérienne:

En représentation eulérienne, les fonctions décrivant les grandeurs dépendent des variables suivantes :

- le point géométrique considéré ;
- le temps.

Si X est un champ eulérien, alors on a :

$$X = X(M, t) = X(x, y, z, t) \quad (1.2)$$

Le champ eulérien donne la valeur de la grandeur considérée portée par la particule qui au temps t occupe le point M

1.7.2.3-Utilisation des deux représentations:

La représentation lagrangienne est souvent plus intuitive au départ, mais elle présente de nombreux défauts :

- un champ lagrangien est difficilement stationnaire ;
- il est parfois difficile de *suivre* une particule.

La représentation eulérienne est peut-être moins intuitive, mais elle a un avantage majeur : la simplicité de la description (par exemple d'un écoulement autour d'un solide).

En description eulérienne, il y a cependant un inconvénient : pour appliquer les théorèmes de la mécanique, il faut considérer un système fermé, or le champ eulérien donne les grandeurs en un point géométrique (donc les particules en ce point changent au cours du temps) ce qui est un système ouvert. Il faut donc être capable d'exprimer les dérivées des grandeurs pour chaque particule en fonction du champ eulérien. Pour cela on peut utiliser la dérivée particulaire, ou la formulation sous forme conservative des différents théorèmes ce qui concerne les équations de Navier-Stokes.

1.7.3- Loi de comportement:

Les lois de comportement modélisent le comportement des fluides ou solides par des lois empiriques liant deux grandeurs physiques (notamment des grandeurs liées aux efforts en fonction de grandeurs cinématiques) qui sont spécifiques à un matériau ou milieu donné. Elle permettent le calcul de la réponse de ce milieu à des stimuli externes, comme des champs ou des forces qui leur sont appliqués.

À titre d'exemple, les lois de comportement décrivent :

- en analyse structurale, la relation entre contraintes et déformations (voire de la vitesse de déformation) ;
- en mécanique des fluides newtoniens, la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de vitesse ;
- en hydro- ou aérodynamique, la traînée en fonction de la vitesse de l'écoulement...

1.7.4-Essais mécaniques :

Ces essais permettent de mesurer, pour un corps, les principales grandeurs caractéristiques liées à la matière dont il est constitué.

Les propriétés viscoélastiques caractérisent complètement un matériau (solide, pâteux ou liquide). La DM(T)A permet d'accéder aux grandeurs intrinsèques, ainsi que la rhéomètre en oscillation (hors échantillon solide dans ce dernier cas).[6].

Chapitre 2 :
FORMULATION DES
ELEMENTS FINIS
EXISTANTS

2.1-Introduction:

En analyse numérique, la méthode des éléments finis (MEF, ou FEM pour *finiteelementmethod* en anglais) est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques (mécaniques, thermodynamiques, acoustiques, etc.).

Cette méthode permet par exemple de calculer numériquement le comportement d'objets même très complexes, à condition qu'ils soient continus et décrits par une équation aux dérivées partielles linéaire : mouvement d'une corde secouée par l'un de ses bouts, comportement d'un fluide arrivant à grande vitesse sur un obstacle, déformation d'une structure métallique, etc.

2.2-Description:

La méthode des éléments finis fait partie des outils de mathématiques appliquées. Il s'agit de mettre en place, à l'aide des principes hérités de la formulation variationnelle ou formulation faible, un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles (ou EDP) sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact. On parle couramment de conditions de type Dirichlet (valeurs aux bords) ou Neumann (gradients aux bords) ou de Robin (relation gradient/valeurs sur le bord).

Il s'agit donc avant tout de la résolution approchée d'un problème, où, grâce à la formulation variationnelle, les solutions du problème vérifient des conditions d'existence plus faibles que celles des solutions du problème de départ et où une discrétisation permet de trouver une solution approchée. Comme de nombreuses autres méthodes numériques, outre l'algorithme de résolution en soi, se posent les questions de qualité de la discrétisation :

- existence de solutions ;
- unicité de la solution ;
- stabilité ;
- convergence ;
- mesure d'erreur entre une solution discrète et une solution unique du problème initial.[7]

2.3-Méthode des éléments finis:

Sont décrits ici le cadre général de la méthode des éléments finis, ainsi que le cas pratique le plus courant, considérant des équations aux dérivées partielles linéaires dont on

cherche une approximation par des fonctions affines.

2.3.1-Principe générale:

Considérons un domaine Ω (typiquement une portion de l'espace) dont la frontière est notée $\delta\Omega$ ou Σ . Nous cherchons à déterminer une fonction u définie sur Ω , qui est une solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) pour des conditions aux limites données. L'EDP décrit le comportement physique du système, il s'agit par exemple des lois de l'élasticité pour un problème de résistance des matériaux ou des équations de Maxwell pour les problèmes d'électromagnétisme. Les conditions aux limites sont les contraintes s'exerçant sur le système. Par exemple, pour un problème de résistance des matériaux, on impose le déplacement de certaines parties du système, par exemple, on impose qu'une zone d'appui soit immobile, et on impose des efforts sur d'autres zones (poids, pression de contact...).

La méthode des éléments finis (MEF) permet de résoudre de manière discrète et approchée ce problème ; on cherche une solution approchée « suffisamment » fiable.

La discrétisation consiste à « découper » le domaine Ω , c'est-à-dire à chercher une solution du problème sur un domaine polygonal ou polyédrique par morceaux ; il y a donc une redéfinition de la géométrie. Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème. Dans la MEF, cet espace est défini à l'aide du maillage du domaine (ce qui explique aussi pourquoi il est nécessaire d'approcher la géométrie). Le maillage du domaine permet d'en définir un pavage dont les pavés sont les *éléments finis*.

Sur chacun des éléments finis, il est possible de linéariser l'EDP, c'est-à-dire de remplacer l'équation aux dérivées partielles par un système d'équations linéaires, par approximation. Ce système d'équations linéaires peut se décrire par une matrice ; il y a donc une matrice par élément fini. Cependant, les conditions aux frontières sont définies sur les frontières du système global et pas sur les frontières de chaque élément fini ; il est donc impossible de résoudre indépendamment chaque système. Les matrices sont donc réunies au sein d'une matrice globale. Le système d'équations linéaires global est résolu par l'ordinateur (des systèmes simples peuvent être résolus à la main et constituent en général des exercices d'apprentissage).

L'EDP est résolue aux nœuds du maillage, c'est-à-dire que la solution est calculée en des points donnés (résolution discrète) et non en chaque point du domaine Ω . Cela nécessite de pouvoir interpoler, c'est-à-dire déterminer les valeurs en tout point à partir des valeurs connues en certains points. On utilise en général des fonctions polynomiales. Un élément fini est la donnée d'une cellule élémentaire et de fonctions de base de l'espace d'approximation

dont le support est l'élément, et définies de manière à être interpolantes (voir Fonctions de base).

Nous voyons ici poindre trois sources d'erreurs, c'est-à-dire d'écart entre la solution calculée et les valeurs réelles :

- la modélisation de la réalité : le domaine Ω correspond en général à des pièces matérielles, le calcul se fonde sur des versions idéales (sans défaut) des pièces, de la matière et des conditions aux limites ; cette source d'erreur n'est pas spécifique à la méthode des éléments finis, et peut être prise en compte par la méthode contrainte-résistance ;

- la géométrie idéale et continue est remplacée par une géométrie discrète, et les valeurs sont interpolées entre des points ; plus les points sont espacés, plus la fonction d'interpolation risque de s'écarter de la réalité, mais à l'inverse, un maillage trop fin conduit à des temps de calculs extrêmement longs et nécessite des ressources informatiques (en particulier mémoire vive) importantes, il faut donc trouver un compromis entre coût du calcul et précision des résultats ;

- s'agissant de calculs numériques, il se produit inévitablement des erreurs d'arrondi, les nombres étant représentés par un nombre fini d'octets.

Toute l'habileté de l'ingénieur consiste à maîtriser ces erreurs, notamment :

- en simplifiant la géométrie (*defeaturing*), en enlevant des détails qui se situent loin des zones que l'on veut étudier et ayant une faible influence sur le résultat ;

- en choisissant des maillages adaptés, par exemple, des maillages de type poutre pour des pièces élancées, ou de type coque pour des pièces fines, en découpant la pièce pour pouvoir faire des maillages réguliers sur certaines zones, en affinant le maillage dans les zones critiques...

- en ayant un regard critique sur le résultat.

Bien qu'il existe de nombreux logiciels exploitant cette méthode et permettant de « résoudre » des problèmes dans divers domaines, il est important que l'utilisateur ait une bonne idée de ce qu'il fait, notamment quant au choix du maillage et du type d'éléments qui doivent être adaptés au problème posé : aucun logiciel ne fait tout pour l'utilisateur, et il faut toujours garder un œil critique vis-à-vis de solutions approchées. Pour cela il existe des indicateurs d'erreur et des estimateurs d'erreur qui permettent d'ajuster les différents paramètres.

La solution trouvée, il reste cependant à déterminer les caractéristiques de la méthode ainsi développée, notamment l'unicité de l'éventuelle solution ou encore la stabilité numérique du schéma de résolution. Il est essentiel de trouver une estimation juste de l'erreur liée à la discrétisation et montrer que la méthode ainsi écrite converge, c'est-à-dire que l'erreur tend

vers 0 si la finesse du maillage tend elle aussi vers 0.

Dans le cas d'une EDP linéaire avec opérateur symétrique (comme l'est l'opérateur laplacien), il s'agit finalement de résoudre une équation algébrique linéaire, inversible dans le meilleur des cas.[8]

2.4-Dimensions:

Pour l'explication, nous développons ici la méthode des éléments finis en deux dimensions à valeurs réelles. On suppose que les équations étudiées sont des équations différentielles d'ordre deux.

La méthode est généralisable à des cadres d'espaces de dimension différente ou pour des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur :

- on traite ici le cas d'une solution réelle à une EDP ; les cas où la dimension de la solution serait plus grande se traitent de façon similaire mais nécessitent des écritures plus complètes ; les cas les plus couramment rencontrés sont la dimension 1 (comme ici), 2 ou 3 (pour des problèmes de mécanique), 6 ou 12 (pour des problèmes d'électromagnétisme respectivement réels ou complexes) ;

- les degrés de différentiation supérieurs sont ramenés à un degré moindre par la méthode classique de réduction de degré : on fait intervenir des variables supplémentaires, c'est-à-dire des dérivées partielles des variables de départ (exemple classique : les EDP de la mécanique statique des poutres font intervenir la dérivation partielle d'ordre 4) ; il est parfois possible, pour des degrés supérieurs, d'appliquer plusieurs fois les méthodes de formulation variationnelles afin d'obtenir des ordres plus faibles — en tout cas lorsque le degré de dérivation est pair.

Bien que théoriquement la méthode soit transposable en dimensions supérieures du support, techniquement la complexité de création des discrétisations croît avec la dimension... et pratiquement, on résout rarement des problèmes en dimensions supérieures à 3 — y compris des problèmes de dynamique en espace à 3 dimensions

qui pourraient être traités en quatre dimensions mais sont traités en réalité avec une méthode mixte éléments finis « en espace » et en différences finies « en temps ».[8]

2.5-Présentation de la méthode des éléments finis:

La résolution analytique des problèmes mécaniques ne peut se faire que dans un nombre de cas limité, cependant les méthodes numériques basées sur la discrétisation de ses problèmes, présentent une alternative très efficace, souvent utilisées dans le domaine de la mécanique pour résoudre des problèmes complexes. La méthode des éléments finis est de

toutes ses méthodes de discrétisation la plus utilisée car elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe, elle couvre de nombreux domaines de la physique. Les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation et de simulation) la rendent facile à la mise en œuvre. La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode est que sa formulation utilise des procédés standards qui se répètent au cours de la résolution de problèmes de natures différentes.

