



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de  
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

# MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

## Thème

**Solutions positives des problèmes aux  
limites du second ordre à trois points**

Présenté par: Medjouel Radja.

Soutenu publiquement devant le jury composé de

|                         |     |            |               |
|-------------------------|-----|------------|---------------|
| Guedda Lamine           | MCA | Président  | Univ. El Oued |
| Ghendir Aoun Abdellatif | MCB | Rapporteur | Univ. El Oued |
| Gabsi Hocine            | MCB | Examineur  | Univ. El Oued |

Année universitaire 2020 – 2021

# Remerciements

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude au directeur de ce mémoire, M. Abdellatif Ghendir Aoun, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères au corps professoral et administratif de l'Université Hamma Lakhdar, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée. Je désire aussi remercier les professeurs de l'Université Hamma Lakhdar, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires. Un grand merci à ma mère et mon père, pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et économique, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais et par conséquent ce mémoire.

# Table des matières

|                                                                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Notations</b>                                                                                                      | <b>3</b>  |
| <b>Introduction</b>                                                                                                   | <b>4</b>  |
| <b>1 Préliminaires</b>                                                                                                | <b>7</b>  |
| 1.1 Quelques outils de base . . . . .                                                                                 | 7         |
| 1.2 Application compact . . . . .                                                                                     | 8         |
| 1.3 Critère de compacité dans $C([a, b], \mathbb{R})$ : . . . . .                                                     | 8         |
| 1.4 Théorème de point fixe . . . . .                                                                                  | 9         |
| <b>2 SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU SE-<br/>COND ORDRE À TROIS POINTS DU TYPE DIRICHLET</b>         | <b>10</b> |
| 2.1 Résultats Préliminaires . . . . .                                                                                 | 10        |
| 2.2 Existence de solutions positives . . . . .                                                                        | 14        |
| 2.3 Quelques exemples d'applications . . . . .                                                                        | 19        |
| <b>3 SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU SE-<br/>COND ORDRE À TROIS POINTS DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN</b> | <b>21</b> |
| 3.1 Résultats Préliminaires . . . . .                                                                                 | 22        |
| 3.2 Existence de solutions positives . . . . .                                                                        | 24        |
| 3.3 Quelques exemples d'applications . . . . .                                                                        | 35        |
| <b>Conclusion</b>                                                                                                     | <b>39</b> |
| <b>Bibliographie</b>                                                                                                  | <b>40</b> |

# Notations

|                               |                                                               |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$                  | l'ensemble des nombres naturels                               |
| $\mathbb{R}$                  | l'ensemble des nombres réels                                  |
| $[a, b]$                      | l'intervalle fermé $a \leq x \leq b$                          |
| $(a, b)$                      | l'intervalle ouvert $a < x < b$                               |
| $K$                           | un cône                                                       |
| $\epsilon$                    | indique un très petit nombre                                  |
| $(.)' = \frac{d(.)}{dt}$      | la dérivée ordinaire par rapport à $t$                        |
| $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ | ouvert dans $\mathbb{R}^n$                                    |
| $\overline{\Omega}$           | L'adhérence ou la fermeture de $\Omega$                       |
| $\partial\Omega$              | frontière de $\Omega$                                         |
| $C(\overline{\Omega})$        | fonctions continues sur $\Omega$                              |
| $C^n(\overline{\Omega})$      | fonctions $n$ fois continûment différentiables sur $\Omega$ . |

Dans ce mémoire, nous utilisons spécifiquement l'espace suivant :

$C([0, 1], \mathbb{R})$  est un espace de Banach des fonctions continues  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , muni de la norme

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|, t \in [0, 1]\}.$$

# Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives de quelques problèmes aux limites associés à des équations différentielles posées sur des intervalles bornés et où les conditions aux bords à trois points.

Problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires se posent dans les sciences physiques et les mathématiques appliquées. Dans certains de ces problèmes, les conditions filiales sont imposées localement. Dans autres cas, les conditions sont imposées en générale non locales et en cas particulier à trois points. Il est parfois préférable d'imposer des conditions à trois points puisque les mesures nécessaires à une condition à trois points peut être plus précis que la mesure donnée par une condition locale. Par exemple, le problème classique de Robin est donnée par

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) = 0, & t \in (0, 1) \\ x(0) = 0, & x'(1) = 0. \end{cases}$$

Si la condition locale  $x'(1) = 0$  est remplacé par la condition  $x(1) = x(\eta)$  (où  $\eta \in (0, 1)$ ), alors le problème

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) = 0, & t \in (0, 1) \\ x(0) = 0, & x(1) = x(\eta), \end{cases}$$

est une problème aux limites à trois points.

l'existence et la multiplicité des solutions positives pour les équations différentielles ordinaires non linéaires ont reçu beaucoup de attention. Pour en identifier quelques-uns, nous renvoyons le lecteur à [2], [4] - [13] et aux références qui s'y trouvent. Il ya beaucoup d'attention centrée sur le question des solutions positives de problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires. Une grande partie de l'intérêt est dû à l'applicabilité de certains théorèmes de point fixe et en particulier théorème de Guo-Krasnosel'skii, ou

## Introduction

---

une synthèse à la fois d'obtenir des solutions positives ou plusieurs des solutions positives qui se trouvent dans un cône.

Ma dans [7] a étudié l'existence des solutions positives uniques et multiples de problème aux limites non locale à trois points suivante

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)f(x) = 0, & t \in (0, 1) \\ x(0) = 0, & x(1) = \alpha x(\eta), \end{cases} \quad (1)$$

où  $0 < \eta < 1$  et  $\alpha\eta < 1$ .

Dans [6] Bing Liu a étudié l'existence des solutions positives uniques et multiples de problème aux limites non locale à trois points suivante

$$\begin{cases} x'' + a(t)f(x) = 0, & t \in (0, 1) \\ x'(0) = 0, & x(1) = \alpha x(\eta), \end{cases} \quad (2)$$

où  $0 < \eta < 1$ .

Notre but dans cette situation est de donner quelques résultats d'existence des solutions positives à (1) et (2).

En supposant que  $f$  est soit super-linéaire ou sous-linéaire. Imposer

$$f_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}, \quad f_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Alors  $f_0 = 0$  et  $f_\infty = \infty$  correspondent au cas super-linéaire, et  $f_0 = \infty$  et  $f_\infty = 0$  correspondent au cas sous-linéaire.

Par la solution positive de le problème (1) ou (2), nous entendons une fonction  $x(t)$  qui est positive sur  $0 < t < 1$  et satisfait l'équation différentielle et les conditions aux limites dans (1) ou (2).

L'outil clé dans notre méthode est le théorème de Guo-Krasnosel'skii de point fixe dans un cône.

Ce travail est subdivisée en trois chapitres.

- Préliminaires
- Solutions positives d'un problème aux limites du second ordre à trois points du type Dirichlet.
- Solutions positives d'un problème aux limites du second ordre à trois points du type Dirichlet-Neumann.

## *Introduction*

---

Plus précisément, nous allons résumer les résultats concernant ces chapitres comme suit. Dans le premier chapitre on sera consacrée aux préliminaires sur des notions générales utilisées dans les différents chapitres du travail, on présente la notion de quelques outils de base pour les définitions de : cône, concave et leurs propriétés. L'application compact et le critère de compacité dans espaces proposes. Le théorème d'Ascoli-Arzela et enfin le théorème de points fixe de Guo-Krasnosel'skii.

Au deuxième chapitre, nous exposons des conditions suffisantes pour l'existence des solutions positives du problème du second ordre à trois points suivant du type Dirichlet (où l'on spécifier les valeurs de la solution doit vérifier sur les frontières du domaine)

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)f(x) = 0, & t \in (0, 1) \\ x(0) = 0, & x(1) = \alpha x(\eta), \end{cases}$$

où  $0 < \eta < 1$  et  $\alpha\eta < 1$ .

Dans le troisième chapitre, on consacre à l'étude quelques résultats l'existence et la multiplicité des solutions positives pour le problème aux limites à trois points suivant du type Dirichlet-Neumann (où l'on spécifier les valeurs de la solution et les valeurs des dérivées de la solution doit vérifier sur les frontières du domaine)

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)f(x) = 0, & t \in (0, 1) \\ x'(0) = 0, & x(1) = \alpha x(\eta), \end{cases}$$

où  $0 < \eta < 1$ , et en supposant que  $f$  est soit super-linéaire ou sous-linéaire.

Chaque résultat d'existence a été illustré par des exemples d'applications.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Quelques outils de base

**Définition 1.1** Soit  $E$  un espace de Banach.

Un sous-ensemble non vide convexe fermé  $K$  de  $E$  est un cône si elle satisfait les deux conditions suivantes :

- (i)  $\forall x \in K, \forall \lambda \geq 0$  implique  $\lambda x \in K$ ,  $((\lambda K) \subset K)$
- (ii)  $x \in K$  et  $-x \in K$  implique  $x = 0$ ,  $(K \cap (-K) = \{0\})$ .

