



N° d'ordre :

N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL OUED**

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématique & simulation
numérique

Thème

**Résolution Numérique d'une
équation Différentielle
Ordinaire**

Présenté par:

Bahdi Meriem

Beloul Souad

Sahraoie Sara

Sous la supervision de :

NOUAR AZIZA Souad

Année universitaire 2014 – 2015

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
mathématiques

Spécialité : Algèbre et théorie des nombres

Par

CHARI

THÈME



Soutenu publiquement, le devant le jury composé de

Mr. **D. E. TENIOU** Professeur

Mr. **A. HEMINNA** Maître de Conférences

: Mr. **K. LEMRABET** Professeur

Mr. Maître de Conférences LLL

Remerciements

*Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail. Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur "NOUAR AZIZA Souad", à l'université **Hama Lakdar El-oued.** a qui nous voudrons exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail. ainsi qu'à tous les professeurs de l'université **Hama Lakdar El-oued.***

Nous remercions vivement nos familles surtout mes parent pour l'aide et le soutien moral.

*Nous tenons a remercier tous les étudiants de La promotion 2014/2015 de Math de l'université **Hama Lakdar El-oued.***

Notations générales

C^p	l'ensemble des fonctions.
$B(a, r)$	la boule ouverte de centre a et de rayon r .
$\ \cdot\ $	la norme.
$ \cdot $	la valeur absolue.
\lim	la limite.
$\inf f(x)$	la borne inférieure de fonction f sur l'ensemble \mathbb{k} .
$\sup f(x)$	la borne supérieure de fonction f sur l'ensemble \mathbb{k} .
\max	le maximum.
\min	le minimum.
$\partial f(x)$	la dérivée partielle de f .
$\nabla f(x)$	le gradient de f .
\sum	le signe de somme.
\int	intégrale.

Table des matières

Notations générales	ii
Introduction générale	1
1 Problème de cauchy	2
1.1 problème fondamentale:	2
2 Méthodes de résolution numériques	11
2.1 Méthodes numériques à un pas	11
2.1.1 Méthode d'Euler	12
2.1.2 Méthode de Taylor (d'ordre 2)	14
2.1.3 Méthode De Runge-Kutta:	16
2.2 Méthodes numérique à pas multiples	18
2.2.1 Méthode des approximations successives (Picard)	18
2.2.2 Méthode d'Adams :	20
3 Comparaison des méthodes et applications	25
3.1 Comparaison des méthodes à un pas(méthode d'Euler,méthode de Taylor d'order 2,méthode de Runge-Kutta)	25
3.2 Application	28
3.2.1 L'analyse du mouvement d'un pendule sans friction	28
Conclusion Générale	31
Bibliographie	32

Introduction générale

L'objectif est notamment d'introduire des procédures calculatoires détaillées susceptibles d'être mises en oeuvre par des calculateurs (électroniques, mécaniques ou humains) et d'analyser leurs caractéristiques et leurs performances. L'analyse numérique est une branche de mathématiques appliquées s'intéressant au développement d'outils et de méthodes numériques pour le calcul d'approximations de solutions des problèmes de mathématiques qu'il serait difficile d'obtenir par des moyens analytiques. Elle possède des liens étroits avec deux disciplines à la croisée des mathématiques et de l'informatique. Dans cette mémoire, on traitera le problème d'approximation des solutions d'équations différentielles posé sous forme de problème de Cauchy:

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= a \end{cases}$$

nous allons voir dans le second chapitre les différentes méthodes utilisées pour l'approche de la solution, et ceci en les distinguant selon les pas, il y a des méthodes à un pas comme la méthode d'Euler, Taylor (ordre 2) et de Runge-Kutta et naturellement des méthodes qui utilisent plusieurs pas (pas multiple) nous nous intéressons aux méthodes d'approximation successives (Picard) et la méthode d'Adams et nous verrons bien sûr des exemples pour chaque méthode. Dans le chapitre trois en comparant entre les méthodes à un pas associées avec un exemple d'application.

Chapitre 1

Problème de cauchy

1.1 problème fondamentale:

Dans ce chapitre, on s'intéresse tout particulièrement à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution l'équation:

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= a \end{cases} \quad (1.1.1)$$

ou $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue

I un intervalle, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $(t_0, a) \in I \times \Omega$

Proposition 1.1.1 : on a l'équivalence suivante:

$$1.1.1 \Leftrightarrow x(t) = a + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (1.1.2)$$

Définition 1.1.1 :

1 Itération de picard:

$$\begin{cases} x_1(t) &= a \\ x_{k+1}(t) &= a + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds \end{cases} \quad (1.1.3)$$

2 Itération de picard:

$$x_k(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \leq t_0 + \frac{1}{k} \\ a + \int_{t_0}^t f(s; x_k(s)) ds & \text{si } t \geq t_0 + \frac{1}{k} \end{cases} \quad (1.1.4)$$

et on fait de même si $t \leq t_0$

$$x_k(t) = \begin{cases} a & \text{si } t_0 - \frac{1}{k} \leq t \leq t_0 \\ a + \int_t^{t+\frac{1}{k}} f(s, x_k(s)) ds & \text{si } t \leq t_0 - \frac{1}{k} \end{cases}$$

3 $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite uniformément bornée si

$$\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\| \leq M \quad \forall t \in I$$

4 $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée uniformément équicontinues si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |t_1 - t_2| < \delta \quad \text{alors } \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon$$

5 $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ converge uniformément vers f sur I si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall t \in I$$

Théorème 1.1.1 (Arzela-Ascoli) pour toute suite $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément bornée, uniformément équicontinue, on peut extraire une sous suite qui converge uniformément sur chaque compact de I (formé bornée)

Preuve. voir [7] ■

Théorème 1.1.2 : Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } I = [\alpha, \beta] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(s) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds$$

Preuve. voir [6] ■

Notation 1.1.1 : $a \in \mathbb{R}^n$ $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ boule ouvert de centre a et de Rayon $r > 0$

Théorème 1.1.3 (Cauchy-pearo) soit $f : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times B(a, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et bornée par M alors il existe au moins une solution x à l'équation (1.1.2) définie sur $[t_0 - b, t_0 + b]$ où $b = \min(\alpha, \frac{1}{M})$.

Preuve. par simplicité on considère seulement le cas $[t_0, t_0 + b]$ l'autre cas $[t_0 - b, t_0]$ se fait de la même façon. soit $x_k(t)$ fonction définie par (1.1.4) $t \geq t_0$ $x_k : [t_0, t_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on va montrer que x_k converge vers x solution de (1.1.2)

1.étape: montrons que x_k est bien définie par l'absurde

supposons que x_k n'est pas définie sur $[t_0, t_0 + b] \exists t_1 \in \left[t_0 + \frac{1}{k}, t_0 + b \right]$

tel que: $\|x(t_1) - a\| = r$

$$\begin{aligned} r = \|x(t_1) - a\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_1 - \frac{1}{k}} f(s, x_k(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1 - \frac{1}{k}} \|f(s, x_k(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1 - \frac{1}{k}} M ds = M \left| t_1 - t_0 - \frac{1}{k} \right| \\ &\leq M \left(b - \frac{1}{k} \right) \leq r - \frac{M}{k} < r \end{aligned}$$

on a montré que $r < r$ contradiction donc ce qu'on suppose donc x_k est bien définie.

