

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la**  
**Recherche Scientifique**



**Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued**

**FACULTE DE TECHNOLOGIE**

**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**



**Mémoire de fin d'étude**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie mécanique

Spécialité : Energétique

**Thème**

**Modélisation numérique par éléments finis  
d'un profil de NACA 23012 sous chargement  
aérodynamique**

Devant le jury composé de :

**Dr.KHECHANA Mohammed** Président  
**M<sup>me</sup>.BERKANE Houda** Examineur  
**Dr.GHERBI Mohamed Tahar** Encadreur

Présenté par :

- **DEGHOUM Khalil**  
- **FRIOUA Ali**

**2018-2017**

## ***Dédicace***

***Nous dédions ce travail:***

***Chers parents.***

***À nos sœurs et frères.***

***À nos chers amis.***

## REMERCIEMENTS

*On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.*

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Dr.GHERBI Mohamed Tahar** , on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

*Nos remerciement s'adresse à Mr **GUERRAH Ayoub** pour son aide pratique et son soutien moral et ses encouragements.*

*Nous sommes conscientes de l'honneur que nous a fait **Dr.KHECHANA Mohammed** en étant président du jury et Mr **BERKANE Houda** d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Nos remerciement s'adresse également à tout nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.*

## Résumé

Cette étude concerne le comportement dynamique de pale d'hélicoptère. L'objet principal de ces travaux de recherche est de mettre en oeuvre un modèle permettant de simuler le comportement dynamique d'une pale. Une étude de l'aérodynamique des hélicoptères a été faite pour la détermination des charges aérodynamiques appliquées sur la pale d'hélicoptère. Ce qui a permis de développer un modèle d'éléments finis de la pale et d'en déduire leurs fréquences et les modes. L'analyse des réactions agissant sur la pale a été faite. Les calculs des différentes énergies et des travaux virtuels de pale ont été développés. Ce modèle permet d'extraire les fréquences et les déformés modales de la pale, et de calculer les contraintes agissant sur la structure pour les différents modes. L'étude de pale parte (solide/fluide) en représente le effet de vitesse de rotation ou de le vent sur la géomètre de la pale âpre la transformation de pression Dans les lieux de collision avec la surface.

**Mots clés :** pale, dynamique, éléments finis, numérique, hélicoptère, aérodynamique.

## Abstract

This study concerns the dynamic behavior of helicopter blades. The main purpose of this research is to implement a model to simulate the dynamic behavior of a blade. A study of helicopter aerodynamics was done to determine the aerodynamic loads applied to the helicopter blade. This allowed to develop a model of finite elements of the blade and to deduce their frequencies and modes. The analysis of the reactions acting on the blade has been made. Calculations of different energies and virtual blade work have been developed. This model makes it possible to extract the frequencies and the modal deformations of the blade, and to calculate the stresses acting on the structure for the different modes. The study of pale parte (solid / fluid) represents the effect of rotation speed or wind on the geometer of the sharp blade pressure transformation In places of collision with the surface.

**Key words:** blade, dynamics, finite element, numerical, helicopter, aerodynamics.

## ملخص

تتعلق هذه الدراسة بالسلوك الحركي لشفرات المروحيات. الغرض الرئيسي من هذا البحث هو تنفيذ نموذج لمحاكاة السلوك الحركي للشفرة. وأجريت دراسة الحركة الهوائية للمروحية لتحديد الاحمال الحركية الهوائية المطبقة على شفرة طائرة المروحة. و هذا سمح بتطوير نموذج من العناصر المنتهية للشفرة واستنباط تردداتها ومختلف وضعياتها. تم إجراء تحليل للتفاعلات التي تعمل على الشفرة. وتم تطوير حسابات الطاقات المختلفة وعمل الشفرات الافتراضية. هذا النموذج يجعل من الممكن استخراج الترددات والتشوهات الشكلية للشفرة ، ولحساب الإجهادات التي تعمل على الهيكل للأوضاع المختلفة. تمثل دراسة الشفرة الجزء (الصلب / سائل) في توضيح تأثير سرعة الدوران أو الريح على شكل الشفرة بعد تحولها الى ضغط في اماكن تصادمها مع السطح.

الكلمات المفتاحية : شفرة ، ديناميكي ، عناصر منتهية، رقمي، طائرة مروحية، حركة هوائية

## Nomenclature

<b>NACA</b>	National Advisory Comitée for Aéronautics
<b><math>C_x</math></b>	Coefficient de traînée $e_n$
<b><math>C_z</math></b>	Coefficient moyen de portance
<b><math>C_m</math></b>	Coefficient de moment
<b><math>T_x</math></b>	Traînée [N]
<b><math>F_z</math></b>	Portance [N]
<b><math>F</math></b>	Force unitaire [N]
<b><math>P</math></b>	Le poids [N]
<b><math>M</math></b>	La masse [Kg]
<b><math>G</math></b>	Module de cisaillement
<b><math>\vec{F}_N</math></b>	La poussé [N]
<b><math>\vec{M}_i</math></b>	Moment d'inertie
<b><math>\vec{F}_i</math></b>	La forces d'inertie
<b><math>\vec{M}_{stAi}</math></b>	Moment statique du tronçon
<b><math>I_{Ai}</math></b>	Tenseur d'inertie du tronçon
<b><math>\vec{\Omega}</math></b>	La rotation instantanée
<b><math>T_i</math></b>	Modèle inertiel
<b><math>V_{Ai}</math></b>	Vitesse absolue
<b><math>GJ</math></b>	Module de torsion
<b><math>EIB</math></b>	Module de flexion en battement
<b><math>ET</math></b>	Module de flexion en traînée
<b><math>Kp^2</math></b>	Mayon de giration pondéré
<b><math>T</math></b>	Energie cinétique [ $kg.m^2/s^2$ ]
<b><math>T_r</math></b>	L'énergie cinétique en rotation
<b><math>U</math></b>	Energie de déformation
<b><math>Q_i</math></b>	L'effort généralisé
<b><math>\mu_{ti}</math></b>	Respectivement la masse modale
<b><math>\omega_{ti}</math></b>	Pulsation proper
<b><math>G</math></b>	Déformation en torsion
<b><math>F(t)</math></b>	La force externe
<b><math>\bar{u}</math></b>	Déplacement d'élément solide
<b>[N]</b>	La matrice d'interpolation reliant
<b>[D]</b>	Matrice d'élasticité
<b>[<math>M_e</math>]</b>	La matrice de masse de l'élément
<b>[<math>K_e</math>]</b>	La matrice de rigidité
<b>[C]</b>	Matrice d'amortissement
<b>{<math>f_e</math>}</b>	Vecteur des force nodales
<b><math>C_d</math></b>	Coefficient de traînée
<b><math>C_l</math></b>	Coefficient moyen de portance
<b><math>\omega</math></b>	Vitesse de rotation

$\Omega$	Pulsation propre [Rad/s]
$\gamma$	Capacités thermique massique
$\varepsilon$	Déformation
$\sigma$	Contrainte de flexion
$V$	Volume [m <sup>3</sup> ]
$\delta$	Vecteur des déplacements nodaux
$\rho$	Masse volumique [kg/m <sup>3</sup> ]
$\psi$	Angle de précession
$\theta$	Angle de rotation
$\phi$	Angle de rotation propre
$\alpha$	Angle rotation autour de $z_0$
$\varphi$	Angle de torsion
$\beta$	Le battement
$\delta_t$	La traînée
$\theta_p$	Le pas
$Re$	Nombre de Reynolds
$Q$	Débit massique
$L$	longueur de pale [m]

## Liste des figures :

<b>Figure I.1.</b> Différents types de profils NACA.....	4
<b>Figure I.2.</b> Profil de Clark Y.....	6
<b>Figure I.3.</b> Profil de NACA 4415 .....	6
<b>Figure I.4.</b> Profil de NACA 0012 .....	7
<b>Figure I.5.</b> Caractéristiques géométriques du profil .....	7
<b>Figure I.6.</b> Distribution de la vitesse de l'air .....	8
<b>Figure I.7.</b> Force appelée résultante aérodynamique .....	9
<b>Figure I.8.</b> Equilibre de force total .....	10
<b>Figure I.9.</b> Schéma du profil d'une pale .....	10
<b>Figure I.10.</b> Schéma du profil d'une pale angle d'incidence $0^\circ$ .....	11
<b>Figure I.11.</b> Schéma du profil d'une pale angle d'incidence $0^\circ < \theta < 45^\circ$ .....	11
<b>Figure I.12.</b> Schéma du profil d'une pale angle d'incidence $45^\circ$ .....	11
<b>Figure I.13.</b> Schéma du profil d'une pale angle d'incidence $75^\circ$ .....	11
<b>Figure II.1.</b> Vol stationnaire .....	14
<b>Figure II.2.</b> Translation de l'hélicoptère .....	14
<b>Figure II.3.</b> Les degrés de libertés de la pale .....	15
<b>Figure II.4.</b> Liaison de l'articulation de battement .....	16
<b>Figure II.5.</b> Vitesse relative d'une pale en rotation et conséquence sur les répartitions de portance .....	16
<b>Figure II.6.</b> Influence du vrillage des pales .....	16
<b>Figure II.7.</b> Forces aérodynamiques sur un élément de pale .....	18
<b>Figure II.8.</b> Vitesses induites par le rotor .....	19
<b>Figure II.9.</b> Mobilité de la pale dans différents repères $R_0$ et $R_1$ .....	22
<b>Figure II.10.</b> Mobilité de la pale dans différents repères $R_1$ et $R_2$ .....	23
<b>Figure II.11.</b> Modélisation de la pale déformée dans le repère $R_2$ .....	23
<b>Figure II.12.</b> Modélisation des efforts aérodynamiques sur une section de pale.. ....	26

<b>Figure III.1.</b> Discrétisation par éléments triangulaires d'une digue .....	28
<b>Figure III.2.</b> Discrétisation du solide .....	30
<b>Figure III.3.</b> Transformation du domaine physique (a) au domaine de calcul (b)....	31
<b>Figure III.4.</b> Maillage type d'une section de pale .....	31
<b>Figure III.5.</b> Maillage type C .....	32
<b>Figure III.6.</b> Maillage type O .....	32
<b>Figure III.7.</b> Maillage type H .....	33
<b>Figure III.8.</b> Système de coordonnées local et global de la pale .....	34
<b>Figure. III.9.</b> Degrés de liberté et de nœuds de faisceau élément de pale du rotor ..	35
<b>Figure IV.2 :</b> Dimension de profil isolé 2D NACA 23012.....	42
<b>Figure IV.3 :</b> Domine de travail simulation 2D.....	43
<b>Figure IV.4:</b> Maillage de profil isolé 2D NACA 23012.....	44
<b>Figure IV.5 :</b> Contours de la grandeur de vitesse résultante (m/s).....	46
<b>Figure IV.6 :</b> Vecteurs de la grandeur de vitesse résultante.....	46
<b>Figure .IV.7:</b> Effet de pale sur le volume interner.....	47
<b>Figure IV.8 :</b> Contours de pression statique (Pa).....	47
<b>Figure IV.9 :</b> L'effet de pression statique sur les point intrados et extrados.....	48
<b>Figure IV.10 :</b> Contours de pression totale (Pa).....	48
<b>Figure IV.11 :</b> L'effet de pression totale sur les point intrados et extrados.....	48
<b>Figure IV.12 :</b> Vecteur la vitesse en fonction de pression .....	49
<b>Figure IV.13 :</b> Nombre de Reynolds .....	49
<b>Figure IV.14 :</b> Contours taux de déformation.....	49
<b>Figure IV.15</b> Contour de contrainte de cisaillement de mur.....	50
<b>Figure IV.16 :</b> Les valeurs $C_d$ et $C_l$ et $C_m$ .....	50
<b>Figure IV.17 :</b> La fréquence en fonction des numéraux de mode .....	51
<b>Figure IV.18 :</b> Mode de 1 <sup>er</sup> déformée: 1 <sup>er</sup> mode de battement.....	52

<b>Figure IV. 19</b> : Mode de 2 <sup>eme</sup> déformée: 2 <sup>eme</sup> mode de battement.....	52
<b>Figure IV.20</b> : Mode de 3 <sup>eme</sup> déformée: 1 <sup>er</sup> mode de Traîné.....	52
<b>Figure IV.21</b> : Mode de 4 <sup>eme</sup> déformée: 3 <sup>eme</sup> mode de battement .....	53
<b>Figure IV.22</b> : Mode de 5 <sup>eme</sup> déformée: 4 <sup>eme</sup> mode de battement .....	53
<b>Figure IV.23</b> : Mode de 6 <sup>eme</sup> déformée: 1 <sup>er</sup> mode de torsion.....	53
<b>Figure IV.24</b> : Les déformation Maximal de la pale .....	54
<b>Figure IV.25</b> : Position de force aérodynamique sur la pale .....	54
<b>Figures IV.26</b> : La contrainte Max de la pale .....	55
<b>Figures IV.27</b> : La déformation Max de la pale.....	55
<b>Figures IV.28</b> : L'Energie de déformation .....	56
<b>Figures IV.29</b> : Déplacement suivant x .....	56
<b>Figures IV.30</b> : Déplacement suivant y .....	57
<b>Figures IV.31</b> : Déplacement suivant Z .....	57

## Liste des tableaux

<b>Tableau I.1 :</b> Données constructeur verre-époxy.....	12
<b>Tableau IV.1</b> Point de profile NACA 23012.....	42
<b>Tableau IV.2:</b> Types De Frontières .....	44
<b>Tableau. IV.3 :</b> Les schémas de discrétisation .....	45
<b>Tableau. IV.4 :</b> Les facteurs de sous relaxation .....	45
<b>Tableau IV.5 :</b> La valeur de coefficient de portance et traîne et moment.....	50
<b>Tableau IV.6 :</b> Les fréquences naturelles de la pale.....	51
<b>Tableau IV.7 :</b> Les Max déformation de la pale .....	54
<b>Tableau IV.8 :</b> Valeur max de contrainte .....	55
<b>Tableau IV.9 :</b> Valeur max de déformation .....	55
<b>Tableau IV.10 :</b> Valeur max d'énergie de déformation .....	56
<b>Tableau IV.11 :</b> Valeur max de déplacement suivant X .....	56
<b>Tableau IV.12 :</b> Valeur max de déplacement suivant Y .....	57
<b>Tableau V.9 :</b> Valeur max de déplacement suivant Z .....	57

## Sommaire

Introduction générale.....	1
<b>Chapitre I- Etude bibliographique</b>	
I.1. Introduction.....	2
I.2. Historique du développement du profil d'aile de type NACA .....	4
I.3. Génération des profils NACA.....	5
I.3.1. Famille des profils à quatre chiffres.....	5
I.3.2. Famille des profils à cinq chiffres.....	5
I.3.3. Famille des profils à six chiffres .....	5
I.4. Les différents types de pales .....	5
I.4.1. Plan convexe .....	5
I.4.2. Biconvexe dissymétrique .....	6
I.4.3. Biconvexe symétrique.....	6
I.5. Caractéristiques géométriques d'un profil.....	7
I.6 .Le principe de Bernoulli .....	8
I.6.1.Equation de Bernoulli .....	8
I.6.2. Equation simplifiée de Bernoulli .....	8
I.7. Les forces s'appliquent sur un profil .....	9
I.7.1. Le poids.....	9
I.7.2. La poussée.....	9
I.7.3. Force verticale et horizontale de la résultante aérodynamique .....	9
I.7.3.1. Composante verticale ou portance .....	9
I.7.3.2. Composante horizontale ou traînée.....	10
I.7.4 Equilibre de force total : .....	10
I.8. Les pales.....	10
I.8. Caractérisation des matériaux .....	12
I.8.1. Caractérisation du verre-époxy .....	12
I.9.Conclusion .....	12
<b>Chapitre II- Etude aérodynamique</b>	
II.1. Introduction .....	13
II.2. Modes de vol d'un hélicoptère .....	13
II.2.1. vol vertical .....	13
II.2.2. Vol stationnaire.....	13

II.2.3 Vol en translation.....	14
II.3. Les mobilités de la pale .....	15
II.4. Articulations de la pale .....	15
II.5. Aérodynamique des pales .....	16
II.6. Modèle de pale rigide .....	17
II.6.1. Forces et moments d'inertie .....	17
II.6.2 .Forces et moments aérodynamiques .....	18
II.6.3. Vitesses induites .....	18
II.7. Le modèle pale souple .....	19
II.7.1. Modèle inertiel.....	19
II.7.2. Modèle élastique.....	20
II.7.3. Expression des efforts généralisés .....	21
II.8. Modèle analytique du rotor.....	22
II.8.1. Modèle inertiel.....	22
II.8.2. Modèle élastique.....	24
II.8.3. Prise en compte des efforts aérodynamiques.....	25
II.9.Conclusion .....	26
<b>Chapitre III- Modélisation par éléments finis</b>	
III.1. Introduction .....	27
III.2. La base de la méthode des éléments finis .....	27
III.2.1. La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini .....	28
III.2.2. La formulation globale au niveau de la structure complète .....	28
III.3. Démarche de formulation éléments finis .....	28
III.3.1. Discrétisation de la structure en éléments finis.....	28
III.3.1.1 Le Maillage : .....	29
III.3.1.2 Problématique du maillage : .....	29
III.3.1.3. Topologie du maillage.....	30
III.3.2 Construction de nodale par sous domaine.....	31
III.3.3. Etablissement de la relation entre déformations et déplacement .....	31
III.3.4. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations .....	31
III.3.5. Calcul des matrices élémentaires : .....	32
III.3.6. Assemblage des matrices élémentaires .....	32
III.4. Présentation du problème : .....	32
III.5. les hypothèses de travail.....	33
III.5.1. Fonction de forme .....	33

III.5.2. Détermination de fonction d'interpolation Ni .....	33
III.5.3. champ des déplacements .....	34
III.5.4. Déformation .....	34
III.5.5. Champ des contraintes .....	35
III.5.6. L'énergie de déformation .....	37
III.5.7. L'énergie cinétique.....	37
III.5.8. Système d'équations.....	38
III.5.9. Discrétisation par éléments finis .....	38
III.5.10. Résolution des équations .....	39
III.6. Procédure de résolution.....	40
III.7. Conclusion.....	40
<b>Chapitre IV- Résultats numériques</b>	
IV.1 Introduction.....	41
IV.2. DM (Désigne Modeler) et M (Mechanical) .....	41
IV.2.1. le point de profile étudiée NACA23012 .....	41
IV.2.2 Géométries de profile.....	42
IV.2.3. Maillage .....	43
IV.3. FLUENT .....	44
IV.3.1. Choix des types de frontières .....	44
IV.3.2. Les conditions aux limites.....	45
IV.3.3. Choix des schémas de discrétisation .....	45
IV.3.4. Sous relaxation.....	45
IV.4. Résultats et interprétation.....	46
IV.4.1. analyse dynamique de solide/fluide .....	46
IV.4.1.1. l'effet de vitesse .....	46
IV.4.1.2 .l'effet de pression sur la pale .....	47
IV.4.2. analyse modale.....	51
IV.4.2.1.les fréquences naturelles de la pale .....	51
IV.4.2.2 Les déformées modales :.....	51
IV.4.3 Analyse statique .....	54
IV.4.3.1 Les contraintes de la pale .....	55
IV.4.3.2 Les déformation de la pale .....	55
IV.4.3.3 Déplacement de la pale .....	56
IV.5 Conclusion .....	58
Conclusion générale .....	59

# Introduction générale

## Introduction générale

La dynamique des structures occupe une place importante dans les travaux de recherche actuels.

L'étude du comportement dynamique des machines tournantes et des différentes structures mécaniques à rotors verticaux tel que les centrifugeuses, les pompes, les compresseurs, les turbines, les éoliennes et les hélicoptères permettant de résoudre divers problèmes liés à leurs fonctionnements.

Une pale revêt en plan la forme d'une aile à grand allongement, et sa section par un plan perpendiculaire à cet axe porte le nom de profil. Comme pour une aile d'avion, un profil est défini par son bord d'attaque, son bord de fuite et sa corde.

Pour étudier la dynamique d'un système comportant un ou plusieurs pales des rotors, il est possible d'écrire les équations du mouvement soit dans un repère fixe soit dans un repère tournant à la même vitesse de rotation que la pale de rotor. Dans le contexte qui nous intéresse qui est la dynamique de pale, le repère fixe est le plus approprié. Lors de la mise en équation, on utilise la méthode de Hamilton pour décrire le mouvement d'une pale d'hélicoptère comme le mouvement général d'un solide.

Les études essentielles de la dynamique d'une pale d'hélicoptère concernant le résultat de l'effet de vitesse après l'avoir transformé en une pression sur la géométrie de la pale, et le mode propre de la pale représente l'évolution des fréquences propres.

Pour réaliser de telles études, on dispose aujourd'hui de nombreux outils de modélisation comme la méthode de matrice de transfert, la méthode des éléments finis. Toutes ces méthodes permettent de prendre en compte les particularités que présente la dynamique de la pale d'hélicoptère vis-à-vis de la dynamique des structures fixes.

Notre travail est composé de quatre chapitres.

A partir d'une recherche bibliographique, le premier chapitre présente dans sa première partie, un résumé de l'état d'avancement des recherches scientifiques, dans le domaine de la dynamique de la pale. La seconde partie porte sur la description des notions de base des phénomènes importants en dynamique de la pale d'hélicoptère.

Le deuxième chapitre est consacré à la dynamique des hélicoptères où les forces aérodynamiques générées par la géométrie de la pale ont été caractérisées. À partir d'un profil NACA, ce qui permet de déterminer les inerties et la force aérodynamique et le moment statiques l'énergie cinétique et potentielle de la pale.

Le troisième chapitre est constitué d'une étude d'une pale simple développée à partir de la méthode Hamilton afin de voir les phénomènes de base. Les équations du mouvement sont obtenues par application des équations Hamilton. Afin de traiter des systèmes réels, une modélisation par éléments finis est développée.

Le quatrième chapitre présente une simulation numérique de la pale par le code de calcul éléments finis ANSYS pour déterminer les fréquences propres, les modes propres, les contraintes et les déplacements et le résultat de partie solide/fluide.

# **Chapitre I**

## **Etude bibliographique**

## I.1. Introduction

Depuis le début de l'aviation, les ingénieurs essaient de trouver des moyens de contrôler et d'améliorer le vol des aéronefs [1]. Les objectifs sont variés. Il peut s'agir par exemple d'augmenter la vitesse maximale de l'aéronef ou bien encore d'améliorer sa manœuvrabilité, c'est-à-dire d'obtenir un meilleur contrôle de sa trajectoire et de sa stabilité. A l'inverse, il peut être question d'essayer d'augmenter la charge utile que porte l'aéronef ou bien de diminuer sa consommation. Un autre objectif pourrait concerner la discrétisation ou bien encore la réduction des vibrations.

Mais, tous ces objectifs ne peuvent pas toujours être atteints en même temps car, étant donné l'état des compétences techniques actuelles, on arrive bien souvent à ne trouver qu'un compromis qui satisfait au mieux l'ensemble des critères d'un cahier des charges donné. C'est pour cette raison que de nouvelles méthodes, toutes aussi originales les unes que les autres, ont été envisagées pour trouver encore d'autres compromis, peut-être plus intéressants.

L'objectif de ce premier chapitre est l'avancement de recherche bibliographique et la notion de base de profil aérodynamiques.

On commence donc par présenter l'histoire de la famille NACA, et définir la dérivée famille de profil d'hélicoptère avec géométrie d'un profil et la notion de forces s'appliquent sur un profil.

La recherche est liée directement à l'évolution de la technologie; et c'est ce qui pousse les chercheurs à avancer dans des cas très compliqués et d'actualité, susceptibles d'être traités à l'aide d'un outil informatique très puissant et des moyens expérimentaux les plus sophistiqués et les plus performants.

**F. Bourekba et al [1]**, Ce travail concerne l'étude du comportement d'un écoulement turbulent autour d'un profil d'aile NACA23012. Elle est réalisée par le logiciel CFD qui est basé sur la méthode de volumes finis pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

**John H. Doty et Daniel McManiman [2]**, Dans cette recherche, une approche statistique est présentée pour développer une équation d'état (EOS) afin de quantifier la non-réalité de l'air (facteur de compressibilité) en fonction de la température réduite et de la pression réduite. La comparaison du modèle de substitution du facteur de compressibilité ( $Z$ ) avec les résultats validés d'Engineering Equation Solver (une base de données thermodynamique standard) indique que le modèle de substitution présente un écart absolu moyen global inférieur à 0,5% sur toute la plage de pression et de température étudiée.

**Sang Hoon Kim, Chongam Kim [3]**, Une étude numérique du contrôle de la séparation a été faite pour étudier les caractéristiques aérodynamiques du profil NACA23012 avec des jets synthétiques. Les résultats calculés ont démontré que les caractéristiques de décrochage et les performances de la surface de contrôle pouvaient être considérablement améliorées en redimensionnant les vortex de séparation. La portance maximale a été obtenue lorsque le point de séparation coïncide avec l'emplacement du jet synthétique et le La fréquence non-dimensionnelle est d'environ 1

**I.ED-DOKKALI, L. EL BAKKALI [4]** , Dans ce travail, nous étudions les phénomènes dynamiques sollicitant des pales de section variable. Les résultats de l'étude donne un outil de simulation qui montre la répartition des contraintes dues au mode de flexion de la pale lors de sa rotation en tenant compte à la fois des forces mécaniques et aérodynamiques nécessaires pour estimer sa fatigue.

**Abdelkader NOUR et all [5]**, Cette étude concerne le comportement dynamique d'une pale d'hélicoptère. Cette étude a été réalisée pour évaluer les charges aérodynamiques appliquées et évaluées par une simulation numérique des fréquences et des modes propres et calculer les contraintes agissant sur la structure pour différents modes.

**B. Peeters, H. Van der Auweraer [6]**, Ce travail présente les résultats expérimentaux de deux techniques de détection de dommages basées sur les propriétés modales, avec l'application sur une pale de rotor principal d'hélicoptère composite de taille normale. Les méthodes de détection des dommages utilisées dans cette étude sont le critère d'assurance modale coordonnée (COMAC) et la méthode d'énergie modale de déformation, qui sont respectivement basés sur la comparaison des modes de vibration et sur la comparaison de l'énergie modale de déformation.

**Mohamed Tahar GHERBI et all [7]** , Le but de cette étude est de présenter le comportement dynamique d'une pale d'hélicoptère composite basée sur la formulation de problèmes de fissures de Westergaard et une simulation utilisant la méthode des éléments finis étendue (XFEM). Enfin, plusieurs simulations numériques sont fournies pour illustrer la validité, la robustesse et l'efficacité de l'approche proposée pour évaluer les facteurs d'intensité de contrainte de mode I et les intégrales J dans les composites. L'étude du comportement transitoire permet de déterminer les réponses vibratoires dues au déséquilibre et aux différents modes d'excitation.

**I. Tawk, J. Aubry [8]**, Cette étude présente des dommages dans des structures similaires à des pales d'hélicoptères soumises à un impact, La modélisation des dommages de la mèche est effectuée par un changement d'échelle. Cela permet une bonne représentation du comportement expérimental observé. Comme la densité de maillage est faible, elle peut être utilisée pour la modélisation d'une structure réelle.

**Florian Pascal et all [9]** Ce travail se concentre sur l'étude des impacts de la vitesse moyenne oblique ( $\sim 70\text{m / s}$ ) sur la surface inférieure des pales d'hélicoptères. La lame est assimilée à un panneau sandwich composite avec une fine peau composite tissée stabilisée avec un noyau en mousse. Une étude numérique est réalisée à l'aide d'une formulation d'éléments finis spécifique développée pour modéliser le comportement de la peau composite tissée lors d'un impact. Les résultats numériques et expérimentaux sont comparés. La stratégie de modélisation proposée corrèle bien les tests. La modélisation est ensuite utilisée pour étudier l'influence de la courbure de la pale et de la charge centrifuge sur la réponse aux chocs.