**Définition 1.2** Une fonction  $f$  à valeurs réelles sur intervalle (ou, plus généralement, un ensemble convexe en espace vectoriel) est dit concave si pour tout  $x$  et  $y$  dans l'intervalle et pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Et appel d'une fonction strictement concave si

$$f(tx + (1 - t)y) > tf(x) + (1 - t)f(y).$$

**Remarque 1.1** (a) Si  $f$  est concave sur un intervalle. Alors pour  $a, x, b$  dans l'intervalle avec  $a < x < b$ , nous avons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(b) (*Critères de concavité*). Supposons  $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$   
i.e. :  $f''$  est continue, alors  
( $f$  est concave), si et seulement si,  $(f''(x) \leq 0$  pour tout  $x \in U$ ).

**Définition 1.3** Soit  $X$  un espace de Banach ordonné. Une application  $T$  est croissante (resp. décroissante) si  $T(x) \leq T(y)$  (resp.  $T(x) \geq T(y)$ ), pour tout  $x, y \in X$  avec  $x < y$ .

## 1.2 Application compact

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et  $\Omega \subset X$  un ouvert.

**Définition 1.4** Soit  $f$  un application définie de  $X$  à valeurs dans  $Y$ . On dit que  $f$  est complètement continue si elle est continue et compacte.

**Définition 1.5** Soit  $f$  un application définie de  $X$  à valeurs dans  $Y$ .  $f$  est dite compact si  $f(x)$  est relativement compact dans  $Y$  i.e.  $f$  transforme tout borné de  $X$  en un ensemble relativement compact dans  $Y$ .

**Proposition 1.2.1** Une application  $f : X \rightarrow Y$  est compact si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$ , on peut extraire une sous-suite  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que la suite  $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  converge dans  $Y$ .

## 1.3 Critère de compacité dans $C([a, b], \mathbb{R})$ :

**Définition 1.6** On dit que des fonctions d'un sous-ensemble  $M \subset C([a, b], \mathbb{R})$  sont uniformément bornées, s'il existe une constante  $a > 0$  telle que  $|x(t)| \leq a$  pour tout  $x(.)$  de  $M$  et quel soit  $t \in [a, b]$ .

**Définition 1.7** On dit que des fonctions d'un sous-ensemble  $M \subset C([a, b], \mathbb{R})$  sont équi-continues, si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  ( $\delta = \delta(\varepsilon)$ ), tel que pour tous  $t_1, t_2 \in [a, b]$  avec  $|t_1 - t_2| < \delta$  et pour toute fonction  $x(.)$  de  $M$  on ait  $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ .

**Théorème 1.1** (*d'Ascoli-Arzelà, cas générale*)([1])

Soit  $X$  un espace métrique compact,  $Y$  un espace métrique complet. Un sous-ensemble

$M \subset C(X, Y)$  est relativement compact si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. Pour tout  $t \in X$ , l'ensemble  $M(t) = \{x(t), x(\cdot) \in M\}$  est relativement compact dans  $Y$ .
2.  $M$  est équicontinue.

**Théorème 1.2 (d'Ascoli-Arzelà, cas particulier)**

Soit  $M \subset C([a, b], \mathbb{R})$  est relativement compact si  $M$  est uniformément bornée et équicontinue.

## 1.4 Théorème de point fixe

La démonstration des théorèmes principaux est basée sur une application de théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii suivant :

**Théorème 1.3** (théorème de Guo-Krasnosel'skii) ([3]) Soit  $X$  un espace de Banach, et soit  $K \subset X$  un cône. Supposons que  $\Omega_1, \Omega_2$  sont deux sous-ensembles de  $X$  ouverts, bornés avec  $0 \in \Omega_1, \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ , et soit

$$A : K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \longrightarrow K$$

un opérateur complètement continu tels que

- (i)  $\|Ax\| \leq \|x\|$ ,  $x \in K \cap \partial\Omega_1$ , et  $\|Ax\| \geq \|x\|$ ,  $x \in K \cap \partial\Omega_2$ ; ou
- (ii)  $\|Ax\| \geq \|x\|$ ,  $x \in K \cap \partial\Omega_1$ , et  $\|Ax\| \leq \|x\|$ ,  $x \in K \cap \partial\Omega_2$ .

Alors,  $A$  admet un point fixe dans  $K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ .

## Chapitre 2

# SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU SECOND ORDRE À TROIS POINTS DU TYPE DIRICHLET

### 2.1 Résultats Préliminaires

Dans ce chapitre nous considérons le problème aux limites de second ordre à trois points suivant :

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)f(x) = 0, & t \in (0, 1) \\ x(0) = 0, & x(1) = \alpha x(\eta). \end{cases} \quad (2.1)$$

Nous donnons d'abord quelques lemmes préliminaires.

**Lemme 2.1** *Soit  $y \in C([0, 1])$ ,  $\alpha\eta \neq 1$  de telle sorte que soit*

$$\begin{cases} x''(t) + y(t) = 0, & t \in (0, 1) \\ x(0) = 0, & x(1) = \alpha x(\eta). \end{cases} \quad (2.2)$$

## SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET

---

Alors,

$$\begin{aligned} x(t) = & - \int_0^t (t-s)y(s)ds - \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta} \int_0^\eta (\eta-s)y(s)ds \\ & + \frac{t}{1-\alpha\eta} \int_0^1 (1-s)y(s)ds. \end{aligned}$$

**Démonstration.**

$$(x''(t) = -y(t)) \implies \left( x(t) = x'(0)t - \int_0^t (t-s)y(s)ds \right),$$

ensuite, nous obtenons

$$x(1) = x'(0) - \int_0^1 (1-s)y(s)ds$$

et

$$x(\eta) = x'(0)\eta - \int_0^\eta (\eta-s)y(s)ds.$$

De  $x(1) = \alpha x(\eta)$  on a,

$$(1-\alpha\eta)x'(0) = -\alpha \int_0^\eta (\eta-s)y(s)ds + \int_0^1 (1-s)y(s)ds,$$

alors,

$$x(t) = - \int_0^t (t-s)y(s)ds - \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta} \int_0^\eta (\eta-s)y(s)ds + \frac{t}{1-\alpha\eta} \int_0^1 (1-s)y(s)ds.$$

**Lemme 2.2** Soit  $0 < \alpha < \frac{1}{\eta}$ . Si  $y \in C([0, 1])$  et  $y \geq 0$ , pour  $t \in (0, 1)$ , alors la solution  $x$  de problème (2.2) satisfait  $x(t) \geq 0$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Démonstration.**

Du fait que  $x''(t) = -y(t) \leq 0$ , nous savons que le graphe de  $x : t \mapsto x(t)$  est concave vers le bas sur  $(0, 1)$ .

Ce qui implique que pour tout  $t \in (0, 1)$ ,

$$\frac{x(t) - x(0)}{t} \geq \frac{x(1) - x(0)}{1}$$

i.e.  $(x(t) \geq tx(1))$ .

Donc, si  $x(1) \geq 0$ , alors la concavité de  $x$  et la condition limite  $x(0) = 0$  implique que  $x(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, 1]$ .

Si  $x(1) < 0$ , alors nous avons que  $x(\eta) < 0$  et  $x(1) = \alpha x(\eta) > \frac{1}{\eta}x(\eta)$ , ce qui est contredit à la concavité de  $x$ ,  $\left( \frac{x(\eta) - x(0)}{\eta - 0} \geq \frac{x(1) - x(0)}{1 - 0} \right)$ .

## ***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET***

---

**Lemme 2.3** Soit  $\alpha\eta > 1$ . Si  $y \in C([0, 1])$  et  $y \geq 0$ , pour  $t \in (0, 1)$ , alors la solution de problème (2.2) est négative.

**Démonstration.**

Supposons que le problème (2.2) admet une solution positive  $x$ .

Si  $x(1) > 0$ , alors  $x(\eta) > 0$  et  $\frac{x(1)}{1} = \frac{\alpha x(\eta)}{1} > \frac{x(\eta)}{\eta}$  ce qui est contredit à la concavité de  $x$ .

Si  $x(1) = 0$ , et  $x(\tau) > 0$  pour certains  $\tau \in (0, 1)$ , alors  $x(\eta) = \frac{x(1)}{\alpha} = 0$ ,  $\tau \neq \eta$ .

Si  $\tau \in (0, \eta)$  i.e.  $\tau < \eta < 1$ , alors par la concavité de  $x$  on a

$$\frac{x(\eta) - x(\tau)}{\eta - \tau} \geq \frac{x(1) - x(\tau)}{1 - \tau}$$

ce qui donne

$$\frac{-x(\tau)}{\eta - \tau} \geq \frac{-x(\tau)}{1 - \tau}$$

i.e.  $\eta \geq 1$ , qui est contredit à  $\eta \in (0, 1)$ .

Si  $\tau \in (\eta, 1)$  i.e.  $0 < \eta < \tau$ , alors par la concavité de  $x$  on a

$$\frac{x(\eta) - x(0)}{\eta - 0} \geq \frac{x(\tau) - x(0)}{\tau - 0}$$

i.e.  $x(\tau) \leq 0$ , qui est contredit à  $x(\tau) > 0$ .