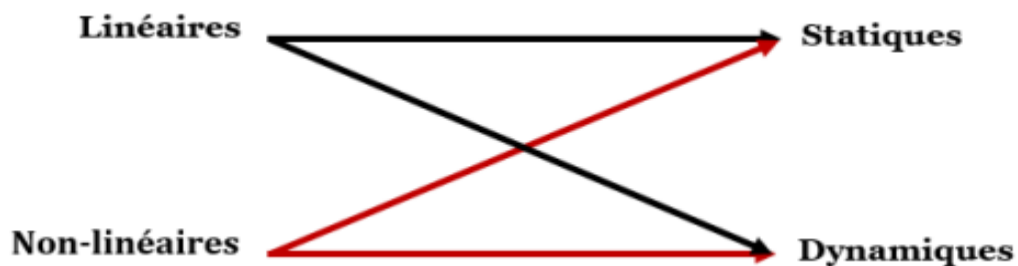
Cette méthode est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis. [9]

2.5.1-Domains d'application de la méthode des éléments finis:

Les domaines d'application de la méthode des éléments finis sont très larges et très variés. En général pour les champs d'application de cette méthode sont :

1. La mécanique des milieux continus solides
2. La mécanique des milieux continus fluides
3. Analyzethermae
4. Electromagnetism et l'électrostatique

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus solides, on peut classer les problèmes de la manière suivante (figure 2.1) :



Figure(2.1): Classification des problèmes de la mécanique

•Statique linéaire

Ce type d'analyse concerne principalement les domaines où les matériaux élastiques linéaires. On cherche la déformation du matériau (ϵ) et la contrainte (σ) pour différents types de sollicitations.

•Dynamique linéaire

La dynamique linéaire étudie les structures élastiques linéaires soumises à des efforts

cycliques (vibrations forcées) ou à des sollicitations initiales (vibrations libres). Dans ce type d'analyses on recherche les déplacements et éventuellement les vitesses et les accélérations qui donnent les fréquences et les modes propres (analyse modale)

• **Les problèmes non linéaires**

Il existe trois classes de problèmes non linéaires :

Les non linéarités géométriques : Ce type d'analyse intervient lorsque les déplacements et les déformations ne sont plus petits. Dans ce cas la rigidité de la structure et les efforts dépendent des déplacements (inconnus). Ce type de non linéarité est souvent rencontré dans les études de la mise en forme des matériaux, dans le flambage et dans le post-flambage.

Les non linéarités de comportement : Lorsque le comportement du matériau n'est pas élastique linéaire, la rigidité de la structure dépend de la déformation. Le problème devient donc non linéaire. Ce type de non linéarité est généralement constaté dans le cas de la plasticité, la viscoplasticité et l'endommagement.

Les non linéarités de contact : Si au cours de la déformation les appuis changent, la rigidité de la structure sera modifiée, le problème est donc non linéaire. Ce problème est caractéristique de la mise en forme comme par exemple l'emboutissage d'une tôle. [10]

2.5.2-Principe de la méthode des éléments finis:

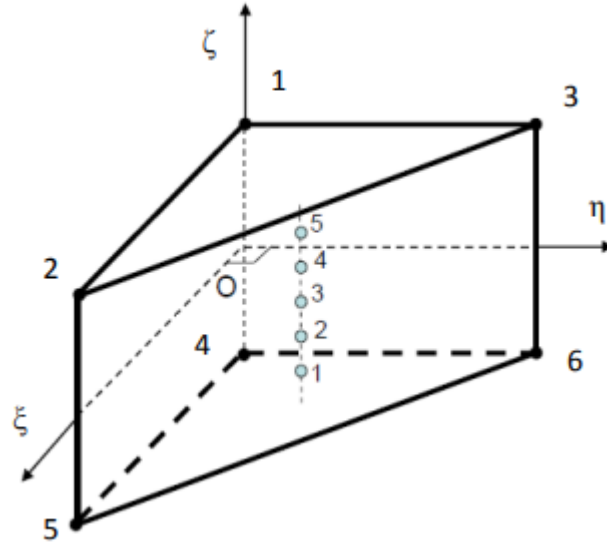
La méthode des éléments finis consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.[11]

- **Etape 1** : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites
- **Etape 2** : Division du domaine en sous domaines.
- **Etape 3** : Approximation sur un élément.
- **Etape 4** : Assemblage et application des conditions aux limites.
- **Etape 5** : Résolution du système global .

2.6-Formulation de l'élément finis SB6-18: [12]

L'élément SB6-18 est formulé dans les axes locaux du plan moyen. Les directions x , y , z sont respectivement parallèles aux axes ξ , η , ζ de l'espace de référence. La figure 4.1 représente la géométrie d'un élément de référence SB6-18 et ses points d'intégration.

Par souci de concision, seules les relations qui n'ont pas été mentionnées dans le chapitre précédent sont exposées.



Figure(2.2): Elément de référence SB6-18 et ses points d'intégration

2.6.1-Variables cinématiques et interpolation:

L'élément SB6-18 est un élément linéaire iso-paramétrique. Les coordonnées spatiales (x, y, z) sont reliées aux coordonnées du nœud i (x_i, y_i, z_i) au moyen des fonctions de forme N_i par les formules :

$$x = \sum_{i=1}^6 x_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^6 y_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad ; \quad z = \sum_{i=1}^6 z_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.1)$$

Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour définir le champ de déplacement de l'élément u en termes des déplacements nodaux u_i :

$$u = \sum_{i=1}^6 u_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.2)$$

Avec:

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad et \quad u_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Pour poursuivre les calculs, on se donne des fonctions de forme iso-paramétriques linéaires $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ associées à l'élément prismatique à six nœuds :

$$N(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-\xi)\eta \\ (1-\xi)\zeta \\ (1-\xi)(1-\eta-\zeta) \\ (1+\xi)\eta \\ (1+\xi)\zeta \\ (1+\xi)(1-\eta-\zeta) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

L'origine du repère est confondue avec le coin droit du triangle du plan médian de l'élément (celui qui possède un angle droit, voir Figure 2.2). Ces fonctions de forme transforment un prisme régulier dans l'espace (ξ, η, ζ) en un prisme quelconque dans l'espace (x, y, z) .

Sous l'hypothèse de petits déplacements où le découplage des effets de membrane et de flexion est effectif, les déformations se caractérisent par l'opérateur de déformation discrétisé de membrane et de flexion.

2.6.2-Déformation de membrane:

Les déformations de membrane en fonction des déplacements nodaux sont données par :

$$\{e\} = [B_m]\{u_n\} \quad (2.5)$$

Avec:

$$[B_m] = [[B_{m1}], [B_{m2}]] \quad (2.6)$$

Les matrices $Bm1$ et $Bm2$ représentent l'opérateur de déformation de membrane qui relie le déplacement à la déformation pour les deux faces triangulaires supérieure et inférieure du prisme respectivement, et qui sont définies suivant la formulation de l'élément triangulaire CST.

$$[B_{m1}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_3 + y_2 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & -y_3 + y_2 & 0 & -x_3 & y_3 & 0 & x_2 & -y_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$[B_{m2}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_6 + y_5 & 0 & 0 & y_6 & 0 & 0 & -y_5 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 - x_5 & 0 & 0 & -x_6 & 0 & 0 & x_5 & 0 \\ x_6 - x_5 & -y_6 + y_5 & 0 & -x_6 & y_6 & 0 & x_5 & -y_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2.6.3-Déformation de flexion:

$$\{\chi\} = [B_f]\{u_n\} \quad (2.9)$$

Avec:

$$[B_f] = [[B_{f1}], [B_{f2}]] \quad (2.10)$$

Les matrices $Bf1$ et $Bf2$ représentent l'opérateur de déformation de flexion qui relie le déplacement à la déformation pour les deux faces triangulaires supérieure et inférieure du prisme respectivement, et qui sont définies suivant la formulation de l'élément triangulaire DKT (voir figure 2.3).

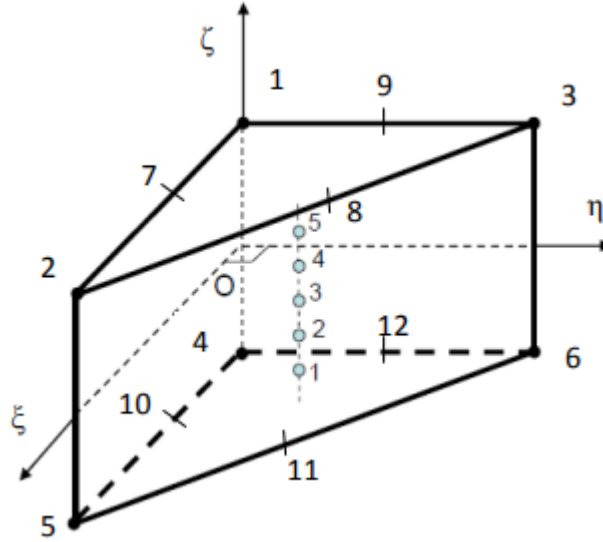


Figure (2.3): Elément SB6-18 : les nœuds d'interpolations pour les deux faces supérieure et inférieure du prisme

Face supérieure :

$$[B_{f1}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Dans les vecteurs N seuls les termes de la flexion sont considérés :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^x \rangle \quad (2.12)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^y \rangle \quad (2.13)$$

N_{11}^x , N_{21}^x , N_{31}^x et N_{11}^y , N_{21}^y , N_{31}^y sont donnés par :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m, \quad N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (2.14)$$

Les indices k et m sont relatifs aux deux côtés ayant le sommet i point commun (voir tableau 2.1), les fonctions P_k et P_m sont définies par le tableau 2.2.

Tableau 2.1. Indices k et m

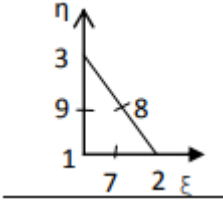
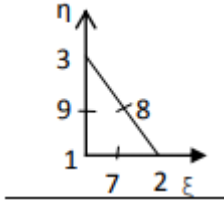
	Nœud sommet i	Côté k (i-j)	Côté m (i-j)
	1	7 (1-2)	9(3-1)
	2	8(2-3)	7(1-2)
	3	9(3-1)	8(2-3)

Tableau 2.2. Valeurs de PK et Pm

	P_k
	(k= 7 à 9)
	$P7=4\lambda\xi$
	$P8=4\xi\eta$
	$P9=4\eta\lambda$

$$C_k = \frac{x_{ij}}{L_k}, \quad S_k = \frac{y_{ij}}{L_k}, \quad L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

Face inférieure :

$$[B_{f2}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_6 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_6 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_5 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_6 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_5 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Dans les vecteurs N seuls les termes de la flexion sont considérés :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{51}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{61}^x \rangle \quad (2.17)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{41}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{51}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{61}^y \rangle \quad (2.18)$$

sont donnés par : N_{41}^x N_{51}^x N_{61}^x et N_{41}^y N_{51}^y N_{61}^y

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m, \quad N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (2.19)$$

Les indices k et m sont relatifs aux deux côtés ayant le sommet i point commun (voir tableau 2.3), les fonctions Pk et Pm sont définies par le tableau 2.4.

Tableau 2.3. Indices k et m

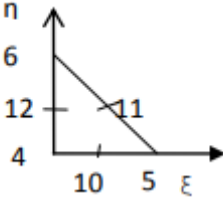
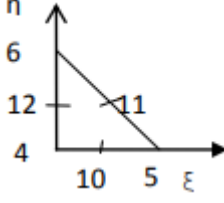
	Nœud sommet i	Côté k (i-j)	Côté m (i-j)
	4	10(4-5)	12(6-4)
	5	11(5-6)	10(4-5)
	6	12(6-4)	11(5-6)

Tableau 2.4. Valeurs de PK et Pm

	P_k
	(k= 10 à 12)
	$P_{10}=4\lambda\xi$
	$P_{11}=4\xi\eta$
	$P_{12}=4\eta\lambda$

C_k , S_k et L_k sont donnés par la relation (2.15).

Les détails du calcul de la matrice B_f sont exposés dans l'Annexe B.

2.6.4-Forme discrétisée de W_{int}^e :

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [K] \{u_n\} \quad (2.20)$$

La matrice de rigidité élémentaire est:

$$[K] = [K_m] + [K_f] \quad (2.21)$$

Les rigidités de membrane et de flexion sont obtenues par intégration numérique en utilisant 5 points d'intégration qui se trouvent sur la même droite suivant l'épaisseur.

