كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية

قسم العلوم التجارية

مطبوعة دروس مقدمة لطلبة السنة الثانية علوم تجارية

بعنوان :

أساسيات بحوث العمليات

من اعداد الأستاذ : ضو نصر

الموسم الجامعي 2024/2023

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية

قسم العلوم التجارية

مطبوعة دروس مقدمة لطلبة السنة الثانية علوم تجارية

بعنوان :

أساسيات بحوث العمليات

من اعداد الدكتور : ضو نصر

الموسم الجامعي 2024/2023

قائمة المحتويات

مختصر معلومات المقياس

السداسي : الرابع

وحدة التعليم : منهجية

المادة : أساسيات بحوث العمليات

الرصيد: 04

المعامل: 02

نمط التعليم: حضوري

أهداف التعليم

تهدف هذا المادة التعليمية إلى تزويد الطالب ببعض التقنيات الإرشادية التي تستخدمها بحوث العمليات (البرمجة الخطية) لحل المشكلات بالمؤسسة. اضافة إلى التمكن من تحقيق أهداف المؤسسة باستخدام نماذج البرمجة الخطية المختلفة.

المعارف المسبقة المطلوبة

حتى يتمكن الطالب من دراسة محتوى هذه المادة لابد أن يكون متحكما في مادة الرياضيات خاصة الجبر الخطي والمصفوفات.

محتوى المادة:

- الفصل الاول : مدخل عام حول بحوث العمليات
- الفصل الثاني : البرمجة الخطية: الصيغة القياسية / الطريقة البيانية / طريقة السمبلكس
- الفصل الثالث : البرمجة الخطية: الثنائية أو الازدواجية
- الفصل الرابع : برمجة الأعداد الصحيحة: طريقة القطع
- الفصل الخامس : مشاكل النقل

طريقة التقييم: تقيم مستمر + إمتحان نهائي ويقاس معدل المادة بالوزن الترجيحي للدروس(60%) والأعمال الموجهة (40%)

قائمة المحتويات

	العنوان	رقم الصفحة
1	مقدمة	أ-ب
2	الفصل الاول : مدخل نظري لبحوث العمليات وتاريخها	25-4
3	الفصل الثاني : نماذج البرمجة الخطية	75 -27
4	الفصل الثالث : النموذج المقابل	88 -77
5	الفصل الرابع :برمجة الاعداد الصحيحة (طريقة القطع)	97-90
6	الفصل الخامس : نماذج النقل	116-99
7	الخاتمة	118
8	قائمة المراجع	122-120

المقـــدمة

مقدمة

لم تعد القرارات الإدارية في العصر الحديث ضرباً من ضروب الحدس والتخمين تعتمد على التجربة والخطأ ، وإنما أصبحت ترتكز على أساس علمي ، دعامته الطريقة العلمية في البحث وأساسه استخدام الأسلوب الكمي للتوصل إلى قرارات أكثر دقة وأصالة علمية .

وإذا كان أسلوب الإدارة التقليدية يتماشى مع الوضع في الماضي بكل ما صاحبه من ظروف ساهمت في الحفاظ عليه حتى عصرنا هذا ، إلا أن الإدارة اليوم تواجه نوعاً من التحدي الناتج عن زيادة أعبائها ، وعدم استقرار الظروف والعوامل المحيطة بها . لذلك فإن كل تقدم تحرزه في سبيل التغلب على هذا التحدي ومواجهته يحقق مزيداً من التقدم ليس فقط في المجتمع المحلي وإنما على مستوى المجتمع العالمي كله . فالإدارة لا تمثل أهمية بالغة للدول المتقدمة فقط ، وإنما تزداد أهميتها بالنسبة للدول النامية . فلولاها ما وصلت المؤسسات في الدول المتقدمة إلى المستوى الهائل من الكفاءة والقدرة الإنتاجية وبدونها سوف لا تحقق الدول النامية أهدافها في التقدم والرخاء .

كان لزاماً على المتخصصين في العلوم الإدارية البحث عن قواعد وأسس جديدة للعمل والسلوك الإداري، وذلك مثل بلوغ مستويات الجودة الشاملة ومقاييس المواصفات العالمية

(الأيزو) والإنتاج الآني وغير ذلك ومن هنا ازدادت الحاجة والرغبة نحو اعتماد أساليب علمية متطورة لترشيد القرار الإداري لكي يأتي متجانساً مع ما هو مطروح من تحديات أمام المنظمات الإدارية ومنظمات الأعمال إن هذه الأساليب في مجموعها تعرف باسم بحوث العمليات والذي عرف من قبل المختصين في العلوم الإدارية المنهج الكمي لدراسة الإدارة العامة حيث نمت وتطورت أساليب بحوث العمليات جنباً إلى جنب مع النمو والتطور الذي حصل في تقنيات الحاسوب والبرمجيات العلمية مما ساعد على توسعه وزيادة تطبيقه في الواقع العملي لمعالجة الكثير من المشاكل في وظائف منظمة الإدارة المختلفة (إنتاج ، أفراد ، خزين ، مالية ،.... إلخ)وسوف أحاول شرح بعض

التطبيقات لأساليب بحوث العمليات من خلال نمذجة هذه المشاكل وفق تكتيك رياضي معين حسب طبيعة ومتغيرات المشكلة .