**Lemme 2.4** Soit  $0 < \alpha < \frac{1}{\eta}$ . Si  $y \in C([0, 1])$  et  $y \geq 0$ , pour  $t \in (0, 1)$ , alors la solution unique  $x$  de problème (2.2) satisfait

$$\min_{t \in [\eta, 1]} x(t) \geq \gamma \|x\|$$

telle que

$$\gamma = \min \left\{ \alpha\eta, \frac{\alpha(1 - \eta)}{1 - \alpha\eta}, \eta \right\}$$

.

**Démonstration.**

Nous divisons la démonstration en deux étapes.

- Étape 1. Nous traitons le cas  $0 < \alpha < 1$ . Dans ce cas, on a  $x(\eta) \geq x(1)$ .

On pose  $x(\bar{t}) = \|x\|$ .

Si  $\bar{t} \leq \eta < 1$ , ainsi

$$\min_{t \in [\eta, 1]} x(t) = x(1)$$

## ***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET***

---

car, par la concavité de  $x$  et pour tout  $t \in ]\eta, 1]$  nous avons

$$\frac{x(t) - x(\eta)}{t - \eta} \geq \frac{x(1) - x(\eta)}{1 - \eta} \geq \frac{x(1) - x(\eta)}{t - \eta}$$

ce qui implique que pour tout  $t \in ]\eta, 1]$ ,  $x(t) \geq x(1)$  et avec  $x(\eta) \geq x(1)$  donc pour tout  $t \in [\eta, 1]$ ,  $x(t) \geq x(1)$ .

En plus,

$$\frac{x(1) - x(\eta)}{1 - \eta} \leq \frac{x(\bar{t}) - x(1)}{x(\bar{t}) - 1} \leq \frac{x(\bar{t}) - x(1)}{0 - 1}$$

ce qui donne

$$x(\bar{t}) \leq x(1) + \frac{x(1) - x(\eta)}{1 - \eta}(0 - 1) = x(1) \frac{1 - \alpha\eta}{\alpha(1 - \eta)}.$$

Alors

$$\min_{t \in [\eta, 1]} x(t) \geq \frac{\alpha(1 - \eta)}{1 - \alpha\eta} \|x\|.$$

Si  $\eta < \bar{t} < 1$ , alors

$$\min_{t \in [\eta, 1]} x(t) = x(1).$$

D'après la concavité de  $x$ , nous avons  $\frac{x(\eta)}{\eta} \geq \frac{x(\bar{t})}{\bar{t}}$  qui combinée avec condition aux limites  $x(1) = \alpha x(\eta)$  nous concluons que

$$\frac{x(1)}{\alpha\eta} \geq \frac{x(\bar{t})}{\bar{t}} \geq x(\bar{t}) = \|x\|.$$

Donc

$$\min_{t \in [\eta, 1]} x(t) \geq \alpha\eta \|x\|.$$

- Étape 2. Nous traitons le cas  $1 < \alpha < \frac{1}{\eta}$ . Dans ce cas, on a  $x(\eta) \leq x(1)$  ainsi

$$\min_{t \in [\eta, 1]} x(t) = x(\eta)$$

car, par la concavité de  $x$  et avec  $x(\eta) \leq x(1)$  on a

$$\frac{x(t) - x(\eta)}{t - \eta} \geq \frac{x(1) - x(\eta)}{1 - \eta} \geq 0$$

ainsi, pour tout  $t \in [\eta, 1]$  nous avons

$$x(t) \geq x(\eta).$$

On pose  $x(\bar{t}) = \|x\|$ .

Ensuite, on peut choisir  $\bar{t}$  tel que  $\eta \leq \bar{t} \leq 1$ , (nous notons que si  $\bar{t} \in [0, 1] \setminus [\eta, 1]$ , alors le point  $(\eta, x(\eta))$  est inférieure à la ligne droite déterminée par  $(1, x(1))$  et  $(\bar{t}, x(\bar{t}))$ , ce qui contredit à la concavité de  $x$ . D'après  $x(\eta) \leq x(1)$  et la concavité de  $x$ , nous avons que

$$\min_{t \in [\eta, 1]} x(t) = x(\eta).$$

Utilisation de la concavité de  $x$  et le lemme 2.2, on a que  $\frac{x(\eta)}{\eta} \geq \frac{x(\bar{t})}{\bar{t}}$  ce qui implique que

$$\min_{t \in [\eta, 1]} x(t) \geq \eta \|x\|.$$

## 2.2 Existence de solutions positives

**Théorème 2.1** *Supposons que,*

$$(A1) \ f \in C([0, \infty), [0, \infty)),$$

$$(A2) \ a \in C([0, 1], [0, \infty)) \text{ et il existe } t_0 \in [\eta, 1] \text{ telle que } a(t_0) > 0.$$

*Alors, le problème (2.1) admet au moins une solution positive dans le cas*

$$(i) \ f_0 = 0 \text{ et } f_\infty = \infty \text{ (super-linéaire), ou}$$

$$(ii) \ f_0 = \infty \text{ et } f_\infty = 0 \text{ (sous-linéaire)}.$$

**Démonstration.**

(i) Supposons que  $f_0 = 0$  et  $f_\infty = \infty$ . Nous allons montrer l'existence d'une solution positive de problème (2.1). On a

(le problème (2.1) admet une solution  $x = x(t)$ ), si et seulement si, ( $x$  est solution à l'équation de l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} x(t) &= - \int_0^t (t-s)a(s)f(x(s))ds - \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta} \int_0^\eta (\eta-s)a(s)f(x(s))ds \\ &\quad + \frac{t}{1-\alpha\eta} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \\ &:= Ax(t). \end{aligned}$$

Dénoter que

$$K = \left\{ x : x \in C[0, 1], x \geq 0, \min_{t \in [\eta, 1]} x(t) \geq \gamma \|x\| \right\}.$$

## ***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET***

---

Il est évident que  $K$  est un cône en  $C[0, 1]$ . De plus, par le lemme 2.4,  $AK \subset K$ .

En plus,  $A : K \longrightarrow K$  est complètement continu.

En effet, d'une part, d'après (A1), (A2) l'opérateur  $A$  est continu.

D'autre part, prouvons que l'opérateur  $A$  est compact.

Nous avons pour tout  $t \in C[0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} |Ax(t)| &\leq \int_0^1 |a(s)||f(x(s))|ds + \frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta} \int_0^1 |a(s)||f(x(s))|ds + \frac{1}{1-\alpha\eta} \int_0^1 |a(s)||f(x(s))|ds \\ &\leq \left(1 + \frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta} + \frac{1}{1-\alpha\eta}\right) \int_0^1 |a(s)||f(x(s))|ds \\ &\leq \frac{2}{1-\alpha\eta} \int_0^1 |a(s)||f(x(s))|ds \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $A$  est borné.

Maintenant démontrer que  $A$  est équicontinu :

pour  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ , ( $t_2 \leq t_1$ ) avec  $|t_1 - t_2| \longrightarrow 0$ , on a

$$\begin{aligned} |Ax(t_1) - Ax(t_2)| &= \left| -\int_0^{t_1} (t_1 - s)a(s)f(x(s))ds - \frac{\alpha t_1}{1-\alpha\eta} \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(x(s))ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_1}{1-\alpha\eta} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds + \int_0^{t_2} (t_2 - s)a(s)f(x(s))ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha t_2}{1-\alpha\eta} \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(x(s))ds - \frac{t_2}{1-\alpha\eta} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \right| \\ &= \left| \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{1-\alpha\eta} \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(x(s))ds + \frac{t_1 - t_2}{1-\alpha\eta} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_1} (t_1 - s)a(s)f(x(s))ds - \int_0^{t_2} (t_1 - s)a(s)f(x(s))ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t_2} (t_1 - s)a(s)f(x(s))ds + \int_0^{t_2} (t_2 - s)a(s)f(x(s))ds \right| \\ &= \left| \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{1-\alpha\eta} \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(x(s))ds + \frac{t_1 - t_2}{1-\alpha\eta} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t_2} (t_2 - t_1)a(s)f(x(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_1 - s)a(s)f(x(s))ds \right| \\ &\leq \frac{\alpha|t_1 - t_2|}{1-\alpha\eta} \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(x(s))ds + \frac{|t_1 - t_2|}{1-\alpha\eta} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \\ &\quad + |t_1 - t_2| \int_0^{t_2} a(s)f(x(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_1 - s)a(s)f(x(s))ds, \end{aligned}$$

ce qui implique,  $|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \rightarrow 0$  lorsque  $|t_1 - t_2| \rightarrow 0$ .

# ***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET***

---

Depuis que  $f_0 = 0$ , nous pouvons choisir  $H_1 > 0$  de sorte que  $f(x) \leq \epsilon x$ , pour  $0 < x < H_1$ , où  $\epsilon > 0$  satisfait

$$\frac{\epsilon}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)ds \leq 1.$$

Ainsi, si  $x \in K$  et  $\|x\| = H_1$  nous obtenons

$$\begin{aligned} Ax(t) &\leq \frac{t}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)f(x(s))ds \\ &\leq \frac{t}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)\epsilon x(s)ds \\ &\leq \frac{\epsilon}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)ds \|x\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)ds H_1. \end{aligned}$$

Maintenant, soit

$$\Omega_1 = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < H_1\},$$

alors  $\|Ax\| \leq \|x\|$ , pour  $x \in K \cap \partial\Omega_1$ .