2^{ème} étape:

(x_k) est uniformément bornée, en effet soit

$$\begin{aligned} k \geq \frac{1}{b} \|x_k(t)\| &\leq \|a\| + \int_{t_0}^{t - \frac{1}{k}} \|f(s, x_k(s))\| ds \quad t \geq t_0 + \frac{1}{k} \\ &\leq \|a\| + \int_{t_0}^{t_0 + b - \frac{1}{k}} \|f(s, x_k(s))\| ds \quad (t_0 + b - \frac{1}{k}) \supset (t - \frac{1}{k}) \\ &\leq \|a\| + M \left(b - \frac{1}{k} \right) < \|a\| + r \end{aligned}$$

et si $t \leq t_0 + \frac{1}{k}$ $x_k(t) = a$ constante donc bornée. Alors ainsi

$$\forall t \in [t_0, t_0 + b] \quad \|x_k(t)\| < \|a\| + r$$

3^{ème} étape:

(x_k) est uniformément et qui continue soit $t_1, t_2 \geq t_0 + \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} \|x(t_1) - x(t_2)\| &= \left\| \int_{t_2 - \frac{1}{k}}^{t_1 - \frac{1}{k}} f(s, x_k(s)) ds \right\| \leq \int_{t_2 - \frac{1}{k}}^{t_1 - \frac{1}{k}} \|f(s, x_k(s))\| ds \\ &\leq M |t_1 - t_2| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M}$

si $|t_1 - t_2| < \varepsilon \Rightarrow \forall t_1, t_2 \geq t_0 + \frac{1}{k} \|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon \quad (*)$

comme x_k est une c^{cte} sur $\left[t_0, t_0 + \frac{1}{k}\right]$ est que x_k est continue en $t_0 + \frac{1}{k}$

l'estimation (*) reste vraie $\forall t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + b]$

4^{ème}étapr:

Application du théorème Arzéle- Ascoli:

\exists une sous suite (x_{k_1}) qui converge uniformémeent vers x sur $[t_0, t_0 + b]$

5^{ème}étape:

or f continue sur $[t_0, t_0 + b] \times \overline{B(a, r)}$ un compact $\Rightarrow f$ est uniformément continue

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 |p - q| < \delta \Rightarrow |f(s, p) - f(s, q)| < \varepsilon \quad \forall s \in [t_0, t_0 + b]$$

pour $\varepsilon' > 0 (\varepsilon = \delta) \exists N$

$$\|x_{k_1}^{(s)} - x(s)\| < \delta$$

$$\forall l \geq N \quad \forall s \in [t_0, t_0 + b] \Rightarrow \|f(s, x_{k_1}^{(s)}) - f(s, x(s))\| < \varepsilon \quad (**)$$

$\forall s \in [t_0, t_0 + b] \quad l \geq N \Rightarrow f(s, x(s))$ continue uniformément vers $f(x, x(s))$

sur $[t_0, t_0 + b]$

6^{ème}étape:

soit $t \in [t_0, t_0 + b]$

$$t = t_0 \quad x_{k_1}(t_0) = a \xrightarrow{l \rightarrow \infty} a = x(t_0)$$

Alors (2.1.2) vraie dans ce cas

$$t > t_0 \quad (x_{k_1})(t) = a + \int_{t_0}^{t - \frac{1}{kl}} f(s, x_{k_1}(s)) ds$$

pour t assez grand

$$(x_{kl})(t) = a + \int_{t_0}^t f(s, x_{k_1}(s)) ds - \int_{t - \frac{1}{k}}^t f(s, x_{k_1}(s)) ds$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x_{k_1}(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

grâce à (**) et $\left\| \int_{t-\frac{1}{kl}}^t f(s, x_{k1}(s)) ds \right\| \leq \frac{M}{Kl} < \varepsilon$

à la limite on obtient

$$x(t) = a + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

■

Remarque 1.1.1 : le théorème (1.1.3) ne garentis pas l'unicite de la solution, en effet, soit par exemple l'équation différentielle

$$(*) \begin{cases} x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire $f(t, x) = 2\sqrt{|x|}$, f continue sur \mathbb{R} (*) admet une solution Résolvons (*) Si $x(t) > 0$ (*) se réduit à

$$x' = 2\sqrt{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x}$$

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow \sqrt{x} = t + c, c \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = (t, c)^2$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow x(0) = 1 = c^2 \Rightarrow c = \pm 1$$

$$x_1(t) = (t + 1)^2 \text{ ou } x_2(t) = (t - 1)^2$$

Si $x(t) < 0$ alors (*) devient $x' = 2\sqrt{-x}$

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{-x} \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{-x}} = dt \Rightarrow \sqrt{-x} = -t + c$$

$$-x(t) = (-t + c)^2 = x(t) = -(c - t)^2 \quad x(0) = 1 = -(c^2) \text{ impossible.}$$

Théorème 1.1.4 (picard-lindelof) Soit $f : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times B(0, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, bornée par M . on suppose que $f(x, t)$ est Lipshitzienne par rapport à x , (t fixe)

$$\exists L > 0 \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

$$\forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \quad \forall x, y \in \overline{B(a, r)}$$

alors l'équation (1.1.1) admet une solution unique $x(t), t \in [t_0 - b, t_0 + b]$

Avec $b = \min(\alpha, \frac{r}{m})$

Remarque 1.1.2 x est une application de classe C^1 sur $[t_0 - b, t_0 + b]$

Preuve. soit $X = \left\{ h : [t_0 - b, t_0 + b] \longrightarrow \overline{B(a, r)} \text{ continue} \right\}$

muni de la norme

$$\|h\| = \sup \{ \exp -2L |t - t_0| \times |h(t)|, t \in [t_0 - b, t_0 + b] \}$$

1^{er} Etape :

$X \subset \varphi([t_0 - b, t_0 + b])$ on a : X fermé (car $\forall h \in X, h(t) \in \overline{B(a, r)}$) or $\varphi([t_0 - b, t_0 + b])$

est de Banach

Donc X est de Banach par la norme $\|\cdot\|_\infty$

$$\begin{aligned} 0 &\leq |t - t_0| \leq b \\ -2Lb &\leq -2L |t - t_0| \leq 1 \\ e^{-2Lb|h(t)|} &\leq \exp -2L |t - t_0| \cdot |h(t)| \leq |h(t)| \\ \|h\|_\infty &\leq \|h\|_w \leq \|h\|_\infty \end{aligned}$$

or : $\|\cdot\|_w$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont equivalent sur X eu effet

Donc $(X, \|\cdot\|_w)$ est de Banach .