وهذه المطبوعة عبارة عن مواضيع ومحاضرات خاصة بطلبة الليسانس وتتماشى مع المقرر السنوي الوزاري وتتاقلم مع مدة التكوين لسداسي واحد حاولت فيها اسقاط النظرة على العناصر التي تهم الطالب في مثل هذا المستوى فقط وهي لا تعني تخصصات وسنوات اخرى

الفصل الأول :

مدخل نظري لبحوث العمليات وتاريخها

المحاضرة الأولى : مدخل مفاهيمي لبحوث العمليات

تصنّف بحوث العمليات كفرع من فروع علم الرياضيات التطبيقية، وتعرف بعدةِ مُسميّات منها علم القرار، أو البرمجة الرّياضية، ويركز هذا الفرع على عملياتِ وطرقِ إيجاد الحلول المُثلى للمشاكل التي تواجه مُتخذ القرار في المنشآت والعمل على تحسينها، وتَدخل في عدّة مجالات كتطبيقات الهندسة، والعلوم الاقتصادية، والإدارية، والتسويقية، ومن أبرز الطُرق المُستخدمة في بحوث العمليات هي طرق النَّمذجة الرّياضية، والتّحليل الإحصائي، والمستخدمة غالباً لغايات الوصول إلى اتخاذ القرار الأمثل بين مجموعة من البدائل المطروحة. من الجدير ذكره أنّ لِبحوث العمليات أنظمة خاصة تَعتمد عليها في تحديدِ أفضل النّتائج المتوفرة واتخاذ القرار بناءً عليها، ومن هذه الأنظمة: البرمجة الخطية أو المعروفة بالسمبلكس، والبرمجة غير الخطية، والبرمجة الديناميكية، وبرمجة الأهداف، وبرمجة الأعداد الصحيحة، والبرمجة الاحتمالية، حيث يتم اختيار النّظام الأنسب وفقاً للحالةِ المدروسة، وسَنُركز الضوء في هذا المقال على البرمجة الخطية لِنتعرف على ماهيتها ومجالات تطبيقها، وشروط وخطوات استخدامها[1]

1/ التطور التاريخي لبحوث العمليات ومجالات استخداماتها:

يعتبر علم بحوث العمليات من العلوم الحديثة، حيث كان أول ظهور لهذا العلم سنة 1936 في بريطانيا ، إلا أن البداية الحقيقية لاستخدام هذا العلم كان أثناء الحرب العالمية الثانية، ويرجع تسميتها بهذا الاسم إلى العمليات الحربية التي كانت أولى مجالات استعمالاتها، بعدها تعدى استخدام هذا العلم المجالات العسكرية وأصبح يستخدم في المجالات المدنية ، وعرف عدة تسميات منها علم الإدارة، الطرق الكمية في الإدارة، وتحليل النظم، ومن أهم المجالات التي يمكن استخدام بحوث العمليات فيها هي[2]:

- المجالات الإدارية: حيث يوفر هذا العلم المعلومات اللازمة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب.

[1]–أكرم محمد عرفان المهتدي، "**الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية (بحوث عمليات)**"،ط1، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2004، ص: 13.

[2]– فتحي خليل حمدان، رشيق رفيع مرعي،"**بحوث العمليات**"، ط6، دار وائل للنشر، بدون بلد النشر، 2011، ص ص: 15،16.

مجال الإنتاج والتصنيع والبيع وبأقل تكلفة ممكنة وأقل فاقد ممكن وأعلى ربح.

- مجالات التعيين وذلك باختيار الشخص المناسب للوظيفة الملائمة.
- مجالات التخطيط من خلال متابعة المشاريع وإعداد الخطط الزمنية لتنفيذ المشاريع المختلفة.

ويمكن تصنيف أهم التطورات التي عرفها علم بحوث العمليات على النحو التالي[3] :

1-1 . استخدام بحوث العمليات أثناء الحرب العالمية :

تستخدم بحوث العمليات كما أسلفنا في الكثير من المجالات المدنية والعسكرية، وهنا في هذه الفقرة سنذكر استخدامات بحوث العمليات حسب المناطق :

استخدامه في بريطانيا: كان أول استخدام لهذا العلم في بداية الحرب العالمية الثانية، عندما دعت إدارة الحرب البريطانية فريقا من العلماء برئاسة البروفيسور " بلاكيت" Blackett p.m.s" من جامعة "مانشيستر" " Manchester " لدراسة المشاكل الإستراتيجية والتكتيكية المتعلقة بالدفاعين الجوي والأرضي لبريطانيا.

إلا أن هذه الدراسات لم تقتصر على الدفاع الجوي والأرضي فقط، بل امتدت الدراسات إلى البحرية البريطانية، حيث كان هذا الفريق يسعى إلى الاستخدام الأمثل للموارد الحربية المحدودة في تلك الفترة، وقد كانت النتائج التي حققها هذا الفريق باهرة ، كان من ضمنها تحسين منظومة الرادار وتحسين الدفاع المدني وغيرها.