Depuis  $f_\infty = \infty$ , il existe  $\widehat{H}_2 > 0$  telle que  $f(x) \geq \rho x$ , pour  $x \geq \widehat{H}_2$ , où  $\rho > 0$  est choisie de telle sorte que

$$\rho \frac{\eta\gamma}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 (1 - s)a(s)ds > 1.$$

Soit  $H_2 = \max \left\{ 2H_1, \frac{\widehat{H}_2}{\gamma} \right\}$  et  $\Omega_2 = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < H_2\}$ ,

alors  $x \in K$  et  $\|x\| = H_2$  implique que

$$\min_{t \in [\eta, 1]} x(t) \geq \gamma \|x\| \geq \widehat{H}_2.$$

# SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET

---

Ainsi

$$\begin{aligned}
Ax(\eta) &= - \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(x(s))ds - \frac{\alpha\eta}{1 - \alpha\eta} \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(x(s))ds \\
&\quad + \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)f(x(s))ds \\
&= - \frac{1}{1 - \alpha\eta} \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(x(s))ds + \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)f(x(s))ds \\
&= - \frac{1}{1 - \alpha\eta} \int_0^\eta \eta a(s)f(x(s))ds + \frac{1}{1 - \alpha\eta} \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\
&\quad + \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 a(s)f(x(s))ds - \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 sa(s)f(x(s))ds \\
&= \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 a(s)f(x(s))ds + \frac{1}{1 - \alpha\eta} \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\
&\quad - \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 sa(s)f(x(s))ds \\
&= \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 a(s)f(x(s))ds + \frac{1 - \eta}{1 - \alpha\eta} \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\
&\quad - \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 sa(s)f(x(s))ds \\
&\geq \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 a(s)f(x(s))ds - \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 sa(s)f(x(s))ds \\
&= \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 (1 - s)a(s)f(x(s))ds.
\end{aligned}$$

Alors, pour  $x \in K \cap \partial\Omega_2$ ,

$$\|Ax\| \geq \rho \frac{\eta\gamma}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 (1 - s)a(s)ds \|x\| \geq \|x\|.$$

Par conséquent, la première partie du théorème de Guo-Krasnosel'skii satisfait, il s'ensuit que A a un point fixe dans  $K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ , telle que  $H_1 \leq \|x\| \leq H_2$ .

(ii) Supposons que  $f_0 = \infty$  et  $f_\infty = 0$ . Nous avons d'abord choisir  $H_3 > 0$  telle que  $f(x) \geq Mx$  pour  $0 < x < H_3$ , où

$$M\gamma \left( \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \right) \int_\eta^1 (1 - s)a(s)ds \geq 1.$$

***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET***

---

Alors

$$\begin{aligned}
Ax(\eta) &= - \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(x(s))ds - \frac{\alpha\eta}{1 - \alpha\eta} \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(x(s))ds \\
&\quad + \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)f(x(s))ds \\
&\geq \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 (1 - s)a(s)f(x(s))ds \\
&\geq \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 (1 - s)a(s)Mx(s)ds \\
&\geq \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} \int_\eta^1 (1 - s)a(s)M\gamma ds \|x\| \\
&\geq \|x\|.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons choisir  $\Omega_3 = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < H_3\}$ , telle que

$$\|Ax\| \geq \|x\|, \quad x \in K \cap \partial\Omega_3.$$

D'autre part, depuis  $f_\infty = 0$ , il existe  $\widehat{H}_4 > 0$  telle que  $f(x) \leq \epsilon x$ , pour  $x \geq \widehat{H}_4$ , où  $\epsilon > 0$  satisfait

$$\frac{\epsilon}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)ds \leq 1.$$

Soit  $H_4 = \max \left\{ 2H_3, \frac{\widehat{H}_4}{\gamma} \right\}$  et  $\Omega_4 = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < H_4\}$ , alors  $x \in K$  et  $\|x\| = H_4$  implique que

$$\min_{t \in [\eta, 1]} x(t) \geq \gamma \|x\| \geq \widehat{H}_4.$$

Ainsi, si  $x \in K$  et  $\|x\| = H_4$  nous obtenons

$$\begin{aligned}
Ax(t) &\leq \frac{t}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)f(x(s))ds \\
&\leq \frac{t}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)\epsilon x(s)ds \\
&\leq \frac{\epsilon}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)ds \|x\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{1 - \alpha\eta} \int_0^1 (1 - s)a(s)ds H_4 \\
&\leq H_4,
\end{aligned}$$

et donc

$$\|Ax\| \leq \|x\|.$$

Alors, pour  $x \in K \cap \partial\Omega_4$  nous pouvons avoir  $\|Ax\| \leq \|x\|$ . Par conséquent, la seconde partie du théorème de Guo-Krasnosel'skii satisfait, il s'ensuit que le problème (2.1) admet une solution positive.

## 2.3 Quelques exemples d'applications

Afin d'illustrer nos résultats, nous considérons deux exemples.

**Exemple 2.1** *Le problème aux limites*

$$\begin{cases} x'' + (1-t)^5 x^2 e^x = 0, & t \in (0, 1), \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{4}x(\frac{1}{2}), \end{cases} \quad (2.3)$$

*admet au moins une solution positive.*

*En effet, lorsque on suppose*

$$a(t) = (1-t)^5, \quad f(x) = x^2 e^x$$

*et dans ce cas on a*

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \eta = \frac{1}{2},$$

*nous avons  $a \in C([0, 1], [0, \infty))$  et il existe  $t_0 \in [\eta, 1] = [\frac{1}{2}, 1]$  telle que  $a(t_0) > 0$ , on choisir  $t_0 = \frac{1}{4}$ ,  $a(\frac{1}{4}) > 0$ .*

*Aussi  $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$  et  $f_0 = 0$ ,  $f_\infty = \infty$ .*

*Donc, les conditions (A1), (A2) et le cas (i) sont satisfaits.*

*Alors, par le théorème 2.1, la conclusion est satisfait.*

**Exemple 2.2** *Le problème aux limites*

$$\begin{cases} x'' + (1-t)^2 e^{-x} = 0, & t \in (0, 1), \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{7}x(\frac{1}{8}), \end{cases} \quad (2.4)$$

## ***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET***

---

*admet au moins une solution positive.*

*En effet, lorsque on suppose*

$$a(t) = (1 - t)^2, \quad f(x) = e^{-x}$$

*et dans ce cas on a*

$$\alpha = \frac{1}{7}, \quad \eta = \frac{1}{8},$$

*nous avons  $a \in C([0, 1], [0, \infty))$  et il existe  $t_0 \in [\eta, 1] = [\frac{1}{8}, 1]$  telle que  $a(t_0) > 0$ , on choisir  $t_0 = \frac{1}{6}$ ,  $a(\frac{1}{6}) > 0$ .*

*Aussi  $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$  et  $f_0 = \infty$ ,  $f_\infty = 0$ .*

*Donc, les conditions (A1), (A2) et le cas (ii) sont satisfaits.*

*Alors, par le théorème 2.1, la conclusion est satisfait.*

## Chapitre 3

# SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU SECOND ORDRE À TROIS POINTS DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN

Considérons dans ce chapitre le problème aux limites

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)f(x) = 0, & t \in (0, 1) \\ x'(0) = 0, & x(1) = \alpha x(\eta), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $0 < \eta < 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$ ,  $a \in C([0, 1], [0, \infty))$  et il existe  $t_0 \in [\eta, 1]$  telle que  $a(t_0) > 0$ .

Les résultats d'existence de ce problème ont été donnés par Liu dans [6], il a prouvé l'existence :

- de solution positive unique sous  $f_0 = 0$ ,  $f_\infty = \infty$  ou  $f_0 = \infty$ ,  $f_\infty = 0$ ,
- de deux solution positive dans  $f_0 = f_\infty = \infty$  ou  $f_0 = f_\infty = 0$ ,
- des solutions positives selon  $f_0$ ,  $f_\infty \notin \{0, \infty\}$ .

De plus, nous avons travaillé à détailler les preuves de ses résultats, avec l'ajout de résultats dans ce chapitre.

Dans ce qui suit, nous posons que

$$\Lambda_1 = \frac{1 - \alpha}{\int_0^1 (1 - s)a(s)ds}, \quad \Lambda_2 = \frac{1 - \alpha}{\gamma(1 - \eta) \int_0^\eta a(s)ds + \gamma \int_\eta^1 (1 - s)a(s)ds}.$$

**1. Pour le cas  $f_0 = 0, f_\infty = \infty$  ou  $f_0 = \infty, f_\infty = 0$**

nous discutons de l'existence de solution positive unique pour le problème (3.1).