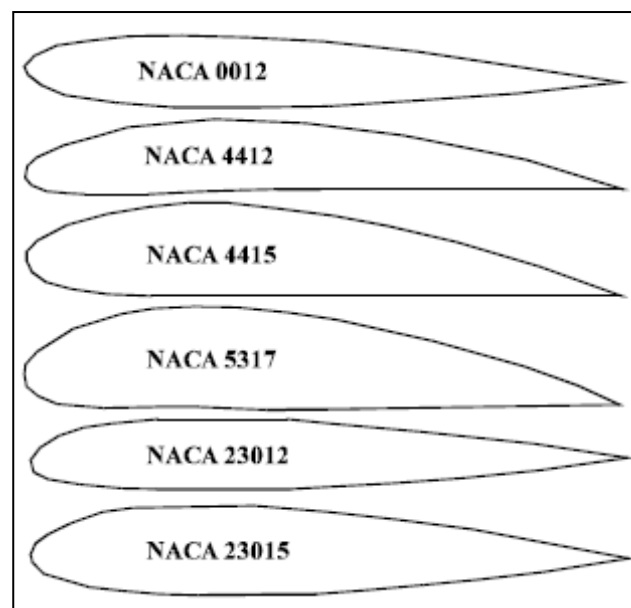
**A.R.Shahani, S.Mohammadi [10]** Dans cette étude, l'approche de la tolérance aux dommages est utilisée pour l'estimation de la durée de vie de la pale du rotor principal d'un hélicoptère soumis à un chargement aléatoire. Dans un premier temps, les propriétés de croissance des fissures de fatigue et la gamme d'intensité de contrainte de seuil du longeron sont obtenues sur la base de la méthode d'essai ASTM E647.

## I.2. Historique du développement du profil d'aile de type NACA

En 1915, un comité a été formé aux états unis d'Amérique, afin d'accélérer la technologie en aviation, connu sous le nom de (NACA) comité consultatif national de l'aéronautique et dont l'actuelle appellation est NASA (National Administration of Space and Aeronautics). Les comités, ont reconnu entre autre, la nécessité de développer efficacement les ailes d'hélicoptère.

Les scientifiques de la NASA ont permis par des changements apportés à la caractéristique géométrie de l'aile, pour améliorer les performances aérodynamiques qui n'ont pas pu être obtenues auparavant. Après avoir fait des recherches intensives sur les ailes, ce comité (NASA) a publié son numéro avec une série d'ailes à 4 chiffres. Dans cette série, on retrouve 4 chiffres qui définissent la géométrie de l'aile. Le 1<sup>er</sup> chiffre indique la courbure maximale en pourcentage (%) de la corde, le 2<sup>ème</sup> chiffre précise la position de la courbure maximale en dixièmes de la corde et les 3 et 4 chiffres derniers indiquent maximale de l'épaisseur en pourcentage de la corde. Par exemple, un profil NACA 2412 a une courbure maximale de 2 % de la longueur de la corde indiquée par le premier chiffre. La courbure maximal de situé à une distance de 4/10 de la corde à partir du bord d'attaque, représenté par le 2<sup>ème</sup> chiffre et l'épaisseur maximale de profil est de 12% de la corde de l'aile, indiqué par les 2 derniers chiffres.

Le comité NACA en étudié l'effet de la forme géométrique sur les caractéristiques aérodynamiques du profil afin améliorer la portance et réduire la traînée. On d'autre à des profils NACA à 5 chiffres comme par exemple NACA 23012. Le 1er chiffre et les 2 derniers chiffres indiquent respectivement la courbure et l'épaisseur max. Cependant, le 2<sup>ème</sup> et les 3<sup>èmes</sup> chiffres indiquent le double de l'abscisse de la courbure max, 15 % de la corde [11].



**Figure I.1** : Différents types de profils NACA

### I.3. Génération des profils NACA

Le comité NACA (National Advisory Committee for Aeronautics), prédécesseur de la NASA, a étudié différentes familles de profils répondant à diverses applications. Parmi celles-ci, on peut distinguer la famille des profils à quatre chiffres, celle à cinq chiffres et les profils laminaires portant la désignation NLF. Dans notre étude, on s'intéressera principalement aux profils à cinq chiffres. [12]

#### I.3.1. Famille des profils à quatre chiffres

Dans cette famille, un profil est représenté par quatre chiffres. Le premier indique la cambrure ou courbure relative maximale en pourcentage de la corde ; le deuxième représente la position de cette cambrure en pourcentage de la corde et les deux derniers spécifient l'épaisseur relative maximale en pourcentage de la corde. Par exemple, dans le cas du profil 4412 :

- Le 4 indique la cambrure maximale (4%)
- Le deuxième 4 indique la position de la cambrure maximale (40%)
- Le 12 indique l'épaisseur relative maximale (12%). [12]

#### I.3.2. Famille des profils à cinq chiffres

Dans cette famille, cinq chiffres caractérisent les profils. Le premier représente la courbure relative maximale, les deux suivants indiquent le double de sa position relative du bord d'attaque et les deux derniers spécifient l'épaisseur relative maximale.[13]

#### I.3.3. Famille des profils à six chiffres

On prendra un exemple d'un profil à six chiffres le NACA662-215 :

- Le premier 6 désignent la série des profils laminaires.
- Le deuxième 6 représentent la position relative de la pression minimale (60%)
- L'indice 2 indique le maximum du coefficient de portance pour laquelle il existe un gradient de pression favorable ( $C_l=0,2$ )
- Le 2 représente le coefficient de portance à l'incidence nulle ( $C_l=0,2$ )
- Le 15 représente l'épaisseur relative maximale (15%)

La série des profils laminaires est souvent recommandée dans la conception des ailes d'avions subsoniques modernes [14].

### I.4. Les différents types de pales

Chaque type de profil a des caractéristiques qui lui sont propre :

#### I.4.1. Plan convexe

Ce profil a une très forte portance dès les faibles incidences et une traînée moyenne. Cependant, le centre de gravité de ce profil à tendance à se déplacer.

Il est très utilisé en modélisme car il est facile à construire et donne de bons résultats.

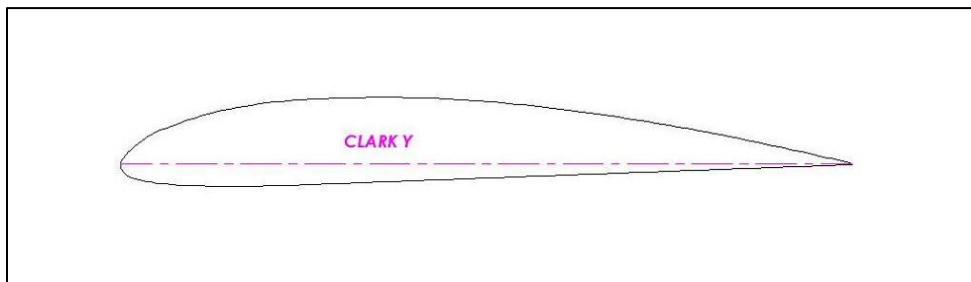
L'aile la plus représentative de ce type de profils est le Clark Y.

A  $0^\circ$ , ce profil a un coefficient de portance de 0,26, ce qui est relativement élevé et un coefficient de traînée de 0,017, assez moyen.

L'épaisseur relative d'un Clark Y est d'environ 11,68%.

La cambrure d'un Clark Y est très faible, environ 2,7%.

La finesse maximum d'un Clark Y vaut environ 16,9 pour 4° d'incidence.



**Figure I.2 :** Profil de Clark Y[14]

#### I.4.2. Biconvexe dissymétrique

Ce profil est porteur même à des incidences négatives.

Il est légèrement instable et son centre de gravité se déplace un peu.

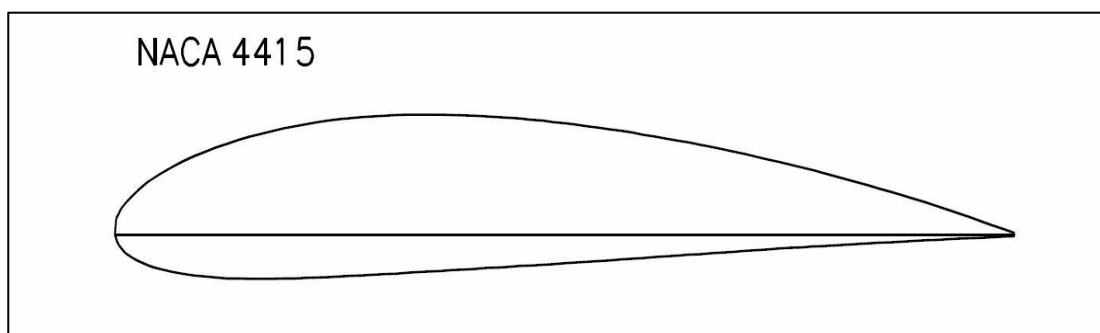
Il est utilisé principalement pour la voltige, notamment pour ses capacités à être porteur à quasiment toutes les incidences.

Les ailes les plus représentatives de ce type de profils sont les NACA 44 (NACA 4415, NACA 4412).

A 0°, ce profil a un coefficient de portance de 0,146, et un coefficient de traînée de 0,0165. L'épaisseur relative d'un NACA 44 est d'environ 12,02%.

La cambrure d'un NACA 44 est faible, environ 3,3%.

La finesse maximum d'un NACA 44 vaut environ 14,27 pour 4° d'incidence.



**Figure I.3 :** Profil de NACA 4415 [14]

#### I.4.3. Biconvexe symétrique

Ce profil n'a pas de portance aux faibles incidences car, à 0°, l'air parcourt strictement la même distance sur l'extrados et l'intrados.

Afin de créer une incidence, il est monté de biais sur les avions.

Il est utilisé pour la voltige, lui aussi.

L'aile la plus représentative de ce type de profils est le NACA 0012.

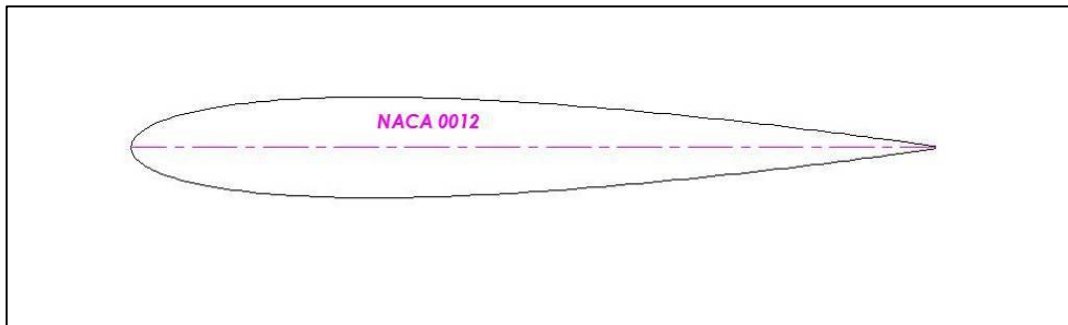
A 0°, ce profil a un coefficient de portance nul (0) et un coefficient de traînée de 0,0138.

A 2°, il a un coefficient de portance de 0,129 et un coefficient de traînée de 0,0145.

L'épaisseur relative d'un NACA 0012 est d'environ 12,00%.

La cambrure d'un NACA 0012 est nulle (0%).

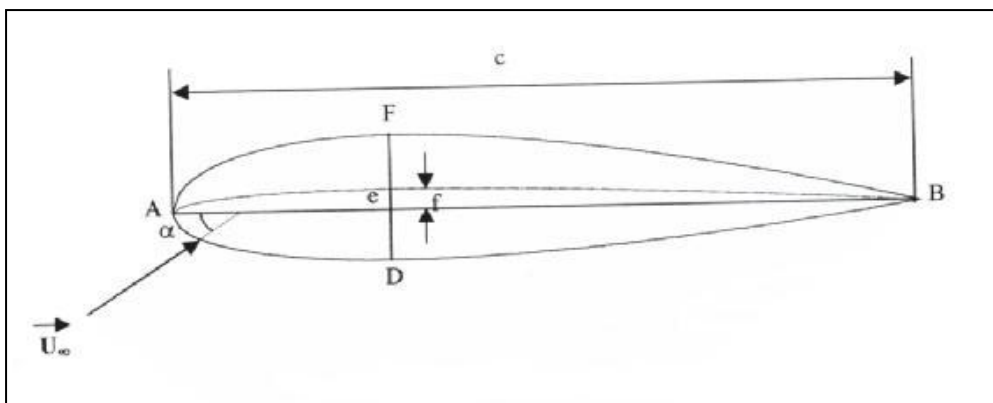
La finesse maximum d'un NACA 0012 vaut environ 12.58 pour  $4^\circ$  d'incidence.



**Figure I.4 :** Profil de NACA 0012 [14]

### I.5. Caractéristiques géométriques d'un profil

C'est la force générée par l'ensemble des surpressions à l'intrados et dépressions à l'extrados. L'action de l'air sur les pales d'un hélicoptère se traduit par deux forces aérodynamiques une force parallèle à la direction de l'écoulement dite de trainée, et une force normale à l'écoulement dit de portance. [15]



**Figure I.5 :** Caractéristiques géométriques du profil

Sur le profil de base, on peut définir les données suivantes qui se retrouveront sur le profil courbé :

A : Bord d'attaque.

B : Bord de fuite.

A F B : Courbe supérieure (extrados).

A D B : Courbe inférieure (intrados).

AB : Corde de référence.

FD : Points du segment FD perpendiculaire à la corde.

c : Longueur de la corde, ou profondeur du profil.

e : Epaisseur maximale (valeur maximale de  $2y$ ) atteinte à la distance g du bord d'attaque.

$e/c$  : Epaisseur relative (distance maximale entre l'intrados et l'extrados)

Flèche maximale (f) : distance entre la ligne moyenne et la corde du profil.

Angle d'attaque ( $\alpha$ ) : angle entre la corde et le sens de l'écoulement.

L'épaisseur  $2y$  en un point est une fonction de l'abscisse  $x$  définie soit par transformation conforme à partir d'un cercle, soit empiriquement.

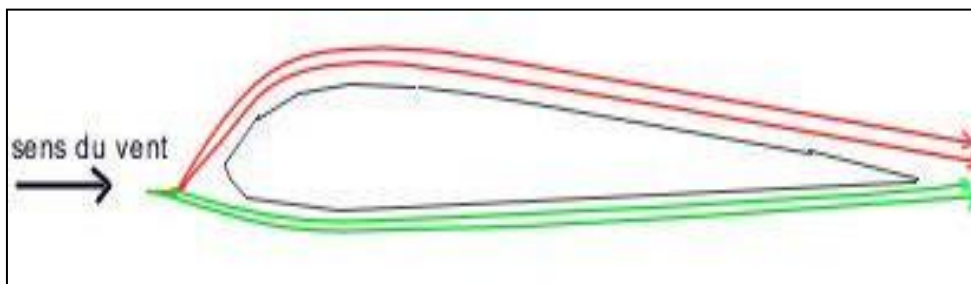
Les profils classiques usuels ont une épaisseur  $e/c$  de 6 à 20 % maximale étant atteinte vers le 1/3 amont de la corde (profils subsoniques).

La ligne moyenne AMB peut avoir une forme quelconque elle habituellement circulaire ou parabolique. Sa plus grande ordonnée par rapport à la corde AB est la flèche maximale  $f$ , définie également par sa position  $d/c$  [16].

Le rapport  $f/c$  caractérise la cambrure du profil

## I.6. Le principe de Bernoulli

C'est un formulé en 1738 par le mathématicien et physicien suisse Daniel Bernoulli, et antérieurement par Leonhardt Euler. Le principe de Bernoulli montre que la vitesse du fluide augmente lorsque la pression exercée sur le fluide diminue. Cette loi a été appliquée pour optimiser la forme du profil d'hélicoptère.



**Figure I.6 :** Distribution de la vitesse de l'air

On remarque que la flèche rouge est plus longue que la verte, donc que la vitesse de l'air au-dessus de l'aile sera plus grande que celle au-dessous de l'aile, car dans un même temps, l'air passant au-dessus du profil aura parcouru une plus grande distance.

En effet, la forme d'une aile est telle que l'air y circule plus rapidement sur sa surface supérieure (extrados) que sur sa surface inférieure (intrados). De ce fait, la pression de l'air sur l'extrados est inférieure à celle qui s'exerce sur l'intrados. La différence de pression qui en résulte est à l'origine de la poussée ascendante qui maintient l'hélicoptère.

### I.6.1. Equation de Bernoulli

$$P_{\text{stat}} + \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z \right) = \text{constante} \quad (\text{I.1})$$

$P_{\text{stat}}$  : est la pression en un point (en Pa ou  $\text{N/m}^2$ )

$\rho$  : est la masse volumique en un point (en  $\text{kg/m}^3$ )

$v$  : est la vitesse du fluide en un point (en  $\text{m/s}$ )

$g$  : est l'accélération de la pesanteur (en  $\text{N/kg}$  ou  $\text{m/s}^2$ )

$z$  : est l'altitude (en m)

### I.6.2. Equation simplifiée de Bernoulli

$$P_{\text{stat}} + P_{\text{dyn}} = P_{\text{tot}} \quad (\text{I.2})$$

Pression statique + pression dynamique = pression totale

Chaque point dans un fluide en mouvement, indépendamment de la vitesse du fluide en ce point, a sa propre pression statique et dynamique. La somme de ces deux pressions  $p+q$  est définie comme la pression totale  $p_{tot}$ . Le principe de Bernoulli est de considérer cette pression totale constante.

## I.7. Les forces s'appliquent sur un profil

### I.7.1. Le poids

Le poids: force verticale dirigée de haut en bas, appliquée au centre de gravité et d'intensité:

$$P = m \cdot g \quad (I.3)$$

$P$  = poids en N (Newton)

$m$  = masse en kg

$g$  = accélération de la pesanteur en  $m/s^2$  ( $g = 9,81 m/s^2$ )

### I.7.2. La poussée

C'est la force qui fait avancer l'hélicoptère dans l'air

La poussée fait que l'hélicoptère avance à une certaine vitesse dans l'air, mais cette vitesse est la vitesse relative par rapport au fluide, et non pas la vitesse par rapport au sol.

C'est la raison au fait que les hélicoptère atterrissent et décollent face au vent, car cela permet l'hélicoptère une vitesse relative assez importante pour une vitesse au sol plutôt faible.

### I.7.3. Force verticale et horizontale de la résultante aérodynamique

Ainsi que nous l'avons vu dans l'introduction, la forme particulière d'un profil d'hélicoptère crée une force appelée résultante aérodynamique. Cette force peut être décrite en deux composantes

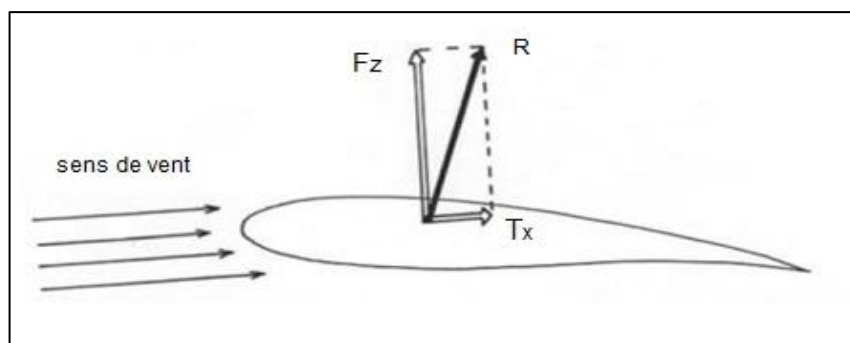


Figure I.7 : Force appelée résultante aérodynamique

#### I.7.3.1. Composante verticale ou portance

C'est cette composante de la résultante aérodynamique qui maintient l'hélicoptère en l'air. De formule : [17]

$$F_Z = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_Z \quad (I.4)$$

$\rho$  : masse volumique de l'air en  $kg/m^3$   
l'aile en  $m^2$

$S$ : surface de

$V$ : vitesse en  $m/s$

$C_Z$  : coefficient de portance du profil

### I.7.3.2. Composante horizontale ou traînée

Cette composante de la résultante aérodynamique s'oppose à la poussée, et freine par conséquent l'hélicoptère.

De formule : [17]

$$T_X = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_X \quad (I.5)$$

$\rho$  : masse volumique de l'air en  $\text{kg/m}^3$

S: surface de l'aile en  $\text{m}^2$

V: vitesse en m/s

$C_X$ : coefficient de traînée du profil

### I.7.4 Equilibre de force total :

Pour l'hélicoptère se déplace horizontalement, de façon rectiligne uniforme, on peut affirmer, d'après le principe d'inertie (la somme des forces total s'appliquant = 0), que la valeur de la portance  $F_Z$  est égale à celle du poids  $P$  et que la valeur de la traînée  $T_X$  est égale à celle de la poussée  $F_N$ .

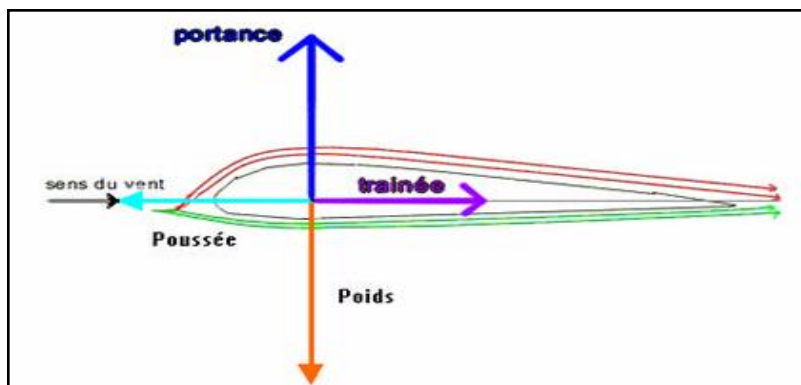


Figure I.8 : Equilibre de force total

### I.8. Les pales

La pale réutilise les mêmes équations de portance et de traînée qu'une voilure d'avion, sa principale différence est d'avoir un profil biconvexe souvent symétrique. Ainsi le contrôle de la portance d'une pale s'effectue en lui donnant un angle d'incidence.

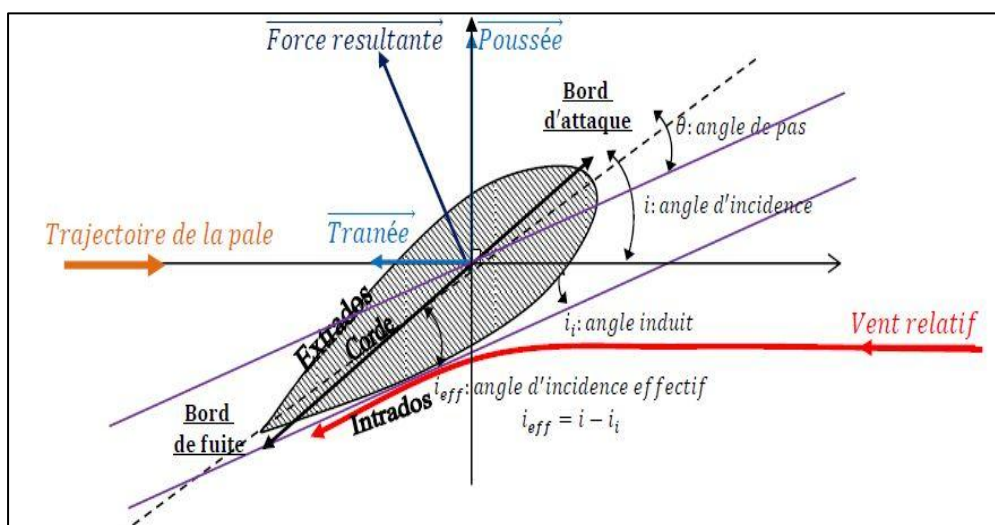


Figure I.9 : Schéma du profil d'une pale

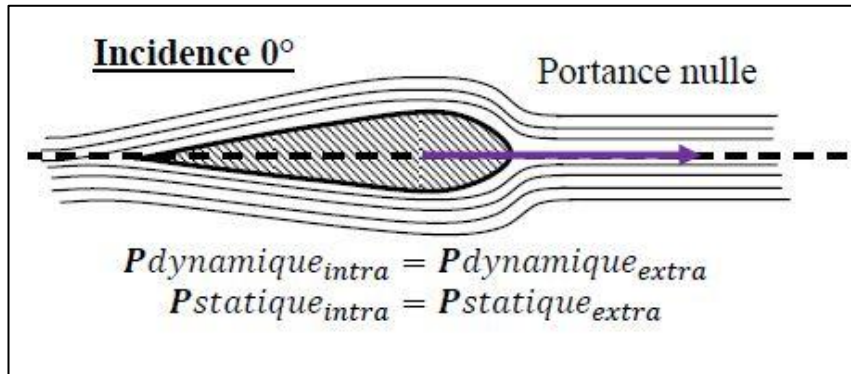


Figure I.10 : Schéma du profil d'une pale angle d'incidence  $0^\circ$

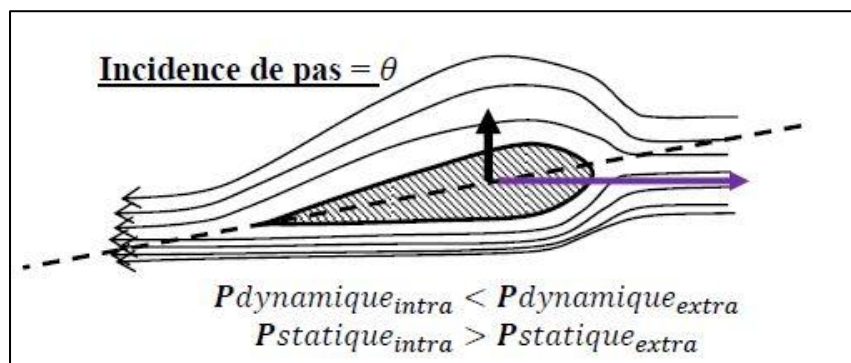


Figure I.11 : Schéma du profil d'une pale angle d'incidence  $0^\circ < \theta < 45^\circ$

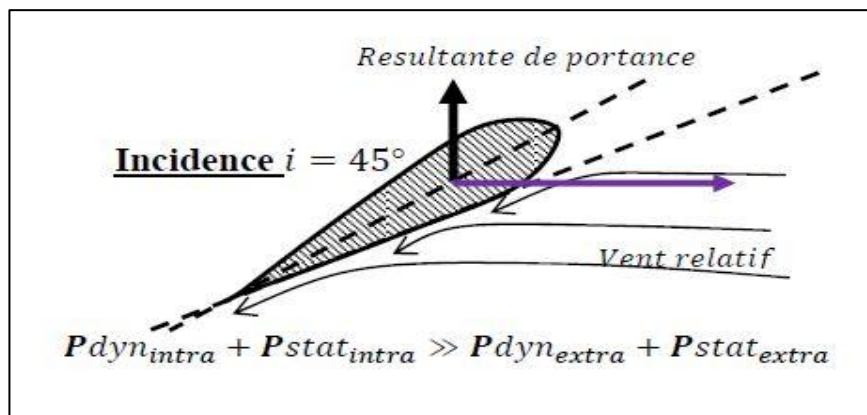


Figure I.12 : Schéma du profil d'une pale angle d'incidence  $45^\circ$

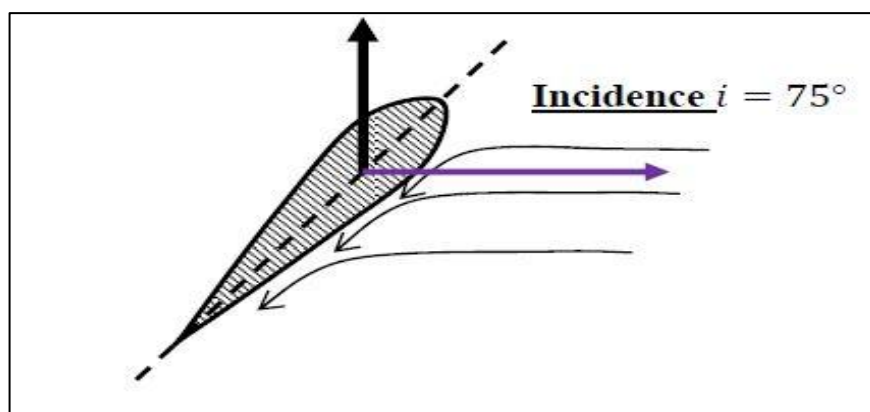


Figure I.13 : Schéma du profil d'une pale angle d'incidence  $75^\circ$

Sur un hélicoptère, la portance se contrôle avec l'angle d'incidence des pales et non pas avec la vitesse de rotation qui est resté constant lors d'un vol. C'est l'autre différence avec la voilure d'avion, ici l'essentiel de la portance est créé par les pressions dynamique et statique contre l'intrados suivant un certain angle appelé angle d'incidence. Plus l'incidence est importante et plus la portance va être grande jusqu'à une limite d'angle au delà duquel la pression du vent relatif sur la pale n'aura plus de résultante verticale, c'est le décrochage. Ce procédé va permettre à l'hélicoptère de se déplacer dans les trois dimensions de l'espace avec une grande facilité.