هذه النتائج الجيدة التي حققتها إدارة الحرب البريطانية شجعت إدارة الحرب الأمريكية على إجراء دراسات مماثلة.

استخدامه في أمريكا : قامت الإدارة الأمريكية بتكوين فريق خاص لمعالجة بعض المشاكل المعقدة كمشكلة نقل المعدات والمواد المختلفة، وتوزيعها على الوحدات العسكرية المنتشرة في مناطق

[3]–صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم حداد،" **تطبيقات بحوث العمليات**"، ط1، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، ص:31.

مختلفة من العالم، ولقد كان كل من " James.B " (جيمس) رئيس لجنة استخدام بحوث الدفاع القومي، و "فانيفار" "Vannevare" رئيس لجنة الأسلحة والمعدات الجديدة وراء استخدام بحوث العمليات في المجالات العسكرية في أمريكا، حيث شاهدا استخدام هذا الأسلوب أثناء إقامتهما في بريطانيا أثناء فترة الحرب[4].

ونظرا للنجاح الذي تحقق في الولايات المتحدة الأمريكية بفضل استخدام علم بحوث العمليات، حيث مست التطبيقات مجالات أوسع من تلك التي تمت في بريطانيا، حيث واصل العسكريون اهتمامهم بهذا العلم من خلال وكالة بحوث العمليات، والتي تحولت فيما بعد إلى مؤسسة بحوث العمليات.

1-2/ استخدام بحوث العمليات في المجالات المدنية بعد الحرب العالمية الثانية :لقد كان لتطبيق علم بحوث العمليات أثناء الحرب العالمية الثانية في المجالات العسكرية أثرا إيجابيا كبيرا، مما شجع علماء الإدارة ورجال الأعمال الذين كانوا يبحثون عن حلول لمشاكلهم المتعلقة بالعمل، على إدخال هذا العلم على إدارة المشاريع الاقتصادية.

في بريطانيا: قام فريق من المهتمين بهذا المجال بتكوين نادي بحوث العمليات سنة 1948، والذي أصبح اسمه فيما بعد جمعية بحوث العمليات للمملكة المتحدة، والتي بدأت في إصدار مجلة علمية ربع سنوية ابتداءا من سنة 1950 والتي تعد أول مجلة في هذا المجال .

في أمريكا: تم تكوين جمعية بحوث العمليات الأمريكية، ومعهد الإدارة العلمية سنة 1950، وقد أصدرت هذه الجمعية مجلة بحوث العمليات سنة 1952، بعدها أصدر معهد الإدارة العلمية مجلة تخصصية في بحوث العمليات اسمها مجلة الإدارة العلمية وذلك سنة 1953 .

1-3/ استخدام بحوث العمليات في الوقت الراهن: نظرا لزيادة حجم النشاط الذي تقوم به المنظمات الإدارية المختلفة في الوقت الراهن، وتزايد التعقيدات التي تتسم بها الإجراءات الإدارية، وإدراك الإدارة لمدى أهمية القرار الإداري السليم، فقد تعدى اليوم استخدام بحوث العمليات مواطن نشأته، وأصبح يستخدم في كثير من دول العالم، كما تعدى أيضا مجالات استخداماته الأولى.

[4]-المرجع السابق، ص- ص: 31-32.

ويرجع هذا الانتشار الواسع لاستخدام الأساليب الكمية في المجالات الإدارية إلى انتشار الحاسب الآلي، حيث أثبتت إحدى الدراسات التي نفذت عل مجموعة كبيرة من الشركات الأمريكية عام 1991، أن تسع (09) شركات من أصل عشرة(10) تمثل تكنولوجيا المعلومات جزءا حيويا في عملهم [5].

هذا بالإضافة إلى ظهور البرامج العلمية المتطورة للحساب، والتي لها الأثر الواضح في دفع استخدام بحوث العمليات إلى آفاق واسعة بلغت مستوى التخطيط الاستراتيجي الذي يعتبر من أهم النشاطات التي تقوم بها الإدارة العليا؛ والذي يستعمل للتعرف على الأسباب الكامنة وراء المشاكل المستعصية ، والتي يمكن أن تمس عملية الإنتاج والتخزين والتمويل والنقل وغيرها من المشاكل التي يمكن أن تواجه المنظمة، كما تمكن الإدارة أيضا من تقييم السياسات البديلة للتشغيل والاستثمار، وتساعدها في تحديد احتياجات المؤسسة على المدى الطويل[6].

2- مفهوم بحوث العمليات :

لبحوث العمليات عدة تعاريف ومفاهيم نذكرها في التالي:

تعتبر الأساليب الكمية أو ما يعرف ببحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة في مجالات متعددة ومنها الإدارة، فهي تعتمد على مجموعة من الطرق والأساليب العلمية التي تساعد متخذ القرار على اختيار الأمثل لحل المشكلة من بين الحلول المتعددة لها. فعلم بحوث العمليات هو عبارة على مجموعة الأدوات والأساليب الكمية المختلفة التي تستخدم للمساعدة في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى لمعالجة المشكلات النابعة من محدودية الموارد لترشيدها وتحقيق الاستخدام الأمثل لها بما يضمن تحقيق أعلى فائدة مادية ممكنة منها. وقد وضعت جمعية بحوث العمليات البريطانية عدة مفاهيم لبحوث العمليات منها:

" عملية استخدام الأساليب العلمية في حل المشكلات المعقدة التي تنطوي على توظيف إعداد كبيرة من القوى العاملة والمعدات والمواد الأولية في المصانع والمؤسسات الحكومية".