### 3.1 Résultats Préliminaires

**Lemme 3.1** Soit  $y \in C[0, 1]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1, \eta \in (0, 1)$  de telle sorte que soit

$$\begin{cases} x''(t) + y(t) = 0, & t \in (0, 1) \\ x'(0) = 0, & x(1) = \alpha x(\eta), \end{cases} \quad (3.2)$$

Alors,

$$x(t) = - \int_0^t (t - s)y(s)ds - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds + \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^1 (1 - s)y(s)ds.$$

**Démonstration.**

On a,

$$(x''(t) = -y(t)) \implies \left( x(t) = x(0) - \int_0^t (t - s)y(s)ds \right)$$

dont nous obtenons

$$x(1) = x(0) - \int_0^1 (1 - s)y(s)ds$$

et

$$x(\eta) = x(0) - \int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds,$$

et de  $x(1) = \alpha x(\eta)$  on a,

$$(1 - \alpha)x(0) = -\alpha \int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds + \int_0^1 (1 - s)y(s)ds,$$

alors,

$$x(t) = - \int_0^t (t - s)y(s)ds - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds + \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^1 (1 - s)y(s)ds.$$

**Lemme 3.2** Soit  $0 < \alpha < 1$ . Si  $y \in C[0, 1]$  et  $y \geq 0$ , pour  $t \in [0, 1]$ ,

alors la solution unique  $x$  de le problème (3.2) satisfait  $x(t) \geq 0, \quad t \in [0, 1]$ .

## ***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN***

---

### **Démonstration.**

Du fait que  $x''(t) = -y(t) \leq 0$ , nous savons que le graphe de  $x : t \mapsto x(t)$  est concave vers le bas sur  $(0, 1)$ .

Comme  $x' : t \mapsto x'(t)$  est une fonction décroissante, on a  $x'(t) \leq x'(0) = 0$ , ce qui implique que  $x : t \mapsto x(t)$  est une fonction décroissante, et comme  $t \in [0, 1]$ , on a  $x(t) \geq x(1)$ .

- Si  $x(1) \geq 0$ , alors  $x(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, 1]$ .

- Si  $x(1) < 0$ , alors nous avons que  $x(\eta) = \frac{1}{\alpha}x(1) < 0$  et  $x(1) = \alpha x(\eta) > x(\eta)$ , ce qui est contredit avec le fait que  $x : t \mapsto x(t)$  est une fonction décroissante.

**Lemme 3.3** *Soit  $0 < \alpha < 1$ . Si  $y \in C[0, 1]$  et  $y \geq 0$ , pour  $t \in (0, 1)$ , alors la solution unique  $x$  de problème (3.2) satisfait*

$$\min_{t \in [0, 1]} x(t) \geq \gamma \|x\|$$

telle que

$$\gamma = \frac{\alpha(1 - \eta)}{1 - \alpha\eta}.$$

### **Démonstration.**

Par lemme 2.4, nous avons

$$x(1) \leq x(t) \leq x(0).$$

Alors,

$$\min_{t \in [0, 1]} x(t) = x(1), \quad \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)| = x(0)$$

et

$$\begin{aligned} x(0) &\leq x(1) + \frac{x(1) - x(\eta)}{1 - \eta}(0 - 1) \\ &= x(1) \left( 1 - \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{1 - \eta} \right) \\ &= x(1) \frac{1 - \alpha\eta}{\alpha(1 - \eta)}. \end{aligned}$$

En plus d'après  $x(1) \leq x(t) \leq x(0)$  on obtient,

$$\min_{t \in [0, 1]} x(t) \geq \frac{\alpha(1 - \eta)}{1 - \alpha\eta} \|x\|.$$

On a,

(le problème (3.1) admet une solution  $x = x(t)$ ), si et seulement si, ( $x$  est solution à l'équation de l'opérateur

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)y(s)ds - \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^\eta (\eta-s)y(s)ds - \int_0^t (t-s)y(s)ds \\ &= Ax(t). \end{aligned}$$

Dénoter

$$K = \{x : x \in C[0, 1], x \geq 0, \min_{t \in [0, 1]} x(t) \geq \gamma \|x\|\}.$$

Il est évident que  $K$  est un cône. De plus, par le lemme 3.3,  $AK \subset K$ .

En plus,  $A : K \longrightarrow K$  est complètement continue.

## 3.2 Existence de solutions positives

**Théorème 3.1** *Le problème (3.1) admet au moins une solution positive dans le cas*

(H1)  $f_0 = 0, f_\infty = \infty$  ou

(H2)  $f_0 = \infty, f_\infty = 0$ .

**Démonstration.**

De (H1) on a

$$f_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

ce qui implique que pour tout  $\epsilon \in (0, \Lambda_1]$ , il existe  $\delta > 0$  telle que  $f(x) \leq \epsilon x$  pour  $x \in [0, \delta]$ .

Soit

$$\Omega_\delta = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < \delta\}.$$

Alors, pour tout  $x \in K \cap \partial\Omega_\delta$ , nous avons

$$\begin{aligned} Ax(t) &\leq \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \\ &\leq \frac{\epsilon\delta}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)ds \\ &= \frac{\epsilon}{\Lambda_1}\delta \\ &\leq \delta = \|x\|, \end{aligned}$$

***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN***

---

ce qui implique que

$$\|Ax\| \leq \|x\|, \quad \text{pour } x \in K \cap \partial\Omega_\delta. \quad (3.3)$$

Aussi depuis

$$f_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

ce qui implique que pour tout  $M \in [\Lambda_2, \infty)$ , il existe  $\rho > \delta$  telle que  $f(x) \geq Mx$  pour  $x \geq \rho$ .

Soit

$$\Omega_\rho = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < \rho\}.$$

D'un côté, pour tout  $x \in K \cap \partial\Omega_\rho$  on a

$$\min_{t \in [0, 1]} x(t) \geq \gamma \|x\| = \gamma \rho.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} Ax(\eta) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(s)f(x(s))ds - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 sa(s)f(x(s))ds \\ &\quad - \frac{\alpha\eta}{1-\alpha} \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\ &\quad - \eta \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(s)f(x(s))ds - \frac{1}{1-\alpha} \int_\eta^1 sa(s)f(x(s))ds \\ &\quad - \frac{\eta}{1-\alpha} \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds \\ &= \frac{1-\eta}{1-\alpha} \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \frac{1}{1-\alpha} \int_\eta^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \\ &\geq \frac{\gamma\rho M}{1-\alpha} \left( (1-\eta) \int_0^\eta a(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \right) \\ &= \frac{M}{\Lambda_2} \rho \\ &\geq \rho = \|x\|, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \text{pour } x \in K \cap \partial\Omega_\rho. \quad (3.4)$$

## ***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN***

---

Par conséquent, à partir de (3.3), (3.4) et le théorème 1.3 de Guo-Krasnosel'skii, il s'ensuit que  $A$  a un point fixe dans  $K \cap (\overline{\Omega}_\rho \setminus \Omega_\delta)$  telle que  $\delta \leq \|x\| \leq \rho$ .

En plus, de (H2) on a

$$f_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

ce qui implique que pour tout  $M \in [\Lambda_2, \infty)$ , il existe  $r > 0$  telle que  $f(x) \geq Mx$  pour  $0 \leq x \leq r$ .

Soit

$$\Omega_r = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < r\}$$

lorsque  $x \in K$  on a

$$\min_{t \in [0, 1]} x(t) \geq \gamma \|x\| = \gamma r.$$

Donc pour tout  $x \in K \cap \partial\Omega_r$  nous avons

$$\begin{aligned} Ax(\eta) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(s)f(x(s))ds - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 sa(s)f(x(s))ds \\ &\quad - \frac{\alpha\eta}{1-\alpha} \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\ &\quad - \eta \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\ &\geq \frac{\gamma r M}{1-\alpha} \left( (1-\eta) \int_0^\eta a(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \right) \\ &= \frac{M}{\Lambda_2} r \\ &\geq r = \|x\|, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \text{pour } x \in K \cap \partial\Omega_r. \quad (3.5)$$

Aussi depuis

$$f_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

ce qui implique que pour tout  $\epsilon \in (0, \Lambda_1]$ , il existe  $r_0 > r$  telle que  $f(x) \leq \epsilon x$  pour  $x \in [r_0, \infty)$ .

# SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN

---

Pour  $x \in K$ ,  $\|x\| = r_0$ , nous avons

$$\begin{aligned} Ax(t) &\leq \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \\ &\leq \frac{\epsilon r_0}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)ds \\ &= \frac{\epsilon}{\Lambda_1} r_0 \\ &\leq r_0 = \|x\|. \end{aligned}$$

Donc, on peut choisir  $\Omega_{r_0} = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < r_0\}$  telle que

$$\|Ax\| \leq \|x\| \quad \text{pour } x \in K \cap \partial\Omega_{r_0}. \quad (3.6)$$

Par conséquent, à partir de (3.5), (3.6) et le théorème 1.3 de Guo-Krasnosel'skii, il s'ensuit que  $A$  a un point fixe dans  $K \cap (\overline{\Omega}_{r_0} \setminus \Omega_{r_*})$  telle que  $r \leq \|x\| \leq r_0$ .

**2. Pour le cas  $f_0 = f_\infty = \infty$  ou  $f_0 = f_\infty = 0$**

Dans ce cas, nous étudions l'existence de multiples solutions positives de problème (3.1)

**Théorème 3.2** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(H3)  $f_0 = f_\infty = \infty$ ,

(H4) *il existe une constante  $\rho_1 > 0$ , telle que  $f(x) \leq \Lambda_1 \rho_1$ ,  $x \in [0, \rho_1]$ .*

*Alors le problème (3.1) admet au moins deux solutions positives  $x_1, x_2$  tels que*

$$0 < \|x_1\| < \rho_1 < \|x_2\|.$$

**Démonstration.**

De (H3) on a

$$f_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

ce qui implique que pour tout  $M \in [\Lambda_2, \infty)$ , il existe  $r \in (0, \rho_1)$

telle que  $f(x) \geq Mx$  pour  $0 \leq x \leq r$ .