Leurs coordonnées (ξ , η , ζ) et leurs poids d'intégration sont les racines du polynôme de

Gauss–Legendre données dans le tableau 2.5 :

Pour la membrane :

$$[K_m] = \int_V [B_m]^T [H_m] [B_m] dV \quad (2.22)$$

$$[K_m] = \int_{V_{réf}} ([B_m]^T [H_m] [B_m]) detJ d\xi d\eta d\zeta \quad (2.23)$$

$$[K_m] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_i \omega_j \omega_k ([B_m]^T [H_m] [B_m] detJ) \quad (2.24)$$

Pour la flexion :

$$[K_f] = \int_V [B_f]^T [H_f] [B_f] dV \quad (2.25)$$

$$[K_f] = \int_{V_{réf}} ([B_f]^T [H_f] [B_f]) detJ d\xi d\eta d\zeta \quad (2.26)$$

$$[K_f] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_i \omega_j \omega_k ([B_f]^T [H_f] [B_f] detJ) \quad (2.27)$$

$V_{réf}$: volume de l'élément de référence.

m : représente le nombre de points d'intégration (PI) dans les directions ζ, η, ξ

Tableau 2.5. Intégration numérique (5 points de Gauss-Legendre)

PI	ξ	η	ζ	$\omega(\xi, \eta, \zeta)$
1	1/3	1/3	-0.906179845938664	0.236926885056189
2	1/3	1/3	-0.538469310105683	0.478628670499366
3	1/3	1/3	0	0.568888888888889
4	1/3	1/3	0.538469310105683	0.478628670499366
5	1/3	1/3	0.906179845938664	0.236926885056189

Avec H_m et H_f : matrice de comportement homogénéisé de membrane et de flexion.

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$[H_m] = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson.

Les efforts résultants (effort normal et moment de flexion):

$$[N] = [H_m]\{e\} \quad , \quad [M] = [H_f]\{\chi\} \quad (2.30)$$

Suite aux nombreux tests numériques effectués, les matrices k_m et k_f ont été multipliées par les coefficients : $c_1=1.15\sqrt{h}$ et $c_2=0.60808h\sqrt{h/12}$ respectivement, le rôle de ces deux coefficients est d'améliorer l'approximation de déplacement en membrane et en flexion. Cette technique a été utilisée par Wang [WAN17], Trinh [TRI09], et Flanagan et Belytschko [FLA81].

2.6.5-Matrice de masse:

La matrice de masse a la forme classique suivante :

$$m = \int_V [N_q]^T \rho [N_q] dV = \int_{V_{réf}} [N_q]^T \rho [N_q] detJ dV_r \quad (2.31)$$

Où ρ est la masse volumique du matériau

N_q : les fonctions de forme de l'élément SB6-18

$$N_q = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$$

En substituant la relation précédente dans l'équation (2.31), on obtient la matrice de masse de dimensions (18 x 18):

$$m = \int_{V_{ref}^e} \rho \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \dots & N_1 N_6 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_6 N_1 & \dots & N_6 N_6 \end{bmatrix} & [0] & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \dots & N_1 N_6 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_6 N_1 & \dots & N_6 N_6 \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & [0] & \begin{bmatrix} N_1 N_1 & \dots & N_1 N_6 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_6 N_1 & \dots & N_6 N_6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} detJ dV_r$$

Pour déterminer la matrice de masse de l'élément SB6-18 on utilise un schéma d'intégration de 1×2 points de Gauss-Hammer (tableau 2.6).

$$m = \sum_{i=1}^{NPI} \omega_i \left([N_q]^T \rho [N_q] detJ \right) \quad (2.32)$$

Tableau 2.6. Intégration numérique (1×2 points de Gauss-Hammer)

PI	ξ	η	ζ	$\omega(\xi, \eta, \zeta)$
1	1/3	1/3	0. 577350269189625	0.5
2	1/3	1/3	-0. 577350269189625	0.5

2.6.6-Expression de W^e dans le repère global:

Les déplacements dans le repère global U, V, W sont reliés aux quantités locales par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [Q_1]^T \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

$$[Q_1]^T = \begin{Bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{2Y} & t_{2Z} \\ n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Les composantes de $[Q_1]^T$ relatives au triangle de la face supérieure du prisme sont données explicitement par les équations (3.7), (3.9) et (3.10). Les composantes de $[Q_2]^T$ relatives au triangle de la face inférieure sont obtenues par les mêmes relations qui définissent $[Q_1]^T$ en remplaçant les nœuds 1, 2, 3 par les nœuds 4, 5, 6.

Soit $\langle u_n \rangle_{glob}$, les variables nodales de l'élément dans le repère global :

$$\langle u_n \rangle_{glob} = \langle \dots : U_i \quad V_i \quad W_i : i = \text{varie de 1 à 6} \dots \rangle \quad (2.35)$$

Nous avons donc:

$$\{u_n\} = [T]\{u_n\}_{glob} \quad (2.36)$$

Avec :

$$[T]_{(18 \times 18)} = \begin{bmatrix} [T_1] & [0] \\ [0] & [T_2] \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$[T_1]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q_1]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q_1]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q_1]^T \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$[T_2]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q_2]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q_2]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q_2]^T \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

La matrice de rigidité et la matrice de masse dans le repère global :

$$[K]_{glob} = [T]^T [K] [T] \quad (2.40)$$

$$[m]_{glob} = [T]^T [m] [T] \quad (2.41)$$

Chapitre 3 :
ANALYSE
NUMERIQUE

3.1-MATLAB:

3.1.1-Introduction au logiciel 'MATLAB':

MATLAB (« *matrix laboratory* ») est un langage de script émulé par un environnement de développement du même nom ; il est utilisé à des fins de calcul numérique. Développé par la société The MathWorks, MATLAB permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs, et peut s'interfacer avec d'autres langages comme le C, C++, Java, et Fortran.

Les utilisateurs de MATLAB (environ 4 millions en 2019) sont de milieux très différents tels que l'ingénierie, les sciences et l'économie, dans un contexte aussi bien industriel que pour la recherche.[13]

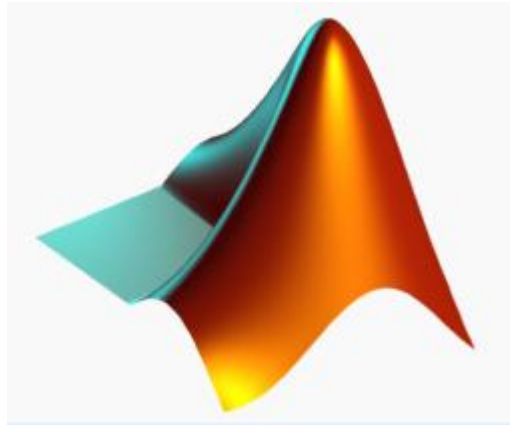
MATLAB pour Matrix Labor tory, est une application qui a été conçue afin de fournir un environnement de calcul matriciel simple, efficace, interactif et portable, permettant la mise en œuvre des algorithmes développés dans le cadre des projets linpack et eispack.

MATLAB est constitué d'un noyau relativement réduit, capable d'interpréter puis d'évaluer les expressions a numériques matricielles qui lui sont adressées :

- soit directement au clavier depuis une fenêtre de commande.
- soit sous forme de séquences d'expressions ou scripts enregistrées dans des fichiers-texte appelés m-files (ou fichiers .m) et exécutées depuis la fenêtre de commande.
- soit plus rarement sous forme de fichiers binaires appelés mex-files (ou fichiers .mex) générés à partir d'un compilateur C ou fortran.

Ce noyau est complété par une bibliothèque de fonctions prédéfinies, très souvent sous forme de fichiers m-files, et regroupés en paquetages ou toolboxes. A côté des toolboxes requises local et matlab, il est possible d'ajouter des toolboxes spécifiques à tel ou tel problème mathématique, OptimizationToolbox, Signal ProcessingToolbox par exemple, ou encore des toolboxes créées par l'utilisateur lui-même. Un système de chemin d'accès ou path permet de préciser la liste des répertoires dans lesquels.

MATLAB trouvera les différents fichiers m-files utilisés.[14]



Figure(3.1):image de candidature

3.1.2-Interface de MATLAB:

Le logiciel propose un environnement de travail composé de multiples fenêtres. Nous pouvons distinguer quatre blocs:

- Command window (console d'exécution): à l'invite de commande `>>`, l'utilisateur peut entrer les instructions à exécuter. Il s'agit de la fenêtre principale de l'interface de MATLAB (mode interactif).
- Current directory (répertoire courant): permet de naviguer et de visualiser le contenu du répertoire courant de l'utilisateur. Les programmes de l'utilisateur doivent être situés dans ce répertoire pour être visible et donc exécutable.
- Works pace (espace de travail): permet de visualiser les variables définies, leur type, la taille occupée en mémoire...
- Command historié: historique des commandes que l'utilisateur a exécutées. Il est possible de faire glisser ces commandes vers la fenêtre de commande.



Figure(3.2):interface de MATLAB

3.1.3-Lancer , et quitter MATLAB:

Dans l'environnement Unix, pour lancer MATLAB on tape la commande `matlab` sur la ligne de commande active; dans les environnements Windows ou MacOS, il suffit de cliquer sur l'icône de l'application. La fenêtre de commande de MATLAB s'ouvre alors et on tape les commandes ou les expressions à évaluer à droite du prompt `>`. Le processus d'évaluation est déclenché par la frappe de la touche **<enter>**.

A chaque début session, l'utilisateur indiquera à MATLAB que le répertoire `myMatlab` défini précédemment est le répertoire de travail de la session en tapant la commande `cd` suivie du chemin d'accès au répertoire `myMatlab`.

On quitte MATLAB en tapant `quit` dans la fenêtre de commande ou en sélectionnant `quit` dans le menu `File` de la barre de menu pour les versions Windows ou MacOS.

3.1.4-Fonction général et commandes :

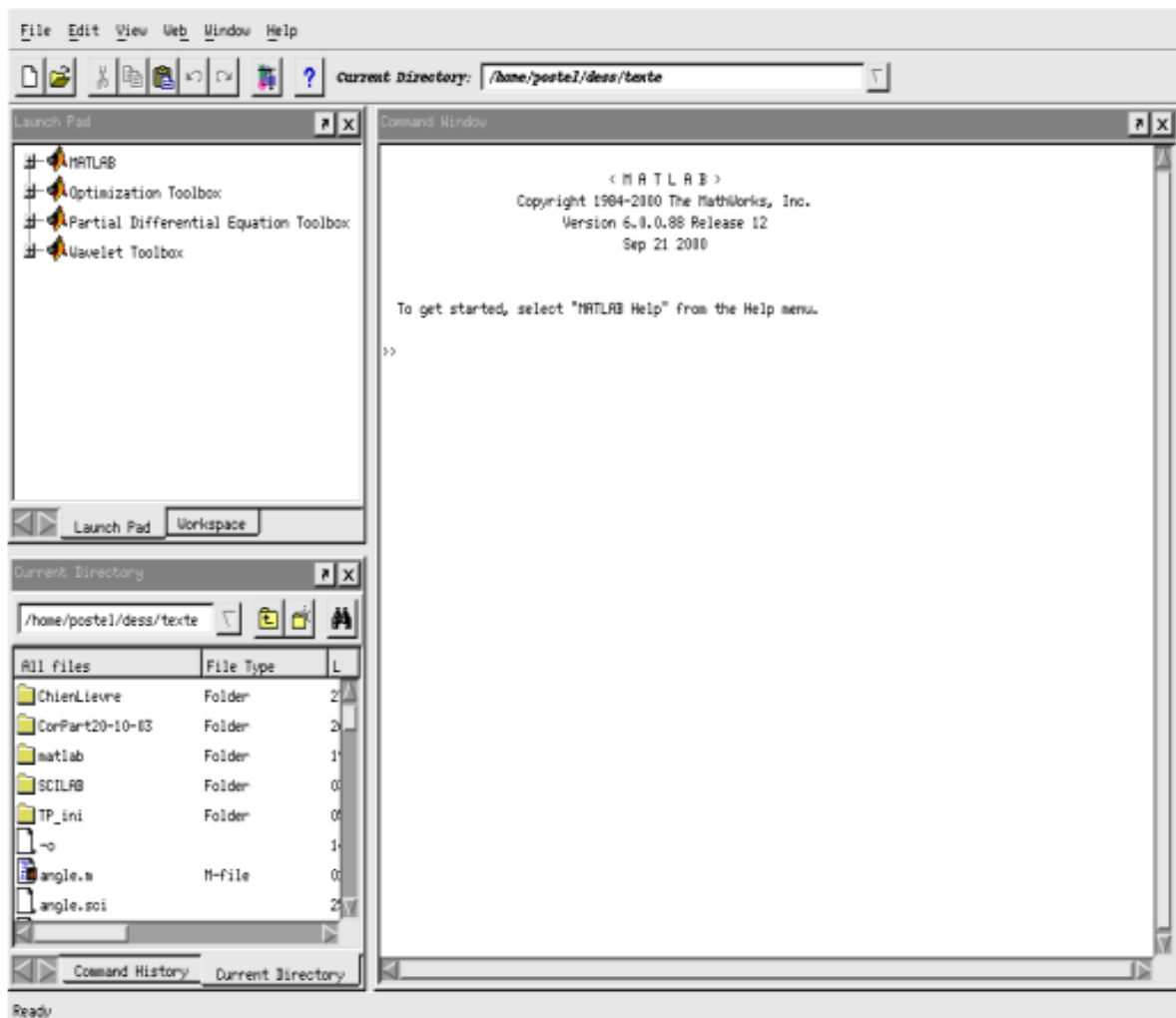
Certaines fonctions de MATLAB ne calculent pas de valeur numérique ou vectorielle, mais effectuent une action sur l'environnement de la session en cours. Ces fonctions sont alors appelées commandes. Elles sont caractérisées par le fait que leurs arguments (lorsqu'ils existent) ne sont pas placés entre parenthèses. Les autres fonctions se comportent de façon assez semblable aux fonctions mathématiques et la valeur qu'elles calculent peut être affectée à une variable.