## I.8. Caractérisation des matériaux

### I.8.1. Caractérisation du verre-époxy

Le matériau utilisé pour la pale est un composite verre époxy qui a pour caractéristiques dans le tableau I-1.

**Tableau I.1** : Données constructeur verre-époxy

Matériaux	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$\rho$ Kg /m <sup>3</sup>
Verre /époxy	46	10	10	4.7	4	4	0.13	0.34	0.32	1850

## I.9. Conclusion

Ce chapitre est constitué des rappels et de définitions de notions liées aux pale, dans le but de donner une vision assez large sur les travaux effectués dans le corde de la pale d'hélicoptère et les différents type de profil d'aile NACA, avec le principe de Bernoulli et l'application de différents forces de l'aérodynamique d'hélicoptère et les caractéristiques de matériaux.

# **Chapitre II**

Etude aérodynamique

## II.1. Introduction

Ce chapitre traite des notions de base en aérodynamique de l'hélicoptère, ce qui permet la modélisation des hélicoptères, pratiquement le vol des hélicoptères peut se produire avec des modes différents de vol, dans une, deux ou trois directions et avec des conditions très différentes dans chaque mode. Pourtant, dans la littérature concernant l'aérodynamique des hélicoptères [22] [23], les cas analysés les plus importants sont ceux du vol vertical, du vol stationnaire et du vol en palier. On remarque que dans la plupart des travaux analysés [24], les auteurs considèrent leurs études dans des conditions de vol stationnaire où près de ces conditions particulières. D'autre part, la dynamique des pales est souvent négligée.

Dans ce chapitre on tient du compte de la dynamique des pales. L'élément essentiel d'un hélicoptère est le rotor, lui même constitué d'un ensemble de deux pales autour d'un axe sensiblement vertical, dans un plan perpendiculaire à cet axe.

## II.2. Modes de vol d'un hélicoptère

L'hélicoptère est un aéronef qui utilise son rotor pour assurer sa sustentation et sa propulsion. En quelque sorte, le rotor principal remplace le réacteur d'un avion. C'est cette configuration qui lui permet de rester immobile au-dessus d'un point ou de manœuvrer dans tous les sens. L'hélicoptère est un aéronef qui peut en principe exécuter trois sortes de vols: [25]

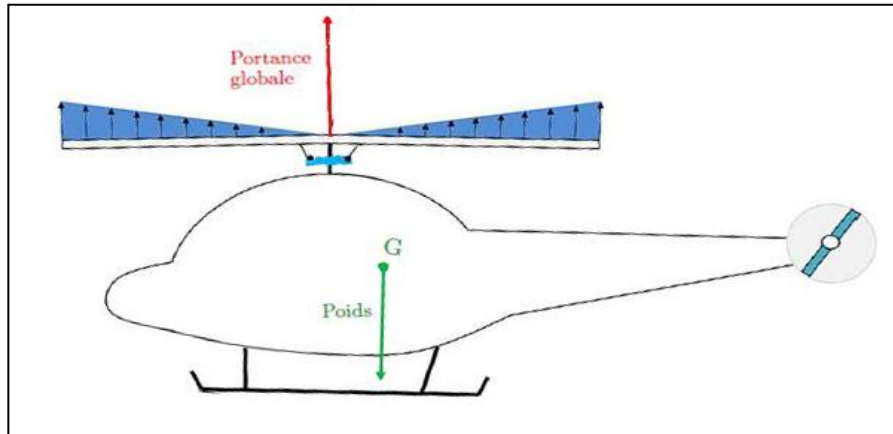
- un vol vertical (ascendant ou descendant),
- un vol stationnaire,
- un vol de translation.

### II.2.1. vol vertical

Lors du vol vertical, la résultante aérodynamique et le poids total sont deux forces ayant la même direction mais de sens opposé. Le vol est ascendant ou descendant, en fonction de la force aérodynamique qui peut être supérieure ou inférieure au poids de l'appareil. Dans le cas où les deux forces, la résultante aérodynamique et le poids l'appareil sont égales et opposées.[25]

### II.2.2. Vol stationnaire

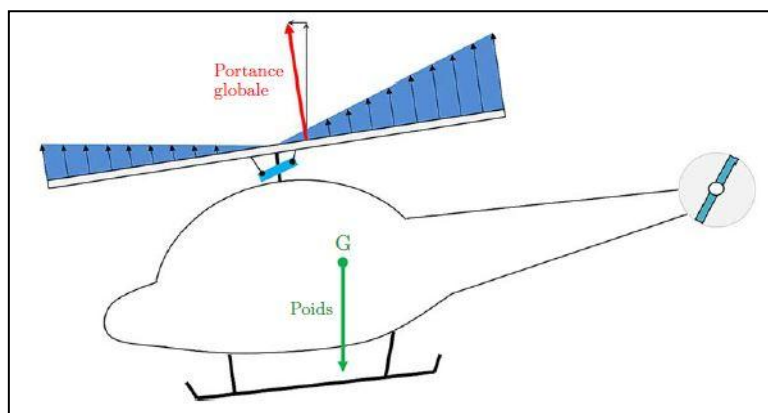
Le rotor de l'hélicoptère étant entraîné à vitesse constante, les déplacements verticaux de l'hélicoptère sont obtenus par la seule modification du pas des pales. A ce stade du vol, la portance des pales reste identique sur un tour du rotor. Il existe une position où la portance globale s'oppose exactement au poids de l'appareil : l'hélicoptère peut rester immobile. Si elle lui est inférieure, l'appareil descend. Si elle est supérieure, il monte. [26]



**Figure II.1:** Vol stationnaire

### II.2.3 Vol en translation

Pour que l'hélicoptère avance il faut une force à composante horizontale. Si on augmente la portance des pales lorsqu'elles passent derrière le rotor, l'équilibre précédent est rompu par décalage des forces poids et portance; l'appareil alors bascule vers l'avant. De ce fait, la portance n'est plus verticale. Il reste toutefois une composante verticale principale qui s'oppose au poids permettant le maintien en l'air, et la composante horizontale motrice engendre le mouvement d'avancement, donc accélération jusqu'à une vitesse où la traînée globale (résistance à l'avancement de l'hélicoptère) s'équilibrera avec la composante motrice. Le pilote possède 3 systèmes principaux de commandes, le levier du cyclique (manche), le collectif, et les pédales de palonnier. Le manche contrôle l'angle du rotor principal en inclinant la tête du rotor sur lequel sont fixées les pales à l'aide de biellettes de pas dans la direction du déplacement désiré par l'intermédiaire du plateau cyclique fixe et tournant. Le collectif contrôle l'angle de pas commun de toutes les pales, en conjonction avec le plateau cyclique qui modifie la portance générée par le rotor. Le palonnier augmente ou diminue la portance du rotor de queue qui doit varier en fonction de la puissance mise en jeu sur le rotor principal, donc de la position du collectif.[26]



**Figure II.2:** Translation de l'hélicoptère

### II.3. Les mobilités de la pale

Les déplacements de la pale du rotor sont considérés comme il est illustré sur la (figure II.3) :

- Le battement  $\beta$ , levé de la pale perpendiculairement au plan rotor ;
- La traînée  $\delta_t$ , mouvement de pale dans le plan rotor ;
- Le pas  $\theta_p$ , rotation de la pale suivant son envergure.

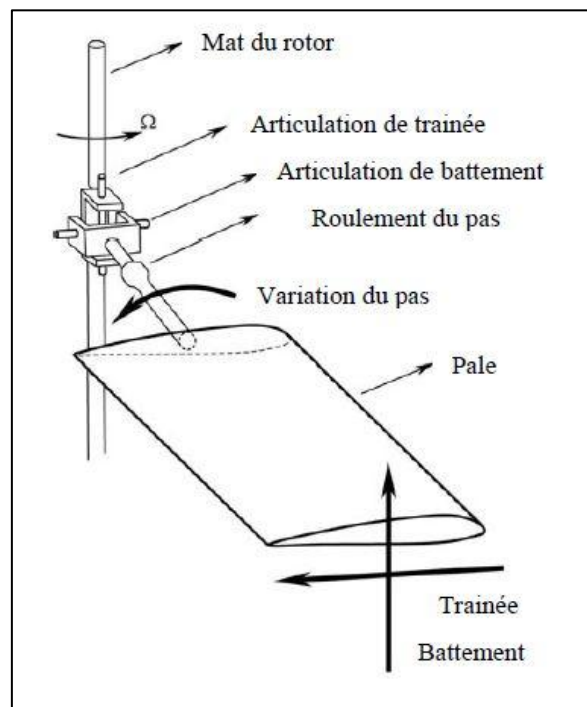


Figure II.3 Les degrés de libertés de la pale.

Le déplacement axial est beaucoup plus petit que ces derniers. Les déplacements du disque du rotor est le secteur balayeur par la pale pour une seule rotation.

Les mouvements de traînée et de battement résultent de l'équilibre instantané de la pale en réponse aux sollicitations aérodynamiques, aux efforts d'inertie, à la pesanteur et à la commande du pilote. Le pas conditionne l'équilibre global du rotor de façon à assurer une portance et une force propulsive données, et sa détermination dépend de plusieurs degrés de liberté décrivant la cinématique de la pale. [27]

### II.4. Articulations de la pale

Les forces de Coriolis engendrées par le battement, entraînent des oscillations en traînée de la pale. Une façon de minimiser l'angle de battement est d'introduire une liaison d'articulation qui est une liaison mécanique créant un couplage entre le pas et le battement de la pale (Figure. II.4).

L'angle de pas de la pale est commandé par le levier de pas à l'extrémité duquel aboutit la commande pilote (point A) qui peut tourner autour de l'axe d'articulation de pas. Le point A en dehors d'une action du pilote est fixe, et sa position décalée par rapport à l'axe de battement entraîne une modification du pas lorsque le battement varie.[26]

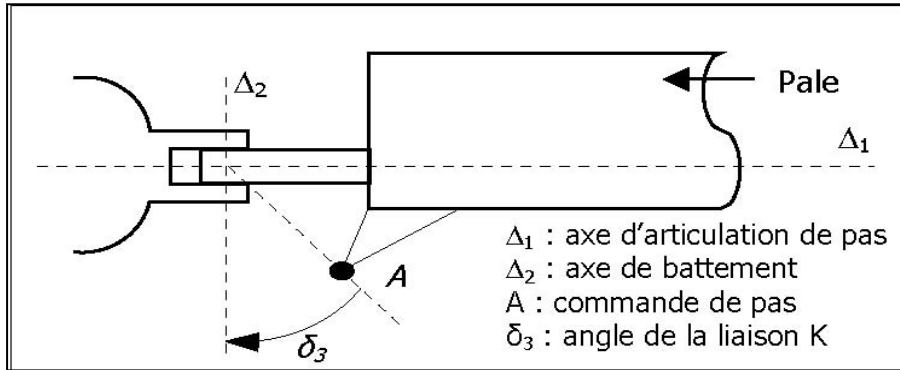


Figure II.4: Liaison de l'articulation de battement [27]

### II.5. Aérodynamique des pales

En effet, si on considère une pale en rotation, sa vitesse relative par rapport à l'air sera croissante suivant le rayon. La portance étant proportionnelle au carré de la vitesse, il découle une répartition non uniforme des efforts de portance caractérisée par une intensité maximale en extrémité de pale (Figure. II.5). Par conséquent, d'importantes contraintes en flexion vont apparaître près de l'emplanture des pales, pouvant entraîner l'endommagement de la structure.

Pour y pallier, une première méthode consiste à imposer une loi de vrillage à la pale permettant de réduire les écarts de portance entre l'emplanture de la pale et son extrémité (Figure .II.6). [26]

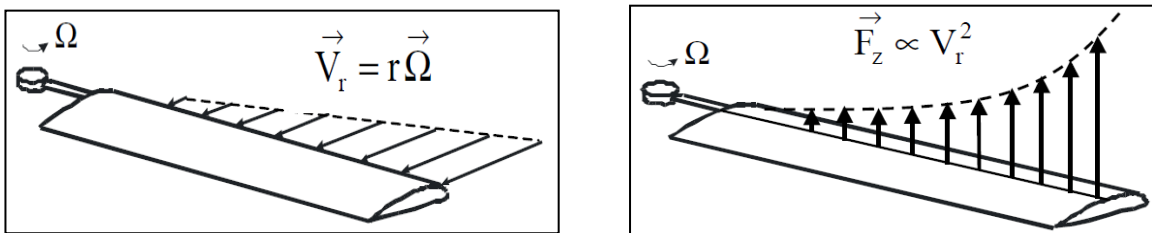


Figure II.5 : Vitesse relative d'une pale en rotation et conséquence sur les répartitions de Portance

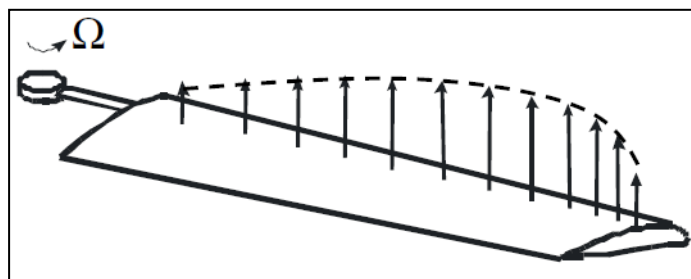


Figure II.6: Influence du vrillage des pales.

Les paramètres aérodynamiques constituent une famille de facteurs très vaste [28], s'étendant des modèles les plus simples présentant des temps de résolution tout à fait négligeables, aux modèles complexes. Ces différents paramètres s'insèrent différemment dans les calculs en fonction des trois cas suivants :

- Les modèles 2D instantanés.
- Les modèles 2D avec histoire.
- Les modèles 3D.

## II.6. Modèle de pale rigide

Dans ce modèle, nous avons été amenés à faire plusieurs hypothèses simplificatrices afin d'obtenir l'expression analytique des forces aérodynamiques et inertielles développées par le rotor, ainsi que le mouvement des pales. En particulier, une analyse simplifiée conduit à ignorer les effets de décrochage, de compressibilité, de non-uniformité de répartition des vitesses induites, ainsi que les divers couplages inertiels.[29]

### II.6.1. Forces et moments d'inertie

La pale est découpée en tronçons de longueurs variables. Les extrémités des tronçons sont soit les articulations au niveau du moyeu (pas, battement, traînée, liaison K) soit les cassures en bout de pale (flèche, droop, saumon, ...). La formulation la plus générale des forces et des moments d'inertie appliqués sur une section de pale rigide est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i = \int_{A_i}^{A_{i+1}} \rho \vec{\gamma}_p dv \\ \vec{M}_i = \int_{A_i}^{A_{i+1}} \rho \vec{A}_i \vec{p} \wedge \vec{\gamma}_p dv \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

Où :

$A_i$  est une articulation ou une cassure à l'extrémité de la pale ; c'est aussi l'origine du repère  $R_i$

$R_{i-1}$  : est le repère précédent l'articulation  $A_i$

$R_i$  : est le repère suivant l'articulation  $A_i$

$P$  : est un point courant entre  $A_i$  et  $A_{i+1}$

$\rho$  : est la masse volumique de la pale

$\forall p$  : est l'accélération absolue de  $P$

Nous allons transformer l'équation (II.1) afin de faire apparaître uniquement les caractéristiques physiques de la pale et le passage des différentes articulations. Le permet d'obtenir finalement les expressions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i = m_i \vec{\gamma}_{A_i} + \frac{d\vec{\Omega}_i}{dt} \wedge \vec{M}_{stA_i} + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{M}_{stA_i}) \\ \vec{M}_i = \vec{M}_{stA_i} \wedge \vec{\gamma}_{A_i} + I_{A_i} \frac{d\vec{\Omega}_i}{dt} + \vec{\Omega}_i \wedge (I_{A_i} \cdot \vec{\Omega}_i) \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

Avec

$m_i$  : masse du tronçon  $A_i - A_{i+1}$

$I_{A_i}$  : tenseur d'inertie du tronçon

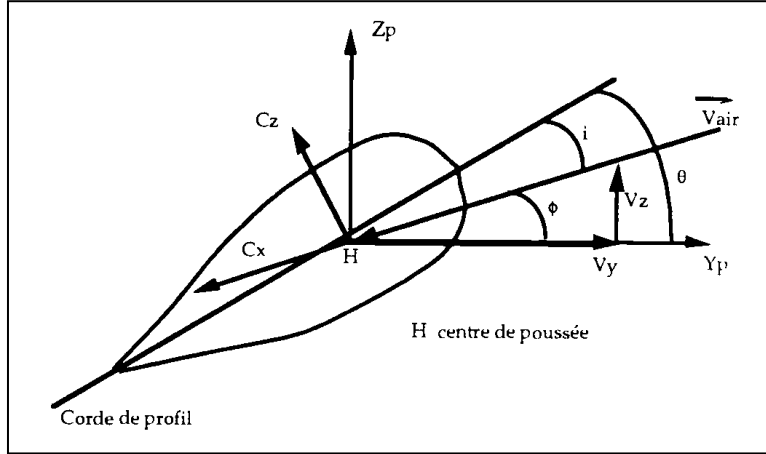
$\vec{M}_{stA_i}$  : Moment statique du tronçon rapporté en  $A_i$   $\vec{M}_{stA_i}$

$\vec{\Omega}$  : est la rotation instantanée de  $R_i$  par rapport à  $R_{i-1}$

Les équations (II.2) donnent la formulation la plus générale des efforts et des moments d'inertie qui s'appliquent sur une section de la pale rigide. Seules les vitesses et les accélérations aux articulations (et aux cassures) interviennent dans ces équations. Il est donc inutile de les calculer en tout point de la pale. La vitesse et l'accélération en tête rotor sont les données d'entrée. Les termes  $\vec{\Omega}_i, \vec{V}_i, \vec{\gamma}_i$  et  $\frac{d\vec{\Omega}_i}{dt}$  sont calculés pas à pas à partir du centre tête rotor, en tenant compte de la séquence de passage des diverses articulations de battement, de traînée et de pas.

**II.6.2 .Forces et moments aérodynamiques**

Les charges aérodynamiques sont évaluées suivant une méthode classique du type élément de pale. Le terme important pour le calcul des charges aérodynamiques est le vecteur de vitesse absolue au centre de poussée. La figure II.7 ci-dessous représente une section de la pale.



**Figure II.7:** Forces aérodynamiques sur un élément de pale

V : la vectrice vitesse de l'élément de pale par rapport à l'air.

i : est l'incidence locale (c'est à dire l'angle que fait la corde de la pale par rapport à la vitesse relative pale/air).

θ : est l'angle de pas local (c'est à dire l'angle que fait la corde de la pale par rapport au plan de référence- le plan du rotor -).

Il vient:

$$\phi = \text{Arctg} \left( \frac{V_z}{V_y} \right) \text{ et } i = \theta - \phi \tag{II.3}$$

Le nombre de Mach local **M** est défini comme étant le rapport entre la vitesse de l'élément de pale et la vitesse du son:

$$M = \frac{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}{a} \tag{II.4}$$

Connaissant l'incidence et le Mach, nous pouvons évaluer les coefficients aérodynamiques  $C_z$ ,  $C_x$  et  $C_m$ . Les forces et moments aérodynamiques sont alors donnés par:

$$\begin{aligned} \frac{dF_z}{dx} &= \frac{1}{2} \rho l v^2 (C_z \cos \phi - C_x \sin \phi) \\ \frac{dF_y}{dx} &= -\frac{1}{2} \rho l v^2 (C_z \sin \phi - C_x \cos \phi) \\ \frac{dM_x}{dx} &= \frac{1}{2} \rho l v^2 C_m \end{aligned} \tag{II.5}$$

**II.6.3. Vitesses induites**

En vol stationnaire et en vol vertical, le champ des vitesses induites par le rotor est calculé par la méthode des anneaux. C'est la théorie de Froude appliquée localement. L'équation fondamentale donnée par la théorie de Froude est:

$$\vec{F}_N = -2\rho s |\vec{V}_0 + \vec{V}_t| \vec{V}_t \tag{II.6}$$

Où :

$V_i$  : est la vectrice vitesse induite moyenne, perpendiculaire au disque rotor.

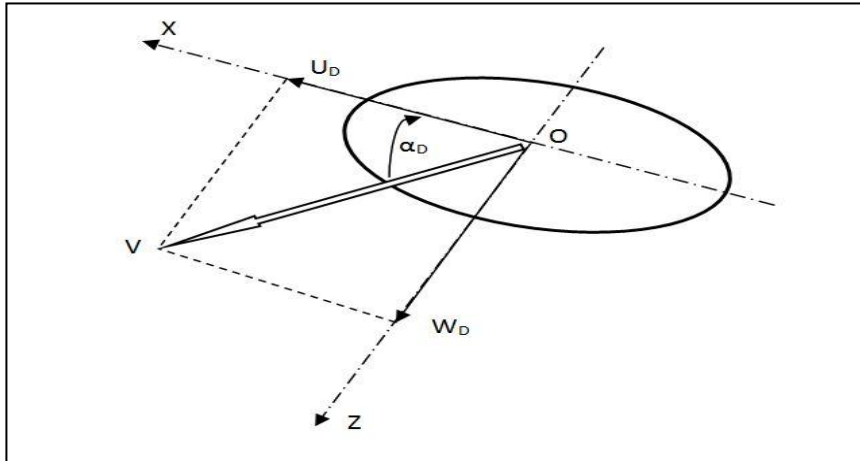
$V_0$  : est la vitesse de l'air à l'infini amont ( $V_0 = -V$  si  $V$  est la vitesse de l'appareil).

$F_N$  : est la poussée normale au disque rotor.

$S$  : est la surface du disque rotor.

$\rho$  : est la densité de l'air.

Soit  $(O, X, Y, Z)$  le trièdre lié au disque rotor



**Figure II.8:** Vitesses induites par le rotor

L'incidence du disque rotor  $\alpha_D$  est définie par:

$$\alpha_D = \text{Arctg} \left( \frac{\omega_d}{u_d} \right) \quad (\text{II.7})$$

## II.7. Le modèle pale souple

Afin de prédire au mieux les charges dynamiques appliquées à un rotor, il est nécessaire de définir un modèle dans lequel la pale est susceptible de se déformer. Plusieurs approches sont possibles pour écrire les équations du mouvement mais une approche modale permet une interprétation facile des résultats et des temps de calcul plus réduits, en raison du plus faible nombre de degrés de liberté, par rapport aux méthodes de type éléments finis qui nécessitent un beaucoup plus grand nombre de degrés de liberté. Ainsi, les différents modes propres de déformation de la pale constituent les degrés de liberté du système et une formulation énergétique (équilibre de l'énergie - équations de Lagrange) a été utilisée pour déterminer les équations du mouvement.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad (\text{II.8})$$

### II.7.1. Modèle inertiel

La pale est discrétisée en environ 40 éléments chacun étant considéré comme rigide. Pour chaque tronçon, il faut exprimer l'énergie cinétique absolue  $T_i$  du tronçon  $i$  en fonction des vitesses de translation et de rotation et des caractéristiques d'inertie exprimées à l'extrémité de ce tronçon:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \overline{V_{Ai}^2} + \frac{1}{2} \overline{\Omega_i} \cdot ([I_{Ai}] \overline{\Omega_i}) + \overline{V_{Ai}} \cdot (\overline{\Omega_i} \wedge \overline{M}_{stAi}) \quad (\text{II.9})$$

Avec :  $m_i$  : masse du tronçon  $n_i$

$I_{Ai}$  : tenseur d'inertie au point  $i$  du tronçon  $n_i$

$V_{Ai}$  : vitesse absolue du point i

$\vec{M}_{StAi}$  : Moment statique au point i du tronçon  $n_i$

$\vec{\Omega}_i$  : Vecteur rotation instantanée du tronçon  $n_i$ .

L'énergie cinétique du système global est obtenue en additionnant les contributions de chaque élément. Finalement, dans l'expression de l'énergie cinétique totale, il ne restera que les termes de vitesses, d'inertie et de rotations exprimées à l'extrémité de chaque tronçon.

Dans les équations de Lagrange, il va apparaître des termes du type :

$$\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{\Omega}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j}, \frac{\partial \vec{\Omega}_i}{\partial \dot{q}_j}, \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j} \right), \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{\Omega}_i}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

Le calcul des ces termes est fait de proche en :

Proche en utilisant les matrices de passage du repère i-1 au repère i. Nous ramenons ainsi à la tête rotor qui est supposée encastree ou éventuellement animée d'un mouvement imposé. Les matrices de passage d'un tronçon à un autre ne dépendent que de  $\theta_{xi}$ ,  $\theta_{yi}$  et  $\theta_{zi}$ .

### II.7.2. Modèle élastique

Nous cherchons ici à exprimer l'énergie de déformation élastique emmagasinée dans la poutre au cours de sa déformation. Nous allons appliquer la théorie des poutres minces au cas des pales. La difficulté provient du fait que l'axe élastique (l'axe autour duquel la torsion n'induit pas de flexion) n'est pas confondu avec l'axe de torsion. Il est nécessaire d'écrire tout d'abord l'expression des moments fléchissant sur un tronçon de pale qui se déforme en flexion. Nous obtenons

$$\begin{cases} M_y = -(z_i'' \cos \theta - y_i'' \sin \theta)EIB + \theta \cdot \theta_t E Z P \\ M_z = (y_i'' \cos \theta + z_i'' \sin \theta)ET + \theta \cdot \theta_t E Y P \\ M_x = (GJ + K_p^2 T + \theta^2 E I P P) \theta_t + \theta \cdot K_p^2 T \\ \quad - \theta \cdot E Z P (z_i'' \cos \theta - y_i'' \sin \theta) \\ \quad - \theta \cdot E Z P (y_i'' \cos \theta + z_i'' \sin \theta) \end{cases} \quad (II.10)$$

Avec  $M_y$ ,  $M_z$  et  $M_x$  les moments exprimés dans le repère d'une section de pale

$z_i''$ ,  $y_i''$  et  $\theta'$  les courbures exprimées dans le repère local

$\theta$  est l'angle de rotation total autour de X (=  $\theta_{xi}$ ); il comprend des termes dus au pas, au vrillage, à l'inclinaison des axes principaux de flexion et à la torsion ( $\theta_t$ ).

GJ : module de torsion

EIB : module de flexion en battement

ET : module de flexion en traînée

$K_p^2$  : rayon de giration pondéré

T : inertie de la section en traînée

Puisque l'axe élastique n'est pas confondu avec l'axe de torsion, les équations (II.10) comportent des termes de couplage torsion - flexion qui sont représentés par les coefficients EZP, EYP et EIPP. Dans une première approche, nous négligerons ces termes de couplage. Les équations (II.10) deviennent:

$$\begin{cases} M_y = (z_i'' \cos \theta - y_i'' \sin \theta)EIB \\ M_z = (y_i'' \cos \theta + z_i'' \sin \theta)ET \\ M_x = GJ \theta_t \end{cases} \quad (II.11)$$

L'énergie de déformation élastique emmagasinée dans un tronçon peut alors être exprimée sous la forme:

$$\Delta U_{\text{elast}} = \frac{1}{2} \left( \frac{M_y^2}{EIB} + \frac{M_z^2}{ET} + \frac{M_x^2}{GI} \right) d\tau \quad (\text{II.12})$$

En combinant les équations (II.11) et (II.12), nous remarquons que l'énergie de déformation élastique s'exprime en fonction de  $z_i'$ ,  $y_i'$  et  $\theta'$  qui sont constants sur un tronçon et égaux à leurs valeurs à l'origine du tronçon. Il vient ainsi:

$$\begin{cases} \theta = \theta_{x_i} \\ z_i' = \theta_{y_i} \\ y_i' = \theta_{z_i} \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

L'énergie élastique totale du système s'obtient en additionnant les énergies élastiques de chaque tronçon.