Soit

$$\Omega_r = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < r\}.$$

D'un côté, pour tout  $x \in K \cap \partial\Omega_r$  on a

$$\min_{t \in [0, 1]} x(t) \geq \gamma \|x\| = \gamma r.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
Ax(\eta) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(s)f(x(s))ds - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 sa(s)f(x(s))ds \\
&\quad - \frac{\alpha\eta}{1-\alpha} \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\
&\quad - \eta \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\
&\geq \frac{\gamma r M}{1-\alpha} \left( (1-\eta) \int_0^\eta a(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \right) \\
&= \frac{M}{\Lambda_2} r \\
&\geq r = \|x\|,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \text{pour } x \in K \cap \partial\Omega_r. \quad (3.7)$$

Aussi depuis

$$f_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

ce qui implique que pour tout  $M' \in [\Lambda_2, \infty)$ , il existe  $r' > \rho_1$  telle que  $f(x) \geq M'x$  pour  $x \geq r'$ .

Soit

$$\Omega_{r'} = \{x \in E : \|x\| < r'\}.$$

D'un côté, pour tout  $x \in K \cap \partial\Omega_{r'}$  on a

$$\min_{t \in [0,1]} x(t) \geq \gamma \|x\| = \gamma r'.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
Ax(\eta) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(s)f(x(s))ds - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 sa(s)f(x(s))ds \\
&\quad - \frac{\alpha\eta}{1-\alpha} \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\
&\quad - \eta \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\
&\geq \frac{\gamma r' M'}{1-\alpha} \left( (1-\eta) \int_0^\eta a(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \right) \\
&= \frac{M'}{\Lambda_2} r' \geq r' = \|x\|,
\end{aligned}$$

# SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN

---

ce qui implique que

$$\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \text{pour } x \in K \cap \partial\Omega_{r'}. \quad (3.8)$$

Maintenant, supposons que

$$\Omega_{\rho_1} = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < \rho_1\}.$$

Alors, depuis (H4) et pour  $x \in K \cap \partial\Omega_{\rho_1}$  on a

$$\begin{aligned} Ax(t) &\leq \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \\ &\leq \frac{\Lambda_1\rho_1}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)ds \\ &\leq \rho_1 = \|x\|, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Ax\| \geq \|x\|, \quad \text{pour } x \in K \cap \partial\Omega_{\rho_1}. \quad (3.9)$$

Comme  $r < \rho_1 < r'$  et à partir de (3.7), (3.8) et (3.9) on a d'après le théorème 1.3 de Guo-Krasnosel'skii que  $A$  a un point fixe  $x_1$  dans  $K \cap (\overline{\Omega}_{\rho_1} \setminus \Omega_r)$  et a un point fixe  $x_2$  dans  $K \cap (\overline{\Omega}_{r'} \setminus \Omega_{\rho_1})$ . Les deux points fixe sont des solutions positives de problème (3.1) et

$$0 < \|x_1\| < \rho_1 < \|x_2\|.$$

**Théorème 3.3** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(H5)  $f_0 = f_\infty = 0$ ,

(H6) *il existe une constante  $\rho_2 > 0$ , telle que  $f(x) \geq \Lambda_2\rho_2$ , pour  $x \in [\gamma\rho_2, \rho_2]$ .*

*Alors le problème (3.1) admet au moins deux solutions positives  $x_1, x_2$  tels que*

$$0 < \|x_1\| < \rho_2 < \|x_2\|.$$

## Démonstration.

Depuis

$$f_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

alors, pour tout  $\epsilon \in (0, \Lambda_1]$ , il existe  $r \in (0, \rho_2)$  telle que

$$f(x) \leq \epsilon x, \quad \text{pour } x \in [0, r].$$

***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN***

---

Posons

$$\Omega_r = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < r\}.$$

Alors, pour tout  $x \in K \cap \partial\Omega_r$  nous obtenons

$$\begin{aligned} Ax(t) &\leq \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \\ &\leq \frac{\epsilon r}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)ds \\ &= \frac{\epsilon}{\Lambda_1} r \\ &\leq r = \|x\|, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|Ax\| \leq \|x\|, \quad \text{pour } x \in \partial\Omega_r. \quad (3.10)$$

Aussi depuis

$$f_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

alors pour tout  $\epsilon_1 \in (0, \Lambda_1)$ , il existe  $r_1 > \rho_2$  telle que

$$f(x) \leq \epsilon_1 x, \quad \text{pour } x \in [r_1, \infty).$$

Posons dans ce cas

$$\Omega_{r_1} = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < r_1\}.$$

Alors, pour tout  $x \in K \cap \partial\Omega_{r_1}$  nous obtenons

$$\begin{aligned} Ax(t) &\leq \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \\ &\leq \frac{\epsilon_1 r_1}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)ds \\ &= \frac{\epsilon_1}{\Lambda_1} r_1 \\ &\leq r_1 = \|x\|, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|Ax\| \leq \|x\|, \quad \text{pour } x \in \partial\Omega_{r_1}. \quad (3.11)$$

D'autre part, soit

$$\Omega_{\rho_2} = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < \rho_2\}.$$

## **SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN**

---

D'un côté, lorsque  $x \in K \cap \partial\Omega_{\rho_2}$  on obtient

$$\min_{t \in [0,1]} x(t) \geq \gamma \|x\| = \gamma \rho_2.$$

D'autre coté, pour tout  $x \in K \cap \partial\Omega_{\rho_2}$ , et d'après (H6) on a

$$\begin{aligned} Ax(\eta) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(s)f(x(s))ds - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 sa(s)f(x(s))ds \\ &\quad - \frac{\alpha\eta}{1-\alpha} \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\ &\quad - \eta \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\ &\geq \frac{\gamma\Lambda_2\rho_2}{1-\alpha} \left( (1-\eta) \int_0^\eta a(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \right) \\ &\geq \rho_2 = \|x\|. \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Ax\| \geq \|x\| \quad \text{pour } x \in K \cap \partial\Omega_{\rho_2}. \quad (3.12)$$

Alors depuis,  $r < \rho_2 < r_1$  et pour (3.10), (3.11) et (3.12) on a d'après le théorème 1.3 de Guo-Krasnosel'skii que  $A$  a un point fixe  $x_1$  dans  $K \cap (\bar{\Omega}_{\rho_2} \setminus \Omega_r)$  et a un point fixe  $x_2$  dans  $K \cap (\bar{\Omega}_{r_1} \setminus \Omega_{\rho_2})$ . Les deux points fixe sont des solutions positives de problème (3.1) et

$$0 < \|x_1\| < \rho_2 < \|x_2\|.$$

**3. Pour le cas  $f_0, f_\infty \notin \{0, \infty\}$ .**

Dans ce cas, nous étudions l'existence de solution positive de problème (3.1).

**Théorème 3.4** *Supposons que le condition (H4) de théorème 3.2 et le condition (H6) de théorème 3.3 sont satisfaites avec  $\rho_1 \neq \rho_2$ . Alors le problème (3.1) admet au moins une solution positive  $x$  entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .*

**Démonstration.**

On peut supposer que  $\rho_1 < \rho_2$ .

Soit

$$\Omega_{\rho_1} = \{x \in C[0,1] : \|x\| < \rho_1\}.$$

# SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN

---

Alors pour  $x \in K \cap \partial\Omega_{\rho_1}$  et d'après (H4) on a

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 (1-s)a(s)f(x(s))ds \\ &\leq \frac{\Lambda_1\rho_1}{1-\alpha} \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \\ &\leq \rho_1 = \|x\|. \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Ax\| \leq \|x\| \quad \text{pour } x \in K \cap \partial\Omega_{\rho_1}. \quad (3.13)$$

Maintenant, soit

$$\Omega_{\rho_2} = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < \rho_2\}.$$

Alors, pour tout  $x \in K \cap \partial\Omega_{\rho_2}$  et d'après (H6) on a

$$\begin{aligned} Ax(\eta) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 a(s)f(x(s))ds - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 sa(s)f(x(s))ds \\ &\quad - \frac{\alpha\eta}{1-\alpha} \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\ &\quad - \eta \int_0^\eta a(s)f(x(s))ds + \int_0^\eta sa(s)f(x(s))ds \\ &\geq \frac{\gamma\Lambda_2\rho_2}{1-\alpha} \left( (1-\eta) \int_0^\eta a(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \right) \\ &\geq \rho_2 = \|x\|. \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Ax\| \geq \|x\| \quad \text{pour } x \in K \cap \partial\Omega_{\rho_2}. \quad (3.14)$$

Alors depuis,  $\rho_1 < \rho_2$  et pour (3.13) et (3.14) on a d'après le théorème 1.3 de Guo-Krasnosel'skii que  $A$  a un point fixe  $x$  dans  $K \cap (\overline{\Omega}_{\rho_2} \setminus \Omega_{\rho_1})$ , c'est une solution positive de problème (3.1) et

$$\rho_1 < \|x\| < \rho_2.$$

En combinant les conditions des résultats précédents, on obtient des résultats supplémentaires pour les solutions positives de problème (3.1).