Dans de nombreux cas, fonctions ou commandes peuvent être appelées avec des arguments qui diffèrent soit par leur nombre, soit par leur nature (nombre, vecteur, matrice,...). Le traitement effectué dépend alors du nombre et de la nature des arguments. Par

exemple, nous verrons plus loin que la fonction `diag` appelée avec une matrice pour argument retourne le vecteur constitué par sa diagonale principale ou vecteur diagonal. Lorsque cette même fonction est appelée avec un vecteur pour argument, elle retourne la matrice diagonale dont le vecteur-diagonal est le vecteur donné. Aussi une fonction ou une commande n'est pas caractérisée par son seul nom, mais par sa signature c'est à dire l'ensemble constitué de son nom et de la liste des types de ses paramètres.

Ouvrez simultanément une session MATLAB en tapant tout simplement MATLAB dans une fenêtre de commandes.

Vous allez voir apparaître une ou plusieurs nouvelles fenêtres sur votre écran, dont la fenêtre de commandes représentée sur la figure(3.3) Les principales caractéristiques de cette fenêtre sont :



Figure(3.3):Fenêtre de commandes MATLAB

Les caractères » en début de ligne constituent le prompt de MATLAB. C'est après eux que vous pouvez taper des commandes qui seront exécutées par le logiciel après avoir tapé sur la touche entrée.

Le résultat de l'exécution s'inscrit alors dans la fenêtre ou est représenté graphiquement dans une nouvelle fenêtre spécifique (avec possibilité de zoom, d'impression, etc...). Pour rentrer une suite complexe d'instructions (on parle aussi d'un script), on les tape au préalable dans un fichier en utilisant l'éditeur intégré. Une fois le script enregistré, on peut l'exécuter en tapant son nom dans la fenêtre MATLAB.

MATLAB conserve l'historique des commandes. Il est donc possible à l'aide des flèches du clavier de remonter dans la liste des instructions déjà entrées pour retrouver une instruction particulière pour la réutiliser et éventuellement la modifier avant de l'utiliser à nouveau.

3.2- Présentation du programme élément fini SB6-18: [12]

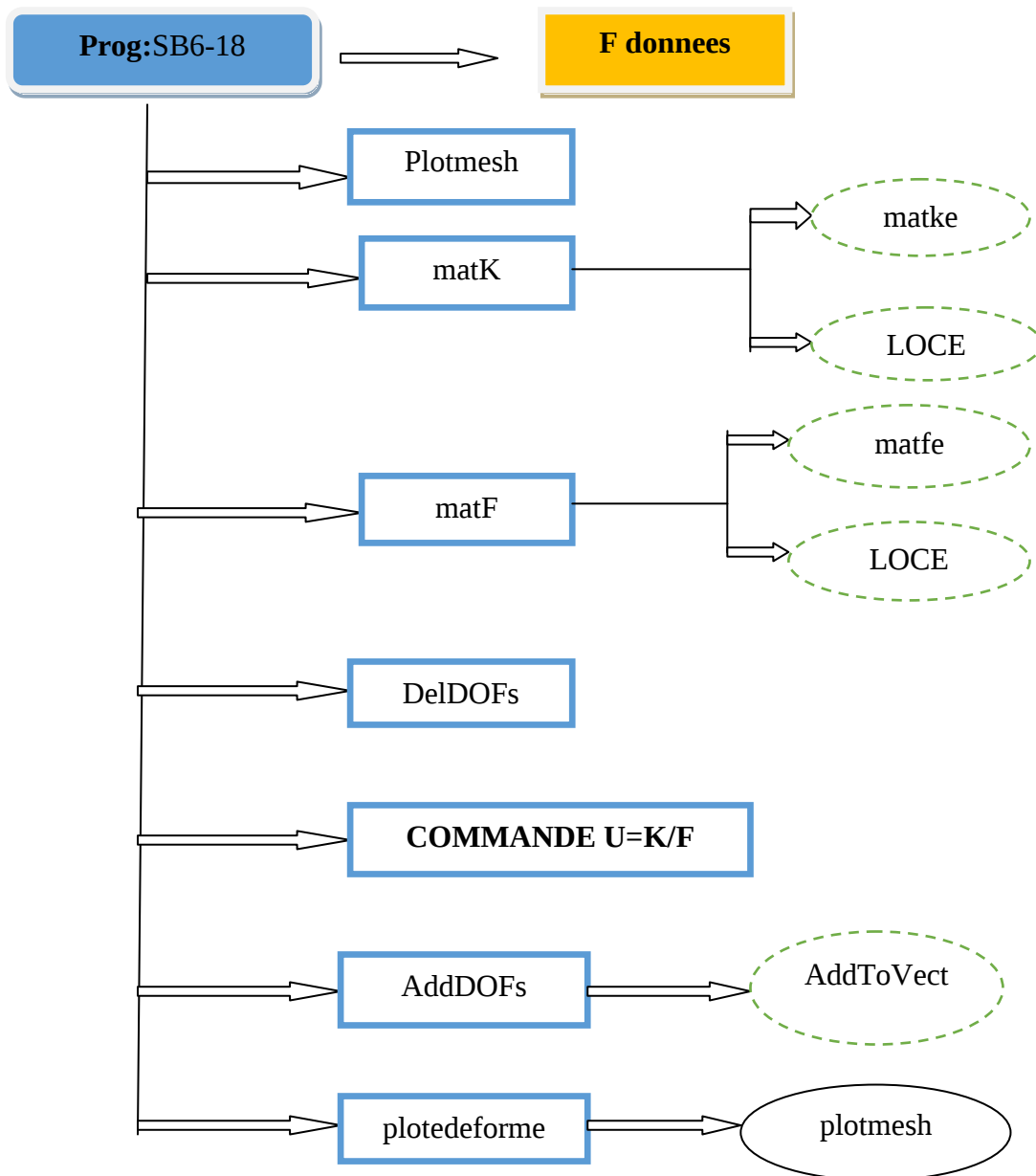


Figure (3.4): Description du programme élément fini SB6-18

- **Origine du nom SB6-18** : shell brique a six noued et dix huit degré de liberté

3.3-Description du programme:

- **Programme principal SB6-18**

Il fait appel aux différentes fonctions secondaires nécessaires aux calculs d'une structure en utilisant la formulation décrite dans ce chapitre.

- **Fonction donnees :**

C'est un fichier fonction qui permet d'introduit toutes les données relatives au problème:

- tableau des coordonnées des nœuds
- tableau de connectivité des éléments
- épaisseur des éléments
- module d'élasticité
- coefficient de poisson
- conditions aux limites (numéros des degrés de liberté bloquées)
- vecteurs sollicitations

La commande Matlab : [les données] = Féval(str2func(Nom du fichier des données)); ouvre le fichier des données et permet aux différentes fonction existant dans le programme principal de lire les données.

- **Fonction plotmesh:**

Cette fonction nous donne un affichage graphique du maillage, les coordonnées et la numérotation des nœuds, ce qui permet, avec le tracer la structure saisie, une vérification visuelle des données (tableaux des coordonnées et connectivité).

- **Fonction matK:**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires K_e fournit par la fonction matke, la boucle se fait sur les éléments en utilisant la fonction LOCE qui nous donne les degrés de liberté de chaque élément qui sont nécessaires pour le stockage des termes de la matrice élémentaire dans la matrice de rigidité globale.

- **Fonction LOCE:**

A partir de la table de connectivité des éléments existant dans le fichier des données, cette fonction Fournit la table de localisation (numéros) des degrés de liberté pour chaque élément.

- **Fonction matke:**

Permet le calcul de la matrice de rigidité pour chaque élément.

- **Fonction matF:**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des vecteurs des sollicitations

élémentaires fe fournit par la fonction `matfe`, la boucle se fait sur les éléments en utilisant la fonction `LOCE` qui nous donne les degrés de liberté de chaque élément qui sont nécessaires pour le stockage des termes des vecteurs de forces élémentaire dans le vecteur global.

- **Fonction `matfe`:**

Permet d'introduire le vecteur des forces pour chaque élément.

- **Fonction `DelDOFs`:**

Les conditions aux limites sont l'ensemble des déplacements nuls aux niveaux des appuis, un vecteur `e` dans le fichier de données est utilisé pour spécifier les degrés de liberté à bloquer. Pour appliquer cette condition on élimine les lignes et les colonnes correspondantes au vecteur `e` de la matrice `K` et du vecteur des sollicitations `F` (puisque le chargement est saisi pour tous les noeuds y compris ceux d'appuis).

- **Commande $U=K/F$:**

Une fois les conditions aux limites sont appliquées, il nous reste qu'à résoudre le système discret, La solution en déplacement (aux nœuds) s'obtient avec la commande MATLAB $U = K \backslash F$, qui remplace les méthodes classiques pour résoudre les systèmes d'équations linéaires (méthode de factorisation de cholesky Pour une matrice symétrique définie positive).

- **Fonction `AddDOFs`:**

Avec cette fonction on ajoute au vecteur déplacement les degrés de liberté des nœuds bloqués qui ont été supprimés par la fonction `DelDOFs`, la boucle se fait sur les numéros des degrés de liberté à ajouter en utilisant la fonction `AddToVect`.

- **Fonction `AddToVect`:**

Permet d'obtenir le vecteur de déplacement résultant pour chaque degré de liberté ajouté.

- **Fonction `plotdeforme`:**

Cette fonction dessine la structure déformée, elle trace les solutions obtenues sur le schéma déjà obtenu par la fonction `plotmesh`.

Chapitre 4 :
APPLICATION
NUMERIQUE

4.1- Introduction:

Dans cette section nous allons présenter quelques application numériques en utilisant l'élément finis SB6-18. Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions de références et avec ceux donnés par d'autres éléments disponibles dans le domaine.