### II.7.3. Expression des efforts généralisés

La contribution des forces aérodynamiques dans l'équation du mouvement est obtenue à l'aide des forces généralisées. Le torseur aérodynamique est calculé au milieu de chaque élément rigide et ensuite rapporté à l'origine du tronçon. L'effort généralisé  $Q_i$  – qui intervient dans les équations de Lagrange - peut être calculé comme la dérivée du travail des forces extérieures par rapport à la coordonnée généralisée:

$$Q_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \vec{F}_{aéro_i} \cdot \frac{\partial(\overrightarrow{dep}_i)}{\partial q_i} + \vec{M}_{aéro_i} \cdot \frac{\partial(\overrightarrow{rot}_i)}{\partial q_i} \quad (\text{II.14})$$

Avec  $T = \begin{bmatrix} \vec{F}_{aéro_i} \\ \vec{M}_{aéro_i} \end{bmatrix}$  torseur des efforts aérodynamiques sur le tronçon  $i$

ramené à l'origine de ce tronçon.

$$\overrightarrow{dep}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{rot}_i = \begin{bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{bmatrix}$$

Les déplacements  $\overrightarrow{dep}$  et les rotations  $\overrightarrow{rot}$  de chaque élément se calculent de proche en proche depuis l'emplanture jusqu'à l'extrémité de la pale en tenant compte du comportement des articulations réelles ou fictives situées le long de la pale.

Il faut remarquer que du point de vue des efforts aérodynamiques, les modélisations en pale souple et en pale rigide sont équivalentes. En effet, le calcul de l'aérodynamique se fait sur une section de pale et ne dépend que de la vitesse du centre de poussée de cette section. La même modélisation que celle présenté pour la pale rigide peut être appliquée pour la modélisation en pale souple. La seule différence provient du fait que les calculs de la vitesse d'un point de la pale se font différemment.

## II.8. Modèle analytique du rotor

Nous allons étudier le mouvement d'une pale en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour d'un axe fixe. La pale peut se déformer selon un nombre B de modes de battement - modes de flexion dans un plan vertical - et selon un nombre T de modes de traînée – modes de flexion dans un plan horizontal -. De plus, nous prendrons aussi en compte la possibilité qu'a la pale de subir une torsion  $\theta$ . Nous établirons les équations du mouvement en utilisant la méthode de Lagrange appliquée à la description modale c'est à dire que les inconnues seront les coordonnées modales de chacun des modes de déformation ainsi que l'angle de torsion.

### II.8.1. Modèle inertiel

Afin de décrire complètement les déformations possibles de la pale, nous allons introduire les différents repères nécessaires à la modélisation.

Le repère  $R_0 = (0, X_0, Y_0, Z_0)$  est le repère fixe de référence. Il est lié au fuselage de l'appareil: O est le centre du rotor,  $X_0$  est l'axe horizontal dirigé vers l'arrière de l'appareil,  $Y_0$  est dirigé vers la droite et  $Z_0$  vers le haut. A partir de ce repère fixe, nous introduisons un repère tournant  $R_1 = (0, X_1, Y_1, 1)$  qui se déduit de  $R_0$  par rotation d'un angle  $\Psi = \Omega t$  autour de  $Z_0$  -  $\Omega$  est la vitesse de rotation de la pale -. Nous avons donc:

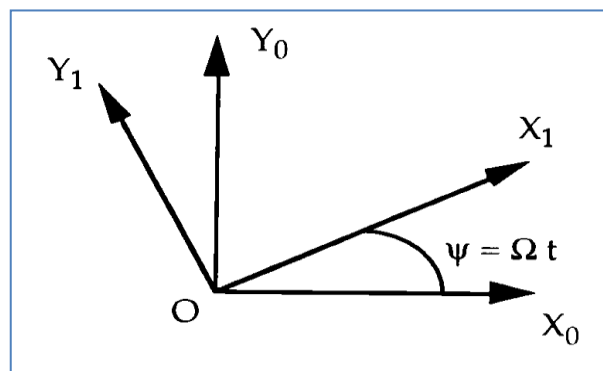


Figure II.9: Mobilité de la pale dans différents repères  $R_0$  et  $R_1$

$$\begin{cases} \vec{X}_1 = \cos \Psi \vec{X}_0 + \sin \Psi \vec{Y}_0 \\ \vec{Y}_1 = -\sin \Psi \vec{X}_0 + \cos \Psi \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_1 = \vec{Z}_0 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

A partir du repère tournant  $R_1$ , nous introduisons un repère supplémentaire  $R_2 = (0, X_2, Y_2, Z_2)$  qui permet de prendre en compte la torsion de la pale. Ce repère est obtenu, à partir de  $R_1$ , par rotation d'un angle  $\theta$  autour de  $X_1$ . L'angle  $\theta$  est l'angle de torsion de la pale et il vient donc:

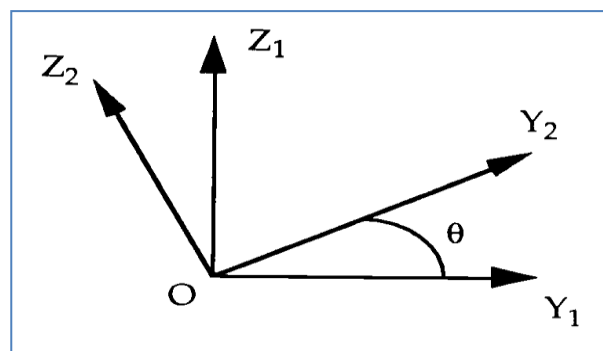


Figure II.10: Mobilité de la pale dans différents repères  $R_1$  et  $R_2$

$$\begin{cases} \vec{X}_2 = \vec{X}_1 \\ \vec{Y}_2 = \cos \theta \vec{Y}_1 + \sin \theta \vec{Z}_1 \\ \vec{Z}_2 = -\sin \theta \vec{Y}_1 + \cos \theta \vec{Z}_1 \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Dans le repère  $R_2$ , la pale subit des déformations de flexion dans les deux plans  $(0, X_2, Z_2)$  - déformations de battement - et  $(0, X_2, Y_2)$  - déformations de traînée - comme le montre la (Figure II.11).

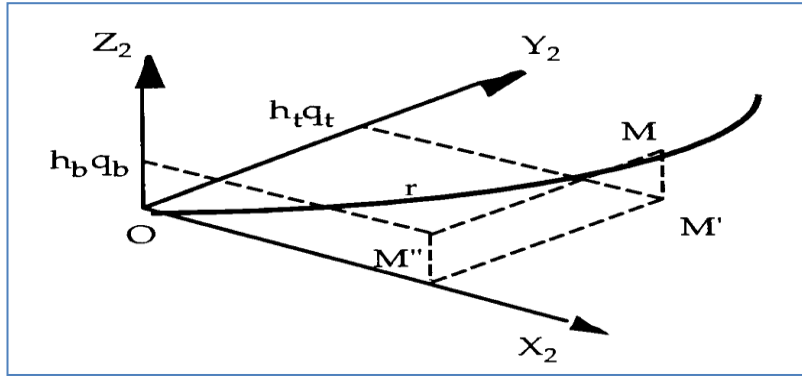


Figure II.11: Modélisation de la pale déformée dans le repère  $R_2$

Nous noterons  $h_{ti}$  (resp.  $h_{bi}$ ) la forme modale du  $i^{\text{ème}}$  mode de traînée (resp. de battement) et  $q_{ti}$  (resp.  $q_{bi}$ ) la coordonnée modale du  $i^{\text{ème}}$  mode de traînée (resp. de battement). Dans la suite, nous considérerons un nombre  $B$  de modes de battement et un nombre  $T$  de modes de traînée. En introduisant les notations synthétiques suivantes:

$$h_t q_t = \sum_{i=1}^T h_{ti} q_{ti} \quad \text{Et} \quad h_b q_b = \sum_{i=1}^B h_{bi} q_{bi} \quad (\text{II.17})$$

Et en notant  $r$  la distance entre le centre du rotor et un point courant  $M$  de la pale, nous pouvons exprimer la position du point  $M$  dans le repère  $R_2$  après qu'il ait subi les déformations de flexion.

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{X}_2 + h_t q_t \vec{Y}_2 + h_b q_b \vec{Z}_2 \quad (\text{II.18})$$

Les équations de passage du repère  $R_2$  au repère  $R_1$  puis au repère  $R_0$  - équations (II.15) et (II.16) - permettent d'écrire la position d'un point courant  $M$  de la pale dans le repère fixe  $R_0$ . Nous obtenons ainsi:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} [r \cos \Psi - (h_t \cos \theta - h_b q_b \sin \theta) \sin \Psi] \vec{X}_0 \\ [r \sin \Psi + (h_t q_t \cos \theta - h_b q_b \sin \theta) \cos \Psi] \vec{Y}_0 \\ [h_t q_t \sin \theta + h_b q_b \cos \theta] \vec{Z}_0 \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

La vitesse  $V(M)$  d'un point courant  $M$  de la pale est alors:

$$\begin{aligned} \vec{V} = & \begin{bmatrix} -r\Omega \sin \Psi - (h_t \dot{q}_t \cos \theta - h_t q_t \dot{\theta} \sin \theta - h_b \dot{q}_b \sin \theta - h_b q_b \dot{\theta} \cos \theta) \sin \Psi \\ -\Omega (h_t q_t \cos \theta - h_b q_b \sin \theta) \cos \Psi \end{bmatrix} \vec{X}_0 \\ & + \begin{bmatrix} r\Omega \cos \Psi + (h_t \dot{q}_t \cos \theta - h_t q_t \dot{\theta} \sin \theta - h_b \dot{q}_b \sin \theta - h_b q_b \dot{\theta} \cos \theta) \cos \Psi \\ -\Omega (h_t q_t \cos \theta - h_b q_b \sin \theta) \sin \Psi \end{bmatrix} \vec{Y}_0 \\ & + [h_t \dot{q}_t \sin \theta + h_t q_t \dot{\theta} \cos \theta + h_b \dot{q}_b \cos \theta - h_b q_b \dot{\theta} \sin \theta] \vec{Z}_0 \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

L'angle de torsion  $\theta$  de la pale peut se décomposer en deux termes:

- une composante statique  $\theta_0$  constante le long de la pale qui peut être un angle important- en configuration réelle, il atteint  $10^\circ$  pour des vols à forte portance -
- une composante dynamique  $\theta_d$  qui reste faible par rapport à la composante statique mais qui participe fortement à la dynamique de la pale. Nous supposons que cet angle dynamique varie le long de la pale.

Dans la suite de cette étude, nous ferons les deux approximations suivantes:

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \quad \sin \theta = \sin \theta_0$$

En faisant ces approximations, nous négligeons tous les termes en  $\theta_d$  dans l'expression de l'énergie cinétique de la pale. Par contre, nous conservons tous les termes en  $\theta_d$ . Cette approximation se justifie en considérant que les mouvements de torsion de la pale sont caractérisés par une dynamique rapide - terme  $\theta_d$  important - et des mouvements dynamiques de très faible amplitude - terme  $\theta_d$  négligeable -.

Sous cette approximation, l'expression de la vitesse absolue d'un point courant  $\mathbf{M}$  de la pale s'écrit:

$$\begin{aligned} \vec{V} = & \left[ \begin{array}{l} -r\Omega \sin \Psi - (h_t \dot{q}_t \cos \theta_0 - h_t q_t \dot{\theta}_d \sin \theta_0 - h_b \dot{q}_b \sin \theta_0 - h_b q_b \dot{\theta}_d \cos \theta_0) \sin \Psi \\ -\Omega (h_t q_t \cos \theta_0 - h_b q_b \sin \theta_0) \cos \Psi \end{array} \right] \vec{X}_0 \\ & + \left[ \begin{array}{l} r\Omega \cos \Psi + (h_t \dot{q}_t \cos \theta_0 - h_t q_t \dot{\theta}_d \sin \theta_0 - h_b \dot{q}_b \sin \theta_0 - h_b q_b \dot{\theta}_d \cos \theta_0) \cos \Psi \\ -\Omega (h_t q_t \cos \theta_0 - h_b q_b \sin \theta_0) \sin \Psi \end{array} \right] \vec{Y}_0 \\ & + [h_t \dot{q}_t \sin \theta_0 + h_t q_t \dot{\theta}_d \cos \theta_0 + h_b \dot{q}_b \cos \theta_0 - h_b q_b \dot{\theta}_d \sin \theta_0] \vec{Z}_0 \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Afin d'utiliser la méthode de Lagrange, nous allons exprimer l'énergie cinétique totale de la pale en fonction des inconnues: les  $\mathbf{q}_{ti}$ , les  $\mathbf{q}_{bi}$  et  $\theta_d$ . L'énergie cinétique totale de translation d'une pale est:

$$T_t = \frac{1}{2} \int_0^R \overline{V(\mathbf{M})}^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^R \overline{V(\mathbf{M})}^2 \lambda(r) dr \quad (\text{II.22})$$

Où  $R$  est le rayon de la pale et  $\lambda(r)$  la masse linéique de la pale.

Nous devons également calculer l'énergie cinétique en rotation  $T_r$  de la pale. Soit  $\mathbf{I}_r$  le moment d'inertie en torsion d'une section de la pale situé à la distance  $\mathbf{r}$  du centre du rotor, il vient:

$$T_r = \frac{1}{2} \int_0^R I_r \dot{\theta}_d^2 dm \quad (\text{II.23})$$

Par la suite, nous supposons que la distribution de masse est uniforme le long de la pale c'est à dire que  $\lambda(r) = \lambda = mp / R$  (où  $mp$  est la masse totale de la pale). De plus, nous supposons que la torsion dynamique est régie par un seul mode de déformation c'est à dire  $\theta_d(r,t) = f(r) \theta_d$  où  $\mathbf{r}$  est la distance entre le centre du rotor et le point courant de la pale.

### II.8.2. Modèle élastique

Il faut maintenant calculer l'énergie de déformation emmagasinée par la pale pendant sa déformation. Pour cela, nous supposons que la pale a une section symétrique c'est à dire que l'axe élastique et l'axe de torsion sont confondus. Nous pouvons alors négliger les énergies de couplage battement - torsion et traînée - torsion. L'énergie de déformation totale  $U$  est donc la somme des énergies de déformations dues au mouvement de battement, au mouvement de traînée et à la torsion.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \mu_{ti} \omega_{ti}^2 q_{ti}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^B \mu_{bi} \omega_{bi}^2 q_{bi}^2 + \frac{1}{2} GJ \theta_d^2 \quad (\text{II.24})$$

Où  $\mu_{ti}$  et  $\omega_{ti}$  sont respectivement la masse modale et la pulsation propre du  $i$ ème mode de traînée. Nous avons les mêmes notations pour les modes de battement avec un indice  $\mathbf{b}$ .

Dans le terme de l'énergie de déformation en torsion,  $G$  est le module d'élasticité en cisaillement et  $J$  le moment d'inertie polaire de la pale. Le produit  $G J$  est donc la raideur en torsion de la pale. Enfin, il faut également remarquer que le terme  $\theta_0$  n'intervient pas dans l'expression de l'énergie de déformation puisque la pale est supposée à l'équilibre dans la position où elle est déjà inclinée de cet angle de pas statique  $\theta_0$ .

### II.8.3. Prise en compte des efforts aérodynamiques

Afin de simuler le comportement physique d'un rotor d'hélicoptère, nous allons introduire dans le modèle précédent les efforts aérodynamiques qui s'exercent sur les pales. Nous ne retiendrons ici que les forces de portance et de traînée. La figure II.12 représente une section de la pale et la direction des forces aérodynamiques qui s'exercent sur cette section.

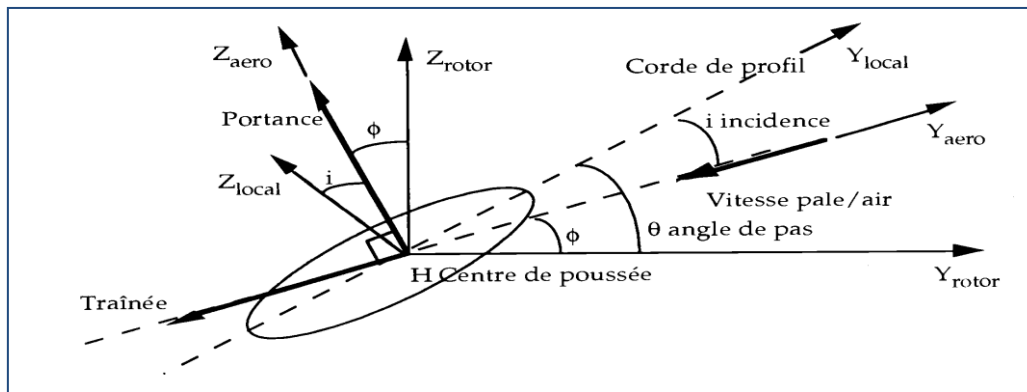


Figure II.12 : Modélisation des efforts aérodynamiques sur une section de pale

Pour une section de la pale, nous pouvons définir le repère local associé qui a pour origine  $H$  le centre de poussée de la section - point où s'appliquent les efforts aérodynamiques - et comme axes principaux  $X_{local}$  axe normal à la section,  $Y_{local}$  direction de la corde de profil et  $Z_{local}$  qui complète le trièdre direct. Les efforts de portance et de traînée s'expriment de manière naturelle dans le repère  $\{H, X_{aero}, Y_{aero}, Z_{aero}\}$ . Ce repère est défini à partir du précédent par une rotation d'angle  $i$  autour de  $X_{local}$  comme le montre la (figure II.10). L'angle  $i$  est l'angle d'incidence de la section c'est à dire l'angle sous lequel la corde de profil voit la direction du vent relatif. Dans ce repère, la force de portance élémentaire  $dP$  et la force de traînée élémentaire  $dT$  s'écrivent:

$$\begin{aligned} dP &= N_z(i)V_{air}^2 \\ dT &= N_y(i)V_{air}^2 \end{aligned} \quad (II.25)$$

Où  $N_z$  et  $N_y$  sont les coefficients aérodynamiques de portance et de traînée

$V_{air}$  est la vitesse du centre de poussée par rapport à l'air.

Pour l'expression de la vitesse  $V_{air}$ , nous ne prendrons en compte que la vitesse engendrée par les mouvements de corps rigide de la pale c'est à dire la rotation et éventuellement la vitesse d'avancement de l'appareil  $V$ . En effet, la vitesse du centre de poussée créée par les déformations élastiques de la pale est négligeable devant la vitesse créée par les mouvements d'ensemble. Avec cette approximation, nous pouvons écrire:

$$V_{air} = r\Omega + V \sin \Psi \quad (II.26)$$

Où  $\Psi$  est l'azimut de la pale c'est à dire la position de la pale par rapport au repère lié à l'appareil. Pour  $\Psi = 0$ , la pale est orientée vers l'arrière et pour  $\Psi = \pi/2$ , la pale est orientée vers la droite de l'appareil. A cet azimut donné, la vitesse relative est bien  $r\Omega + V$ .

Les forces élémentaires de portance  $dF_z$  et de traînée  $dF_y$  doivent être exprimées dans le repère fixe  $\{X_{rotor}, Y_{rotor}, Z_{rotor}\}$  qui est déduit du repère aérodynamique par rotation d'un angle  $\Psi$  autour de  $X_{aéro}$  - cf figure II.10 -. Il vient donc:

$$\begin{aligned} df_z &= dP \cos \phi - dT \sin \phi = (N_z V_{air}^2 \cos \phi - N_y V_{air}^2 \sin \phi) dr \\ df_y &= -dT \cos \phi - dP \sin \phi = -(N_z V_{air}^2 \sin \phi - N_y V_{air}^2 \cos \phi) dr \end{aligned} \quad (II.27)$$

L'angle  $\phi$  est défini  $\cos \phi = \frac{v_y}{V}$  par  $\sin \phi = \frac{v_z}{V}$  et  $\sin \Psi = \frac{V_z}{V}$  où  $V_y$  et  $V_z$  sont les composantes de la vitesse du centre de poussée de la section selon les directions rotor et  $Z_{rotor}$ . Si nous faisons l'hypothèse supplémentaire que le centre de gravité et le centre de poussée de la section sont confondus, alors ces termes de vitesses ont déjà été calculé lors de l'étude de la dynamique de la pale - équation (1.23) -. Nous avons donc:

$$\begin{aligned} V_y &= \left[ r\Omega \sin \Psi + (h_t \dot{q}_t \cos \theta_0 - h_t q_t \dot{\theta}_d \sin \theta_0 - h_b \dot{q}_b \sin \theta_0 - h_b q_b \dot{\theta}_d \cos \theta_0) \cos \Psi \right. \\ &\quad \left. - \Omega (h_t q_t \cos \theta_0 - h_b q_b \sin \theta_0) \sin \Psi \right] \\ V_z &= [h_t \dot{q}_t \cos \theta_0 - h_b q_b \dot{\theta}_d \sin \theta_0 + h_t q_t \sin \theta_0 - h_t q_t \dot{\theta}_d \cos \theta_0] \end{aligned} \quad (II.28)$$

L'équation (II.27) s'écrit donc:

$$\begin{aligned} dF_z &= (r\Omega + V \sin \Psi) (N_z V_y - N_y V_z) dr \\ dF_y &= -(r\Omega + V \sin \Psi) (N_z V_z - N_y V_y) dr \end{aligned} \quad (II.29)$$

La force généralisée qui intervient dans l'équation de Lagrange associée au degré de liberté  $q_i$  est:

$$Q_{qi} = \int_{pale} dF_y \frac{\partial Y}{\partial q_i} + dF_z \frac{\partial Z}{\partial q_i} \quad (II.30)$$

Il reste donc à évaluer les coordonnées  $Y$  et  $Z$  du centre de poussée d'une section dans le repère fixe  $\{X_{rotor}, Y_{rotor}, Z_{rotor}\}$ . A partir de l'équation (II. 19), il vient immédiatement, en utilisant là encore l'hypothèse que l'angle de pas total et l'angle de pas statique peuvent être confondus pour l'étude des efforts aérodynamiques, l'expression suivante:

$$\begin{aligned} Y &= r \sin \Psi + (h_t q_t \cos \theta_0 - h_b q_b \sin \theta_0) \cos \Psi \\ Z &= h_b q_b \cos \theta_0 + h_t q_t \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (II.31)$$

## II.9. Conclusion

Dans ce chapitre on a introduit la dynamique des hélicoptères où les forces aérodynamiques générées par la pôle ont été caractérisées.

A partir d'un profil NACA, la géométrie de la pôle a été développée, et l'étude le mode de la pale rigide et souple, ce qui permet de déterminer les inerties de la pôle. et déterminer la force aérodynamique et le moment de la pôle avec prise compte des efforts aérodynamiques. Avec plus ce tous nous avons on du déterminer l'expression de l'énergie cinétique et de l'énergie élastique avec l'énergie de déformation de la pale.

# **Chapitre III**

## Modélisation par éléments finis

### III.1. Introduction

Le comportement mécanique d'une structure métallique formée de poutres sous les charges qui lui sont appliquées est correctement décrit par la théorie des poutres [30]. Cette dernière est entièrement définie par les caractéristiques géométriques de la section courante (aire, inertie, module d'inertie, etc.) et la géométrie de la fibre moyenne (Les efforts appliqués à la poutre sont schématisés comme charges ponctuelles ou charges réparties le long de la fibre moyenne. Les sollicitations résultantes sont obtenues sous la forme de torseurs d'efforts (trois forces et trois moments) en chaque point de la fibre moyenne. Des relations simples reliant les torseurs d'efforts aux caractéristiques géométriques de la section permettent de déduire les contraintes dans la section.

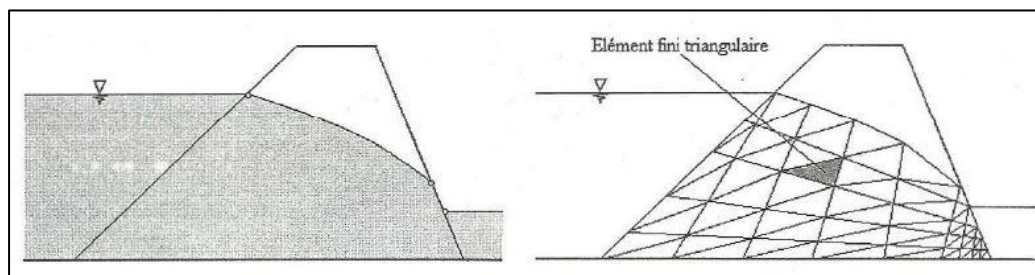
L'application de la théorie des poutres à des structures simples comme les poutres continues, les portiques et les treillis simples, conduit à des solutions analytiques complètes. En revanche, pour les structures plus complexes, le recours à une méthode numérique est nécessaire telle que la méthode aux éléments finis qui est systématiquement et aisément programmable.

### III.2. La base de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis, bien connue aujourd'hui, est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode réside principalement dans sa formulation: elle réunit les principes les plus forts de la méthode des différences finies et ceux de la méthode des équations intégrales : respectivement la discrétisation du domaine d'intégration et le principe de construction de l'approximation et sa formulation. [31]

La méthode des éléments finis améliore ces deux principes comme suit :

- a) Le domaine d'intégration n'est plus discrétisé par des points comme pour le cas de la méthode des différences finies, mais par des sous-domaines continus ou des 'continuum', dont le nombre est fini, et qu'on appelle éléments finis (Figure. III.1). En utilisant ce découpage, (modélisation géométrique), la méthode fournit un modèle qui représente aussi fidèlement que possible le phénomène physique dans sa réalité.



**Figure III.1:** Discretisation par éléments triangulaires d'une digue

- b) La formulation intégrale, de type Galerkin, est appliquée non pas sur le domaine d'intégration global, mais sur des éléments finis standard, ayant des fonctions de formes normées, au lieu des fonctions de base de la méthode de Galerkin. La formulation devient unifiée pour les différents types de problèmes. Une bibliographie d'éléments est alors mise à jour. La méthode devient alors programmable par excellence. Possédant tous ces atouts, la

méthode ne cesse de se développer et de s'étendre de plus en plus à des domaines qui étaient jusque là du seul ressort des méthodes expérimentales.

### III.2.1. La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini

Pour chaque élément et dans un repère local, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux. Puis, on calcule pour chaque élément ses matrices de rigidité et de masse ainsi que son vecteur des forces. Ces caractéristiques élémentaires sont transformées par la suite dans le repère global de la structure.[32]

### III.2.2. La formulation globale au niveau de la structure complète

Elle consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus en tous les nœuds de la structure.

Cette étape nécessite l'assemblage des matrices de rigidité et de masse et les vecteurs forces et déplacements de la structure à partir des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité et de masse et vecteurs forces et déplacements de chaque élément).

## III.3. Démarche de formulation éléments finis

L'analyse des structures de type treillis ou portique peut s'effectuer en considérant d'abord le comportement de chaque partie (élément barre ou poutre) indépendamment puis en assemblant ces parties de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

Dans la suite, toutes les grandeurs vectorielles et matricielles relatives à la base locale de l'élément sont surlignées d'une barre.[32]

### III.3.1. Discrétisation de la structure en éléments finis

C'est l'ensemble des opérations à effectuer pour établir le modèle. Pratiquement cette idéalisation consiste du point de vue topologique, à ramener la structure à une géométrie simple ; c'est ainsi qu'on réduit les éléments unidimensionnels à leur axe et on définit les conditions d'appuis et les charges.

Au point de vue rhéologique, elle consiste à choisir la loi constitutive du matériau et à déterminer les constantes qui définissent cette loi.

La méthode des éléments finis consiste à réduire le solide  $S$  à une structure composée d'éléments discrets interconnectés par des nœuds (Figure. III.2). Les déplacements de ces nœuds, qui sont des paramètres inconnus, caractérisent le comportement de cette structure.

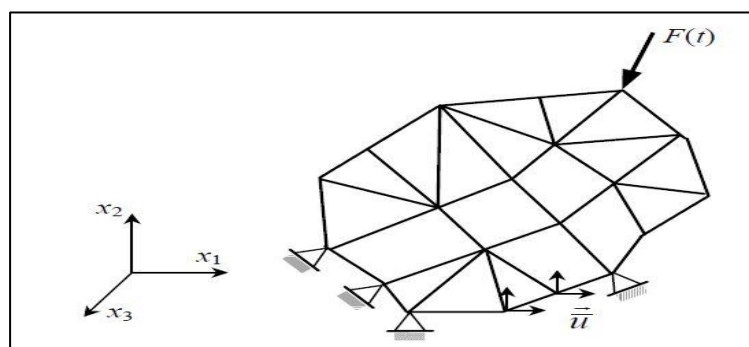


Figure. III.2: Discrétisation du solide

$F(t)$  : la force externe

$\bar{u}$  : Déplacement d'élément solide

### III.3.1.1 Le Maillage :

Le premier pas de la chaîne de la simulation numérique du problème est le développement et l'adaptation du maillage autour du profil. Un maillage de bonne qualité est indispensable pour la procédure du calcul afin que les résultats soient acceptables et utilisables et ainsi recueillir des conclusions.