2^{émé} Etape : $T : X \longrightarrow x \quad x \longrightarrow a + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$

T est bien defini

car f continue et

$$\begin{aligned} \|(T(x))(t) - a\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \\ &\leq M |t - t_0| \\ &< M \cdot b \leq r \end{aligned}$$

$$(T(x))(t) \in \overline{B(a, r)} \implies (T(x)) \in X$$

3^{émé} Etape : **T est contractente**

soient x et $y \in X$

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|_w &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right\|_w \\ &= \sup \left\{ \exp -2L |t - t_0| \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds \right\| \mid t \in [t_0 - b, t_0 + b] \right\} \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
 & \exp -2L |t - t_0| \cdot \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds \right\| \\
 \leq & \exp -2L |t - t_0| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\
 \leq & L \exp -2L |t - t_0| \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| \exp 2L |s - t_0| ds \\
 \leq & L \exp -2L |t - t_0| \|x - y\|_w \int_{t_0}^t \exp 2L |s - t_0| ds \\
 \leq & L \exp -2L |t - t_0| \|x - y\|_w \cdot \left[\frac{1}{2L} \exp 2L |s - t_0| \right]_{t_0}^t \\
 \leq & \frac{\exp -2L |t - t_0|}{2} (\exp 2L |t - t_0| - 1) \|x - y\|_w \\
 \leq & \left(\frac{1 - \exp(-2L |t - t_0|)}{2} \right) \|x - y\| \\
 \leq & \frac{1}{2} \|x - y\|_w
 \end{aligned}$$

$\implies T$ est contractent (de constante qui vaut $\frac{1}{2}$)

4^{ème} Etape :

D'après le théorème du point fixe $\exists! x \in X$ tq : $Tx = x$

c'est-à-dire: $\exists! x : [t_0 - b, t_0 + b] \longrightarrow \overline{B(a, r)}$ telle que:

$$x(t) = a + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Donc la solution de (1.1.1) ■

Définition 1.1.2 Soit $f: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(t, x) \longrightarrow f(t, x)$ une application, I un interval ouvert et U un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit que f est localement Lipshitzienne par rapport à x si $\forall (t, a) \in I \times U$, $\exists L > 0$; $\exists J \subset I$, J un intervalle ouvert, contenant t , $\exists V \subset U$, V interval ouvert contenant a tels que f est Lipshitzienne par rapport à x sur $J \times V$ c'est-à-dire $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \forall (x, y) \in V^2, \forall t \in J, a \in V$.

Théorème 1.1.5 (Herm-Borel) \mathbb{R}^n étant muni de sa topologie usuelle K compact de $\mathbb{R}^n \iff K$ est fermé, bornée (On appelle qu'un espace compact s'il est séparée et de tout recouvrement d'ouverts de K , on peut extraire un sous recouvrement fini)

Théorème 1.1.6 (Intervalle maximal d'existence) Soit $f: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à x alors l'intervalle maximal d'existence est de la forme $]w_-, w_+[$ où $w \in]-\infty, +\infty[$, $w_+ \in]-\infty, +\infty]$ et de plus $X(t)$ quitte tout compact $K \subset D$ quand $t \rightarrow w_+$ ou $t \rightarrow w_-$

Preuve. voir[5] ■

Corollary 1.1.1 sous les même hypothèses du théorème de Intervalle maximal d'existence alors

soit $w_+ = d$ soit $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow w_+]{} \partial u$

et soit $w_- = c$ soit $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow w_-]{} \partial u$

Avec $I =]c, d[$

Corollary 1.1.2 Si $u = \mathbb{R}^n$

sous les même hypothèses du théorème de Intervalle maximal d'existence alors

soit $w_+ = d$ soit $|x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow w_+]{} +\infty$ et

soit $w_- = c$ soit $|x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow w_-]{} -\infty$

Dependance Continue :

Considerons le probleme de cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' &= f(t, x, \mu) \\ x(t_0) &= a \end{cases} \quad (1.1.5)$$

ou $\mu \in \mathbb{R}^k (\mu : C^{ste})$

Nous allons voir comment une solution de (1.1.1) dépend continûment de la condition initiale $x(t_0) = a$ et comment une solution de (1.1.5) depend continûment du parametre μ Dans un sens; les deux questions sont équivalent.par exemple x est solution de (1.1.1) alors $\tilde{x} = x - a$ est solution de

$$\begin{cases} \tilde{x}' &= \tilde{f}(t, \tilde{x}, a) \\ \tilde{x}(t_0) &= 0 \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t, \tilde{x}, a) = f(t, \tilde{x} + a)$$

Donc comme paramétrée plutôt qu'une condition initiale, si d'autre part, x est solution de (1.1.5)

alors ε_n posent $\tilde{x} = (x, \mu)$ et $\tilde{f}(t, \tilde{x}) = (f(t, x, \mu), 0)$

$$\text{alors } \begin{cases} \tilde{x}' &= \tilde{f}(t, \tilde{x}) \\ \tilde{x}(t_0) &= (a, \mu) \end{cases}$$

on voit que μ apparaît comme conditions initiale plutôt qu'un paramètre.

Nous allons aussi nous concentrer sur (1.1.5).

Lemme 1.1.1 (de Gronwall) : Soit $X(t)$ une application continue positive sur $[t_0, T]$ telle que: $\exists c, k > 0$ $X(t) \leq c + k \int_{t_0}^t X(s) ds$ alors $X(t) \leq c \cdot \exp k(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, T]$

Preuve. posons $u(t) = c + k \int_{t_0}^t X(s) ds$

$u \in \varphi^1([t_0, T])$ car $X \in \varphi^0([t_0, T]) \quad u'(t) = kX(t)$ mais par hypothèse

$$X(t) \leq u(t) \implies u'(t) - ku(t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$$

$$\exp -k(t - t_0)(u'(t) - u(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$$

$$\frac{d}{dt}(\exp -k(t - t_0)u(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$$

$$\exp -k(t - t_0)u(t) \leq u(t_0)$$

$$u(t) \leq c \cdot \exp k(t - t_0)$$

$$\implies X(t) \leq c \cdot \exp k(t - t_0)$$

Voir[5] ■

Chapitre 2

Méthodes de résolution numériques

L'objectif de ce chapitre est de décrire des certains nombres de méthodes permettant de résoudre numériquement le problème de Cauchy

Etant donné une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ de $[t_0, t_0 + T]$, on cherche à déterminer des valeurs approchées y_0, y_1, \dots, y_N des valeurs $y(t_n)$ prises par la solution exacte y . On notera les pas successives

$$h_n = t_{n+1} - t_n, \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

et

$$h_{\max} = \max(h_n) \text{ le maximum des pas}$$

Définition 2.0.3 (Méthode à un pas et de plusieurs pas)

On appelle méthode à un pas une méthode permettant de calculer y_{n+1} à partir de la seule valeur antérieure y_n . Une méthode à r pas est; au contraire une méthode où le calcul de y_{n+1} nécessite la mémorisation des valeurs $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-r+1}$

2.1 Méthodes numériques à un pas

Les méthodes à un pas sont les méthodes des résolution numérique qui peuvent se s'écrire sous la forme:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Psi(t_n, y_n, h_n) \quad 0 \leq n \leq N \quad (2.1.1)$$

ou $\Psi: [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction que l'on supposera continue. Dans la pratique, la fonction $\Psi(t_n, y_n, h_n)$ peut être définie que sur une partie

de la forme $[t_0, t_0 + T] \times j \times [0, \sigma]$ où j est un intervalle de \mathbb{R} (de sorte que en particulier $[t_0, t_0 + T] \times j$ soit contenu dans le domaine de définition de l'équation différentielle).