**Corollaire 3.1** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites.*

$$(H7) \quad f_0 = \alpha_1 \in [0, \Lambda_1),$$

## ***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN***

---

$$(H8) \quad f_\infty = \beta_1 \in (\frac{1}{\gamma}\Lambda_2, \infty).$$

Alors le problème (3.1) admet au moins une solution positive.

### **Démonstration.**

Comme  $f_0 = \alpha_1 \in [0, \Lambda_1)$ , on a pour  $\epsilon = \Lambda_1 - \alpha_1 > 0$ , il existe  $\rho_1 > 0$  assez petit telle que

$$f(x) \leq (\alpha_1 + \epsilon)x = \Lambda_1 x \leq \Lambda_1 \rho_1, \quad \text{pour } x \in [0, \rho_1].$$

Ainsi, de l'inégalité ci-dessus, le condition (H4) de théorème 3.2 est satisfaite.

Comme  $f_\infty = \beta_1 \in (\frac{1}{\gamma}\Lambda_2, \infty)$ , on a pour  $\epsilon = \beta_1 - \frac{1}{\gamma}\Lambda_2 > 0$ , il existe  $\rho_2, (\rho_2 > \rho_1)$  assez grand telle que

$$\frac{f(x)}{x} \geq \beta_1 - \epsilon = \frac{1}{\gamma}\Lambda_2, \quad \text{pour } x \in [\gamma\rho_2, \infty).$$

Alors, lorsque  $x \in [\gamma\rho_2, \rho_2]$ , nous avons

$$f(x) \geq \frac{1}{\gamma}\Lambda_2 x \geq \Lambda_2 \rho_2.$$

Ainsi, de l'inégalité ci-dessus, le condition (H6) de théorème 3.3 est satisfaite.

Donc par le théorème 3.4, le problème (3.1) admet au moins une solution positive.

**Corollaire 3.2** *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites.*

$$(H9) \quad f_0 = \alpha_2 \in (\frac{1}{\gamma}\Lambda_2, \infty),$$

$$(H10) \quad f_\infty = \beta_2 \in [0, \Lambda_1).$$

Alors le problème (3.1) admet au moins une solution positive.

### **Démonstration.**

Comme  $f_0 = \alpha_2 \in (\frac{1}{\gamma}\Lambda_2, \infty)$ , on a pour  $\epsilon = \alpha_2 - \frac{1}{\gamma}\Lambda_2 > 0$ , il existe  $\rho_2 > 0$  assez petit telle que

$$\frac{f(x)}{x} \geq \alpha_2 - \epsilon = \frac{1}{\gamma}\Lambda_2, \quad \text{pour } x \in (0, \rho_2).$$

Alors, lorsque  $x \in [\gamma\rho_2, \rho_2]$ , nous avons

$$f(x) \geq \frac{1}{\gamma}\Lambda_2 x \geq \Lambda_2 \rho_2,$$

ce qui implique que le condition (H6) de théorème 3.3 est satisfaite.

Comme  $f_\infty = \beta_2 \in [0, \Lambda_1)$ , on a pour  $\epsilon = \Lambda_1 - \beta_2 > 0$ , il existe  $\rho_0, (\rho_0 > \rho_2)$  assez grand telle que

$$\frac{f(x)}{x} \leq \beta_2 + \epsilon = \Lambda_1, \quad \text{pour } x \in [\rho_0, \infty).$$

## ***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN***

---

Comme  $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$ , il existe  $\rho_1 > \rho_0$  telle que

$$f(x) \leq f(\rho_1), \quad \text{pour } x \in [0, \rho_1].$$

Depuis  $\rho_1 > \rho_0$  on a  $f(\rho_1) \leq \Lambda_1 \rho_1$ , donc

$$f(x) \leq f(\rho_1) \leq \Lambda_1 \rho_1, \quad \text{pour } x \in [0, \rho_1].$$

Ainsi, de l'inégalité ci-dessus, le condition (H4) de théorème 3.2 est satisfait.

Donc par le théorème 3.4, le problème (3.1) admet au moins une solution positive.

**Corollaire 3.3** *Supposons que les hypothèses (H4), (H8) et (H9) sont satisfaits.*

*Alors le problème (3.1) admet au moins deux solutions positives  $x_1$  et  $x_2$  telle que*

$$0 < \|x_1\| < \rho_1 < \|x_2\|.$$

### **Démonstration.**

D'après (H8) et la démonstration du corollaire 3.1, il existe  $\rho_2 > \rho_1$  assez grand telle que

$$f(x) \geq \Lambda_2 \rho_2, \quad \text{pour } x \in [\gamma \rho_2, \rho_2].$$

D'après (H9) et la démonstration du corollaire 3.2, il existe  $\rho_2^* \in (0, \rho_1)$  assez petit telle que

$$f(x) \geq \Lambda_2 \rho_2^*, \quad \text{pour } x \in [\gamma \rho_2^*, \rho_2^*].$$

L'utilisation de ce-dessu avec (H4), on sait d'après le théorème 3.4 que le problème (3.1) admet au moins deux solutions positives  $x_1$  et  $x_2$  telle que

$$\rho_2^* < \|x_1\| < \rho_1 < \|x_2\| < \rho_2.$$

**Corollaire 3.4** *Supposons que les hypothèses (H6), (H7) et (H10) sont satisfaits.*

*Alors le problème (3.1) admet au moins deux solutions positives  $x_1$  et  $x_2$  telle que*

$$0 < \|x_1\| < \rho_2 < \|x_2\|.$$

### **Démonstration.**

D'après (H7) et la démonstration du corollaire 3.1, il existe  $\rho_1 \in (0, \rho_2)$  assez petit telle que

$$f(x) \leq \Lambda_1 \rho_1, \quad \text{pour } x \in [0, \rho_1].$$

D'après (H10) et la démonstration du corollaire 3.2, il existe  $\rho_1^* > \rho_2$  assez grand telle que

$$f(x) \leq \Lambda_1 \rho_1^*, \quad \text{pour } x \in [0, \rho_1^*].$$

L'utilisation de ce-dessu avec (H6), on sait d'après le théorème 3.4 que le problème (3.1) admet au moins deux solutions positives  $x_1$  et  $x_2$  telle que

$$\rho_1 < \|x_1\| < \rho_2 < \|x_2\| < \rho_1^*.$$

### 3.3 Quelques exemples d'applications

Afin d'illustrer nos résultats, nous considérons quelques exemples.

**Exemple 3.1** *Considérons le problème aux limites*

$$\begin{cases} x'' + a(t)f(x) = 0, & t \in (0, 1), \\ x'(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta), \end{cases} \quad (3.15)$$

où  $\alpha, \eta \in (0, 1)$ ,  $a \in C([0, 1])$  et il existe  $t_0 \in [0, 1]$  telle que  $a(t_0) > 0$ ,  
 $f(x) = x^\theta$ ,  $(\theta \in (0, 1) \cup (1, \infty))$ .

Alors le problème (3.15) admet au moins une solution positive.

En effet, lorsque  $\theta \in (0, 1)$ ,  $f_0 = \infty$ ,  $f_\infty = 0$  et lorsque  $\theta \in (1, \infty)$ ,  $f_0 = 0$ ,  $f_\infty = \infty$ .

Alors, par le théorème 3.1 la conclusion est satisfait.

**Exemple 3.2** *Considérons le problème aux limites*

$$\begin{cases} x'' + (1-t)^8(x^{\frac{1}{2}} + x^2) = 0, & 0 < t < 1 \\ x'(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{2}x(\eta). \end{cases} \quad (3.16)$$

Dans ce cas  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\eta \in (0, 1)$  et on suppose

$$a(t) = (1-t)^8, \quad f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^2$$

ainsi nous avons,  $f_0 = f_\infty = \infty$  alors (H3) est satisfaite.

Aussi

$$\Lambda_1 = (1-\alpha) \left( \int_0^1 (1-s)a(s)ds \right)^{-1} = 5,$$

## SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN

---

$f$  est une fonction croissante pour  $x \geq 0$ . Posons  $\rho_1 = 4$ , alors, lorsque  $x \in [0, \rho_1] = [0, 4]$ , on a

$$f(x) \leq f(4) = 18 < \Lambda_1 \rho_1,$$

ce qui implique que  $(H_4)$  est satisfaite.

Donc par le théorème 3.2, le problème (3.16) admet au moins deux solutions positives  $x_1$  et  $x_2$  tels que

$$0 < \|x_1\| < 4 < \|x_2\|.$$

**Exemple 3.3** Considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} x'' + e^{10}x^2e^{-x} = 0, & 0 < t < 1 \\ x'(0) = 0, & x(1) = \frac{1}{3}x(\frac{1}{2}), \end{cases} \quad (3.17)$$

Dans ce cas  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\eta = \frac{1}{2}$ , et supposons

$$a(t) = e^{10}, \quad f(x) = x^2e^{-x}.$$

Ainsi nous avons,  $f_0 = f_\infty = 0$  alors  $(H5)$  est satisfaite.