Les méthodes numériques de génération de maillages 2D, consistent à trouver une transformation  $\phi$  permettant de faire correspondre le domaine physique  $(x, y)$  à un domaine de calcul  $(\xi, \eta)$ , afin de retrouver les qualités de régularité et de conformité aux frontières de ce dernier [33]. (Figure III.3).

Un nombre considérable de méthodes numérique utilisées actuellement dans le domaine d'aérodynamique pour générer des maillages, est basé sur l'équation de Poisson. En utilisant cette approche les lignes du maillage sont générées comme des lignes équipotentielles et des lignes de courant. L'avantage de cette méthode est la simplicité des équations de Poisson transformées qui peuvent être facilement résolues numériquement. Par contre son désavantage majeure est qu'elle présente des difficultés numériques pendant la résolution des problèmes qui ont besoin de conditions limites suivant la direction normale à la frontière du domaine de calcul.

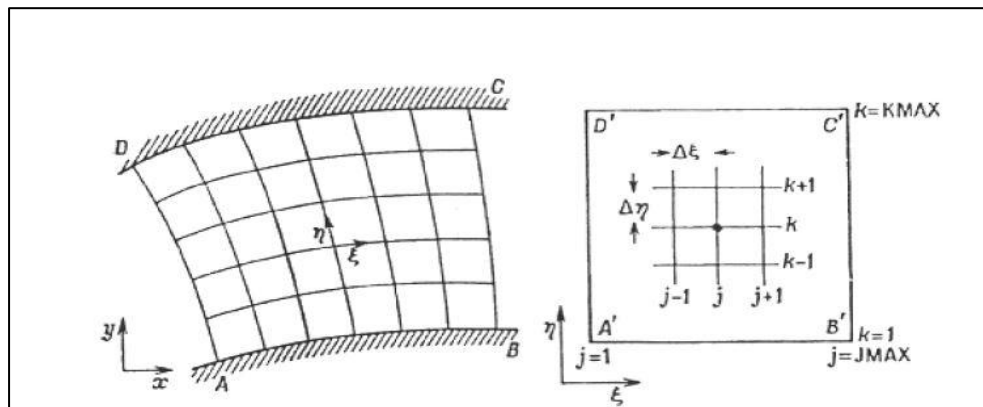


Figure III.3: Transformation du domaine physique (a) au domaine de calcul (b).

### III.3.1.2 Problématique du maillage :

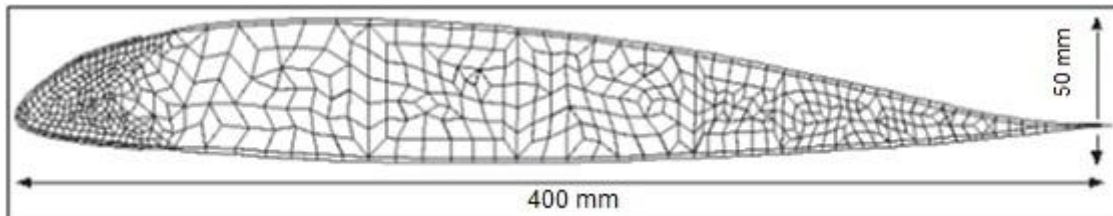
Le but de ce paragraphe n'est pas d'exposer les solutions envisagées pour la réalisation du maillage d'une pale, mais à partir d'un maillage type, d'évaluer les problèmes inhérents à la taille du modèle, dont découleront les choix de modélisation, notamment pour la prise en compte des phénomènes de décollement et d'endommagement des composites.

La figure III-6 présente ce que pourrait être la section maillée type d'un modèle d'impact sur pale arrière d'hélicoptère, sous éléments finis en dynamique rapide. Dans ce maillage, trois zones se distinguent :

- l'âme de la pale, maillée grossièrement (éléments de 5\*5 mm dans la section)
- le longeron principal, maillé en éléments 3D, plus finement (2\*2 mm)
- les peaux et nervures, maillées en éléments coques

Tout cela revient à considérer un modèle à plus de 50000 éléments. La durée réelle de l'impact est estimée, d'après les premiers calculs, à plus d'1 ms. Le coût CPU d'un tel calcul

est alors relativement important, même si les technologies actuelles permettent de faire un tel calcul. Un tel maillage est pourtant un maillage de faible densité. Pour avoir une modélisation fine des phénomènes, notamment du décollement, il faudrait un maillage avec des éléments de taille bien inférieure au millimètre. Pour accéder à une telle précision, le nombre d'éléments dans le modèle atteindrait alors rapidement plusieurs millions. Les solutions de modélisation envisagées doivent donc prendre en compte le fait qu'il n'est pas possible de représenter avec finesse la structure.



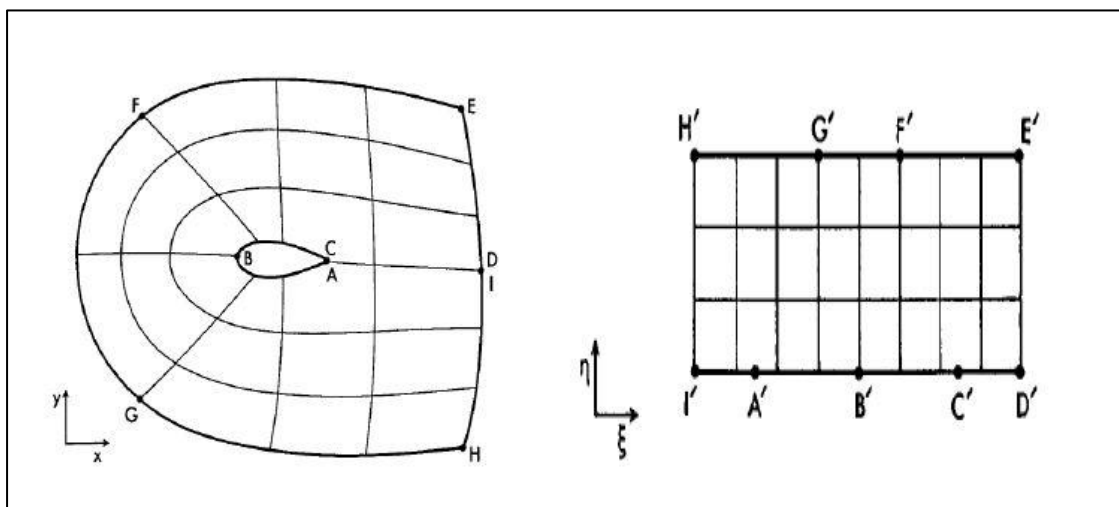
**Figure III.4:** Maillage type d'une section de pale

Ces remarques sur le maillage montrent qu'il est nécessaire dans le cadre de cette étude d'avoir une approche globale pour la modélisation. Cela signifie qu'il est nécessaire de pouvoir proposer des modèles globaux, ou critères globaux, établis soit à partir d'essais sur structure, soit à partir de modélisations fines.

### III.3.1.3. Topologie du maillage

Les maillages de structurés solide se caractérisent par une répartition géométrique des nœuds dans le domaine de calcul.

Dans le cas de notre problème la géométrie d'un profil d'aile nous permet d'utiliser soit une topologie en C ou en O ou une topologie en H voir les figures III.7, III.8, III.9 [33]. Le maillage en type O est plus naturel pour un profil d'aile et évite la ligne de coupure au niveau du bord de fuite du maillage en type C, de plus à la topologie en type maillage O, l'orthogonalité des lignes de maillage est plus naturelle, donc plus facile à imposer. Enfin, le cisaillement des mailles est réduit si la correspondance des nœuds de la frontière de profile extérieure est correctement effectuée.



**Figure III.5:** Maillage type C

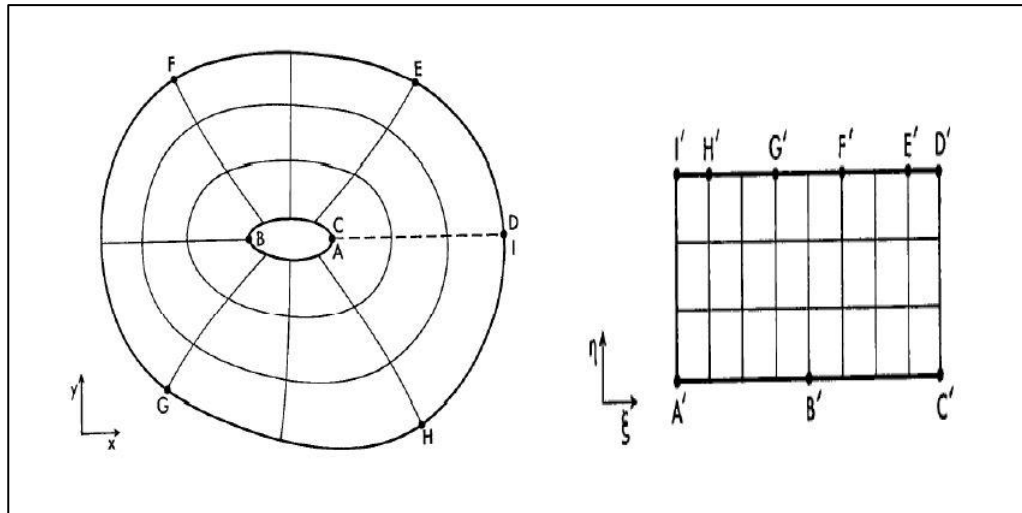


Figure III.6: Maillage type O

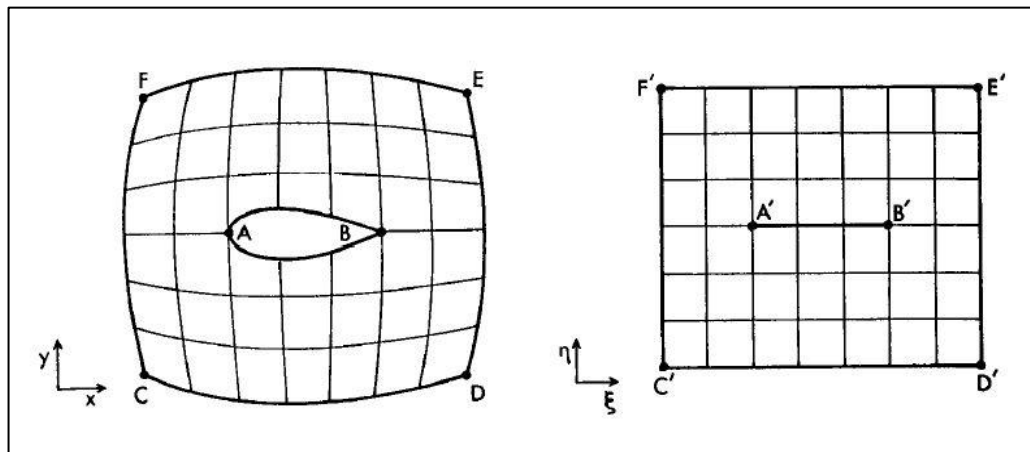


Figure III.7: Maillage type H

### III.3.2 Construction de nodale par sous domaine

Pour chaque élément, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements  $U^e(x, y, z)$  à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux  $U^e$ . Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynomiale contenant un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté. Soit,

$$U^e(X, y, Z) = N^t U^e \tag{III.5}$$

Où N est la matrice d'interpolation reliant les déplacements d'un point intérieur de l'élément aux déplacements nodaux.[32]

### III.3.3. Etablissement de la relation entre déformations et déplacement

Il s'agit ici de trouver la matrice **B** reliant les déformations  $\epsilon$  de l'élément à ses déplacements nodaux  $U^e$ . Cette relation est exprimée par :

$$\{\epsilon\} = B U^e \tag{III.2}$$

### III.3.4. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations

Pour un matériau élastique linéaire, les contraintes  $\sigma$  sont des fonctions linéaires des déformations  $\epsilon$ . Elles sont exprimées par l'expression :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (\text{III.6})$$

Où [D] est la matrice d'élasticité.

### III.3.5. Calcul des matrices élémentaires :

Cette étape constitue la partie la plus importante du problème. Les déplacements  $U^e$  aux nœuds sont déterminés de telle façon que les contraintes engendrées dans l'élément équilibrent le chargement extérieur  $F^e$ , c'est-à-dire que :

$$\overline{K^e} U^e = \overline{F^e} \quad (\text{III.7})$$

$K^e$  : est la matrice de rigidité de l'élément exprimée dans le repère local. Elle est déduite de l'énergie de déformation de l'élément [30] et exprimée par :

$$\overline{K^e} = \int_0^V B^T D B dv \quad (\text{III.8})$$

Il faut aussi calculer la matrice de masse  $M^e$  de chaque élément. Cette matrice est déduite de l'énergie cinétique de l'élément [30]. Dans le repère local de l'élément, cette matrice est donnée par l'expression :

$$\overline{M^e} = \int_0^V \rho N^T N dv \quad (\text{III.9})$$

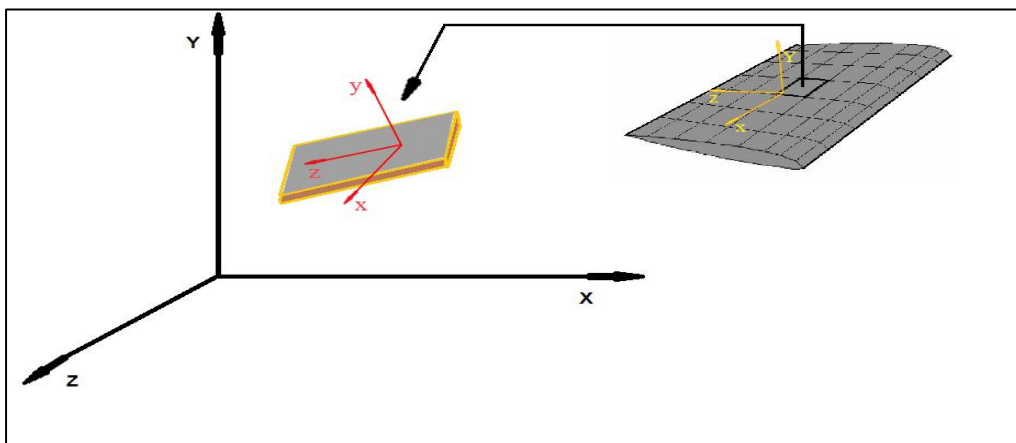
Où  $\rho$  est la masse volumique du matériau constituant l'élément. Finalement, on exprime les matrices  $K^e$ ,  $M^e$ ,  $U^e$  et  $F^e$  dans le repère global défini pour toute la structure.

### III.3.6. Assemblage des matrices élémentaires

La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices K, M et F de la structure complète à partir des matrices élémentaires  $K^e$ ,  $M^e$ ,  $U^e$  et  $F^e$ , exprimées dans le repère global, des différents éléments en sommant les énergies de déformation et cinétique de chaque élément.

Pour une structure formée de poutres, on ne peut pas sommer les matrices directement, car elles ne sont pas exprimées en fonction des mêmes variables. Pour chaque élément, il faut localiser la position des variables nodales dans le vecteur des déplacements de l'ensemble des nœuds de la structure. Cette opération consiste à ranger les termes des matrices élémentaires dans une matrice globale. La forme de cette matrice dépendra de l'ordre dans lequel sont définies les variables globales.

## III.4. Présentation du problème :



**Figure III.8:** Système de coordonnées local et global de la pale

(x ; y ;et z) repère local

(X, Y et Z) repère global

### III.5. les hypothèses de travail

Pour décrire la variation du second degré de la force inertielle centrifuge dans la direction axiale, le l'interpolant fonction quadratique est l'élément 8 nœud (I.J.K.L.M.N.O.P) a cinq degrés de liberté à chaque nœud: trois translations dans (Ux.Uy.Uz) suivants x, y, z, et deux rotations ( $\theta_x$ .  $\theta_z$ ) suivant x, z.

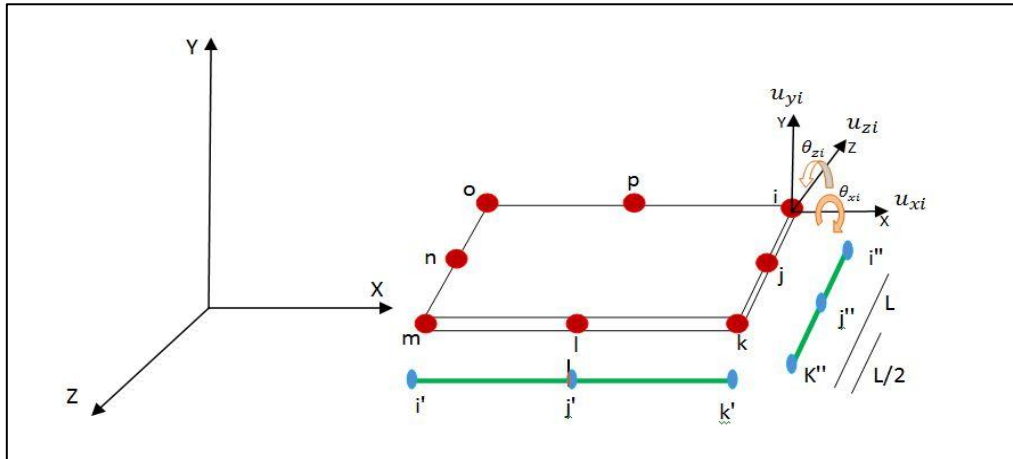


Figure III.9 : Degrés de liberté et de nœuds de faisceau élément de pale du rotor

#### III.5.1. Fonction de forme

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$U = [u_{0xi} u_{0yi} u_{0zi} \theta_{xi} \theta_{zi} \dots u_{0xp} u_{0yp} u_{0zp} \theta_{xp} \theta_{zp}]^T$$

$$\begin{bmatrix} u_{0x} \\ u_{0y} \\ u_{0z} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_p \end{bmatrix} * \quad (III.10)$$

$$[u_{0xi} u_{0yi} u_{0zi} \theta_{xi} \theta_{zi} \dots u_{0xp} u_{0yp} u_{0zp} \theta_{xp} \theta_{zp}]^T,$$

Avec  $u_{0x}$  est un déplacement suivant l'axe x,  $u_{0y}$  déplacement suivant y,  $u_{0z}$  déplacement suivant l'axe z, et  $\theta_x$   $\theta_z$  rotations autour les axes x et z respectivement.

#### III.5.2. Détermination de fonction d'interpolation Ni

La forme la plus efficace pour détermine Ni est forme de Lagrange :

$$u_{0x} = N_i u_{0xi} + N_j u_{0xj} + N_k u_{0xk} + N_l u_{0xl} + N_m u_{0xm} + N_n u_{0xn} + N_o u_{0xo} + N_p u_{0xp} \quad (III.11)$$

$$u_{0y} = N_i u_{0yi} + N_j u_{0yj} + N_k u_{0yk} + N_l u_{0yl} + N_m u_{0ym} + N_n u_{0yn} + N_o u_{0yo} + N_p u_{0yp} \quad (III.12)$$

$$u_{0z} = N_i u_{0zi} + N_j u_{0zj} + N_k u_{0zk} + N_l u_{0zl} + N_m u_{0zm} + N_n u_{0zn} + N_o u_{0zo} + N_p u_{0zp} \quad (III.13)$$

$$\theta_x = \frac{\partial u_{0y}}{\partial z} = N_{i,z} \theta_{xi} + N_{j,z} \theta_{xj} + N_{k,z} \theta_{xk} + N_{l,z} \theta_{xl} + N_{m,z} \theta_{xm} + N_{n,z} \theta_{xn} + N_{o,z} \theta_{xo} + N_{p,z} \theta_{xp} \quad (III.14)$$

$$\theta_z = \frac{\partial u_{0y}}{\partial x} = N_{i,x} \theta_{zi} + N_{j,x} \theta_{zj} + N_{k,x} \theta_{zk} + N_{l,x} \theta_{zl} + N_{m,x} \theta_{zm} + N_{n,x} \theta_{zn} + N_{o,x} \theta_{zo} + N_{p,x} \theta_{zp} \quad (III.15)$$

Avec

$$\begin{aligned}
 N_i &= L_{xi'}(x) \cdot L_{zi''}(z), & N_j &= L_{xj'}(x) \cdot L_{zi''}(z), \\
 N_k &= L_{xk'}(x) \cdot L_{zi''}(z), & N_l &= L_{xk'}(x) \cdot L_{zj''}(z), \\
 N_m &= L_{xk'}(x) \cdot L_{zk''}(z), & N_n &= L_{xi'}(x) \cdot L_{zk''}(z), \\
 N_o &= L_{xi'}(x) \cdot L_{zk''}(z), & N_p &= L_{xi'}(x) \cdot L_{zj''}(z), \\
 L_{xi'}(x) &= \frac{2}{l^2} \left(x - \frac{l}{2}\right) (x - l), & L_{xj'}(x) &= \frac{2x}{l^2} (x - l), \\
 L_{xk'}(x) &= \frac{2x}{l^2} \left(x - \frac{l}{2}\right), & L_{zi''}(z) &= \frac{2}{l^2} \left(z - \frac{l}{2}\right) (z - l), \\
 L_{zj''}(z) &= \frac{2z}{l^2} (z - l), & L_{zk''}(z) &= \frac{2z}{l^2} \left(z - \frac{l}{2}\right),
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

Avec

Avec  $L_i$  fonction d'interpolation de Lagrange et  $z_i$  les projections des nœuds sur l'axe  $z$  et  $x_i$  les projections sur l'axe  $x$

### III.5.3. champ des déplacements

$$\theta_x(x, z) = -\frac{\partial u_{0y}}{\partial x} \tag{IV.18}$$

$$\theta_z(x, z) = -\frac{\partial u_{0y}}{\partial z} \tag{IV.19}$$

Le champ des déplacements s'écrit :

$$u_x(x, y, z) = u_{0x}(x, z) - y \frac{\partial u_{0y}}{\partial x}(x, z) \tag{IV.20}$$

$$u_z(x, y, z) = u_{0z}(x, z) - y \frac{\partial u_{0y}}{\partial z}(x, z) \tag{IV.21}$$

$$u_y(x, y, z) = u_{0y}(x, z) \tag{IV.22}$$

### III.5.4. Déformation

Le champ des déformations s'écrit :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_{0x}}{\partial x} - y \frac{\partial^2 u_{0y}}{\partial x^2} \tag{IV.23}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_{0z}}{\partial z} - y \frac{\partial^2 u_{0y}}{\partial z^2} \tag{IV.24}$$

$$\epsilon_{yy} = 0 \tag{IV.25}$$

$$\epsilon_{yz} = 0 \qquad \epsilon_{yx} = 0$$

$$\epsilon_{xz} = \left( \frac{\partial u_{0x}}{\partial z} + \frac{\partial u_{0z}}{\partial x} \right) - 2y \frac{\partial^2 u_{0y}}{\partial x \partial z} \tag{IV.26}$$

Le tenseur des déformations

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xz} & 0 \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{IV.27}$$

La matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ k_{xz} \end{bmatrix} \tag{IV.28}$$

La déformation d'un élément plane est composée par deux termes l'une membrane et l'autre flexion comme la suite :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^m\} + y\{k\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} + y \begin{Bmatrix} k_x \\ k_z \\ k_{xz} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 & N_m & 0 & N_n & 0 & N_o & 0 & N_p & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_l & 0 & N_m & 0 & N_n & 0 & N_o & 0 & N_p \end{bmatrix}^* \cdot$$

$$[u_{0xi} \quad u_{0zi} \quad u_{0yi} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{zi} \quad \dots \quad u_{0xp} \quad u_{0zp} \quad u_{0yp} \quad \theta_{xp} \quad \theta_{zp}]^T +$$

$$z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k & N_l & N_m & N_n & N_o & N_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0yi} \\ u_{yj} \\ \vdots \\ u_{0yp} \end{bmatrix} \quad (IV.29)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_o}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_o}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_o}{\partial x} & \frac{\partial N_o}{\partial z} & \frac{\partial N_p}{\partial x} & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix}^* \cdot$$

$$[u_{0xi} \quad u_{0zi} \quad u_{0yi} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{zi} \quad \dots \quad u_{0xp} \quad u_{0zp} \quad u_{0yp} \quad \theta_{xp} \quad \theta_{zp}]^T +$$

$$y \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial z} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial x \partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0yi} \\ u_{0yj} \\ \vdots \\ u_{0yp} \end{bmatrix} \quad (III.30)$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_o}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_o}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_o}{\partial x} & \frac{\partial N_o}{\partial z} & \frac{\partial N_p}{\partial x} & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$$[B_f] = y \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial z} & \dots & \frac{\partial^2 N_p}{\partial x \partial z} \end{bmatrix}, \quad (III.31)$$

### III.5.5. Champ des contraintes

Le champ des contraintes d'une couche des stratifiées est donné par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \varrho'_{11} & \varrho'_{12} & \varrho'_{13} \\ \varrho'_{21} & \varrho'_{22} & \varrho'_{23} \\ \varrho'_{31} & \varrho'_{32} & \varrho'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{zz}^m \\ \varepsilon_{xz}^m \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \varrho'_{11} & \varrho'_{12} & \varrho'_{13} \\ \varrho'_{21} & \varrho'_{22} & \varrho'_{23} \\ \varrho'_{31} & \varrho'_{32} & \varrho'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_z \\ K_{xz} \end{bmatrix}, \quad (III.32)$$

$$\varrho_{ij} = C'_{ij} - \frac{c'_{i3}c'_{j3}}{c'_{33}}$$

Tel que  $C'$  est les teneurs des rigidités hors les principaux

Les résultats en membrane, dans un stratifiés donne par :

$$N(x, z) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\rho'_k \varepsilon^m(x, z) + y \rho'_k k(x, z)] dy, \quad (\text{III.33})$$

Ou en intégrant dans l'épaisseur :

$$N(x, z) = [A_{ij}] \varepsilon^m(x, z) + [B_{ij}] K(x, z) \quad (\text{III.34})$$

Avec

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (\rho'_{ij})_k$$

Et

$$B = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (k_k^2 - k_{k-1}^2) \rho'_k \quad (\text{III.35})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\rho'_{ij})_k$$

$$B = [B_{ij}] \text{ avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\rho'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\rho'_{ij})_k e_k z_k \quad (\text{III.36})$$

L'expression développée des résultants en membrane s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_z \\ N_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{zz}^m \\ \gamma_{xz}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_z \\ k_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Les moments de flexion et de torsion :

$$M(x, z) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [y \rho'_k \varepsilon^m(x, z) + y^2 \rho'_k k(x, z)] dy, \quad (\text{III.38})$$

$$M(x, z) = [B_{ij}] \varepsilon^m(x, z) + [D_{ij}] k(x, z), \quad (\text{III.39})$$

$$D = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \rho'_k \quad (\text{III.40})$$

$$D = [D_{ij}] \text{ avec } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\rho'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \quad (\text{III.41})$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{zz} \\ M_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{zz}^m \\ \gamma_{xz}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_z \\ k_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée est :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^m \\ k \end{bmatrix}, \quad (\text{III.43})$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix} [q]$$

### III.5.6. L'énergie de déformation

L'énergie totale de déformation d'un solide s'écrit sous la forme suivant

$$U_e = \iiint \left( \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}^m \varepsilon_{ij} \right) dV - \iiint f_i^v u_i dV - \iint f_i^s u_i dS \quad (III.44)$$

Où V et S sont respectivement le volume et la surface extérieure de l'élément.

Cette expression peut être écrite sous une forme matricielle [29].

$$U_e = \iiint \left( \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon^m \\ k \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^m \\ k \end{Bmatrix} \right) dV - \iiint \{u\}^t \{f^v\} dV - \iint \{u\}^t \{f^e\} dS \quad (III.45)$$

La variation virtuelle du champ de déplacement  $\{\delta u\}$  donne :

$$\delta U_e = \iiint \left( \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon^m \\ \delta k \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon^m \\ \delta k \end{Bmatrix} \right) dV - \iiint \{\delta u\}^t \{f^v\} dV - \iint \{\delta u\}^t \{f^e\} dS \quad (III.46)$$

La discrétisation de cette expression

$$U_e = \iiint \left( \{\delta q_e\}^t \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix} \{q_e\} \right) dV - \iiint \{\delta q_e\}^t [N]^t \{f^v\} dV - \iint [N]^t \{f^s\} dS \quad (III.47)$$

Pour tout système stable, la stationnarité de l'énergie potentielle conduit à :

$\Pi = 0$  on peut simplifier l'expression ci-dessus pour obtenir :

$$\iiint \left( \{\delta q_e\}^t \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_m & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix} \{q_e\} \right) dV = - \iiint \{\delta q_e\}^t [N]^t \{f^v\} dV - \iint \{f^s\} dS \quad (III.48)$$

L'expression ci-dessus définit complètement le comportement d'un élément par un système d'équations linéaire sous la forme :

$$[K_e] \{q_e\} = \{F_e\} \quad (III.49)$$

Où  $[K_e]$  est la matrice de rigidité de l'élément,  $\{q_e\}$  est le vecteur des déplacements nodaux.