Dans toutes les méthodes numériques développées par la suite, on subdivise l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ en N intervalles de longueur $h = \frac{(t_0 + T) - t_0}{N} = \frac{T}{N}$, limités par les points

$$t_n = t_0 + nh \quad 0 \leq n \leq N$$

Définition 2.1.1 (convergence d'une méthode à un pas) *On dit qu'une méthode numérique de la forme (2.1.1) est convergente si pour tout problème de Cauchy (1.1.1) satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \right) = 0$$

dés que $\lim_{h \rightarrow 0} |y_0 - y(t_0)| = 0$

On remarque que cette définition impose que la convergence de l'initialisation y_0 du schéma en plus de celles construites par ce dernier.

2.1.1 Méthode d'Euler

En t_0 on connaît y_0 , donc aussi

$$y'(t_0) = f(t_0, y_0)$$

Si $y(t)$ est la solution exacte de (1.1.1), $y(t)$ est approchée sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ par sa tangente en t_0 . Et ainsi, on a

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

Sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, $y(t)$ sera remplacée par la tangente au point (t_1, y_1) . On trouve

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

Ceci conduit à l'**Algorithme d'Euler**

$$(E) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) & 0 \leq n \leq N \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Précision de la méthode d'Euler: La méthode d'Euler est une méthode du premier ordre, c'est-à-dire que l'erreur au point t_n s'exprime par l'inégalité

$$|y_n - y(t_n)| \leq kh$$

où y_n est la valeur approchée définie par l'algorithme d'Euler, $y(t_n)$ est la valeur exacte de la solution du problème de Cauchy au point $t = t_n = t_0 + nh$, et k une constante indépendante de n et de h .

Exemple 2.1.1 *Résolution d'une équation selon la méthode d'Euler*

Soit le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= y + t \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On veut approcher, à 10^{-3} , la solution de (1.1.1) en $t = 1$ à l'aide de la méthode d'Euler, en subdivisant l'intervalle $[0, 1]$ en dix parties égales. selon l'algorithme d'Euler:

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + h(y_n + t_n) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{cases} \quad 0 \leq n \leq 9 \quad \text{et} \quad h = 0.1$$

on calcule les valeurs du tableau:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_n	1	1.1	1.22	1.362	1.5282	1.7210	1.9431	2.1974	2.4871	2.8158	3.1874

On trouve $y(1) \simeq 3.187$. La solution exacte de l'équation (1.1.1) est donnée par $y(t) = 2 \exp(t) - t - 1$, ce qui donne $y(1) = 3.437$. L'approximation calculée est donc très grossière.

Remarque 2.1.1 *L'erreur dans la méthode d'Euler est relativement importante. Elle peut être améliorée en choisissant plus petit le pas h , ce qui augmente considérablement le volume des calculs à effectuer, ou en approchant la solution du problème de Cauchy par des méthodes permettant de réduire cette erreur.*

2.1.2 Méthode de Taylor (d'ordre 2)

Supposons que f soit de classe C^1 . Alors $y(t)$ est de classe C^2 , est le développement de Taylor d'ordre 2 implique:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n) + o(h^2)$$

et comme

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

d'autre part

$$\begin{aligned} y''(t_n) &= \frac{d}{dt} (y'(t))|_{t=t_n} = \frac{d}{dt} (f(t, y(t)))|_{t=t_n} = \left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{t=t_n} \\ &= \left(\frac{df}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot y' \right) \Big|_{t=t_n} = \frac{df}{dt}(t_n, y(t_n)) + \frac{df}{dy}(t_n, y(t_n)) \cdot f(t_n, y(t_n)) \end{aligned}$$

Il Vient:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) \cdot f(t_n, y(t_n)) \right] + o(h^2)$$

On est donc amené à considérer l'algorithme suivant, appelée:

Algorithme de Taylor (d'ordre 2):

$$(T_2) \quad \begin{cases} y_{n+1} = & y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{df}{dt}(t_n, y_n) + \frac{df}{dy}(t_n, y_n) \cdot f(t_n, y_n) \right] \\ t_{n+1} = & t_n + h \end{cases}$$

precision de la méthode de Taylor:

On montre que la méthode de Taylor(d'ordre 2) est une méthode du second ordre autrement dit l'erreur au point t_n vérifie

$$|y_n - y(t_n)| \leq kh$$

ou y_n est la valeur approchée définie par l'algorithme de Taylor (d'ordre 2) $y(t_n)$ est la valeur exacte de la solution du problème de Cauchy au point t_n et k une constante indépendante de n et h . Si l'on veut encore réduire la marge d'erreur on tiendra compte d'un plus grand nombre de termes dans le développement de Taylor c'est-à-dire,

on suppose f classe C^p et danc y sera de classe C^{p+1} et sa dérivée k^{eme} est $y^{(k)}(t) = f^{[k-1]}(t, y(t))$ avec $f^{[1]} = f'_t + f'_y \cdot f$

le d'evoloppement de Taylor d'ordre p .

permet d'aboutir à l' **Algorithme de Taylor d'ordre p**

$$(T_p) \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \sum_{k=1}^p \frac{h^k}{k!} f^{[k-1]}(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

qui est d'ordre p (au sens de la précision).

Exemple 2.1.2 Résolution d'une équation avec la méthode de Taylor

Soit l'équation différentielle régissant le mouvement du pendule

$$a\ddot{x} + g \sin x = 0 \tag{2.1.2}$$

où a est la longueur du pendule, g la gravitation terrestre et x l'écart du pendule avec la verticale au sol .En posant

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y(x)$$

on a:

$$\ddot{x} = y'\dot{x} = y'y$$

et (2.1.2) devient :

$$ay'y + g \sin x = 0$$

qui s'écrit encore :

$$y' = -\frac{g}{a} \cdot \frac{\sin x}{y} = f(x, y)$$

L'algorithme de Taylor (d'ordre 2) correspondant s'écrit:

$$\begin{cases} y_{n+1} = \dot{x}_{n+1} & = y_n - h \frac{g \sin x_n}{a y_n} + \frac{1}{2} h^2 \left[-\frac{g \cos x_n}{a y_n} - \frac{g^2 \sin^2 x_n}{a^2 y_n^3} \right] \\ x_{n+1} = x_n + 0 & \leq n \leq N-1 \quad h \end{cases}$$

2.1.3 Méthode De Runge-Kutta:

Soit de nouveau le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(t; y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

On reprend l'algorithme(T_2) de Taylor en écrivant la seconde équation de la manière suivante:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \left[f(t_n, y_n) + h \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) \cdot f(t_n, y_n) \right]$$

selon le développement de Taylor on a, à des termes en h près,

$$\left[f(t_n, y_n) + h \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + h \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) \cdot f(t_n, y_n) \right] = f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))$$

Ainsi, on obtient l'**Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2**:

$$(R - K)_2 \begin{cases} t_{n+1} &= t_n + h & 0 \leq n \leq N - 1 \\ p_{n,1} &= f(t_n, y_n) \\ p_{n,2} &= f(t_{n+1}, y_n + hp_{n,1}) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(p_{n,1} + hp_{n,2}) \end{cases}$$