---

[5] –علاء عبد الرزاق محمد السالمي: "**نظم دعم القرارات،ط1**"، دار وائل للنشر، عمان، 2005 ، ص 55.

[6]– مرجع نفسه ، ص 21.

ويمكن القول بأن البداية الحقيقية لظهور علم بحوث العمليات كان خلال الحرب العالمية الثانية بسبب المجهود الحربي للجيش البريطاني الذي تطلب تعبئة كافة الموارد النادرة بشكل أمثل خلال الحرب ومحاولة تخصيص هذه الموارد بما يخدم كافة العمليات العسكرية دون هدر أوضاع، حيث استعادت السلطات البريطانية عددا من الخبراء والعلماء لدراسة معطيات العسكرية بهدف تحقيق الاستخدام الأمثل للمعدات والوسائل القتالية المحدودة منت أجل تحقيق أفضل النتائج العسكرية بأقل خسارة مادية وبشرية ممكنة، وكنتيجة للبحوث التي قدمها هؤلاء الخبراء كسب الحلفاء العديد من المعارك فكانت بذلك الانطلاقة الأولى نحو توجيه مثل هذه البحوث للمجالات غير العسكرية كالاقتصادية والمالية والإدارية وغيرها لمساعدة المدراء في اتخاذ القرارات، فمن أبرز المجالات التطبيقية لبحوث العمليات في الإدارة هي مشكلات المخزون ومشكلات التخصيص الموارد ومشكلات الإحلال والاستبدال ومشكلات المنافسة.

وهناك عدة تعاريف لبحوث العمليات فهي باختصار تطبيق الطرق العلمية والعملية لحل المشكلات المعقدة التي تواجه الإدارات العسكرية (الصناعية، الإدارية، الهندسية...الخ).

أما جمعية بحوث العمليات الأمريكية فقدمت تعريفا مشابها للتعريف السابق إلا أنه تعريفا مختصرا حيث عرفت بحوث على أنها " تهتم باتخاذ القرارات العلمية لتصميم ووضع أنظمة المعدات والقوى العاملة وفق لشروط معينة تتطلب تخصيص الموارد المحدودة بشكل أمثل".

إن التعاريف السابقة تركز على النواحي الأساسية الآتية:

1- أن بحوث العمليات تستخدم الطريقة العلمية كأساس ومنهج في البحث والدراسة.
2- إن جوهر بحوث العمليات هو بناء النماذج والاعتماد عليها.
3- إن الهدف من بحوث العمليات هو مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات المتعلقة بالمشكلات الإدارية.

3- حدود استخدام بحوث العمليات: وتتمثل فيما يلي:

- إنها تتضمن الكثير من الصيغ والمعادلات والتعبيرات الرياضية للبيانات المستخدمة.

– تفترض ظروفا وشروطا عند صياغة الكثير من النماذج والمعادلات وهذه لا يمكن تطبيقها في الكثير من المشاكل الإدارية والصناعية ولذا فإن تطبيق هذه النماذج كم هي يقود إلى نتائج خاطئة.

– يتطلب تطبيق الأساليب الكمية أو بحوث العمليات الكثير من الخبراء واستخدام أجهزة الحاسوب.

– إنها لا تدرس العوامل النوعية التي لا يمكن التعبير عنها كميا مثل المهارات والقدرات والتصرفات وصدق الإداريين عند اتخاذ القرارات، فإن اعتماد الأساليب الكمية لن يكون مفيدا إذا ما كانت هذه العوامل النوعية حاكمة في عملية اتخاذ القرار.

– لا يمكن لأساليب بحوث العمليات الحلول محل الحكم الشخصي للمدير في موقف اتخاذ القرار فهي عبارة عن أدوات تستخدم في تحليل وتفسير المشاكل التي يكون فيها القرار عائد للعقل البشري.

– تتطلب أساليب بحوث العمليات معرفة نظرية وعملية في حقول علمية مختلفة فعند صياغة نموذج معين لابد أن يكون مستخدم الأساليب الكمية على معرفة نظرية وواسعة في الرياضيات والإحصاء وبحوث العمليات.

– إن عدم إيمان الإدارة وتعاونها أو وجود قناعة لديها بأن هذه الأساليب طورت في دول متقدمة ولا تصلح إلا لتلك الدول يعرقل كثيرا انتشارا تطبيق هذه الأساليب والاستفادة منها وكذلك هناك الكثير من الأدوات التي لا توفر البيانات للباحثين والمحللين الأمر الذي يعقد مهمتهم ويصعب عليهم الوصول إلى حلول للمشاكل التي يعالجونها.

4- خصائص بحوث العمليات:

أهم ما يميز بحوث العمليات عن غيرها من أساليب القرارات أنها[7]:

[7]– السعدي رجال، **بحوث العمليات (البرمجة الخطية)**، ط1، دار رجزو، قسنطينة، 2004،ص: 10.