4.2- Poutre mince modèle de bernouli:

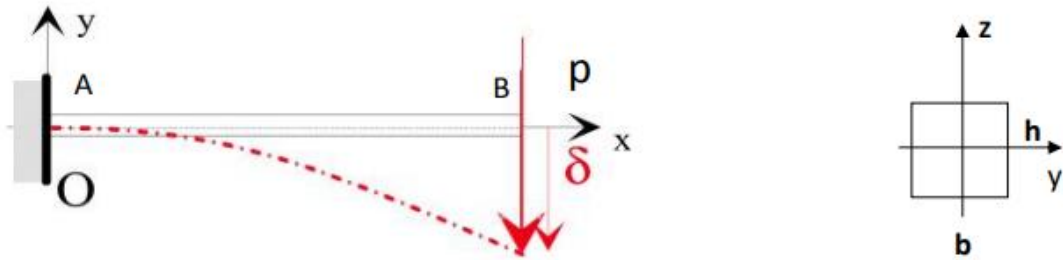


Figure (4.1) :poutre console [15]

L'application est faite sur une poutre en console[15] Figure4.1 (dont les démentions suivantes ; $h=40\text{cm}$, $L= 120\text{cm}$ et $b=25\text{cm}$ soumise à une charge concentré a son extrémité d'intensité $P=400\text{kn}$ Avec le module d'élasticité E

On applique la loi de Bernoulli : $S = \frac{PL^3}{3EIz}$

S :représente la flèche à l'extrémité de la poutre

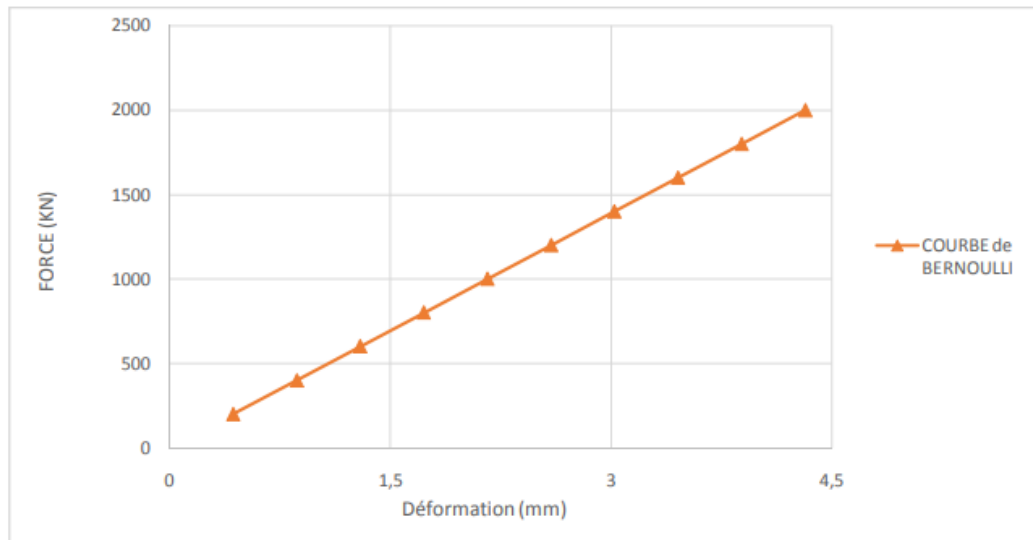


Figure 4.2 :Courbe charges-Déplacements[15]

Les résultats du déplacement vertical W au point B, présentés dans les figures ci-dessous sont comparés avec la solution de analytique donnée parla loi de Bernoulli.

4.2.1- Maillage (2×1×1)×2:

Tableau 4.1 :Maillage (2×1×1)×2

Force	400	1000	1500	2000	2500
SB6-18	9,71	24,2	36,4	48,5	60,7

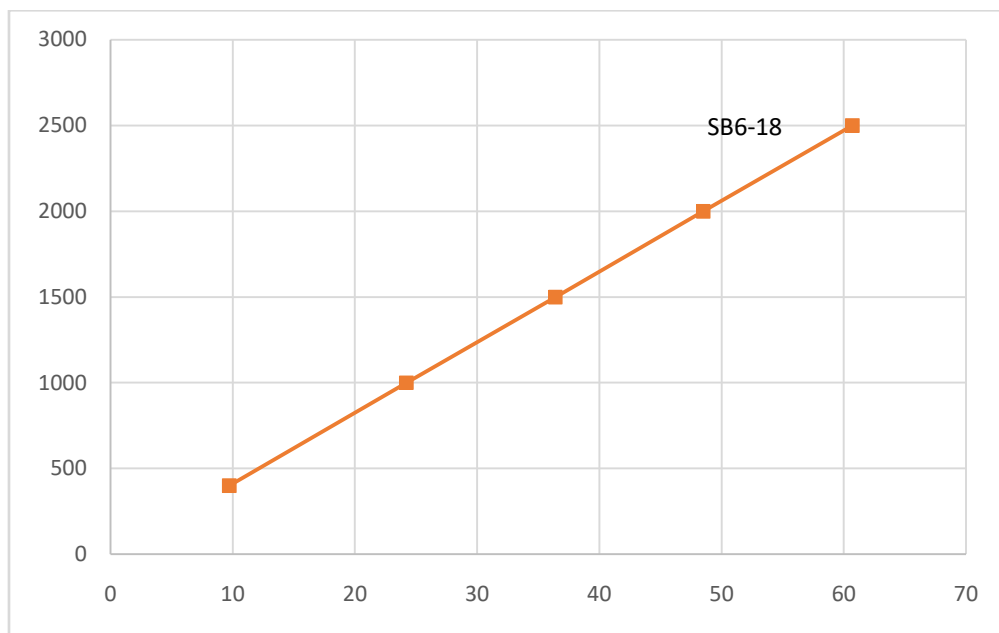
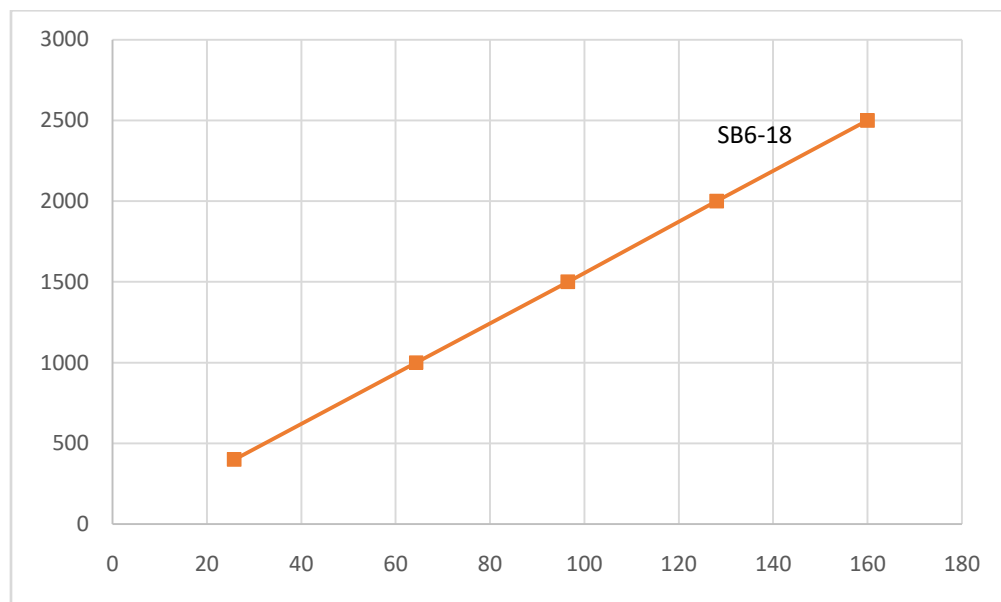


Figure 4.3 :Courbe charges-Déplacements Maillage (2×1×1)×2

4.2.2- Maillage $(3 \times 1 \times 1) \times 2$:Tableau 4.2: Maillage $(3 \times 1 \times 1) \times 2$

Force	400	1000	1500	2000	2500
SB6-18	25,73	64,32	96,48	128	160

Figure 4.4 : Courbe charges-Déplacements Maillage $(3 \times 1 \times 1) \times 2$

4.2.3- Maillage (4×1×1)×2:

Tableau 4.3:Maillage(4×1×1)×2

Force	400	1000	1500	2000	2500
SB6-18	25,51	63,78	95,67	127	159

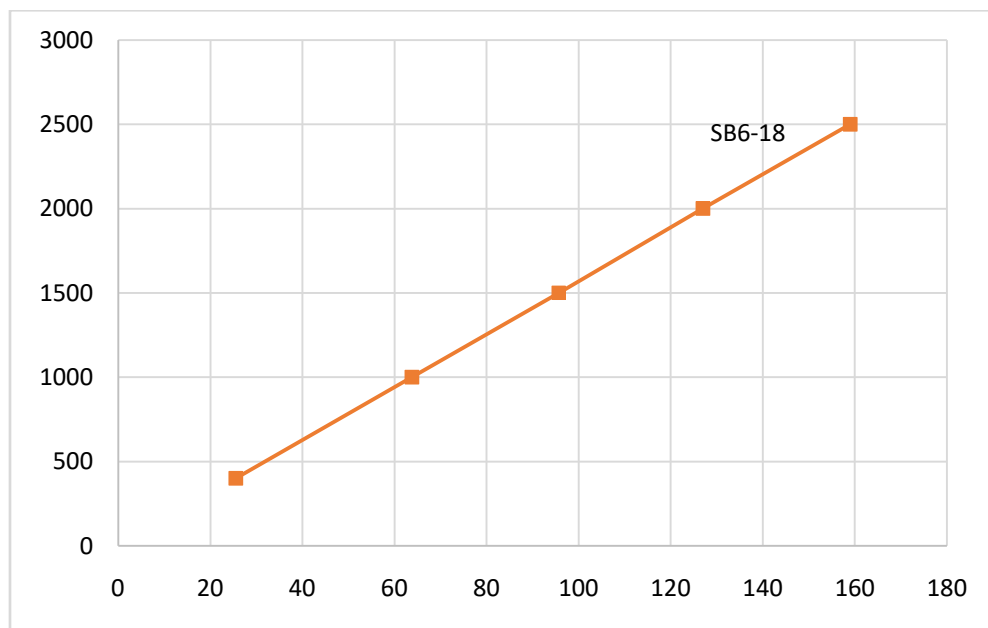


Figure 4.5 :Courbe charges-Déplacements Maillage (4×1×1)×2

4.2.4- Maillage (5×1×1)×2:

Tableau 4.4 :Maillage(5×1×1)×2

Force	400	1000	1500	2000	2500
SB6-18	23,94	59,87	89,8	119	149

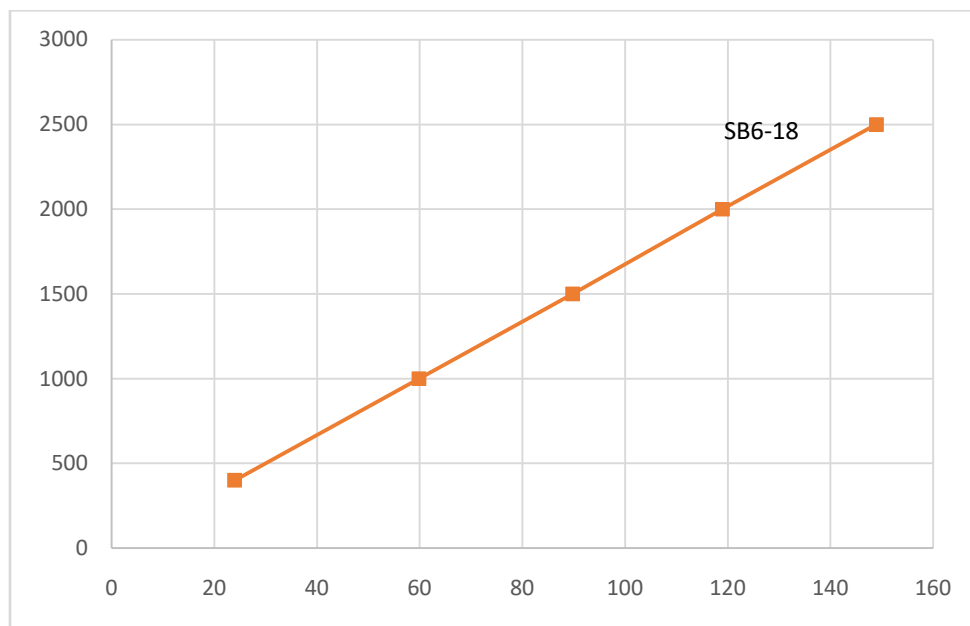
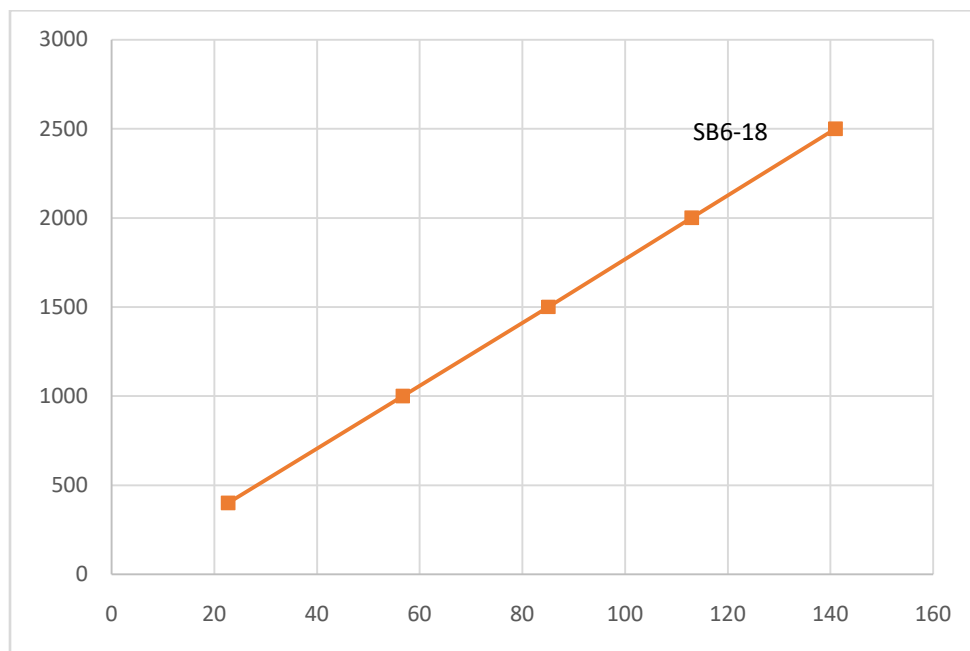


Figure 4.6 :Courbe charges-Déplacements Maillage (5×1×1)×2

4.2.5- Maillage $(6 \times 1 \times 1) \times 2$:Tableau 4.5 :Maillage $(6 \times 1 \times 1) \times 2$

Force	400	1000	1500	2000	2500
SB6-18	22,69	56,72	85,08	113	141

Figure 4.7 :Courbe charges-Déplacements Maillage $(6 \times 1 \times 1) \times 2$

4.3-Poutre épaisse modèle de Timochincko:

L'application est faite sur une poutre en console dont les démentions suivantes ;
 $h=40\text{cm}$, $L= 120\text{cm}$ et $b=25\text{cm}$ soumise à une charge concentré à son extrémité d'intensité
 $P=400\text{kN}$, de module de Young E et de coefficient de poisson ν .

On applique les lois de Timoshenko :

D'après l'équation la flèche de Timoshenko : $S = \frac{PL^3}{3EI_3} + \frac{PL}{GA}$

Avec : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Et $A' = KxA$ tel que : $K = \frac{5}{6}$

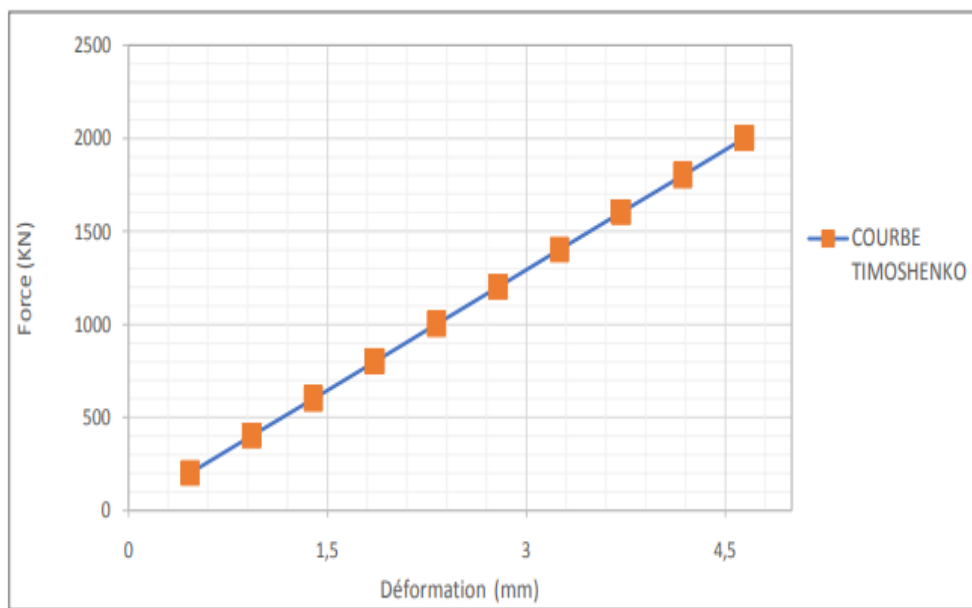


Figure 4.8 : Courbe charges-Déplacement[15]

Les résultats du déplacement vertical W au point B, présentés dans les figures ci-dessous sont comparés avec la solution analytique donnée par la loi de Timoshenko.

4.3.1- Maillage (2×1×1)×2:

Tableau 4.6 :Maillage(2×1×1)×2

Force	400	1000	1500	2000	2500
SB6-18	9,71	24,2	36,4	48,5	60,7

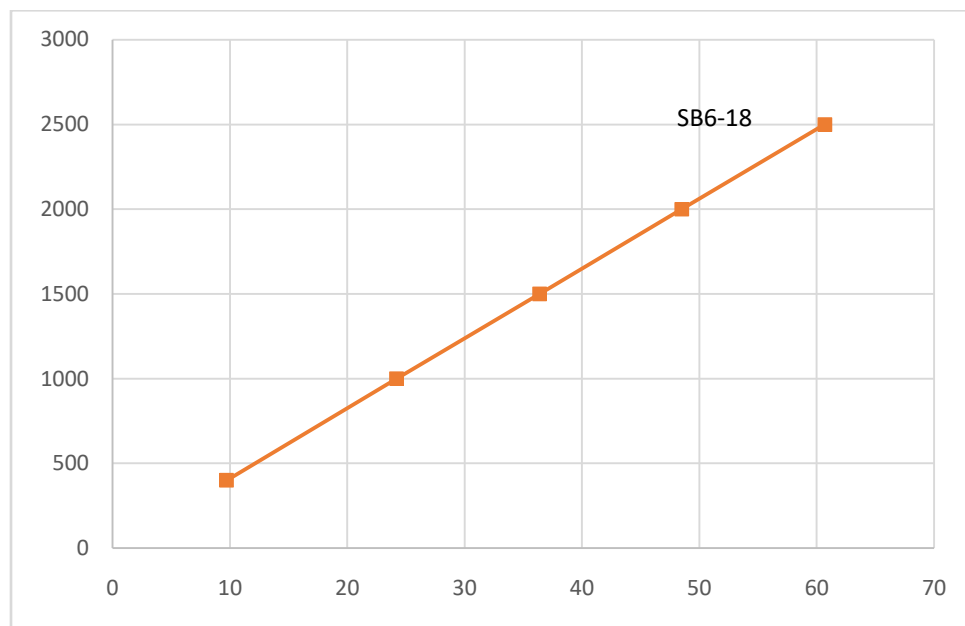


Figure 4.9 :Courbe charges-Déplacements Maillage (2×1×1)×2

4.3.2- Maillage (3×1×1)×2:

Tableau 4.7 :Maillage(3×1×1)×2

Force	400	1000	1500	2000	2500
SB6-18	25,73	64,32	96,48	128	160

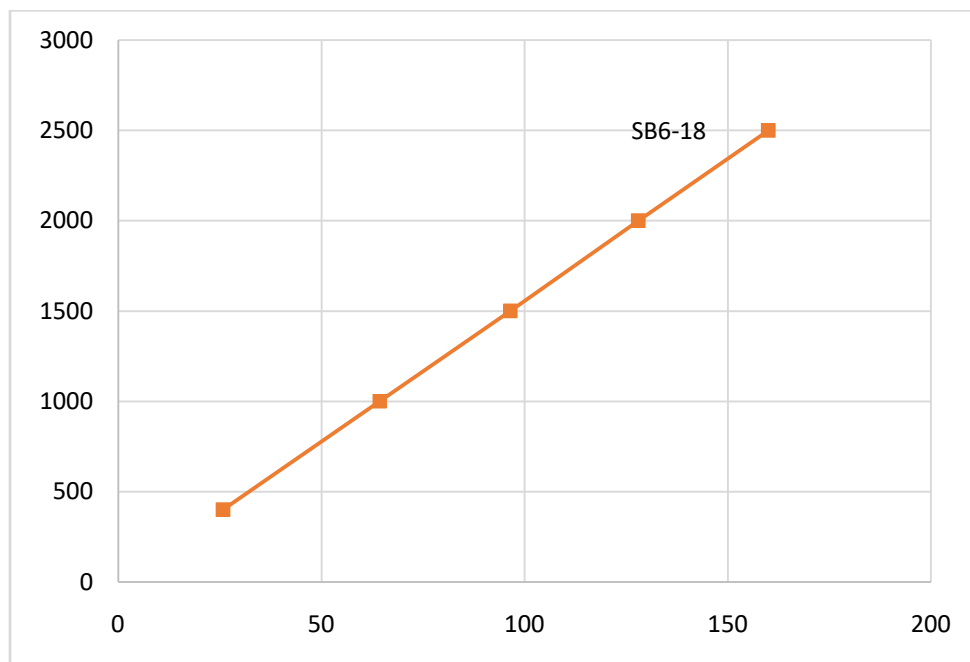


Figure 4.10 :Courbe charges-Déplacements Maillage (3×1×1)×2

4.3.3- Maillage (4×1×1)×2:

Tableau 4.8 :Maillage(4×1×1)×2

Force	400	1000	1500	2000	2500
SB6-18	25,51	63,78	95,67	127	159

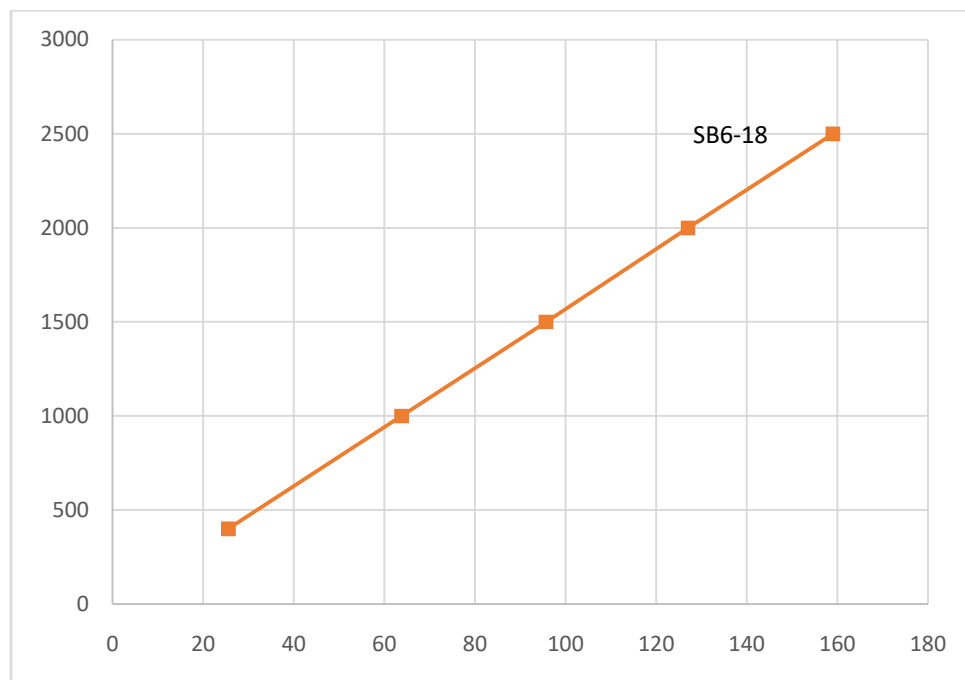


Figure 4.11 :Courbe charges-Déplacements Maillage (4×1×1)×2

4.3.4- Maillage (5×1×1)×2:

Tableau 4.9 :Maillage(5×1×1)×2

Force	400	1000	1500	2000	2500
SB6-18	23,94	59,87	89,8	119	149

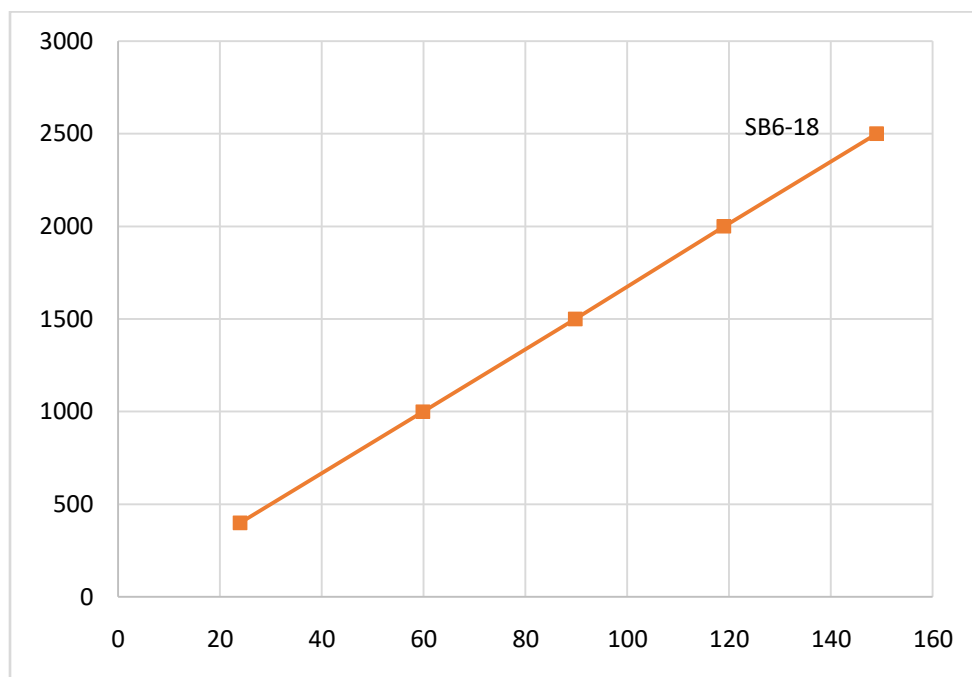


Figure 4.12 :Courbe charges-Déplacements Maillage (5×1×1)×2

4.3.5- Maillage (6×1×1)×2:

Tableau 4.10 :Maillage(6×1×1)×2

Force	400	1000	1500	2000	2500
SB6-18	22,69	56,72	85,08	113	141

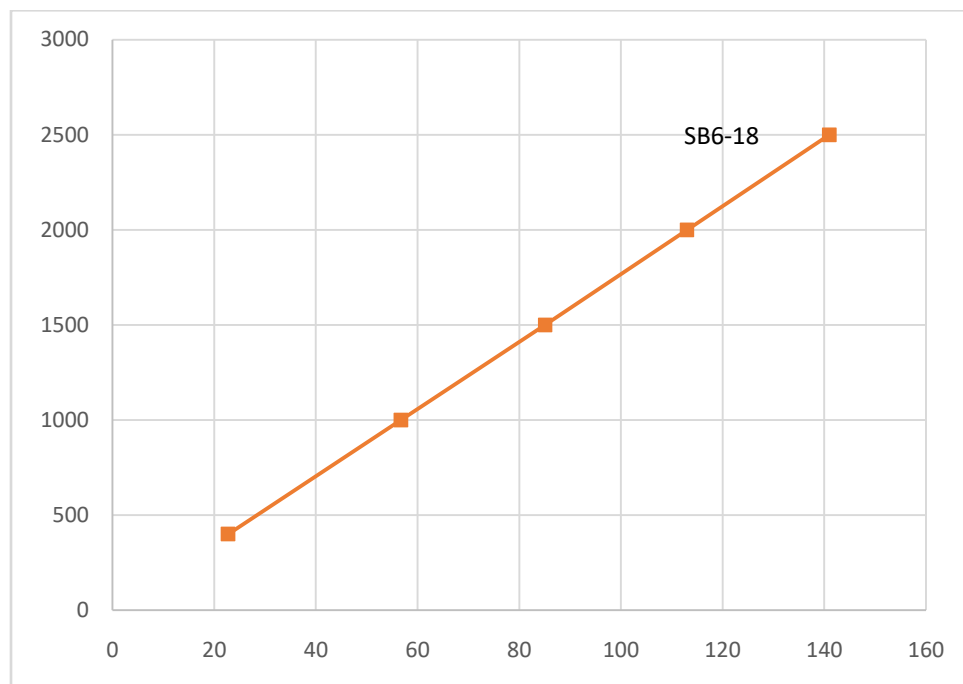
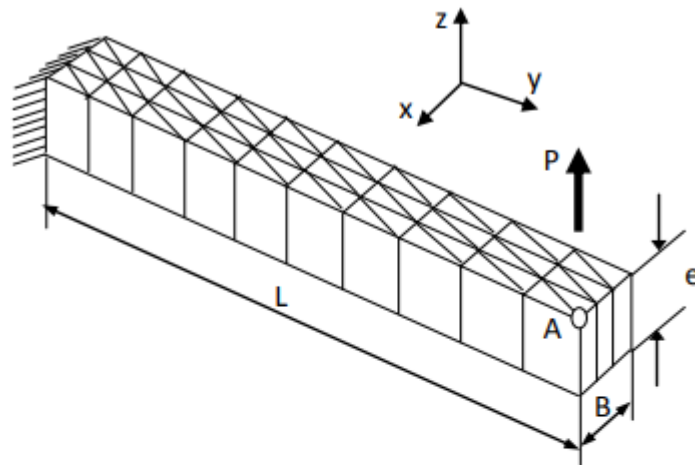


Figure 4.13 :Courbe charges-Déplacements Maillage (6×1×1)×2

4.4- Poutre en flexion avec divers élanement:

Ce test proposé par Trinh [16], représente un calcul quasi-statique d'une poutre en flexion, encastree à une extrémité et sollicitée par une force verticale à l'autre extrémité. Les déplacements obtenus sont comparés à la solution analytique élastique d'une poutre en flexion. À l'extrémité droite, la poutre est soumise à un effort tranchant $P = 1000$ N dans la direction verticale Oz. Ce chargement est réparti de façon adéquate aux nœuds de l'extrémité droite. On simule un encastrement parfait à l'extrémité gauche de la poutre. Les données de géométrie, matériau et de chargement du problème sont exposées dans la figure(4.14)

Cette application elle à été traité déjà par Labiodh[12] en utilisant l'élément SB6-18 pour un maillage $(10 \times 3 \times 1) \times 2$. Dans l'objectif d'étudier le comportement de l'élément SB6-18, nous allons alors reprendre cet étude en utilisant d'autres types de maillage, les résultats du déplacement vertical W au point A, présentés dans les figures ci-dessous sont comparés avec la solution analytique $w = \frac{PL^3}{3EIz}$



Largeur	B=300 mm
Epaisseur	e=400 mm
Module de Young	E=2x10 ⁵ MPa
Coefficient de Poisson	v=0,3
Chargement	P=1000 N

Figure 4.14 :Poutre en flexion[16]

Géométrie, chargement et conditions aux limites pour le test de la poutre en flexion simple avec divers élanements; maillage $(10 \times 3 \times 1) \times 2$

4.4.1-Maillage (10×4×1)×2:

Tableau 4.11 :Maillage(10×4×1)×2

Longuer L(mm)	Maillage	Solution Wref	SB6-18 W(mm)	$\frac{W}{Wref}$
2000	(10×4 ×1)	$8,3 \times 10^{-3}$	$8,61 \times 10^{-3}$	1,03
2100	(10× 4×1)	$9,6 \times 10^{-3}$	$9,83 \times 10^{-3}$	1,02
2200	(10× 4×1)	$1,11 \times 10^{-2}$	$1,11 \times 10^{-2}$	1
2300	(10× 4×1)	$1,27 \times 10^{-2}$	$1,26 \times 10^{-2}$	0,99
2400	(10× 4×1)	$1,44 \times 10^{-2}$	$1,42 \times 10^{-2}$	0,98

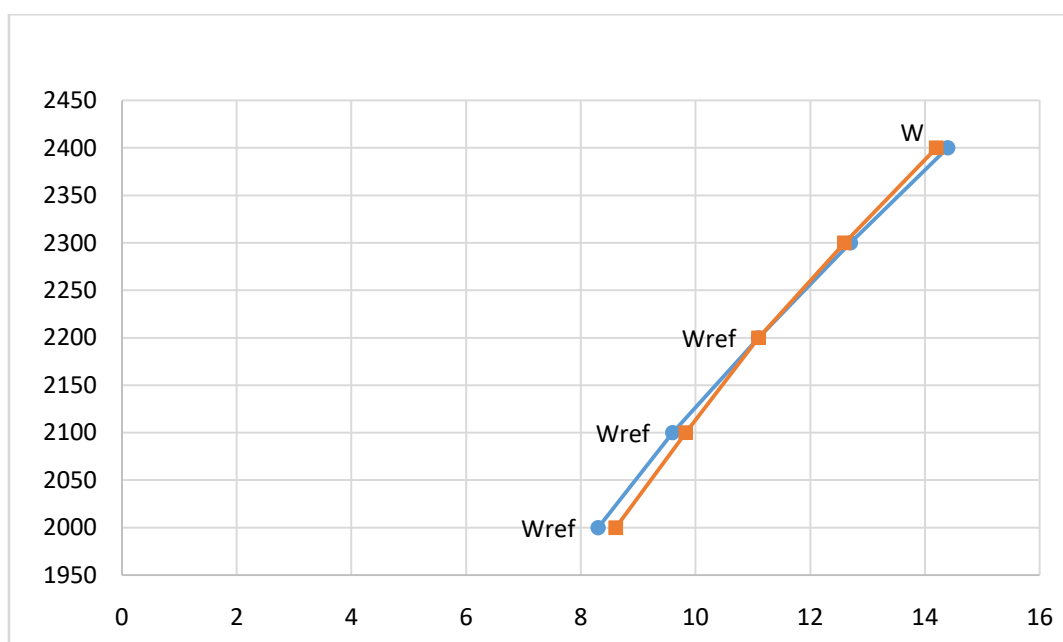


Figure 4.15 :Déplacements au point A Maillage (10×4×1)×2

4.4.2-Maillage (10×5×1)×2:

Tableau 4.12 :Maillage(10×5×1)×2

Longuer L(mm)	Maillage	Solution Wref	SB6-18 W(mm)	$\frac{W}{Wref}$
2000	(10×5 ×1)	$8,3 \times 10^{-3}$	$8,35 \times 10^{-3}$	1,006
2100	(10× 5×1)	$9,6 \times 10^{-3}$	$9,56 \times 10^{-3}$	0,99
2200	(10× 5×1)	$1,11 \times 10^{-2}$	$1,08 \times 10^{-2}$	0,97
2300	(10×5 ×1)	$1,27 \times 10^{-2}$	$1,23 \times 10^{-2}$	0,96
2400	(10×5 ×1)	$1,44 \times 10^{-2}$	$1,39 \times 10^{-2}$	0,96