Algorithme de Runge-Kutte d'ordre 4:

$$(R - K)_4 \begin{cases} t_{n+1} &= t_n + h & 0 \leq n \leq N - 1 \\ p_{n,1} &= f(t_n, y_n) \\ p_{n,2} &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}p_{n,1}) \\ p_{n,3} &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}p_{n,2}) \\ p_{n,4} &= f(t_{n+1}, y_n + hp_{n,3}) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(p_{n,1} + 2p_{n,2} + 2p_{n,3} + p_{n,4}) \end{cases}$$

Ainsi, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 consiste à évaluer 4 valeurs intermédiaires $p_{n,1}, p_{n,2}, p_{n,3}$ et $p_{n,4}$ et à faire la moyenne pondérée.

précision de la méthode de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutte d'ordre 2 est une méthode du second ordre, ie

$$|y_n - y(t_n)| \leq kh^2$$

et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est une méthode du quatrième ordre, ie

$$|y_n - y(t_n)| \leq kh^4$$

ou k est une constante qui ne dépend pas du pas h .

Exemple 2.1.3 Soit le problème de cauchy

$$(1) \begin{cases} \dot{y} &= y - \frac{2t}{y} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On veut approcher, en effectuant le calcul avec six (06) décimales, la solution de (1.1.1) en $t = 0.2$ à l'aide des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4. la solution exacte étant $y = \sqrt{2x + 1}$; on estimera alors les résultats obtenus. On considère donc, l'intervall $[t_0, t_1]$ avec $t_0 = 0$, $t_1 = t_0 + h = 0.2$ et $h = 0.2$, c'est-à-dire: $[t_0, t_1] = [0, 0.2]$

1.Méthde de Runge-Kutta d'ordre 2:

Usant de l'algorithme correspondant, on obtient:

$$\begin{cases} t_1 &= t_0 + h &= 0.2 \\ p_{0,1} &= f(t_0, y_0) &= f(0.1) &= 1 \\ p_{0,2} &= f(t, y_0 + hp_{0,1}) &= f(0.2, 1.2) &= 0.866667 \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(p_{0,1} + p_{0,2}) &= 1.186667 \end{cases}$$

Ainsi, $y(0.2) \simeq y_1 = 1.186667$

la valeur exacte étant $y(0.2) = \sqrt{1.4} = 1.183216$, l'erreur commise est:

$$|y(0.2) - y_1| = 1.186667 - 1.183216 = 0.0034510 < 5 \cdot 10^{-2}$$

et delà, $y(0.2) \simeq 1.19 \pm 0.01$ c'est-à-dire y_1 approche (0.2) avec trais (0.3) c.s.e

2.Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4:

De l'algorithme correspondant, il vient:

$$\begin{cases} t_1 &= t_0 + h &= 0.2 \\ p_{0,1} &= f(t_0, y_0) &= f(0.1, 1.1) &= 1 \\ p_{0,2} &= f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}p_{0,1}) &= f(0.1, 1.1) &= 0.918182 \\ p_{0,3} &= f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}p_{0,2}) &= f(0.1, 1.091818) &= 0.908637 \\ p_{0,4} &= f(t_{0+1}, y_0 + hp_{0,3}) &= f(0.2, 1.181727) &= 0.843239 \\ y_{0+1} &= y_0 + \frac{h}{6}(p_{0,1} + 2p_{0,2} + 2p_{0,3} + p_{0,4}) &= 1.183229 \end{cases}$$

Ainsi, $y(0.2) \simeq y_1 = 1.183229$

la valeur exacte, calculée plus haut, étant $y(0.2) = \sqrt{1.4} = 1.183216$, l'erreur est:

$$|y(0.2) - y_1| = |1.183216 - 1.183229| = 0.000013 < 0.5 \cdot 10^{-4}$$

Et donc, $y(0.2) \simeq 1.1832 \pm 0.0001$ c'est-à-dire y_1 approche $y(0.2)$ avec cinq (05) c.s.e

Remarque 2.1.2 les méthodes à un pas considérées jusque là se programme facilement et en cours de calculs elles s'apprêtent sans problèmes au changement de pas.

2.2 Méthodes numérique à pas multiples

Les méthodes à pas multiple sont les méthodes de résolution numérique où pour évaluer y_{n+1} utilisent plusieurs y_{n-k} , $k = 0, 1, \dots, r$. Au départ on doit alors calculer un premier ensemble de y_1, y_2, \dots, y_r avec une autre méthode et puis commencer à itérer à partir de y_{r+1} utilisant les valeurs précédant. On suppose ici que le pas $h_n = h$ est constant. Les calculs sont alors effectués suivant le schéma suivant :

$$(\alpha) \quad y_{n+1} = \sum_{i=0}^r \alpha_i y_i + h \beta_{i-1} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \sum_{i=0}^r \beta_i f(t_{n-1}, y_{n-1})$$

où α_i ; β_i sont des constantes réelles. Si $\beta_{-1} = 0$, le schéma est dit explicite (ou bien forme ouverte): y_{n+1} est obtenu directement par l'application de la formule. Si $\beta_{-1} \neq 0$, le schéma est implicite car il faut résoudre une équation de la forme $y_{n+1} = g(y_{n+1})$ pour obtenir y_{n+1} . Dans ce cas la formule est appelé e fermée ou encore formule de prédicateur correcteur, car elle fournie par itérations des corrections d'une première prédiction, trouvée antérieurement. La supériorité des méthodes à pas multiples sur à pas constants réside dans le fait qu'elle ne nécessitent pas d'évaluation de f en des points intermédiaires (sauf au démarrage).

2.2.1 Méthode des approximations successives (Picard)

La méthode des approximations successives de Picarde est une méthode analytique qui permet de trouver une solution approchée du problème de Cauchy (1.1.1).

Si $y(t)$ est la solution exacte de (1.1.1), elle s'écrirait :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0) ds$$

$$(\alpha) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

En substituant $y_0, y(t_0)$ à $y(t)$ sous le signe intégrale (car la fonction $y(t)$ est inconnue), on obtient la première approximation

La deuxième itération est obtenue en portant formule (α) la valeur trouvée $y_1(t)$ à la place de la fonction inconnue $y(t)$:

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds$$

et ainsi de suite ...

L'algorithme de la **méthode des approximations successives** s'écrit alors :

$$(P) \quad \begin{cases} y_0(t) = 0 \\ y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Les $y_n(t)$ sont appelées les approximations successives (de $y(t)$, solution de (1.1.1)).

Si $f'(t, y) > 0$ et $f(t, y_0) > 0$, les approximations de Picard forment une suite croissante de fonctions inférieures à

$$y(t) : y_0 < y_1 < y_2 \dots < y(t)$$

Par contre si $f'(t, y) < 0$, alors la suite des approximations est décroissante :

$$y_0 > y_1 > y_2 > \dots > y_n > y(t).$$

Et ainsi lorsque $f'(t, y) > 0$, les approximations de Picard forment une suite d'approximation unilatérales. Si $f'(t, y) < 0$, les approximations forment une suite bilatérales.