– تركز على استخدام منهج النظم (مدخل النظم) والذي يعد بمثابة طريقة التفكير الكلي الشامل في المشكلة وتحليل أثارها على نواحي المنظمة وليس على الجزء (سلوك الجزء يؤثر ويتأثر بأجزاء الأخرى) الذي وقعت فيه المشكلة من أجل بلوغ القرار الأنسب للمنظومة ككل.

– تعتمد على طريقة العلمية في معالجة المشكلة وهذا الإجراء يعد من أهم المقومات والركائز التي يقوم عليها المنهج الكمي المساعد على اشتقاق البدائل المختلفة وتقيمها بدلالة المعيار الاقتصادي الذي يتماشى وطبيعة المشكلة.

– تكون نماذج رياضية للتعبير عن المشكلة منطقيا، هذه النماذج تعكس المتغيرات الهامة وذات العلاقة المتشابكة، وخاصة تلك التي تؤثر بشكل مباشر في المشكلة مع الاستعانة بالحاسوب الدعم بالبرمجيات المناسبة، ولإجراء العمليات الحسابية اللازمة للتوصل إلى حل.

– توضيح وتفسير وظيفة المعايير المستخدمة في تطبيق بحوث العمليات لدراسة وتقييم المتغيرات الموجودة لكل بديل من البدائل المطروحة لاتخاذ القرارات.

– الوصول إلى القرار الأنسب واختياره من خلال تطبيق المعادلات الرياضية التي تؤدي إلى مضاعفة وظيفة المعايير المستخدمة.

I.منهج بحوث العمليات في اتخاذ القرارات.

إن اتخاذ القرار هو جوهر ولب العملية الإدارية في أي مشروع، والقرار في حد ذاته هو اختيار حل من بين عدة حلول لمشكلة معينة.

وعليه فإن اتخاذ القرار هو اختيار أحد البدائل المتاحة في الخصوص بغية اتخاذ القرار الأمثل من حيث تحقيق الهدف والموضوعية.

لذلك فعملية اتخاذ القرار هي مجموعة متتالية من الخطوات والإجراءات التي تؤدي في نهايتها إلى اختيار أفضل الحلول البديلة، وإصدار الأوامر الخاصة بتنفيذها[8] .

[8]–سليمان محمد مرجان، مرجع سابق، ص 38

كما تعني عملية اتخاذ القرار مجموعة الخطوات التي يقوم بها متخذ القرار من أجل الوصول إلى الهدف الذي يسعى من أجله، وقبل توضيح الخطوات التي يتبعها متخذ القرار عندما يرغب في اتخاذ قرار معين، تجدر بنا الإشارة إلى أنواع القرارات أو الظروف التي تتخذ فيها مختلف أنواع القرارات، والتي يمكن تقسيمها إلى ثلاثة أقسام وهي:

1. **اتخاذ القرار في حالة التأكد التام:** وهذه هي أبسط أنواع القرارات التي تواجه متخذ القرارات، حيث يستطيع فيها تحديد نتائج كل بديل من البدائل المتوفرة بشكل مؤكد، والسبب يعود إلى توفر البيانات والمعلومات اللازمة حسب طبيعة المشكلة ، ومن تم فإن مهمة متخذ القرار في هذه الحالة هي اختيار البديل الذي يحقق أكبر عائد ممكن في ظل هذه الحالة المؤكد وقوعها.

2-. اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد(المخاطرة): تعرف هذه الحالة بعملية اتخاذ القرار تحت ظروف الخطر، حيث يحدد متخذ القرار عددا من الحالات أو الأحداث المتوقع حدوثها في المستقبل، وكذلك احتمالات حدوث كل حالة من هذه الحالات أو الأحداث، وغالبا ما يتم تحديد احتمالات وقوع هذه الأحداث بأحد الأسلوبين التاليين[9]:

2-1/ -الاحتمالات الموضوعية: وهي التي يتم حسابها على أساس تحليل البيانات التاريخية المتاحة أو المجتمعة من سنوات سابقة، وعلى أساس أن ما حدث في الماضي قد يتم حدوثه في المستقبل.

2-2/ - الاحتمالات التقديرية: وهي التي يتم تحديدها على أساس الخبرة والتقدير الشخصي أو استطلاع آراء الخبراء والمتخصصين، والمعايير المستخدمة في كلتا الحالتين تسمى بالاحتمالات التقديرية، أو معيار ما يطلق عليه بالقيمة المتوقعة

3-اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد التام: في حالة عدم التأكد التام يكون متخذ القرار غير متأكد من احتمالات الأحداث المتعددة وذلك لعدم وجود تجارب في الماضي يمكن لمتخذ القرار من تقدير هذه الاحتمالات.