Donc la matrice de rigidité élémentaire est :

$$[K]_e = \iiint [B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] dv \quad (III.50)$$

### III.5.7. L'énergie cinétique

L'énergie cinétique de système s'écrit sous la forme suivant :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho V^2 dV \quad (III.51)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz, \quad (III.52)$$

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho [\dot{q}]^t [N]^t [N] [\dot{q}] dV \quad (III.53)$$

$$[M]_e = \iiint \rho [N]^t [N] dV \quad (III.54)$$

$[M]_e$  Matrice de masse élémentaire.

### III.5.8. Système d'équations

L'obtention du système d'équations se fera classiquement en appliquant le Principe de Hamilton.

Le principe de Hamilton est la base de l'étude énergétique des systèmes en dynamique .l'énergie total du système est la somme de l'énergie potentielle, de l'énergie de dissipation et l'énergie cinétique. [33]

$$\Pi = U + T \quad (III.55)$$

Si  $\{\delta_U\}$  est champ virtuel cinématiquement admissible tel que  $\{\delta_U\}(t_1) = 0$  et  $\{\delta_U\}(t_2) = 0$  , l'énergie totale du système est stationnaire, c'est-à-dire :

$$\delta \Pi(t) = 0 \quad (III.56)$$

Ou bien

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi(t) dt = 0 \quad (III.57)$$

### III.5.9. Discrétisation par éléments finis

On pose l'hypothèse de séparation entre l'évolution spatiale et temporelle des champs

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(x, y) u_i(t) \quad (III.58)$$

Il vient

$$\begin{aligned} \{u\} &= [N]\{q_e\} \\ \{\dot{u}\} &= [N]\{\dot{q}_e\} \\ \{\ddot{u}\} &= [N]\{\ddot{q}_e\} \end{aligned}$$

La discrétisation du principe de Hamilton donne :

$$\begin{aligned} \{\delta q_e\}^t \int_v ([B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] \\ + \rho [N]^t [N] [\ddot{q}_e] - [N]^t \{f^u\}) dv - \{\delta q_e\} \int_s [N]^t \{f^u\} ds = 0 \end{aligned}$$

Le systeme d'équations général est :

$$[M_e]\{\ddot{q}_e\} + [k_e]\{q_e\} = \{f_e\} \quad (III.59)$$

Avec

$$\begin{aligned} [M_e] &= \int_{V_e} \rho [N]^t [N] dV \\ [k_e] &= \iiint [B_m]^T [A] [B_m] + [B_m]^T [B] [B_f] + [B_f]^T [B] [B_m] + [B_f]^T [D] [B_f] dv \\ \{f_e\} &= \int_{V_e} [N]^t \{f^u\} dV + \int_{S_e} [N]^t \{f^u\} ds \end{aligned} \quad (III.60)$$

$[M_e]$  Est la matrice de masse de l'élément,  $[K_e]$  est la matrice de rigidité et  $\{f_e\}$  est le vecteur des force nodales dans le repère local.

Les matrices  $[M_e]_g, [K_e]_g$  les vecteurs  $\{f_e\}_g$  et  $\{q_e\}_g$  dans le repère global sont :

$$\begin{aligned} [k_e^m]_g &= [T_e^m]^t [K_e^m]_l [T_e^m] \\ [M]_g &= [T_e^m]^t [M_e^m]_l [T_e^m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{q_e^m\}_g &= [T_e^m]^t \{q_e^m\}_l \\ \{F_e^m\}_g &= [T_e^m]^t \{F_e^m\}_l\end{aligned}$$

Avec  $g$  indiquant le repère global. La matrice de passage s'écrit :

$$[T] = \begin{bmatrix} [t^m] & 0 & 0 \\ 0 & [t^m] & 0 \\ 0 & 0 & [t^m] \end{bmatrix}$$

Avec

$$[t^m] = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}$$

### III.5.10. Résolution des équations

Pour résoudre l'équation du mouvement on utilise la méthode de superposition.

Le principe de base est que la réponse de la pale est la combinaison de différents modes propres de vibration. La contribution de chacun des modes est donnée par un facteur d'amplitude directe.

$$\{q\} = Y_1 \{\Phi_1\} + Y_2 \{\Phi_2\} + \dots + Y_n \{\Phi_n\} \quad (\text{III.61})$$

Avec  $Y_i$  amplitude du mode  $i$  et  $\{\Phi_i\}$  le vecteur propre du même mode. On peut écrire :

$$\{q\} = [\Phi] \{Y\} \quad (\text{III.62})$$

Avec

$$\begin{aligned}\{\Phi\} &= [\{\Phi_1\} \{\Phi_2\} \dots \dots \dots \{\Phi_n\}] \\ \{Y\}^t &= [Y_1 \ Y_2 \ \dots \dots \dots \ Y_n]\end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

L'équation du mouvement de la pale :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\} \quad (\text{III.64})$$

Est écrite sous la forme :

$$[M][\Phi] \{\ddot{Y}\} + [K][\Phi] \{Y\} = \{F\} \quad (\text{III.65})$$

Cette expression est multipliée par le vecteur propre du mode  $i$ .

$$\{\Phi_i\}^t [M][\Phi] \{\ddot{Y}\} + \{\Phi_i\}^t [K][\Phi] \{Y\} = \{\Phi_i\}^t \{F\} \quad (\text{III.66})$$

L'orthogonalité des modes propres réduit le système a une s'écrite d'équation découplée.

$$\{\Phi_i\}^t [M] \{\Phi_i\} \ddot{Y}_i + \{\Phi_i\}^t [K] \{\Phi_i\} Y_i = \{\Phi_i\}^t \{F\} \quad (\text{III.67})$$

Ou bien

$$\hat{m}_i \ddot{Y}_i + \hat{K}_i Y_i = f_i \quad (\text{III.68})$$

Avec

$$\begin{aligned}\hat{m}_i &= \{\Phi_i\}^t [M] \{\Phi_i\} \\ \hat{K}_i &= \{\Phi_i\}^t [K] \{\Phi_i\}\end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

Il suffit donc de résoudre séparation chacune de ces équations pour déterminer l'amplitude associée  $Y_i(t)$

### III.6. Procédure de résolution

La procédure est la suivant :

- 1 évalué les matrice  $[M]$  et  $[k]$
- 2 évaluer les fréquences propres du système :  $|[M] - \omega^2[k]| = 0$   
On en déduit  $\omega_i$  et  $\{\Phi_i\}$
- 3 pour chaque mode  $i$ 
  - (a) calculer  $\hat{m}_i$  et  $f_i$
  - (b) résoudre l'équation du mode :  $\ddot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = f_i / \hat{m}_i$
4. déterminer la réponse de la structure  $\{q(t)\} = [\Phi]\{Y(t)\}$

### III.7. Conclusion

Le modèle obtenu a l'aide de la méthode des éléments finis est plus adapté pour modéliser les systèmes réels ou structure solide car il est plus précis et permet d'étudier l'ensemble des modes de vibration de la pale de hélicoptère. Il est également modulaire car chaque mode de pale possède ses propres caractéristiques. Des éléments peuvent donc être ajoutés ou enlevés au gré de l'utilisateur qui peut également ajouter des raideurs, des amortissements ou des forces extérieures en chaque nœud.

# **Chapitre IV**

## **Résultats numérique**

## IV.1 Introduction

Pour mener notre étude par simulation numérique, on a utilisé le code numérique ANSYS, qui est l'un des codes de calcul, basé sur la méthode d'éléments finis, parmi les plus utilisés dans le monde. Le code «ANSYS» comprend plusieurs composantes. Chaque composante est destinée à l'un des domaines d'ingénierie, et son choix met automatiquement à la disposition de l'utilisateur les processus adéquats (type d'élément, conditions aux limites, tracés» etc).

Dans cette étude on utilise la composantes sont : pour désigne a la géométrie de chaque cas étudié on base au préprocesseur **DM** (Désigne Modeler), pour la génération de son maillage et l'application de force et fixation et condition inertiel dans la composant **M** (Mechanical) et pour entre les conditions aux limites et conditions initiale et défieront paramètre de problème, et la simulation solide fluide avec affiche le résultat dans le composant **FLUANT**. Nous on utilise la programme **ANSYS** pour la simule chaque cas étude de parte solide fluide et simule la parte de solide étude statique et Modal.

## IV.2. DM (Désigne Modeler) et M (Mechanical)

C'est un pré processeur intégré pour l'analyse en CFD (Computational Fluid Dynamics). Il est utilisé pour construire une géométrie simple ou complexe dans **DM**.

Les options de génération de maillage de **M** offrent une flexibilité de choix. La géométrie peut être décomposée en plusieurs parties pour générer un maillage structuré, sinon **M** génère automatiquement un maillage non structuré adapté au type de géométrie construite. Les défauts sont détectés à l'aide de son interface comportant plusieurs fenêtres d'outils de création, génération, vérification du maillage du modèle étudié et l'incorporation des conditions aux limites.

Dans le présent travail, **DM** et **M** offre cette possibilité de définir un profil d'aube, créer un volume représentant le domaine d'étude et générer son maillage.

### IV.2.1. le point de profile étudiée NACA23012

Le profil d'aile étudié est le NACA 23012 (figure IV.1), un profil de la série a 5 chiffres. Il est muni de 38 prises de pression statique numérotées de 1 à 19 cotes extrados et de 20 à 38 cotes intrados. L'aile a pour envergure  $b = 6$  m et pour corde  $c = 0.4$  m

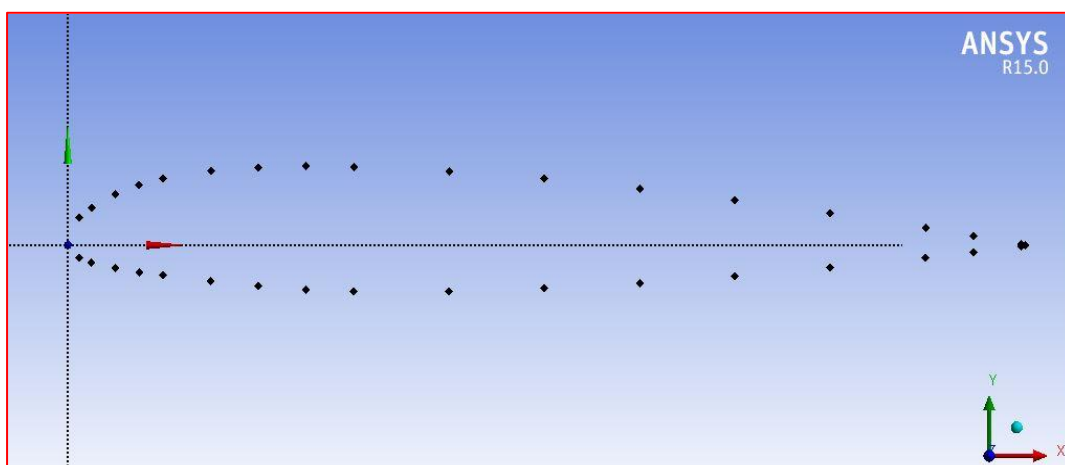


Figure IV.1: Point de profil NACA 23012

**Tableau IV.1** point de profile NACA 23012**Point d'extrados :**

X	0	0.5	1	2	3	4	6	8	10
Y	0	1.12	1.51	2.06	2.43	2.69	3.01	3.14	3.19

X	12	16	20	24	28	32	36	38	40	40.2
Y	3.16	2.99	2.69	2.29	1.83	1.29	0.7	0.38	0.05	0

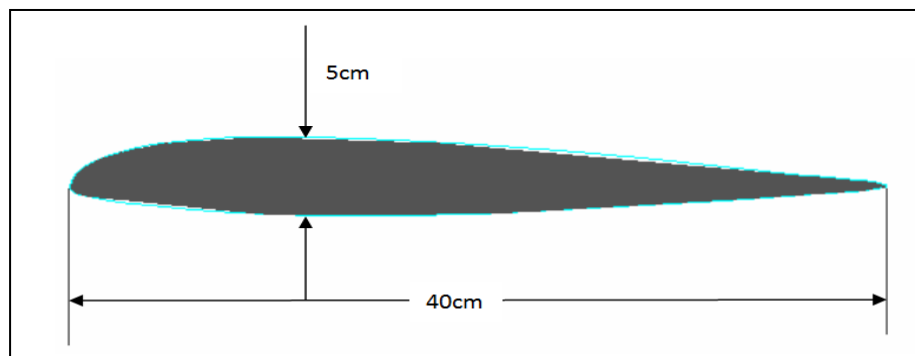
**Point d'intrados :**

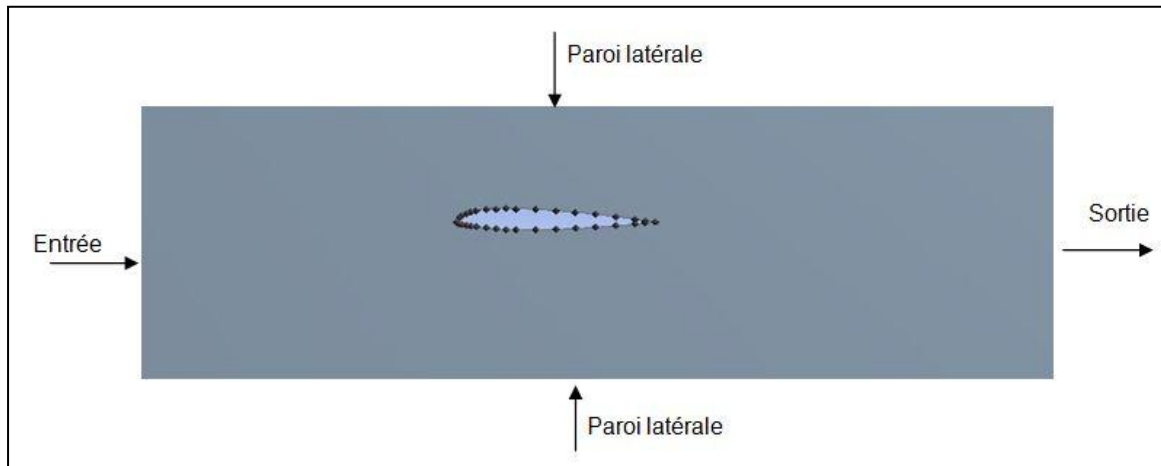
X	0	0.5	1	2	3	4	6	8	10
Y	0	-0.51	-0.71	-0.94	-1.09	-1.22	-1.4	-1.66	-1.79

X	12	16	20	24	28	32	36	38	40	40.2
Y	-1.87	-1.88	-1.74	-1.54	-1.25	-0.9	-0.51	-0.29	-0.05	0

**IV.2.2 Géométries de profile**

Les configurations géométriques traitées sont présentées ci-dessous. L'écoulement autour d'un profil isolé 2D, le NACA 23012, de la dimension Figure. (IV.2), a été simulé à l'aide du code Fluent. Le domaine de calcul est une surface de dimensions 1000cm x2000cm avec une entrée, une sortie et deux cotés latéraux, Figure. (IV.3).

**Figure IV.2 :** Dimension de profil isolé 2D NACA 23012



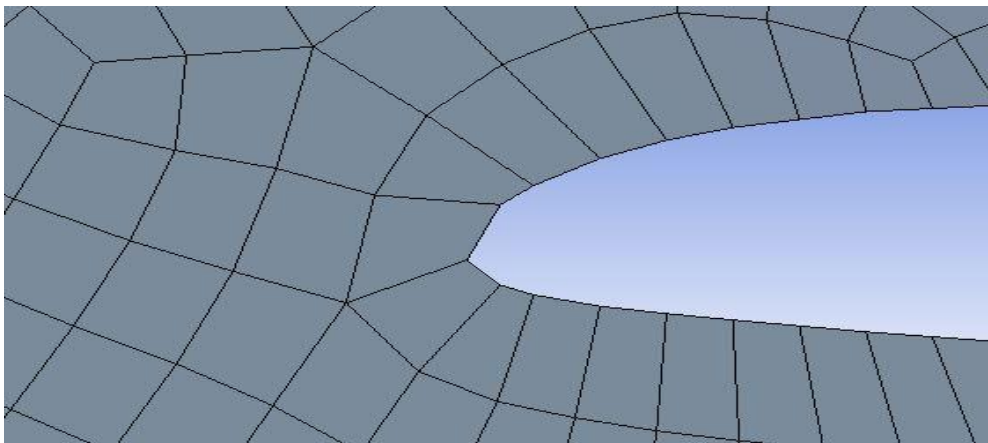
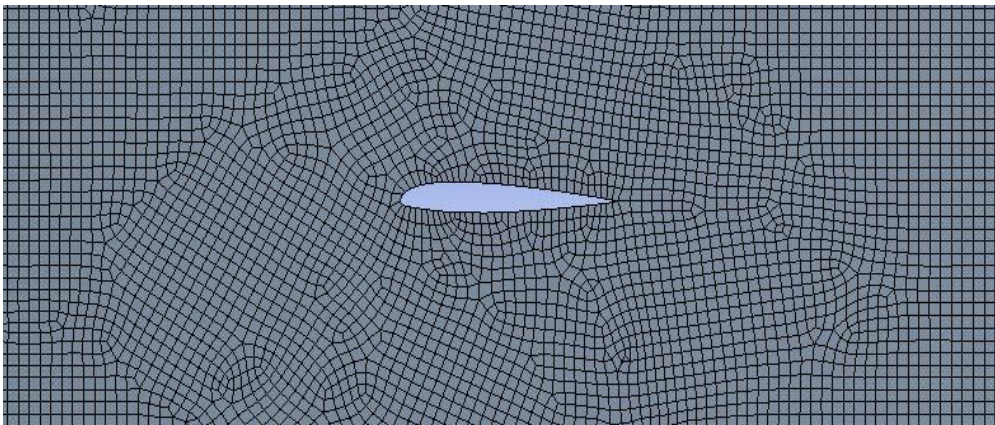
**Figure IV.3 :** Domine de travail simulation 2D

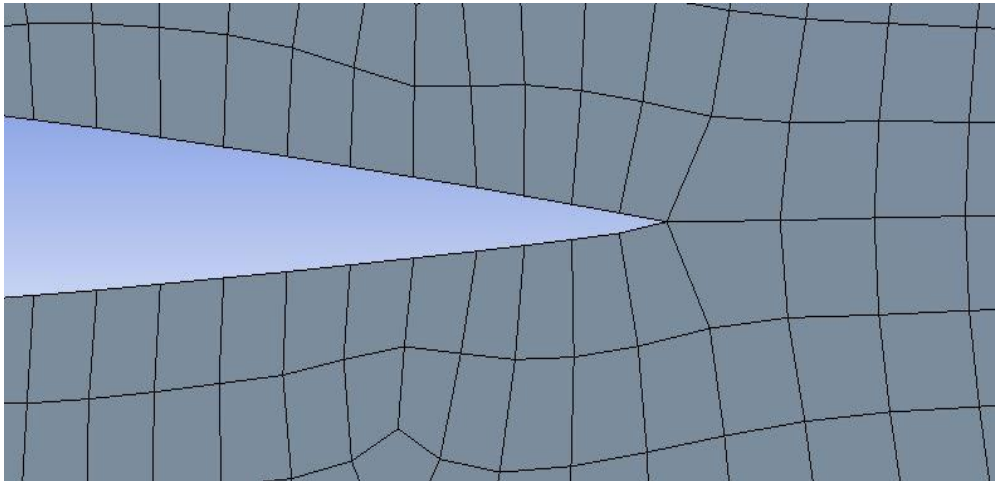
### IV.2.3. Maillage

Avoir une meilleure précision des résultats par le solveur FLUENT nécessite un maillage suffisamment raffiné de sorte que la solution soit indépendante du maillage. Un test de l'effet du maillage sur la solution a été effectué en utilisant différents nombres de cellules.

Il a été opté pour un maillage quadrilatéral dans le cas du profil isolé 2D, Figure. (III.4).

Les nombres de Maillage quadrilatéral profil isolé 2D est : **35763** cellules et **35249** éléments





**Figure IV.4:** Maillage de profil isolé 2D NACA 23012

### IV.3. FLUENT

FLUENT est un programme de simulation numérique des écoulements de fluide compressibles, incompressibles, stationnaires ou in stationnaires impliquant divers phénomènes physiques tels que le transfert de chaleur, la turbulence, les réactions chimiques, les écoulements dans les machines tournantes, moteurs thermiques, et ce pour des géométries industrielles très complexes.

FLUENT permet aussi le raffinement du maillage en fonction des conditions aux limites, des dimensions et même des résultats déjà obtenus. Cette capacité est particulièrement utile surtout dans les régions à gradients importants comme les couches limites ou zone de mélange. Enfin toutes les fonctions exigées pour calculer une solution et pour manifester les résultats sont accessibles par une interface pilotée par le menu.

#### IV.3.1. Choix des types de frontières

Les types de frontières entourant le domaine et considérés dans chaque cas étudié dans ce travail sont résumés dans le tableau ci-dessous.

**Tableau IV.2:** Types de frontières

Géométries	Profil isolé 2D
Région	
Entrée	Vélocité in let
Sortie	Outflow
Paroi	wall

### IV.3.2. Les conditions aux limites

Elles dépendent du type de phénomène physique à étudier, permettant d'identifier les positions des frontières (entrées, sorties, symétrie.....) et spécifier les variables aux frontières (vitesse, pression,.....).

- Pour tous les cas étudiés le fluide considéré est de l'air, le nombre de mach à l'entrée est égal à 0,1.
- Le nombre de Reynolds pour les deux premiers cas est de  $2,4 \cdot 10^4$ , celui pour le troisième cas est de  $2,4 \cdot 10^5$ .
- les conditions d'entrée de vitesse : 35,327 m/s
- A la sortie on a imposé le rapport de débit entrant au débit sortant égal à 1 et ce pour tous les cas étudiés. Le code considère une condition de régime établi :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \quad (\text{IV.1})$$

### IV.3.3. Choix des schémas de discrétisation

Les schémas de discrétisation utilisés dans le présent travail sont résumés comme suit :

**Tableau. IV.3 :** Les schémas de discrétisation

Pression	Standard
Quantité de mouvement	Second ordre upwind
Couplage vitesse-pression	Simple
Energie cinétique turbulente	Second ordre upwind
Taux de dissipation	Second ordre upwind

### IV.3.4. Sous relaxation

Lors de la résolution, le contrôle du changement du scalaire  $\Phi$  est nécessaire. La sous relaxation réduit justement ce changement pendant chaque itération. La nouvelle valeur dépend donc de la valeur précédente et de l'écart entre les deux :  $\Phi = \Phi_{\text{old}} + \alpha \Delta \Phi$

Dans le présent travail, les facteurs de sous relaxation sont :

**Tableau. IV.4 :** les facteurs de sous relaxation

Pression	Quantité de mouvement	Energie cinétique turbulente k	Taux de Dissipation
0.3	0.7	0.8	0.8

### IV.4. Résultats et interprétation

L'objectif de cette étude est de déterminer les effets de la vitesse sur la surface de pale et représente les différents paramètres dans le cas statique, avec détermination des fréquences et les modes propre de la pale.

#### IV.4.1. analyse dynamique de solide/fluide

On détermine dans ce résultat l'effet de la vitesse sur la surface de pale et représente l'effet de géomètre sur l'écoulement de fluide, en plus nous offrons les graphs de moment et coefficient de portance et trainée, et la pression.

##### IV.4.1.1. l'effet de vitesse

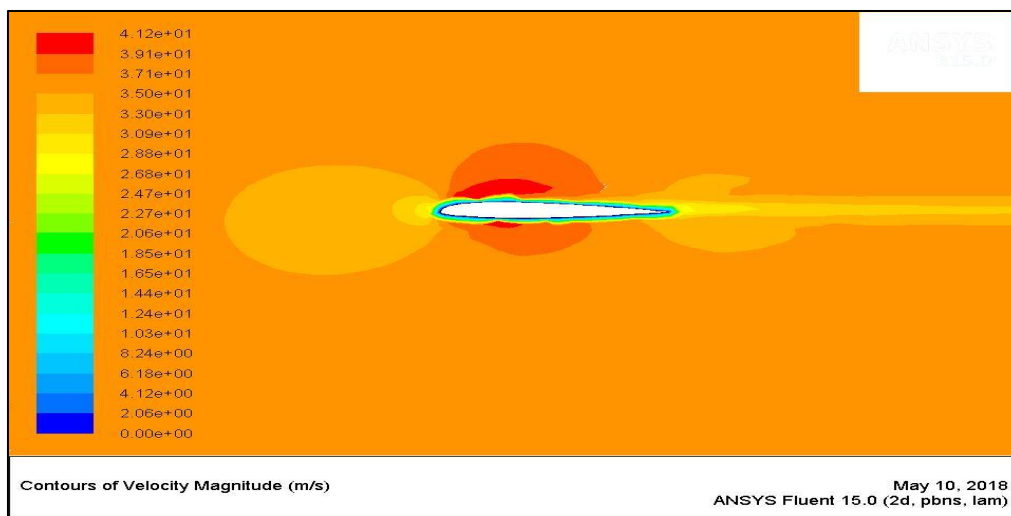


Figure IV.5 : Contours de la grandeur de vitesse résultante (m/s)

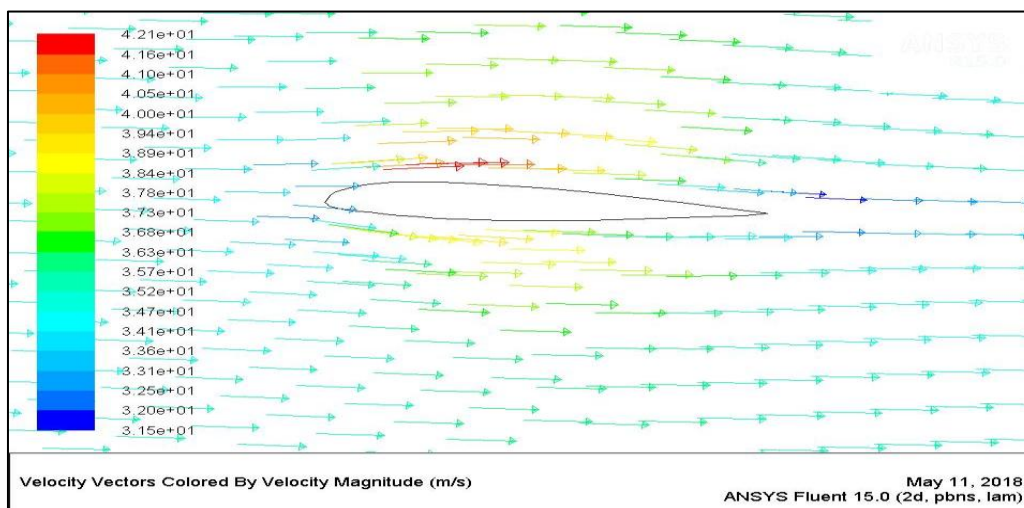


Figure IV.6 : Vecteurs de la grandeur de vitesse résultante

Dans cette simulation, nous observons que la loi de Bernoulli est vérifiée, où la vitesse du extrados est la plus grande par rapport aux valeurs de l'intrados, qui est appelée la forme géométrique de la pale.