Exemple 2.2.1 En appliquant la méthode des approximations successives à la résolution du problème Cauchy :

$$\begin{cases} y' = y + t & t \leq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On trouve, en partant de $y_0 = y(0) = 0$:

$$y_{n+1} = \int_0^t (s + y_n(s)) ds \quad n = 1, 2, \dots$$

donc

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{t^2}{2!} \\ y_2(t) &= \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \\ y_3(t) &= \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \\ y_n(t) &= \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Ici, $f(t, y_0) = t + y_0 \geq 0$ et $f'_y(t, y_0) = 1$.

Par conséquent la suite des approximations de Picard (y_n), forme une suite de fonctions inférieures (suite décroissante).

La solution exacte du problème est obtenue par :

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right) - t - 1 = \exp(t) - t - 1 \end{aligned}$$

2.2.2 Méthode d'Adams :

Soit $y(t)$ la solution exacte du problème de Cauchy(1.1.1). Supposons qu'on ait déjà calculé par un procédé quelconque, les trois valeurs suivantes de

$$y(t) : y_1 = y(t_1) = y(t_0 + h), y_2 = y(t_0 + 2h)$$

et

$$y_3 = y(t_3) = y(t_0 + 3h)$$

Comptetenu de la condition initiale $y(t_0) = y_0$, et à l'aide des nombres t_0, t_1, t_2, t_3 et y_0, y_1, y_2, y_3 , on calcule les grandeurs u_0, u_1, u_2, u_3

où $u_0 = hf(t_0, y_0)$ $u_1 = hf(t_1, y_1)$ $u_2 = hf(t_2, y_2)$ et $u_3 = hf(t_3, y_3)$

Ensuite, on forme le tableau des différences finies des grandeurs y_i et

x_i	y_i	Δy_i	u_i	Δu_i	$\Delta^2 u_i$	$\Delta^3 u_i$
t_0	y_0		u_0			
		Δy_0		Δu_0		
t_1	y_1		u_1		$\Delta^2 u_0$	
		Δy_1		Δu_1		$\Delta^3 u_0$
t_2	y_2		u_2		$\Delta^2 u_1$	
		Δy_2		Δu_2		$\Delta^3 u_1$
t_3	y_3		u_3		$\Delta^2 u_2$	
		Δy_3		Δu_3		$\Delta^3 u_2$
t_4	y_4		u_4		$\Delta^2 u_3$	
\vdots	\vdots	Δy_4		Δu_4		$\Delta^3 u_3$
t_{n-3}	y_{n-3}		u_{n-3}			\vdots
		Δy_{n-3}		Δu_{n-3}		
t_{n-2}	y_{n-2}		u_{n-2}		$\Delta^2 u_{n-3}$	
		Δy_{n-2}		Δu_{n-2}		$\Delta^3 u_{n-3}$
t_{n-1}	y_{n-1}		u_{n-1}		$\Delta^2 u_{n-2}$	
		Δy_{n-1}		Δu_{n-1}		
t_n	y_n		u_n			

Au bas de tableau, la connaissance des nombres de la rangée oblique composée de

$$u_n \quad \Delta u_{n-1} \quad \Delta^2 u_{n-2} \quad \Delta^3 u_{n-3}$$

permet de trouver y_n par la formule d'Adams:

$$\Delta y_n = u_n + \frac{1}{2} \Delta u_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 u_{n-2} + \frac{5}{8} \Delta^3 u_{n-3}$$

qui s'écrit encore (car $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$) : **formule d'Adams,**

$$(A) \quad y_{n+1} = y_n + u_n + \frac{1}{2} \Delta u_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 u_{n-2} + \frac{3^3}{8} u_{n-3}$$

Pour $n = 3$

On obtient

$$y_4 = y_3 + u_3 + \frac{1}{2}\Delta u_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 u_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 u_0$$

Si on connaît y_4 on peut calculer $u_4 = h.f(t_4, y_4)$, ce qui permet d'écrire la rangée oblique suivante:

$$u_4 = hf(t_4, y_4), \Delta u_3 = u_4 - u_3, \Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2, \Delta^3 u_1 = \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1$$

la nouvelle diagonale donne la possibilité de calculer par la formule d'Adams (A) la valeur de $y_5 = y_4 + u_4 + \frac{1}{2}\Delta u_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 u_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 u_1$, et ainsi de suite...

ainsi la formule (A) résoud le problème posé . Lorsqu'on a estimé $y(t)$ pour les valeurs t_1, \dots, t_n elle fournit l'approximation y_{n+1} de $y(t_{n+1})$. On peut encore calculer

$u_{n+1} = hf(t_{n+1}, y_{n+1})$, compléter le tableau, et recommencer les mêmes opérations en remplaçant n par $n + 1$.

précision :

La méthode d'Adams, représentée par la formule (A), est d'ordre 5, c'est-à-dire:

$$|y_n - y(t_n)| \leq kh^5$$

où y_n est la valeur calculée par la formule (A), $y(t_n)$ la valeur exacte de la solution $y(t_n)$ du problème de Cauchy (1.1.1) au point t_n et k une constante qui ne dépend pas de h .

Exemple 2.2.2 Afin de calculer la valeur approchée, au point $t = 2$, de la solution de l'équation différentielle $t^2 y' - ty = 1$, vérifiant la condition initial a $y(1) = 0$ appliquons la méthode d'Adams, avec $h = 0.2$ pour cela, soit $y_0 = y(1) = 0$, $y_1 = y(1.2) = 0.1834$, $y_2 = y(1.4) = 0.3429$ et $y_3 = y(1.6) = 0.4898$

(calculés préalablement dans notre cas par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4) l'équation différentielle associée au problème de Cauchy s'écrit encore:

$$t^2 y' - ty = 1 \iff y' = \frac{1}{t}(y + \frac{1}{t}) = f(t, y)$$

calculons alors u_0, u_1, u_2 et u_3 . Nous avons:

$$u_0 = hf(t_0, y_0) = 0.2; u_1 = hf(t_1, y_1) = 0.1695$$

$$u_2 = hf(t_2, y_2) = 0.1510; \quad u_3 = hf(t_3, y_3) = 0.1394$$

Et le tableau des différences finies des grandeurs y_i et u_i s'écrit:

x_i	y_i	Δy_i	u_i	Δu_i	$\Delta^2 u_i$	$\Delta^3 u_i$
1.0	0		0.2			
		0.1834		-0.0305		
1.2	0.1834		0.1695		0.0120	
		0.1595		-0.0105		-0.0051
1.4	0.3429		0.1510		0.0069	
		0.1469		-0.0116		
1.6	0.4898		0.1394			

Alors, d'après la formule d'Adams (A) on obtient:

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + u_3 + \frac{1}{2}\Delta u_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 u_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 u_0 \\ &= 0.4899 + 0.1394 - 0.0058 + 0.0029 - 0.0019 = 0.6244 \end{aligned}$$

la solution exacte étant $y(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}$ estimons la valeur obtenue. L'erreur commise est égale à :

$$y_4 - y(1.8) = 0.6244 - 0.6222 = 0.0022 \leq 0.510^{-2}$$

Ainsi

$$y_4 = 0.6244 \simeq 0.62 \pm 10^{-2}$$

Et comme on connaît y_4 , on peut calculer $u_4 = hf(t_4, y_4) = 0.1311$.