[9] -نفس المرجع ، ص : 41

فمثلا نجد المنشآت الإنتاجية أو الخدمية التي تعمل في ظل النظم الاقتصادية تتسم قراراتها بحالة عدم التأكد كون أسواقها تكون غير متوازنة ويسودها الاضطراب من حيث علاقة العرض والطلب، وبالتالي تكون البيانات والمعلومات المتاحة حول نتائج القرار غير كافية، وفي مثل هذه الحالة على متخذ القرار اتخاذ قرار معين يعتمد على أحد المعايير المختلفة والتي تساعد متخذي القرارات على تحديد البديل الأفضل واتخاذ القرار الملائم، ومن هذه المعايير:

3-1/ - معيار أقصى الأقصى: maxi max

حيث يقوم متخذ القرار باختبار البدائل التي تحقق له أكبر عائد مادي، أي اتخاذ البديل المتفائل.

3-2/ - معيار أقصى الأدنى: maxi min

وفي هذه الحالة يتصرف متخذ القرار بنوع من التشاؤم، ويقوم باختيار أقل الفوائد.

3-3/- معيار أدنى الأقصى: mini max

في هذه الحالة يتصرف متخذ القرار بالتفاؤل الحذر، أي باختيار أفضل النتائج لكل بديل ثم يقوم باختيار أقل هذه النتائج.

3-4/-معيار أدنى الأدنى: mini mini

يتصرف متخذ القرار في هذه الحالة بدرجة كبيرة من التشاؤم، وهذه تكون في حالة كبيرة من عدم التأكد بالنسبة إلى متخذ القرار فيختار أقل عائد لكل بديل.

3-5/.- معيار الندم: اقترح العالم "سافاج" "savag" معيارا يرتكز على الدراسات النفسية، وأطلق عليه معيار الأسبق أو الندم، ويشير "سافاج" إلى أن متخذ القرار بعد اتخاذه للقرار والحصول على عائد معين قد يشعر بالندم لأنه يعلم في تلك الفترة بحالة الطبيعة التي حدثت، وبالتالي فهو يتمنى لو كان قد اختار بديلا آخر غير الذي تم اختياره.

وقد توصل العالم "سافاج" إلى أن متخذ القرار لا بد وأن يبدل جهده لتقليل ندمه .

وحتى يكون القرار جيدا يجب أن يكون ذلك القرار قد اتخذ بعد خطوات ومراحل متكاملة ومترابطة، والتي يمكن إدراجها فيما يلي[10]:

4- **تعريف المشكلة:**تعريف المشكلة هو حجر الأساس في نجاح أو فشل ا لقرار، إذ يجب التعرف على الظروف المحيطة بالمشكلة، وذلك بسبب اختلاف الظروف التي ربما تؤدي إلى اختلاف القرار، حيث يمكن تقسيم المشاكل حسب التصنيف التالي:

- **مشاكل روتينية:** وهي المشاكل المتكررة.

- **مشاكل حيوية:** وهي المتعلقة بالخطط والسياسات المتبعة في المشروع.

- **مشاكل طارئة:** وهي التي تحدث دون وجود مؤشرات على حدوثها، ويعتمد علاجها على قدرة المدير في اتخاذ قراره بسرعة وحزم .

وحتى تكون هناك مشكلة لا بد من توفر الشروط التالية:

* أن يكون هناك شخص أو مجموعة أشخاص، لهم حاجة تنتظر الإشباع أو الإرضاء، وهذا الشخص أو هذه المجموعة هي ما تعرف بمتخذ القرار.

* أن تكون هناك مجموعة من بدائل السلوك التي يمكن الاختيار من بينها.

* يجب أن تكون هناك بيئة للمشكلة قيد الدراسة، وفي بحوث العمليات فإن البيئة قد تكون جزءا من النظام المدروس. مثلا"وكالة، سوق، قسم الإنتاج في مصنع ما ..."

* أن يكون متخذ القرار غير قادر على تحديد أي تلك البدائل يعد الحل الأمثل لتلك المشكلة، أي يكون لدى متخذ القرار مشكلة إذا كان لديه هدف موجود بشكل فعلي، يريد تحقيقه، وأنه هناك طرقا بديلة لتحقيقه، وأنه غير قادر على تحديد أي تلك البدائل هو الأفضل.

[10]- نفس المرجع ، ص:42.

لذلك كان لا بد من تحديد المشكلة بشكل واضح، بحيث تمنع أي لبس أو غموض، وكخطوة أولى في تحديد المشكلة يجب تحديد هدف البحث، وتحديد العوامل ذات العلاقة بالحل والتي يمكن إخضاعها لرقابة الإدارة.

II. أنواع النمذجة :

يمكن تصنيف النماذج إلى أنواع مختلفة أهمها[11]:

1/- تصنيف النماذج حسب درجة التجريد: وتنقسم بدورها الى :

1-1 النماذج الطبيعية أو المادية: وهي النماذج التي تعتمد على استخدام أشكال مصغرة مشابهة للأشكال الحقيقية كما في مقاعد ومناضد وأشكال آلات مصغرة.

1-2- النماذج البيانية والتخطيطية: وهي أكثر تجريدا من النماذج الطبيعية وأقل تشابه بالحالة الواقعية التي تمثلها، وأمثلة هذه النماذج تتضمن الأشكال البيانية والمخططات والصور، وهذه النماذج تساعد على فهم الحالة الواقعية وتصورها من خلال عناصر أساسية.

1-3- النماذج الرياضية: وهي نماذج رمزية عالية التجريد لا تشبه الحالة الواقعية التي تمثلها حيث يستخدم فيها الأرقام والرسوم والمعادلات.