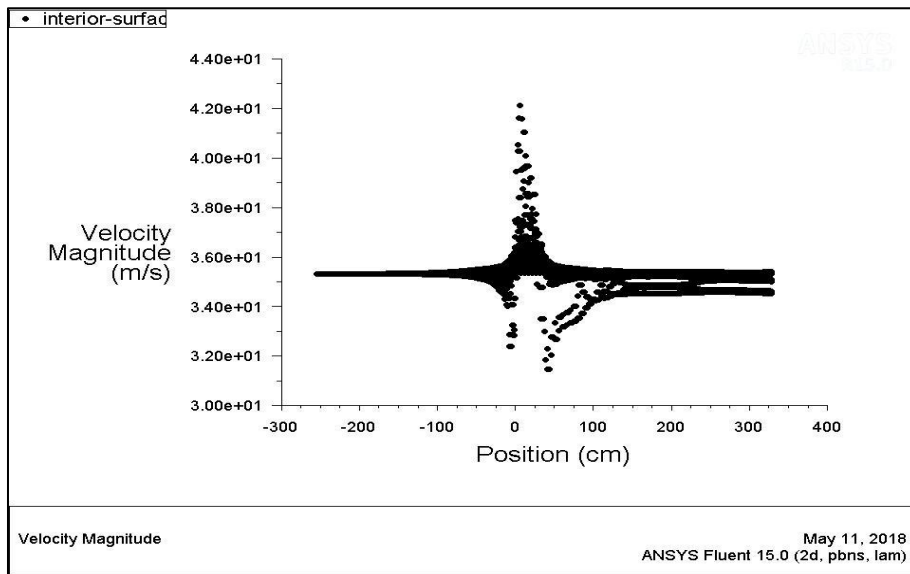


Figure .IV.7: Effet de pale sur le volume extérieur

Dans ce diagramme nous notons l'effet de la géométrie de la pale sur la vitesse du milieu extérieur où nous remarquons avant que le profile la vitesse est constant, me en étant effectué par lieu à la pale et essayons de revenir à la stabilité après.

IV.4.1.2 .l'effet de pression sur la pale

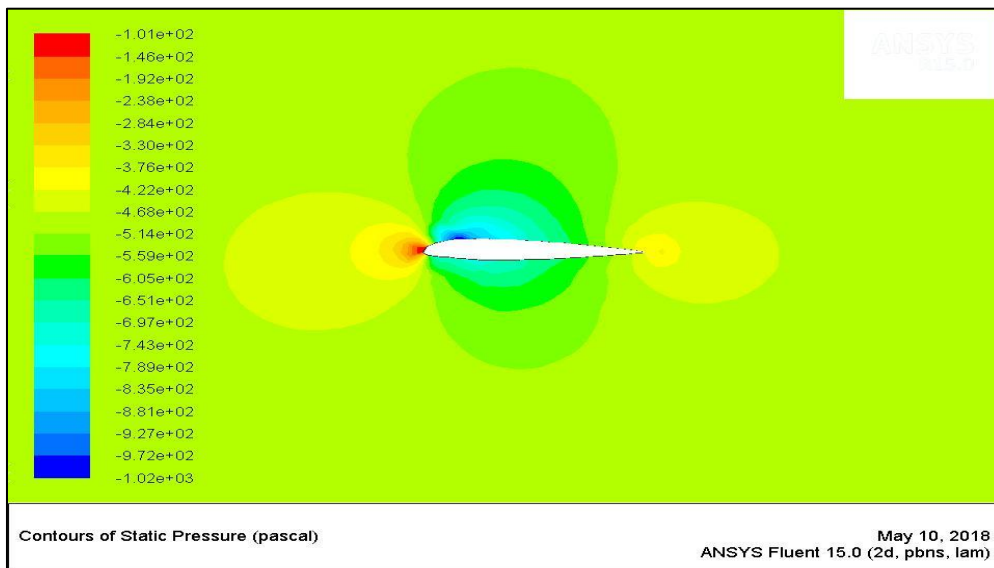


Figure IV.8 : Contours de pression statique (Pa)

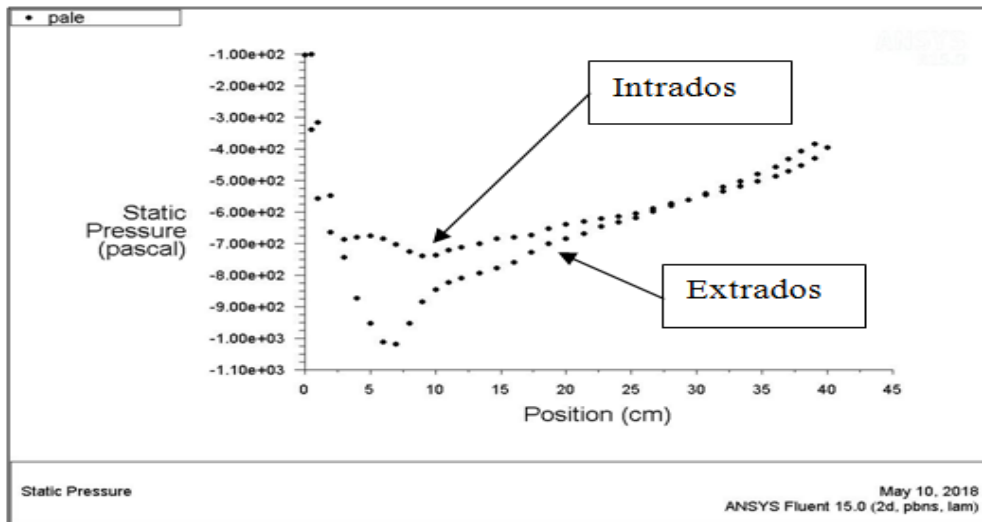


Figure IV.9 : L'effet de pression statique sur les point intrados et extrados



Figure IV.10 : Contours de pression totale (Pa)

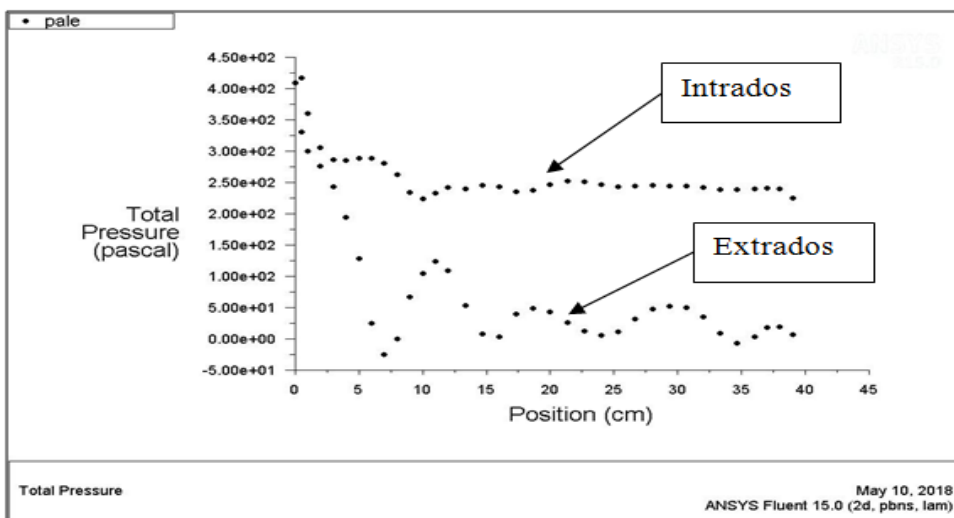


Figure IV.11 : L'effet de pression totale sur les points intrados et extrados

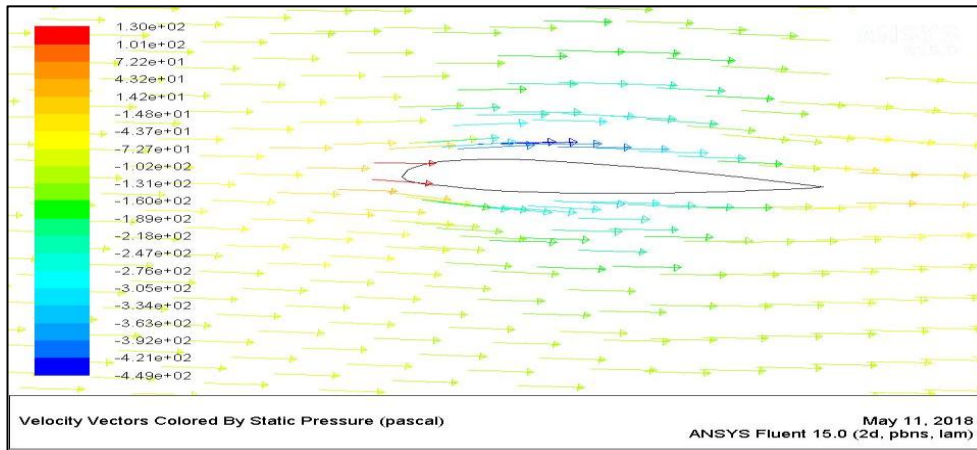


Figure IV.12 : Vecteur la vitesse en fonction de pression

la figure IV.12 représente l'effet de la vitesse sur la surface de la pale et transformation la vitesse vers pression une grande application de pression sur le bord d'attaque de la pale et grande exposition à la vitesse quand le mouvement de rotation.

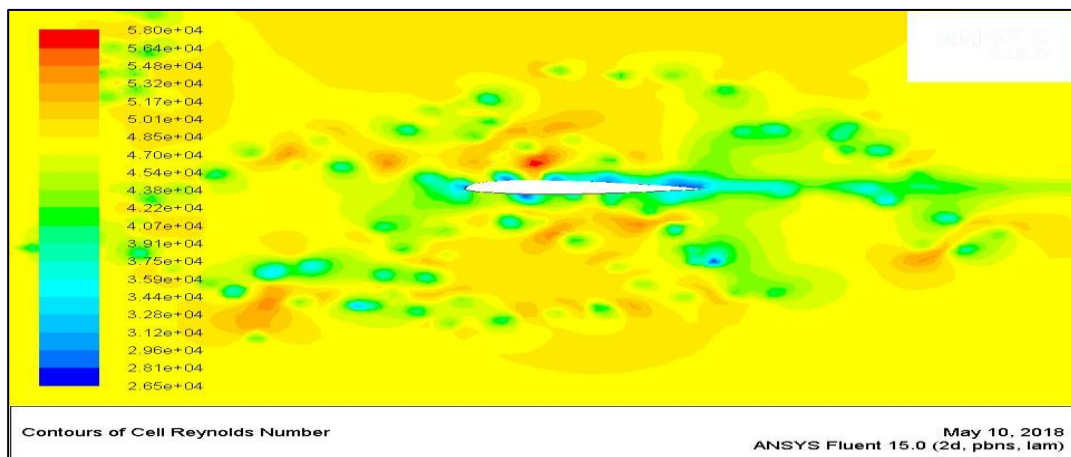


Figure IV.13 : Nombre de Reynolds

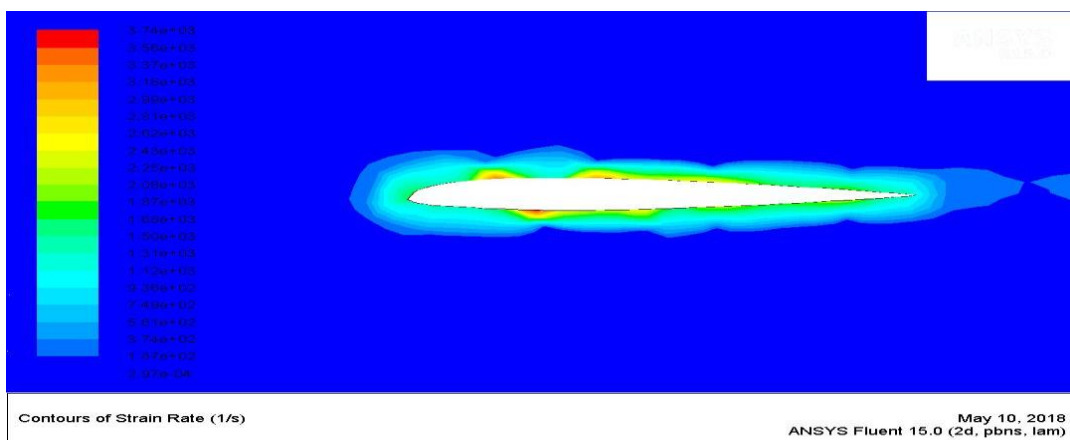


Figure IV.14 : Contours taux de déformation

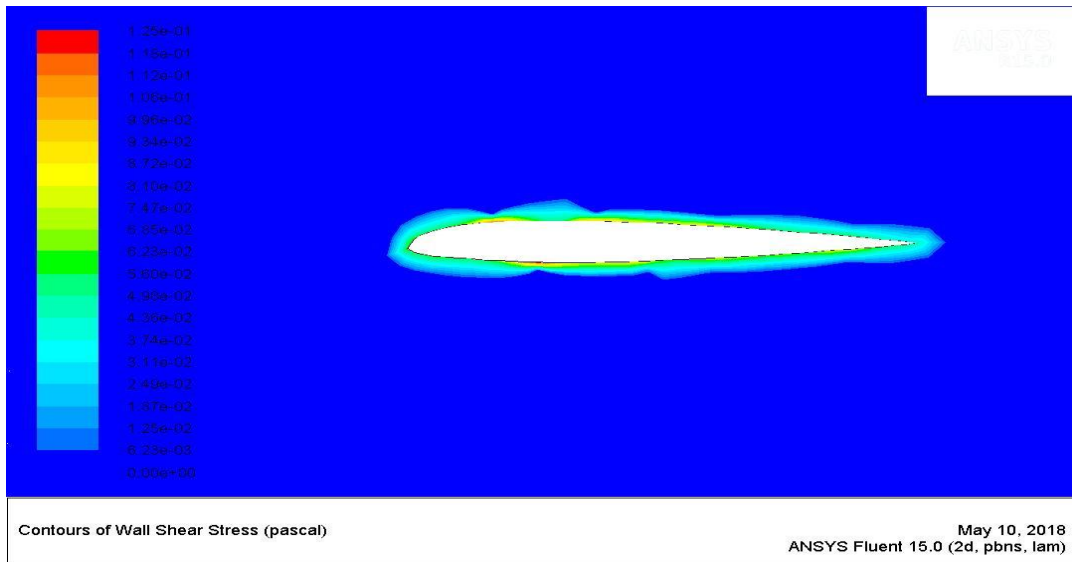
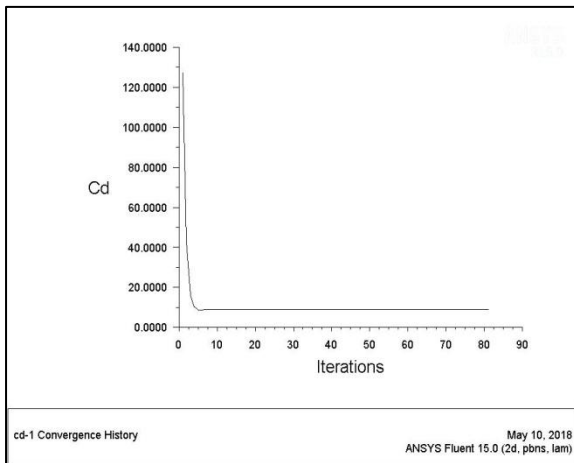
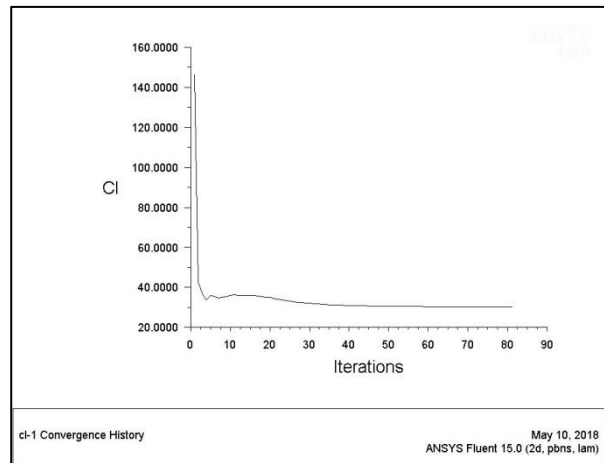


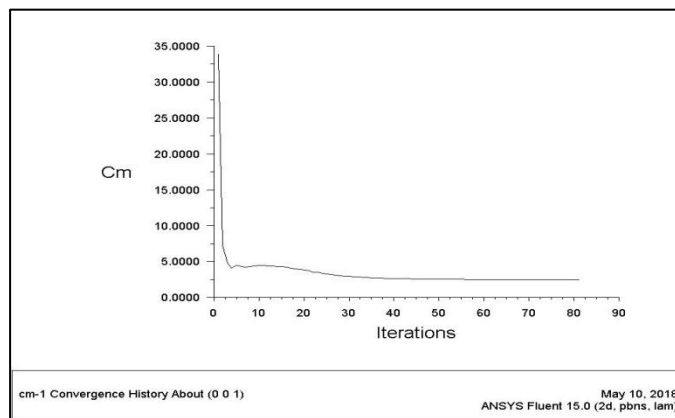
Figure IV.15 : Contour de contrainte de cisaillement de mur



(a)



(b)



(c)

Figure IV.16 : Les valeurs Cd et Cl et Cm

Tableau IV.5 : la valeur de coefficient de portance et traîne et moment

	Cd	Cl	Cm
valeur	8.92	302	2.48

IV.4.2. analyse modale

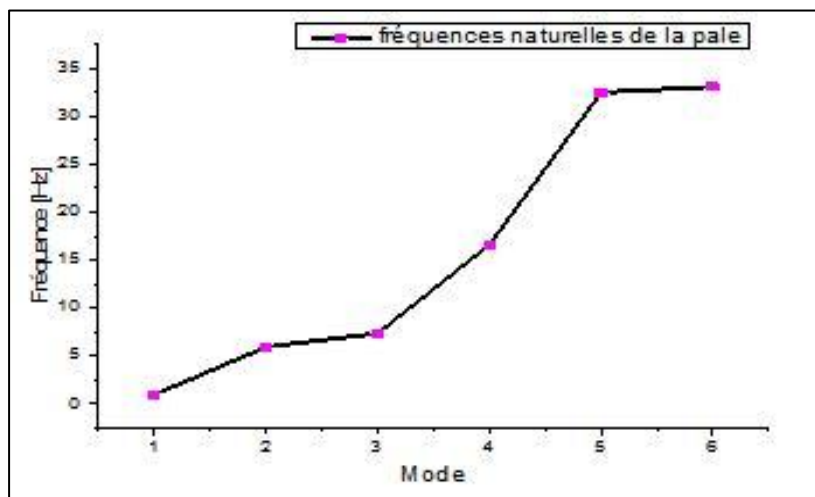
IV.4.2.1.les fréquences naturelles de la pale

Les fréquences de la pale sont présentées dans les tableaux ci-dessous:

**Tableau IV.6** : les fréquences naturelles de la pale.

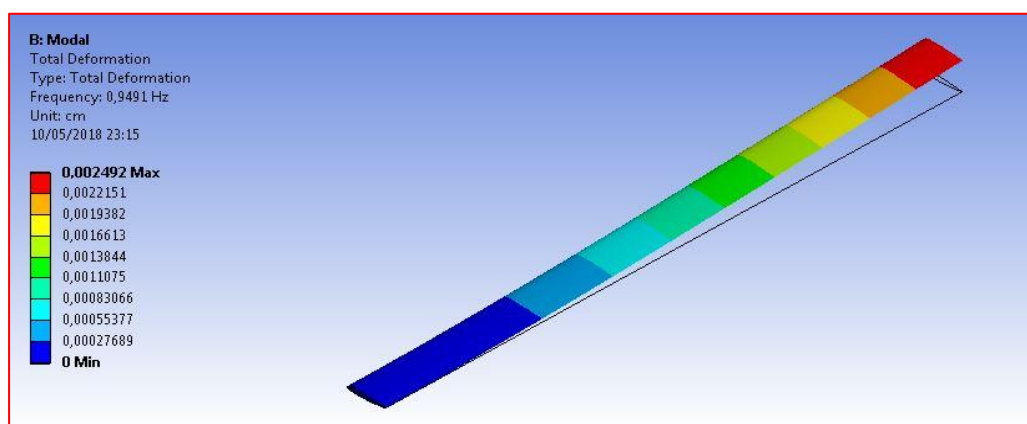
Numéro de mode	type de mode	Fréquence [Hz]	
		Verre	époxy
1	1 <sup>er</sup> Battement	0.949	
2	2 <sup>eme</sup> Battement	5.944	
3	1 <sup>er</sup> Traîné	7.356	
4	3 <sup>eme</sup> battement	16.627	
5	4 <sup>eme</sup> battement	32.487	
6	1 <sup>er</sup> Torsion	33.095	

Les fréquences de matériau orthotrope minimal par rapport le autre matériau isotrope grand fréquences.



**Figure IV.17** : La fréquence en fonction des numéraux de mode

IV.4.2.2 Les déformées modales :



**Figure IV.18** : Mode de 1<sup>ere</sup> déformée 1<sup>er</sup> mode de battement

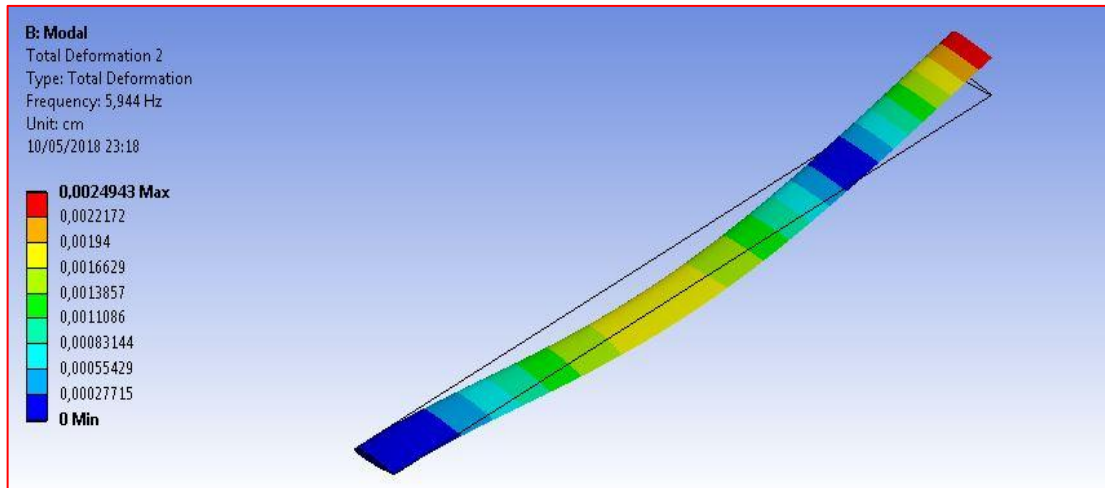


Figure IV. 19 : Mode de 2<sup>ème</sup> déformée 2<sup>ème</sup> mode de battement

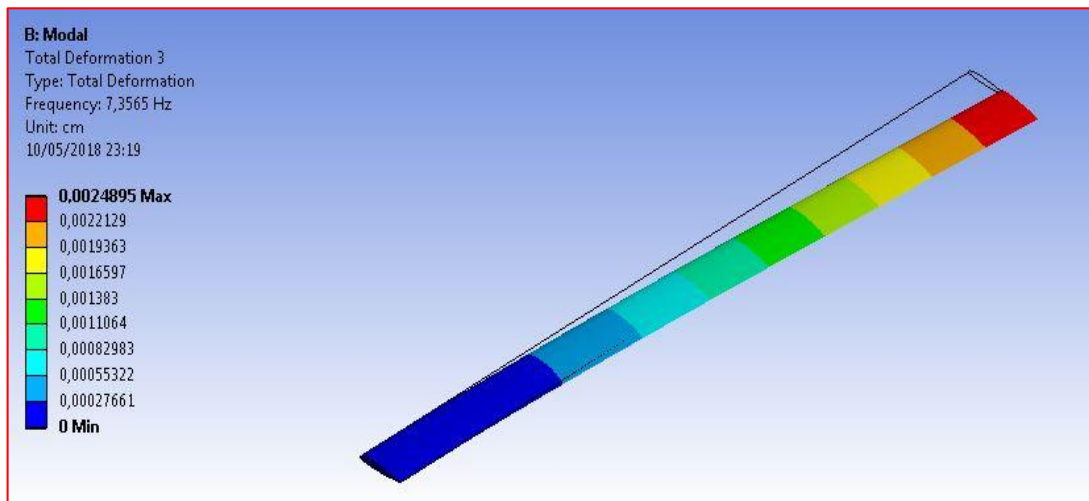


Figure IV.20 : Mode de 3<sup>ème</sup> déformée 1<sup>er</sup> mode de Traîné

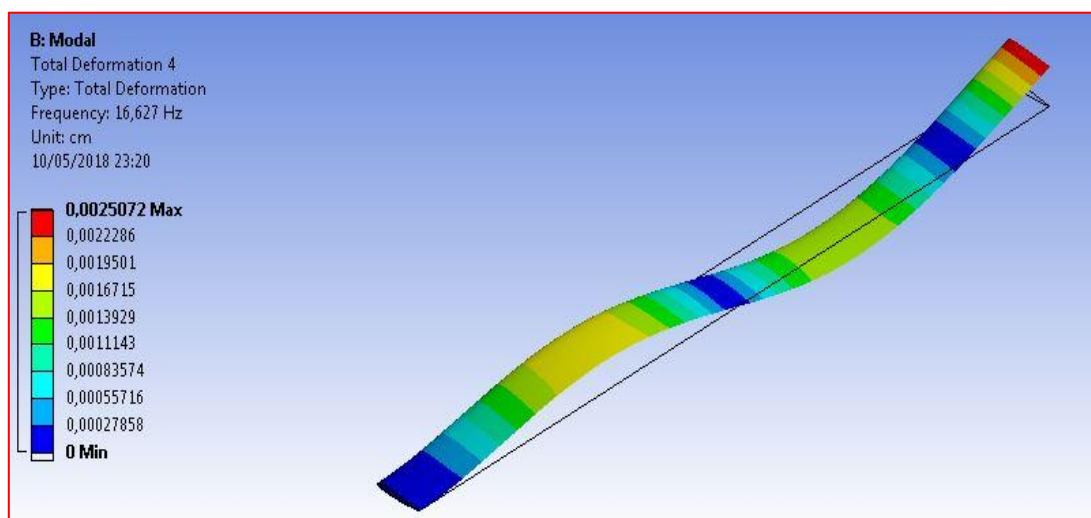


Figure IV.21 : Mode de 4<sup>ème</sup> déformée 3<sup>ème</sup> mode de battement

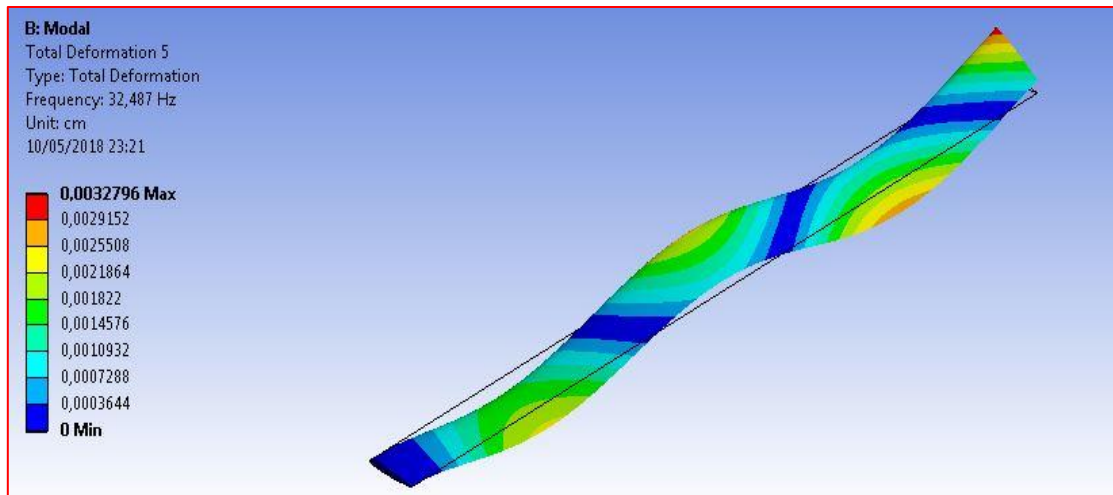


Figure IV.22 : Mode de 5<sup>ème</sup> déformée 4<sup>ème</sup> mode de battement

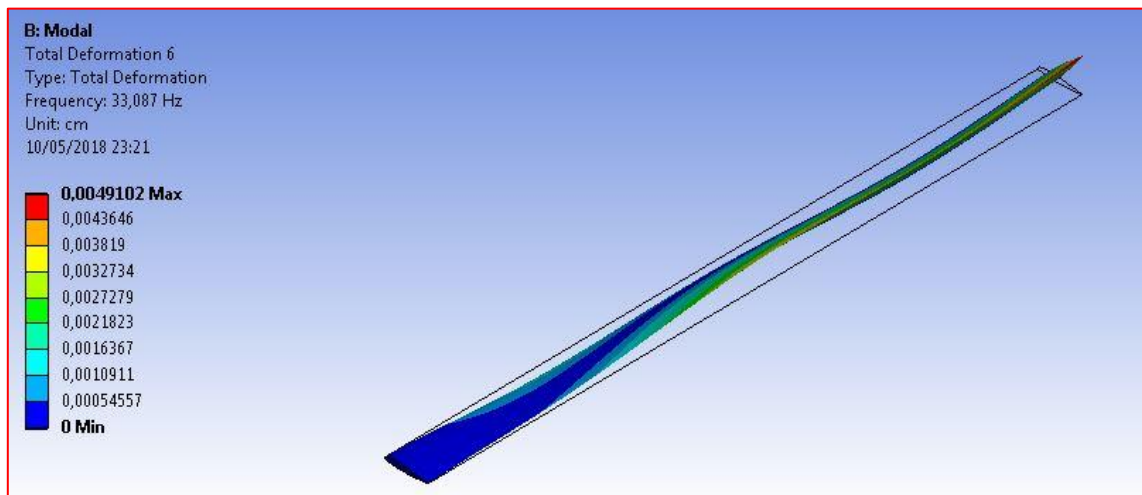


Figure IV.23 : Mode de 6<sup>ème</sup> déformée 1<sup>er</sup> mode de torsion

Tableau IV.7 : les déformations Max de la pale

Numéro de mode	type de mode	Déformation Max [m] Verre époxy
1	1 <sup>er</sup> Battement	0.002492
2	2 <sup>eme</sup> Battement	0.0024943
3	1 <sup>er</sup> Traîné	0.0024895
4	3 <sup>eme</sup> battement	0.0025072
5	4 <sup>eme</sup> battement	0.0032796
6	1 <sup>er</sup> Torsion	0.0049102

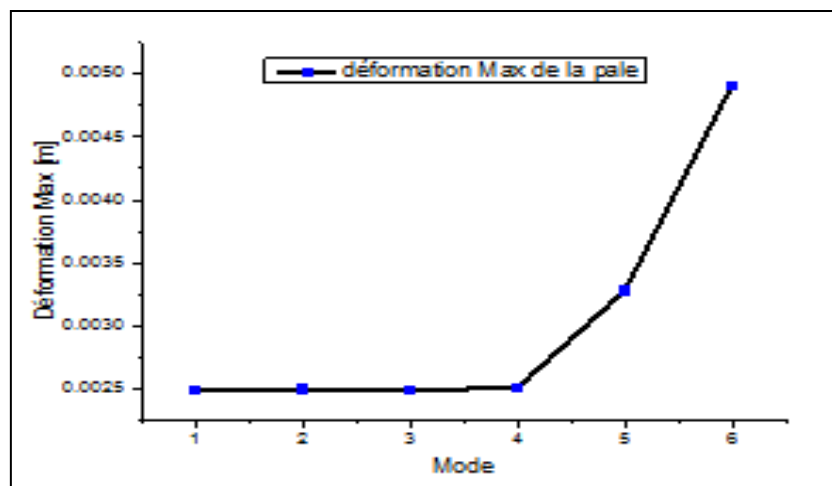


Figure IV.24: Les déformation Maximal de la pale

#### IV.4.3 Analyse statique

La force aérodynamique s'applique sur le centre de gravité composé à trois composants suivante x est  $T_x = 28.26$  N et suivant y est  $F_N = 6059.6$  N et suivant z est  $F_c = 475.23$  KN.