Cela permet de compléter le tableau par la diagonale inférieure suivante: $u_4, \Delta u_3, \Delta^2 u_2, \Delta^3 u_1$ où:

$$\Delta u_3 = u_4 - u_3 = 0.1311 - 0.1394 = -0.0083$$

$$\Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2 = -0.0083 + 0.0116 = 0.0033$$

$$\Delta^3 u_1 = \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = 0.0033 - 0.0069 = -0.0036$$

la nouvelle diagonale donne la possibilité de calculer par la formule d'Adams(A) la valeur:

$$y_5 = y_4 + u_4 + \frac{1}{2}\Delta u_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 u_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 u_1$$

$$= 0.6244 + 0.1311 - 0.0042 + 0.0014 - 0.0014 = 0.7513$$

l'erreur commise dans ce cas est égale à:

$$y_5 - y(2) = 0.7513 - 0.7500 = 0.0013 \leq 0.510^{-2}$$

Ainsi, une valeur approchée, au point $t=2$, de la solution exacte du problème de cauchy ci-dessus est donnée par: $y_5 = 0.7513 \simeq 0.75 \pm 10^{-2}$.

Chapitre 3

Comparaison des méthodes et applications

3.1 Comparaison des méthodes à un pas (méthode d'Euler, méthode de Taylor d'ordre 2, méthode de Runge-Kutta)

Soit le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= t \sin y \\ y(0) &= 2 \\ h &= 0.1 \end{cases}$$

1-méthode d'Euler:

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_0 &= 2 \\ h &= 0.1 \end{cases}$$

$$y_1 = 2 + 0.1(0, \sin 2) = 2$$

$$y_2 = 2 + 0.1(0.1 \sin 2) = 2,0090029$$

2-méthode de Taylor d'ordre 2:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) f(t_n, y_n) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) = \sin y_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) = t_n \cos y_n$$

$$y_1 = y_0 + h(t_0 \sin y_0) + \frac{h^2}{2}(\sin y_0 + t_0 \cos y_0 t_0 \sin y_0)$$

$$y_1 = 2,0045648$$

$$y_2 = 2,0181109$$

3-méthode de Runge-Kutta:

méthode de Runge-Kutta d'ordre 2:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(p_{n,1} + p_{n,2})$$

$$p_{n,1} = f(t_0, y_0) \approx 0$$

$$p_{n,2} = f(t_1, y_1 + hp_{n,1}) = 0,090029742$$

$$y_1 = 2 + 0.1(0,090029742) = 2,009092974$$

$$y_2 = y_1 + \frac{0.1}{2}(p_{n,1} - p_{n,2})$$

$$y_2 = 2.022636313$$

Méthode De Runge-Kutta d'ordre 4:

$$y_0 = 2; h = 0.1$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)$$

$$p_1 = hf(t_0, y_0)$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = hf(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}p_1) = 0.004546487$$

3.1. Comparaison des méthodes à un pas (méthode d'Euler, méthode de Taylor d'ordre 2, méthode de Runge-Kutta)

$$p_3 = hf(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}p_2) = 0.0004541745$$

$$p_4 = hf(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + p_3) = 0.1f(0.1, 2.004541745)$$

$$y_1 = 2.004541741$$

solution exacte

$$y' = \sin y \Leftrightarrow \frac{y'}{\sin y} = x \Leftrightarrow \frac{dy}{\sin y} = x dx$$

$$y = 2Arctg(k \exp \frac{t^2}{3})$$

$$y_0 = 2Arctg(K) = 2; y(0) = 2t = 0$$

$$k = \tan 1 \Leftrightarrow Arctg(k) = 1$$

$$y = 2Arctg(\tan 1. \exp \frac{t^2}{2})$$

$$y(0, 1) = 2.010022991$$

$$y(0, 2) = 2.040394225$$

la tableau repré sont les résultats de comparaison entre les 4 méthodes et la solution exacte.

i	h	xi	yi-Exact	Taylor	Runge-Kutta d'ordre 2	Runge-Kutta d'ordre 4	y(xi)
0	0.1	0	2	2	2	2	1.9999
1	0.1	0.1	2	2.00454649	2.00454649	2.0045689	2.01002
2	0.1	0.2	2.00909297	2.02721232	2.01811892	2.0245823	2.040
3	0.1	0.3	2.02720249	2.0675269	2.04043902	2.073604	2.09200
4	0.1	0.4	2.05413176	2.12448281	2.07095164	2.09892	2.16653
5	0.1	0.5	2.08954975	2.19642531	2.10876879	2.199573	2.266
6	0.1	0.6	2.13297164	2.2809442	2.1526197	2.323201	2.394
7	0.1	0.7	2.1837375	2.37483776	2.20084171	2.421587	2.55507
8	0.1	0.8	2.24099467	2.47421488	2.25144565	2.514273	2.754
9	0.1	0.9	2.30369055	2.57478245	2.30227107	2.687924	2.9982

Conclusion 3.1.1 Dans les resultats de la tableau précédent nous avons conclu la valeur de précision, il est déffirent enter méthode et autre comme le plus grand de la méthode de Runge Kutta.

Remarque 3.1.1 *L'algorithme de Taylor(d'ordre 2) est plus précis que celui d'Euler.*

3.2 Application

nous prenons un exemple de système dynamique qui est bien adapté à vérifier les performances de plusieurs méthodes numériques introduites dans les sections précédentes.

3.2.1 L'analyse du mouvement d'un pendule sans friction

Prenons le pendule sans friction figure, dont le mouvement est régi par le système des ODEs suivant:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = -k \sin(y_1) \end{cases}$$

pour $t > 0$, où $y_1(t)$ et $y_2(t)$ représentent la position et la vitesse angulaire du pendule au moment et géométrique du pendule. Nous considérons les conditions initiales: $y_1(0) = \theta_0$, $y_2(0) = 0$.

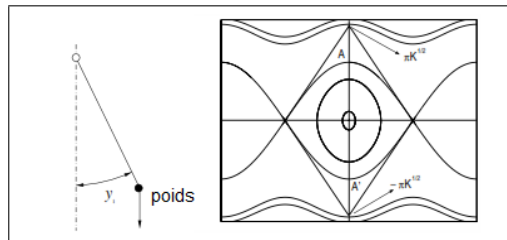


Figure 3.2.1 : Gauche: pendule sans friction; Droite: orbites

De système dans la phase de l'espace indiquant par $y = (y_1, y_2)^T$ la solution de système, ceci admet infiniment bon nombre des conditions d'équilibre de la forme $y(n\pi, 0)^T$ pour $n \in \mathbb{Z}$, correspondant à des situations où le pendule est en position verticale avec la vitesse zéro pour n , l'équilibre est encore stable, tandis que pour n impair il est instable. Ces conclusions peuvent être tirées en analysant le système linéarisé

$$y' = A_e y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{bmatrix} y, \quad y' = A_o y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{bmatrix} y$$