2- تصنيف النماذج حسب أغراضها :ومن أهم هذه النماذج ما يلي[12]:

1-2/ النماذج الوصفية: وهي النماذج التي تصف وتتنبأ بسلوك الحالة الطبيعية (أو النظام الواقعي)إلا أنها لا تتمتع بالقدرة على تحديد المسلك الأفضل للنشاط الذي يجب اعتماده. ففي مثال الوجبات السريعة فإن النموذج يصف الربح المحقق ويمكن أن يتنبأ بمقداره عند تحديد عدد الوجبات.

2-2-/ النماذج المعيارية: وهي تسمى أيضا نماذج الأمثلية وهذه النماذج تختلف عن النماذج الوصفية في أنها تحدد مسلك النشاط الأمثل، وفي بعض الأحيان المسلك الأفضل للنشاط.

[11]- نجم عبود نجم،**مدخل في الأساليب الكمية**،ط1، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان، 2013، ص:33،37.

[12]-نفس المرجع، ص ص:34، 35.

3- تصنيف النماذج حسب طبيعتها أو حسب درجة التأكد:

3-1- النماذج المؤكدة: وهي النماذج التي تفترض ظروف التأكد الكامل والمعرفة التامة بالحالة الواقعية وما سيكون عليه، وهذه تفترض أن كل قرار أو إستراتيجية تنتج نتيجة وحصيلة واحدة معلومة، ومن أمثلتها نماذج البرمجة والنقل والتخصيص والقرارات في حالة التأكد.

3-2- النماذج الاحتمالية: وهي النماذج التي تتعامل مع الحالات التي لا يمكن فيها التنبؤ بشكل مؤكد بنتائج النشاط الإداري، وهذه تفترض أن أي قرار يتخذ أو إستراتيجية تعتمد يمكن أن تنتج أكثر من نتيجة أو حصيلة واحدة.

4- تصنيف النماذج حسب سلوك خصائصها

4-1/- النماذج السكونية: وفيها قرار واحد يكون مطلوبا في فترة زمنية محددة وإن ظروف النموذج لن تتغير في هذه الفترة في عملية حل النموذج، ومن أمثلتها اغلب نماذج نظرية القرار.

4-2-/- النماذج الديناميكية: وفيها يكون على صانع القرار أن يتخذ مجموعة من القرارات المتعاقبة، وعموما هذه النماذج تعتبر الوقت واحدا من المتغيرات وتهتم بتأثيرات التغيرات الحاصلة مع الوقت، مما يجعل هذه النماذج تهتم بمراحل حركة الحالة الواقعية.

5- تصنيف النماذج حسب طريقة الحل

5-1/- النماذج التحليلية: وهذه تتضمن فئتين من النماذج[13]:

الفئة الأولى: وهي النماذج التي يتم التوصل فيها إلى الحل العام بشكل مجرد (باستخدام الرموز)،ويمكن أن توظف لحل مشكلة محددة بالتوصل إلى الحل الأمثل مباشرة وبدون الطريقة التكرارية لتحديد وتقييم البدائل.

[13]-نفس المرجع، ص ص: 36،37

الفئة الثانية: وهي المنهجية العامة أو الخوارزمية التي تمثل طريقة إجرائية تساعد على التوصل إلى الحل، وهذه الفئة من النماذج التحليلية تكون ذات عمليات تكرارية عديدة وبطبيعتها، ومن أمثلتها طريقة السمبلكس لحل مشكلة البرمجة الخطية.

2-5/- نماذج المحاكاة:ففي بعض المشكلات قد لا يكون ممكنا حل النموذج تحليليا (رياضيا)، ولكن يمكن استخدام المحاكاة لتحليل المشكلة، ومع ذلك فإن الحل الذي ينتج من عمليات المحاكاة لا يكون بالضرورة هو الحل الأمثل. ونموذج المحاكاة يحاكي (أو يقلد) سلوك المشكلة ويختبر النموذج في حالة المدخلات المختلفة التي تعطي حلولا مختلفة ليتم اختيار الحل الأفضل من بينهما.

6- تصنيف النماذج حسب سمتها الكمية أو النوعية

1-6/- النماذج الكمية: وهي تمثل القسم الأكبر من النماذج المستخدمة في علم الإدارة، وتعتبر النماذج موضوعية لأنها تعتمد على الحالة الواقعية وبياناتها المحددة.

2-6/- النماذج النوعية: وهي عادة تعتمد على التقديرات الذاتية والحدسية، وهي أكثر الأحيان تكون ذات طبيعة متخصصة وطويلة الأمد.