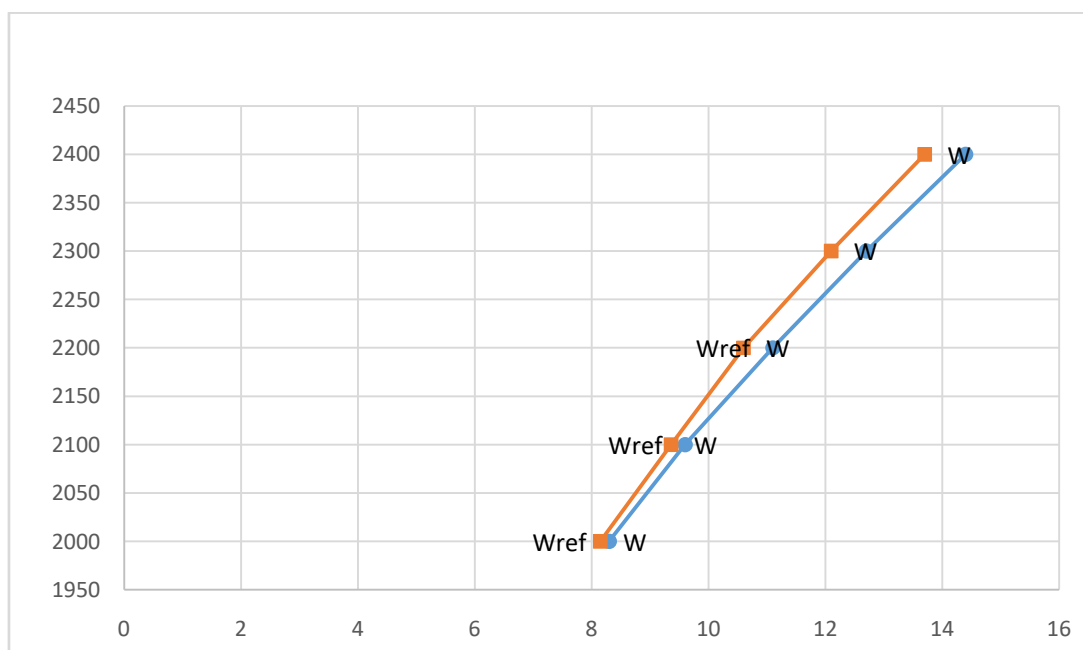


Figure 4.16 :Déplacements au point A Maillage (10×5×1)×2

4.4.3-Maillage (10×6×1)×2:

Tableau 4.13 :Maillage(10×6×1)×2

Longuer L(mm)	Maillage	Solution Wref	SB6-18 W(mm)	$\frac{W}{Wref}$
2000	(10×6 ×1)	$8,3 \times 10^{-3}$	$8,22 \times 10^{-3}$	0,99
2100	(10×6 ×1)	$9,6 \times 10^{-3}$	$9,43 \times 10^{-3}$	0,98
2200	(10× 6×1)	$1,11 \times 10^{-2}$	$1,07 \times 10^{-2}$	0,96
2300	(10× 6×1)	$1,27 \times 10^{-2}$	$1,22 \times 10^{-2}$	0,96
2400	(10× 6×1)	$1,44 \times 10^{-2}$	$1,37 \times 10^{-2}$	0,95

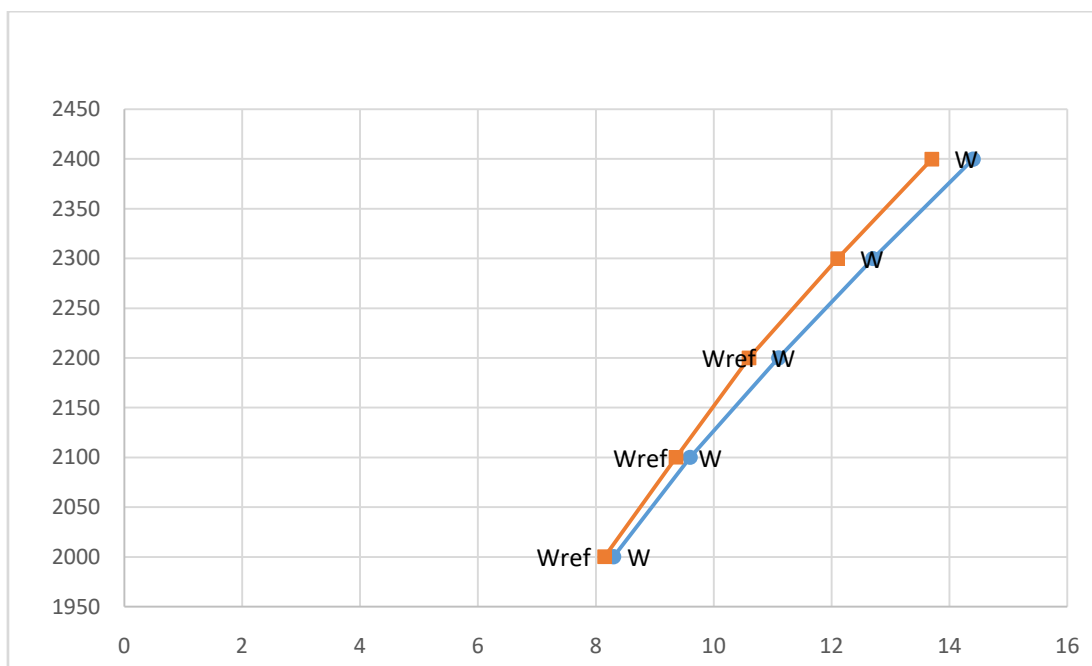


Figure 4.17 :Déplacements au point A Maillage (10×6×1)×2

4.4.4-Maillage (10×7×1)×2:

Tableau 4.14 :Maillage(10×7×1)×2

Longuer L(mm)	Maillage	Solution Wref	SB6-18 W(mm)	$\frac{W}{Wref}$
2000	(10×7 ×1)	$8,3 \times 10^{-3}$	$8,15 \times 10^{-3}$	0,98
2100	(10×7 ×1)	$9,6 \times 10^{-3}$	$9,36 \times 10^{-3}$	0,975
2200	(10× 7×1)	$1,11 \times 10^{-2}$	$1,06 \times 10^{-2}$	0,95
2300	(10× 7×1)	$1,27 \times 10^{-2}$	$1,21 \times 10^{-2}$	0,95
2400	(10× 7×1)	$1,44 \times 10^{-2}$	$1,37 \times 10^{-2}$	0,95

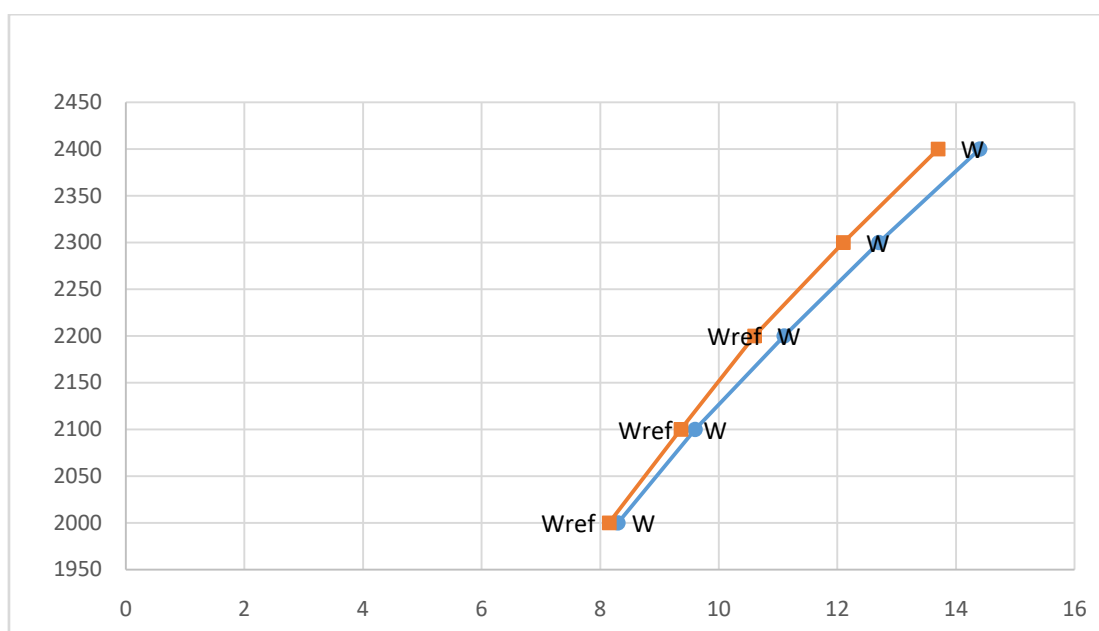


Figure 4.18 :Déplacements au point A Maillage (10×7×1)×2

4.5- Conclusion:

A travers les applications étudiées dans cette partie, ainsi que les résultats obtenus on peut tirer les conclusions suivantes :

- Dans les deux premières applications les courbes charges déplacements dans chaque modélisation est représentées par une droite ce qui permet de valider le comportement élastique linéaire de l'élément finis de type solide – coque SB6–18.

Pour la troisième application nous remarquons que les résultats obtenus par l'élément finis de type solide – coque SB6–18 convergent vers la solution de référence.

Conclusion générale

Conclusion générale

Cette étude a été consacrée à la modélisation des poutres par la méthode des éléments finis. Vu la complexité due à l'existence des structures de géométrie et de comportement différents (plaques, coques ...), qui peuvent être raccordées avec les poutres, l'utilisation des éléments finis tridimensionnels qui peuvent à la fois représenter efficacement le comportement de ces structures et assurer la jonction entre ces deux types d'éléments permet de résoudre cette difficulté.

Les applications étudiées dans le quatrième chapitre en utilisant l'élément fini tridimensionnel type solide – coque SB6–18, ont montré que les résultats obtenus convergent vers la solution de référence et cela pour la troisième application, aussi pour les deux premières applications les courbes charges déplacements dans chaque modélisation est représentées par une droite ce qui permet de valider le comportement élastique linéaire de l'élément fini de type solide – coque SB6–18.

En conclusion de cette étude, on peut dire que les résultats obtenus ont été très satisfaisants, la convergence vers la solution de référence et le comportement linéaire élastique ont été vérifiés, néanmoins nous recommandons de poursuivre les recherches sur cet élément pour améliorer leur performance et leur fiabilité dans l'étude des structures

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Jean-Louis Fanchon, Guide de mécanique, Nathan, 2001, 543 p. (ISBN 2-09-178965-8), p. 265-396
- [2] Claude Hazard, Frédy Lelong et Bruno Quinzain, Mémotech — Structures métalliques, Paris, Casteilla, 1997, 352 p. (ISBN 2-7135-1751-6), p. 326-336
- [3] Timoshenko, S., (1953), History of strength of materials, McGraw-Hill New York
- [4] The Da Vinci-Euler-Bernoulli Beam Theory??. Mechanical Engineering Magazine Onlineballarini ,roberto (18 avril 2003)
- [5] . Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM), LUNAM, École Centrale de Nantes 1 rue de la Noë, BP 92101, 44321, Nantes, cedex 3, France
- [6] Ostoja-Starzewski 2008chapter 7-10
- [7] K. J. Bathe, Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall, 1976
- [8] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, série « Studies in Mathematics and its Applications », North-Holland, Amsterdam, 1978
- [9] G. Daht, G.Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, ISBN 27637-6912-8, Les presses de l'université de Laval, Québec.
- [10] Patrick Ciarlet ,EricLuneville, La méthode des éléments finis , Ensta , février 2009
- [11] Rayleigh L. Theory of sound, Vol I et Vol. II. Dover Pub. 1945.
- [12] Bachir labiodh. Contribution à l'étude numérique des coques par des éléments de type solide-coque, applications linéaires et non linéaires , Université Mohamed Khider – Biskra , 2021
- [13] "Matrices and Arrays - MATLAB & Simulink". www.mathworks.com. Retrieved May 21, 2022
- [14] "Current number of matlab users worldwide". Mathworks. November 9, 2017. Retrieved April 26, 2023.
- [15] Ferrouk El'bachir, Ait melloula Kaci.Etude comparative des éléments finis poutres de bernoulli etde timoshenko dans l'analyse des ossatures planes, Mémoire de master, Université Mouloud Mammeri Tizi-ouzou, 2014.
- [16] Trinh VD. Formulation, développement et validation d'éléments finis detype coques volumiques sous intégrés Stabilisés utilisables pour desproblèmes a cinématique et comportement non linéaires. Thèse de doctoratde l'Ecole Doctorale, ENSAM-Paris, 2009.