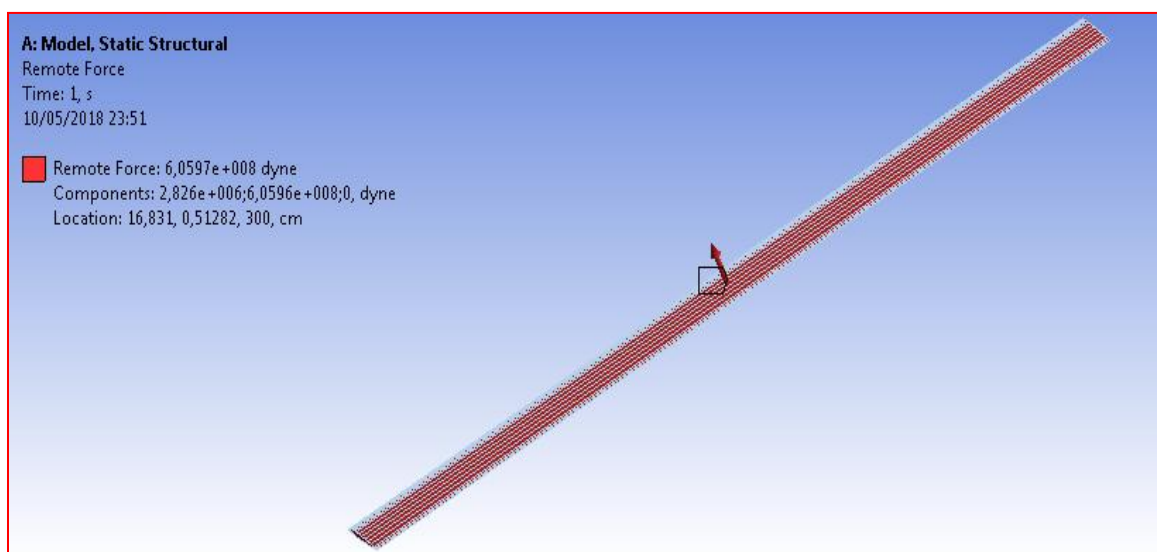
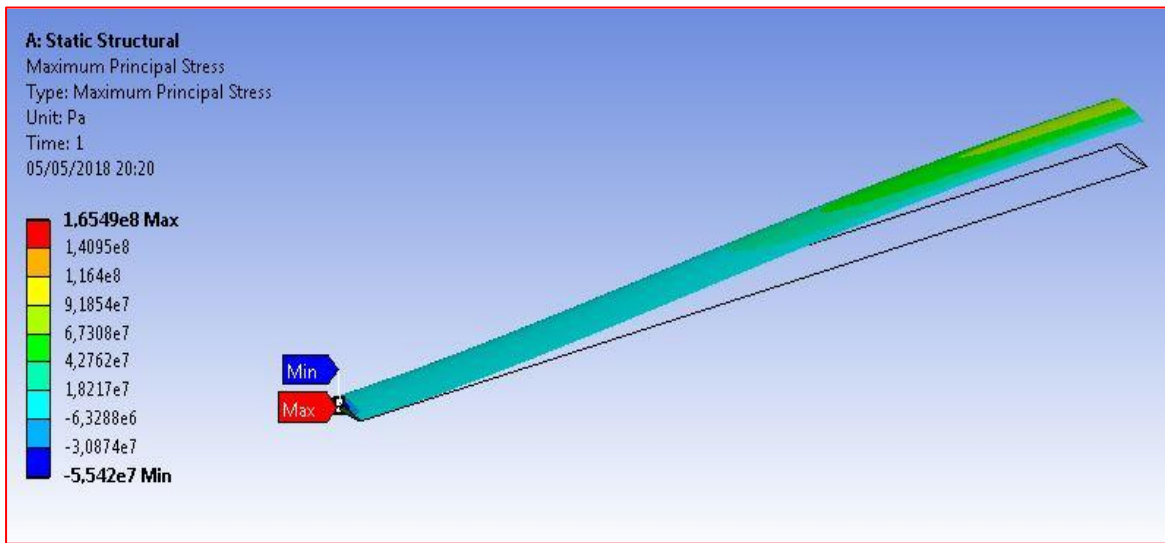


Figure IV.25 : Position de force aérodynamique sur la pale

IV.4.3.1 Les contraintes de la pale

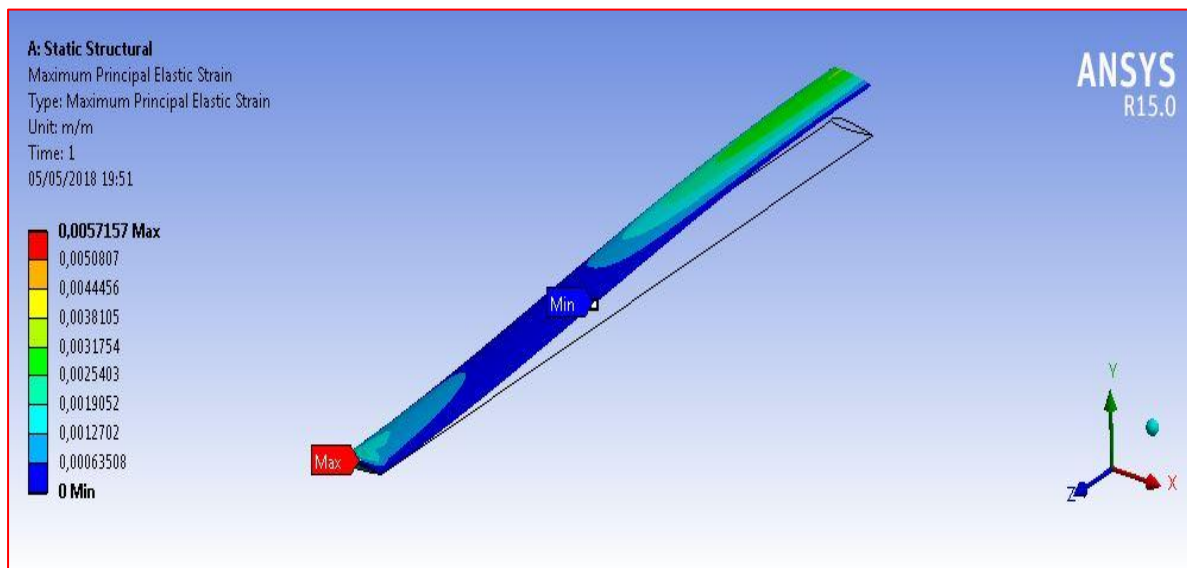


Figures IV.26 : La contrainte Max de la pale

Tableau IV.8 : valeur max de contrainte

La contrainte Max	$1.65 \cdot 10^8$ [Pa]
-------------------	------------------------

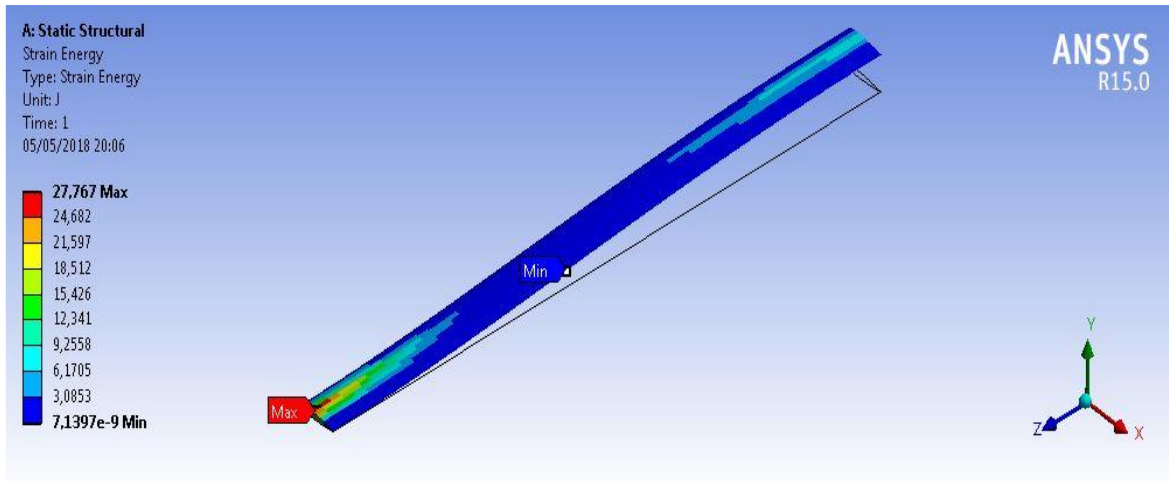
IV.4.3.2 Les déformation de la pale



Figures IV.27 : La déformation Max de la pale

Tableau IV.9 : Valeur max de déformation

la déformation Max	0.0057157
--------------------	-----------

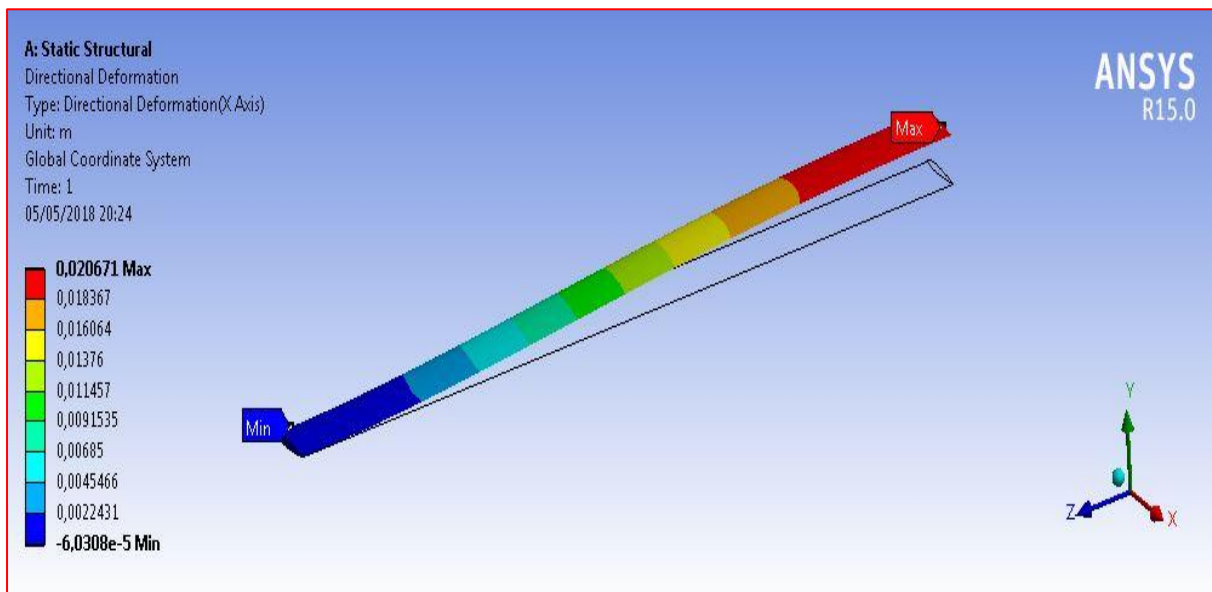


Figures IV.28 : L'énergie de déformation

Tableau IV.10 : valeur max d'énergie de déformation

l'énergie de déformation Max	27,767 [J]
------------------------------	------------

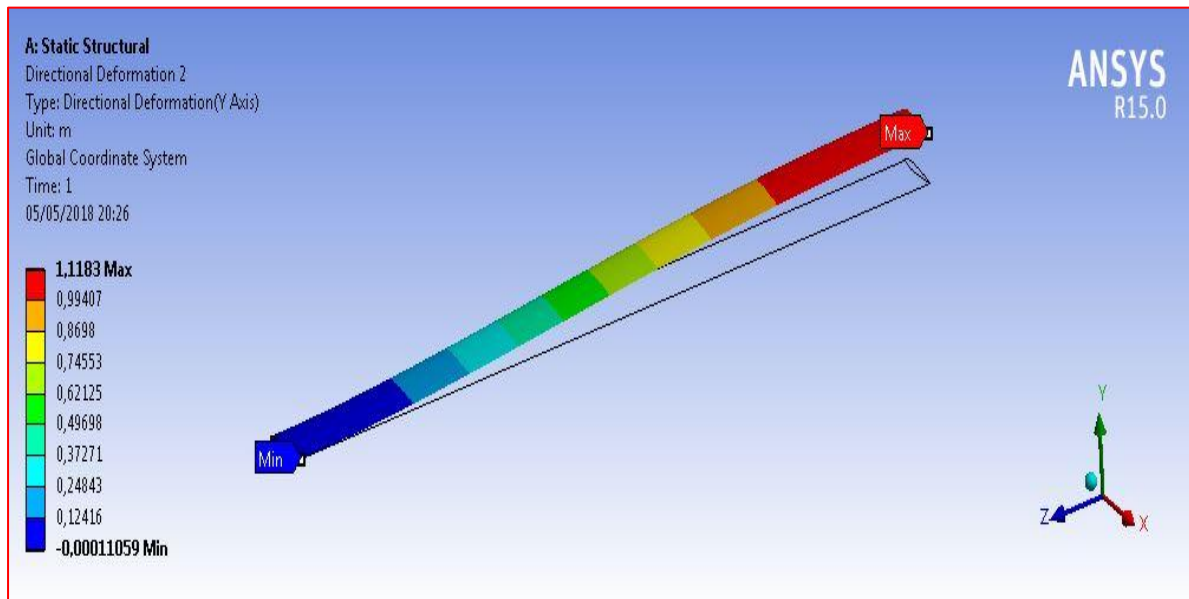
IV.4.3.3 Déplacement de la pale



Figures IV.29 : Déplacement suivant x

Tableau IV.11 : valeur max de déplacement suivant X

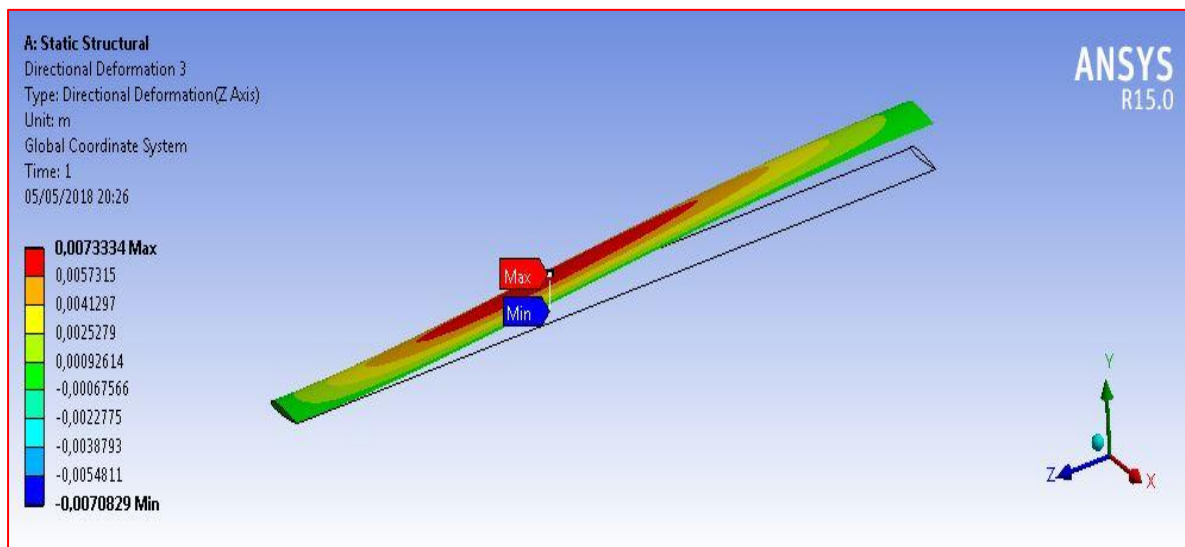
$D_{max}(m)$	0.018367
--------------	----------



Figures IV.30 : Déplacement suivant Y

Tableau IV.12 : valeur max de déplacement suivant Y

$D_{max}(m)$	0.99407
--------------	---------



Figures IV.31 : Déplacement suivant Z

Tableau V.9 : valeur max de déplacement suivant Z

$D_{max}(m)$	0.00573
--------------	---------

## IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a représenté les résultats numériques de l'effet de vitesse sur la géométrie de le profil NACA 23012 et on obtenu par la méthode des éléments finis. Les différents modes de la pale et le distribution de contraintes dans le corps de la pale sont représentés dans le but de déterminer les zones de fonctionnement critique de la pale Le modèle éléments finis de la pale a été conçu à partir d'une géométrie bien déterminée. Une extraction efficace des fréquences et des déformées modales du modèle a été effectuée de la pale

A partir d'un profil NACA, la géométrie de la pale a été développée, ce qui permet de déterminer les inerties et le centre de gravité de la pale.

L'injection des charges aérodynamiques dans le modèle éléments finis de la pale permet de déterminer les fréquences et les contraintes les déformations des modes de la pale en battement, traînée et torsion pour les matériaux les composites. Les résultats montrent que les différentes sollicitations et les déplacements maximaux sont localisés à l'extrémité de la pale.

# **Conclusion générale**

### Conclusion générale

Le travail effectué dans ce mémoire se rapporte à la modélisation par la méthode des éléments finis d'une pale d'hélicoptère NACA 23012 sous chargement aérodynamique.

L'étude aérodynamique des hélicoptères dans le quel les forces aérodynamiques sont calculées. Afin de voir le comportement de la pale d'hélicoptère on a développé un modèle éléments finis de la pale pour extraire ses fréquences et modes propres, les résultats montrent que l'extrémité de la pale est la zone la plus sollicitée par les déformations.

Pour mieux interpréter les phénomènes qui gèrent le comportement dynamique de la pale d'hélicoptère, une modélisation est proposée via des approches analytiques et numériques, les calculs des différentes énergies et travaux virtuels de la pale ont été développés. Aussi nous avons développé un modèle simple qui a été obtenu à l'aide de la méthode d'Hamilton, il est utilisé pour mettre en évidence les phénomènes de base en raison de sa simplicité, mais l'inconvénient de ce modèle c'est qu'il considère la pale comme poutre rigide.

La méthode des éléments finis est employée pour modéliser les systèmes réels, car elle est précise, la précision de calcul augmente avec le raffinement de maillage, mais ce dernier entraîne des coûts de calculs additionnels très importants.

Pour mener notre étude par simulation numérique, on a utilisé le code numérique ANSYS, qui est l'un des codes de calcul basé sur la méthode des éléments finis.

Dans notre analyse, on a utilisé l'analyse Structural dans ANSYS Structural, qui permet de traiter la majorité des problèmes de mécanique des solides et Fluent qui permet de traiter la majorité des problèmes de mécanique des fluides. Il offre des outils puissants pour l'analyse en deux et en trois dimensions.

Au futur, on souhaite pour approfondir la recherche sur ce sujet à considérer la force aérodynamique non linéaire distribuée sur la surface de la pale sans oublier l'écoulement de l'air, cela ouvre la voie à la continuation de cette recherche dans le domaine aérodynamique d'hélicoptère.

## Références Bibliographiques

- [1] F. Bourekba, O. Guerri, N. Nait Bouda, Simulation de l'écoulement autour d'un profil à l'aide d'une méthode DES, Revue des Energies Renouvelables, Centre de Développement des Energies Renouvelables, CDER ,2015
- [2] **John H. Doty et Daniel McManiman**, Quantification of the Nonideality of Air for Aerospace Applications, 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 2012, the University of Dayton.
- [3] **Sang Hoon Kim , Chongam Kim**, Separation control on NACA23012 using synthetic jet, Elsevier Masson,2008, Department of Aerospace Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, South Korea.
- [4] **IED-DOKKALI, L. EL BAKKALI**, La fatigue et calcul de contraintes de pale de section variable en mode de flexion, 13<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique 11 - 14 Avril 2017 (Meknès, MAROC).
- [5] **Abdelkader NOUR , Mohamed Tahar GHERBI , Yon CHEVALIER**, Modes shape and harmonic analysis of different structures for helicopter blade, 30th European Conference on Acoustic Emission Testing & 7th International Conference on Acoustic Emission University of Granada, 12-15 September 2012.
- [6] **F.L.M. dos Santos, B. Peeters , H. Van der Auweraer, L.C.S. Goes,W. Desmet**, Vibration-based damage detection for a composite helicopter main rotor blade, Case Studies in Mechanical Systems and Signal Processing 3 (2016) 22–27.
- [7] **Abdelkader Nour, Mohamed Tahar Gherbi, Imad Tawfiq**, Analysis of the Bauschinger effect on a multilayer helicopter blade by XFEM simulation, Aerospace Science and Technology, Aerosp. Sci. Technol. (2017).
- [8] **I. Tawk, J. Aubry, P. Navarro, J.-F. Ferrero**, Study of impact on helicopter blade, University of Balamand, Deir El-Balamand, El-Koura, Lebanon, vol. 24. pp. 38-45. ISSN 1350-6307 (2012).
- [9] **Florian Pascal, Pablo Navarro, Steven Marguet**, Study of medium velocity impacts on the lower surface of helicopter blades, Université de Toulouse, Institut Clément Ader – 3, rue Caroline Aigle, 31400 Toulouse France, Procedia Engineering 88- 93 – 100( 2014 ).
- [10] **A.R. Shahani, S. Mohammadi**, Damage tolerance approach for analyzing a helicopter main rotor blade, Department of Applied Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Engineering Failure Analysis 57 (2015) 56–71.
- [11] **Sachin.Goel**. Development of a Computational Design System for the Multi-Objective Aerodynamic Design Optimization of 2D Airfoils- Integration ». School of Engineering, Cranfield University
- [12] **Olivier.Marsden** Calcul direct du rayonnement acoustique de profils par une approche Curviligne d'ordre élevé, these de doctorat, école centrale de lyon, 2005
- [13] **LAZHAR BOUCHAOUR** Etude d'un écoulement incompressible autour d'un profil tournant, mémoire de magister, universite mentouri constantine, 2011
- [14] **R.W.Fox and A.T. McDonald**, An introduction to fluid mechanics, Ed.John Willey and Sons,1985
- [15] **KADRI Mohammed Ayoub**, Etude Numérique de l'écoulement d'air à travers une Eolienne Darriues de type H à pale NACA4412, mémoire magister, université kasdi

merbah Ouargla, 2014.

- [16] **J.P. PADET**, Fluides en écoulement, méthodes et modèles. Ed, Masson, Paris, 1991
- [17] **BOUDIS Ali** : « Comment améliorer les performances aérodynamiques d'une pale éolienne ». Bulletin des Energies Renouvelables 2015.
- [18] **David A. Neal, Matthew G. Good, Christopher O. Johnston, Harry H. Robertshaw,**
- [19] **William H. Mason, Daniel J. Inman**: Design and Wind-Tunnel Analysis of a Fully Adaptive Aircraft Configuration. 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Palm Springs, California, AIAA 2004-1727, 19-22 April 2004.
- [20] **Stepniewsky, W. Z.**, Rotor-wing Aerodynamics, Vol. 1 Basic Theories of Rotor Aerodynamics, Dover Publishing., Inc., N. Y., (1984).
- [21] **Prouty, R. W.**, Helicopter Performance, Stability and Control, Krieger Publishing Company, (1995).
- [22] **Padfield, G. D.**, Helicopter Flight Dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modeling, AIAA Education Series, (1996).
- [23] **Gianni NACCARATO**, "Instabilité du flottement gyroscopique des convertibles", thèse, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Centre de Paris, 2003.
- [24] **Gaffey T. M.**, "The effect of Positive Pitch-flap Coupling (Negative  $\delta_3$ ) on Rotor Blade, Motion Stability and Flapping", Journal of American Helicopter Society, April 1969.
- [25] **Johnson Wayne**, "The influence of Pitch-Lag Coupling on the Predicted Aeroelastic Stability of the XV-15 Tilting Proprotor Aircraft", NASA TM X-73,213, February 1977.
- [26] **Gianni NACCARATO**, "Instabilité du flottement gyroscopique des convertibles", thèse, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Centre de Paris, 2003.
- [27] **CHELLIL Ahmed**, Etude des charges aéroélastiques d'une pale en composite, thèse doctorat, université m'hamed bougara-boumerdes, 2013.
- [28] **LECHEB Samir**, Etude du comportement dynamique du rotor anti-couple d'un l'hélicoptère, Mémoire de Magister, , université m'hamed bougara-boumerdes, Juin 2008.
- [29] **Brent Bailey**, "Investigation of a Composite Hingeless Helicopter Rotor Blade with Integral Actuators", Department of Mechanical and Aerospace Engineering Carleton University Ottawa, April 17, 2000.
- [30] **M. Costes, P. Beaumier, N. Bettschart, P. Gardarein**, "Méthodes de calcul aérodynamiques appliquées aux hélicoptères", La Recherche Aérospatiale, 1995, no 3, pp. 167-184.
- [31] **Gherbi, M<sup>ed</sup>. Taher**, Modélisation par éléments finis d'une pale d'hélicoptère sous chargement aérodynamique, mémoire magister Université Boumerdès, Faculté des sciences de l'Ingénieur (2010).