si n est pair la matrice A_e a de complexe valeurs conjuguées $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$ et vecteurs propres associés $y_{1,2} = (\pm i\sqrt{k}, 1)^T$, tandis que pour n impair, A_o réel et en face de valeurs propres réelles et opposées $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k}$ et des vecteurs propres $y_{1,2} = (1/\sqrt{k}, \pm 1)^T$

prenons deux ensembles différents de données initiales: $y^{(0)} = (\theta_0, 0)^T$

et $y^{(0)} = (\pi + \theta_0, 0)^T$, où $|\theta_0| \ll 1$. les solutions du correspondant système linéarisé sont respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{k}t) \\ y_2(t) = -\sqrt{k}\theta_0 \sin(\sqrt{k}t) \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} y_1 = (\pi + \theta_0) \cosh(\sqrt{k}t) \\ y_2(t) = \sqrt{k}(\pi + \theta_0) \sinh(\sqrt{k}t) \end{array} \right\}$$

et seront désignées ci-après comme "stables" et "instable", respectivement, pour des raisons qui seront claires plus tard. pour ces solutions dans le plan (y_1, y_2) appelée la phase de l'espace, les orbites suivants (c'est-à-dire, les graphiques obtenus traçant la courbe $(y_1(t), y_2(t))$ dans la phase de l'espace)

$$\left(\frac{y_1}{\theta_0} \right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{k}\theta_0} \right)^2 = 1 \quad (\text{stablecase})$$

$$\left(\frac{y_1}{\pi + \theta_0} \right)^2 - \left(\frac{y_2}{\sqrt{k}(\pi + \theta_0)} \right)^2 = 1 \quad (\text{unstablecase})$$

Dans le cas stable, les orbites sont ellipses avec période $2\pi/\sqrt{k}$ et sont centrés à $(0, 0)^T$, alors que dans le cas instable elles sont hyperboles centrée à $(0, 0)^T$ et asymptotique au lignes droites $y_2 = \pm\sqrt{k}y_1$. l'image complète de la motion du pendule dans la phase de l'espace est illustrée à la figure (3.2.1) à droite Remarquez que, laissant $v|y_2|$ et fixant la position initiale $y_1(0) = 0$, il existe une valeur limite $v_L = 2\sqrt{k}$ qui correspond dans la figure (3.2.1) aux points A et A' . pour $v(0) < v_L$ les orbites sont fermés, alors que pour $v(0) > v_L$ ils sont ouverte, correspondant à une révolution en continu du pendule, avec passages infinie (avec vitesse non nul et périodiques) à travers les deux positions d'équilibre $y_1 = 0$ et $y_2 = \pi$. le cas limier $v(0) = v_L$ produit une solution telle que, grace au principe de la conservatio de l'énerhie totale, $y_2 = 0$ quand $y_1 = \pi$. En fait ces deux valeurs sont atteintes asymptotiquement uniquement pour $t \rightarrow \infty$ le premier système différentielle non linéaire a été résolu numériquement à l'aide de la méthode d'Euler marche avant (FE), le point médian méthode (MP) et le régime de deuxième ordreb Adams-Bashforth (AB). Nous montrons l'orbite dans l'espace des phases qui ont été calculées par les seux méthodes sur l'intervalle

de temps $(0, 30)$ et en prenant $k = 1$ et $h = 0, 1$. les croisements indiquent des conditions initiales. Comme vous pouvez le constater, les orbites générées par FE ne ferment pas. Ce genre d'instabilité est due au fait que la région d'une stabilité absolue de la méthode FE exclut complètement l'axe imaginaire. Au contraire, la méthode MP décrit précisément les orbites du système fermé en raison du fait que sa région de stabilité asymptotique inclut des valeurs propres purement imaginaires dans le voisinage de l'origine du plan complexe. Il doit également être noté que le régime MP régime donne lieu à des solutions oscillantes comme VO devient plus grande. le deuxième ordre méthode AB, par contre, décrit correctement toutes sortes d'orbites.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié les solutions approchées d'une équation différentielle ordinaire. nous avons vu dans le premier chapitre en commençant par des théorèmes de bases concernant ce sujet d'étude comme l'existence et l'unicité de la solution, et dans le second chapitre on a exposé les principales méthodes numériques dans le traitement des équations différentielles ordinaires(méthode à un pas, méthodes de plusieurs pas).

Dans le chapitre trois en comparaisant entre les méthodes a un pas associés avec un exemple d'application .

Bibliographie

- [1] Analyse Numérique-R.TOUZANI (reesourecs sur internete).
- [2] A.Quarteroni.Ricardo Sacco.FaustoSaleri; Numerical Mathematies; Spring MilanoJanuary 2000.
- [3] A.Quarteroni.Ricardo Sacco.Fausto Saleri; Méthode Numérique-Algorithmme Analyse et Applications; Spring;Février 2007
- [4] D.Hulin; Théorie des équations différentielles ordinaires; Mai 2013.
- [5] Jean-Pierre DEMAILLY; Analyse Numérique et Equation Differentielles,office des publication universitaire.
- [6] J.BASS;Cours de Mathématiques;Parise New York Barcelone Milan;1978.
- [7] Mahammed Hazzi ; Topologie au DelaDestravaux Dirigés;Office des Publications Universitairer.

Résumé

Dans ce travail ,nous avons étudié les solution approché d'une équation différentielle ordinaires en commençant par des théorèmes de bases concernant ce sujet d'étude comme l'existence et l'unicité de la solution Aussi, on a exposé les principales méthodes numériques dans le traitement des équation différentielle ordinaires (méthodes à un pas, méthodes de plusieurs pas) accompagnées de quelques exemples numériques en relation avec le problème de Cauchy , ainsi que la comparaison enter les méthodes numériques à un pas en citant exemple d'application

Mots clés: Equation différentielles ,problème de Cauchy ,méthode d'Euler , méthode de Runge-Kutta ,méthode de Taylor ,méthode Picard, méthode d' Adams.

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة الحلول التقريبية لمعادلة تفاضلية عادية، حيث تم التطرق إلى نظريات أساسية متعلقة بموضوع البحث كوجود و وحدانية الحل كما عرضنا فيه ابرز الطرق العددية في معالجة المعادلات التفاضلية العادية (الطرق ذات الخطوة الوحيدة و الطرق متعددة الخطوات المرفقة ببعض الأمثلة العددية المتعلقة بحل مسألة كوشي كما تطرقنا إلى المقارنة بين الطرق العددية ذات الخطوة الوحيدة مع ذكر مثال تطبيقي.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية، مسألة كوشي، طريقة اولر، طريقة رونج كوتا، طريقة تايلور، طريقة بيكارد، طريقة أدمس.

Abstract

In this work we studied approximate solutions of ordinary differential equations ,where we discussed basic theories of related to this subject as the existence and uniqueness of the solution ,Thus we present here the most important numerical methods for solving ordinary differential equations (method a step and method several steps) associated with a numerical example for the solution of the Cauchy problem ,and we compared between the method of numerical a step method and example appliqué

keywords : Differential equation ,Cauchy problem ,Euler method, Rang-Kutta method, Taylor method , Picard method ,Adams method