Aussi

$$\gamma = \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta} = \frac{1}{5}, \quad \Lambda_2 = \frac{1-\alpha}{\gamma} \left( (1-\eta) \int_0^\eta a(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \right)^{-1} = \frac{80}{9}e^{-10}.$$

Nous avons  $f$  est une fonction décroissante pour  $x \geq 2$ . Lorsque on choisit  $\rho_2 = 10$  et  $x \in [\gamma\rho_2, \rho_2] = [2, 10]$ , nous avons

$$f(x) \geq f(10) = 100e^{-10} > \frac{800}{9}e^{-10} = \Lambda_2\rho_2,$$

ce qui implique que  $(H6)$  est satisfaite.

Donc par le théorème 3.3, le problème (3.17) admet au moins deux solutions positives  $x_1$  et  $x_2$  tels que

$$0 < \|x_1\| < 10 < \|x_2\|.$$

**Exemple 3.4** Considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} x'' + (1-t)^2 \frac{bx e^{2x}}{c + e^x + e^{2x}} = 0, & 0 < t < 1 \\ x'(0) = 0, & x(1) = \frac{1}{2}x(\frac{1}{2}), \end{cases} \quad (3.18)$$

# SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE DIRICHLET-NEUMANN

---

où  $b = 28$ ,  $c > 12$ .

Dans ce cas  $\alpha = \eta = \frac{1}{2}$  et on suppose

$$a(t) = (1-t)^2, \quad f(x) = \frac{bx e^{2x}}{c + e^x + e^{2x}}.$$

Alors

$$\gamma = \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta} = \frac{1}{3},$$

$$\Lambda_1 = (1-\alpha) \left( \int_0^1 (1-s)a(s)ds \right)^{-1} = 2,$$

$$\Lambda_2 = \frac{1-\alpha}{\gamma} \left( (1-\eta) \int_0^\eta a(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \right)^{-1} = \frac{288}{31},$$

et

$$f_0 = \frac{b}{2+c} = \frac{28}{2+c} \in (0, \Lambda_1), \quad f_\infty = b = 28 \in \left( \frac{1}{\gamma}\Lambda_2, \infty \right).$$

Ainsi les conditions (H7) et (H8) sont satisfaits.

Donc par le corollaire 3.1, le problème (3.18) admet au moins une solution positive.

**Exemple 3.5** Considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} x'' + 3tx(1 + \frac{c}{1+x^2}) = 0, & 0 < t < 1 \\ x'(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{4}x(\frac{1}{3}), \end{cases} \quad (3.19)$$

où  $c > \frac{9593}{208}$ .

Dans ce cas  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\eta = \frac{1}{3}$  et on suppose

$$a(t) = 3t, \quad f(x) = x \left( 1 + \frac{c}{1+x^2} \right).$$

Alors on a,

$$\gamma = \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta} = \frac{2}{11},$$

$$\Lambda_1 = (1-\alpha) \left( \int_0^1 (1-s)a(s)ds \right)^{-1} = \frac{3}{2},$$

$$\Lambda_2 = \frac{1-\alpha}{\gamma} \left( (1-\eta) \int_0^\eta a(s)ds + \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \right)^{-1} = \frac{891}{104}.$$

***SOLUTIONS POSITIVES D'UN PROBLEME AUX LIMITES DU TYPE  
DIRICHLET-NEUMANN***

---

*Donc*

$$f_0 = 1 + c \in \left( \frac{1}{\gamma} \Lambda_2, \infty \right), \quad f_\infty = 1 \in (0, \Lambda_1).$$

*Ainsi les conditions (H9) et (H10) sont satisfaits.*

*Donc par le corollaire 3.2, le problème (3.19) admet au moins une solution positive.*

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté des résultats d'existence et multiplicité des solutions positives pour quelques types des problèmes aux limites du second ordre associés à des équations différentielles posées sur des intervalles bornés et où les conditions aux bords à trois points. Nous avons utilisé quelques méthodes pour rechercher l'existence des solutions positives de ces problèmes, ces méthodes sont basées à la fonction correspondante associée aux problèmes proposés au cas super-linéaire ou sous-linéaire, nous avons besoin d'un critère de compacité pour prouver que les opérateurs proposés sont compacts. Nous consacrons également dans toutes les phases de notre travail à construire et choisir les conditions nécessaires et suffisantes sur les éléments des problèmes étudiées.

Cette étude se compose en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons consacré aux préliminaires sur des notions générales utilisées dans les différents chapitres du travail, on présente la notion de quelques outils de base.

Nous avons commencé notre travail au deuxième chapitre par une étude d'existence des solutions positives du problème du second ordre à trois points du type Dirichlet.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié quelques résultats d'existence et multiplicité des solutions positives du problème du second ordre à trois points du type Dirichlet-Neumann.

La méthodologie pour prouver les théories de l'existence dépend de la conversion des problèmes proposés en équation opérationnelle, en plus d'utiliser le critère de compacité pour appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà avec insérer le théorème de points fixe de Guo-Krasnosel'skii pour obtenir les résultats appropriés.

Quant à nous espérons que ce mémoire nous ouvre la voie pour nous lancer dans l'étude mathématique de quelques problèmes aux limites.

# Bibliographie

- [1] K.Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.
- [2] M. Feng, W. Ge, Positive solutions for a class of m-point singular boundary value problems, Math. Comput. Modelling, 46(2007), 375-383.
- [3] D. Guo, V. Lakshmikantham, Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, San Diego, CA, 1988.
- [4] Y. Guo, W. Ge, Positive solutions for three-point boundary value problems with dependence on the first order derivative, J. Math. Anal. Appl. 290 (2004), 291-301.
- [5] M. Krasnosel'skii, Positive Solutions of Operator Equations, Noordhoff, Groningen (1964).
- [6] B. Liu, Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem, Appl. Math. Comput. 132 (2002), 11-28.
- [7] R. Ma, Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem, Electron. J. Differential Equations 34 (1999), 8 pp. (electronic).
- [8] R. Ma, N. Castaneda, Positive solutions for second-order three-point boundary value problems, Appl. Math. Lett. 14 (2001), 1-5.
- [9] R. Ma, H. Wang, Positive solutions of nonlinear three-point boundary-value problems, J. Math. Anal. Appl. 279 (2003), 216-227.
- [10] J. Tariboon, W. Sudsutad, Positive Solutions of a Nonlinear m-Point Integral Boundary Value Problem, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, no. 15, 711 - 729.
- [11] J. R. L. Webb, Positive solutions of some three-point boundary value problems via fixed point index theory, Nonlinear Analysis, 47(2001), 4319-4332.

- [12] Z. Yang, Positive solutions of a second order integral boundary value problem, J. Math. Anal. Appl., 321(2006), 51-765.
- [13] Z. Zhang, J. Wang, Positive solutions to a second order three-point boundary value problem, J. Math. Anal. Appl. 285 (2003), 237-249.

# Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et la multiplicité des solutions positives de quelques problèmes aux limites du second ordre associés à des équations différentielles posées sur des intervalles bornés et où les conditions aux bords à trois points du type Dirichlet et du type Dirichlet-Neumann.

Nous avons utilisé quelques méthodes (théorie du point fixe et le critère de compacité) pour démontrer nos résultats.

Afin d'étudier ces problèmes, nous transformons le problème aux limites donner en une équation opérationnelle, dans ce cas on utilise le critère de compacité avec appliquer le théorème de points fixe de Guo-Krasnosel'skii pour prouver les résultats fournis.

Dans toutes les phases de notre travail nous donnons quelques exemples qui donnent des applications à nos résultats.

**Mots clés :** Cône, concave, critère de compacité, théorème de point fixe, super-linéaire, sous-linéaire.

# Abstract

In this memory, we have studied the existence and the multiplicity of positive solutions of some boundary value problems associated with differential equations of second order set on bounded intervals where the boundary conditions are at three points of the Dirichlet type and the Dirichlet-Neumann type.

We have used some methods (fixed point theory and the compactness criterion) to demonstrate our results.

In order to study these problems, we transform the given boundary value problem into an operational equation, in this case we use the criterion of compactness with applying the Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem to prove the given results.

In all the phases of our work we give some examples which give applications to our results.

**Keywords:** Cone, concave, compactness criterion, fixed point theorem, super-linear, sub-linear.

## ملخص

في هذه المذكرة درسنا وجود و تعدّد الحلول الموجبة لبعض الجمل الحدية من نمط Dirichlet و من نمط Dirichlet-Neumann المرتبطة بالمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية على المجالات المحدودة أين تكون الشروط الحدية لثلاث نقط .

لقد استخدمنا بعض الطرق (نظرية النقطة الصامدة و معيار التراص) لاثبات نتائجنا.

من أجل دراسة هذه الجمل، نقوم بتحويل الجملة الحدية المعطاة إلى معادلة بالمؤثر و في هذه الحالة نستخدم معيار التراص مع تطبيق نظرية النقطة الصامدة Guo-Krasnosel'skii لاثبات النتائج المعطاة.

في جميع مراحل عملنا نقدم بعض الأمثلة التي تعطي تطبيقات لنتائجنا.

**الكلمات المفتاحية :** مخروط، مقعر، معيار التراص، نظرية النقطة الصامدة، فائق الخطية، شبه الخطية.