7 -كيفية بناء النموذجإن عملية صياغة النموذج أمر في غاية الأهمية والدقة، حيث أن الصياغة الصحيحة تؤدي إلى نتائج صحيحة، والعكس صحيح. والنموذج الرياضي ما هو إلا عرض مبسط للواقع في صورة رياضية، ويتم بناء النموذج عادة باستخدام الأدوات الرياضية التي تعبر عن العلاقات بين المتغيرات من خلال المعدات أو الدوال الرياضية المختلفة وغيرها، وكذلك لابد من خلال النموذج من التعبير عن هدف الحل، وهنا يمكن أن يكون للحل أحد الهدفين الأول هو التقليل من النفقات أو الخسائر لأقل حد ممكن وهذه حالة مسائل التقليل Minimum والثاني هو تعظيم الربح أو الربحية إلى أكبر ما يمكن وهذه حالة مسائل التعظيم Maximum ويتم حل النماذج من خلال مقاييس خاصة ندعوها بمقاييس المثلوية، والتي يتم من خلالها البحث عن حالات التعظيم والتقليل ومثل هذه المقاييس النقدية والمقاييس الزمنية، ومقاييس المسافة... وغيرها، ويمكن أن يتخذ القرار

لنفس المسألة باعتبار أحد هذه المقاييس دون غيرها، فمثلا يمكن أن نبحث في مشكلة إنجاز مشروع بناء لمطار بأقل تكاليف ممكنة.

ويتضمن أسلوب وثيقة بناء النماذج ثلاثة مراحل أساسية وهي[14]:

– تحديد المشكلة وتحديد المتغيرات، وهذه الأخيرة يجب أن تتطابق مع ما يريده المسؤول، هذه المتغيرات تسمى متغيرات القرار.

– تكوين الدالة الاقتصادية أو دالة الهدف، التي تترجم أولويات متخذ القرار على شكل دالة لمتغيرات محدودة.

– تكوين القيود، فمن النادر أن يكون لمتخذ القرار كل الحرية في الاختيار أو في ممارسة النشاط فالأغلب إن لم نقل دائما هناك حدود (قيود)لا يمكن لمتخذ القرار تجاوزها، هذه القيود أو الحدود تظهر في شكل معادلات أو متباينات رياضية هذا بالنسبة لمراحل النموذج أما بالنسبة لمن يقوم ببناء النموذج(متخذ القرار) فهو لا يملك في الحقيقة إلا المهارة لكي يتمكن من الصياغة الصحيحة للمشكلة على شكل نموذج صحيح، لأنه في الحقيقة ليست هناك طريقة محددة أو معينة بذاتها تبين بوضوح كيف يتم بناء نموذج، بل الأمر يتعلق بالمعارف النظرية التي يتلقاها متخذ القرار أي رصيده العلمي الذي تلقاه بالإضافة إلى مهاراته الشخصية، هذه الأخيرة من أحسن وسائل اكتسابها هي التمرن ومحاولة تطبيق ما تم تلقنه على حالات واقع

7– نظرة حول المعطيات والمعلومات

تعتبر المعلومات من أهم الموارد التي تعتمد عليها الحياة المعاصرة في مجالات مختلفة، حيث تقوم في بعض الأحيان استخدام البرمجة الخطية عندما نحاول تخصيص الموارد المحدودة والنادرة إلى حد ما والبرمجة الخطية هي إحدى أساليب بحوث العمليات المستخدمة على نطاق واسع.

عندما نتحدث على نظام الإدارة بربطه بالمعلومات فلابد لنا أن نتطرق إلى المعلومات والبيانات:

[14]–محمد سالم الغدي، **بحوث عمليات تطبيق وخوارزميات**، ط1، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 1999، ص ص: 19،20.

1. تعريف المعلومات:

تعد المعلومات العنصر الأساسي في مختلف الأنشطة التي تمارسها الإدارة، ولها أهمية كبيرة في عملية الاتصال، وتؤثر على فعالية المدير وأداءه في تسيير مهامه الإدارية، فقد أشير في عام (1998) بأن كلمة معلومات اشتقت من أصل لاتيني، الذي يني تعليم المعرفة ونقلها. وفي العصور الوسطى أصبحت تشير كلمة المعلومات إلى عمليات جمع المعلومات ونقلها وتوثيقها رسميا، ويعرف مصطلح المعلومات على أنه ما يمثل الحقائق والآراء والمعرفة المحسوسة في صورة مقروءة، أو مسموعة أو مرئية أو حسية، فيعرفها سلطان في عام 2000 بأنها عبارة عن بيانات تم تصنيفها وتنظيمها بشكل يسمح باستخدامها والاستفادة منها وبالتالي فالمعلومات لها معنى كما أشار مصطفى في عام 2006 في تعريفه للمعلومات بأنها ذلك الشيء الذي يجلب لنا المعرفة التي تعدل من رؤيتها للعالم من حولنا، والتي تخفض درجة الشك لدينا.[15]

- فالبيانات Date هي مواد وحقائق خام أولية ليست ذات قيمة بشكلها الأولي هذا، ما لم تتحول إلى معلومات مفهومة ومفيدة. فالمعلومات هي بيانات تم معالجتها وتحويلها إلى شكل له معنى، لذا فإننا نستطيع أن نقول بأن البيانات هي جزء من المعلومات.
- أما المعلومات فهي بيانات منسقة ومرتبة التي يمكن التفاهم والتواصل بموجبها. أي أنها مجموعة من البيانات المنظمة والمنسقة بطريقة توليفية مناسبة، بحيث تعطي معنى خاص وتركيبة متجانسة من الأفكار والمفاهيم، يمكن الإنسان من الاستفادة منها في الوصول إلى معرفة واكتشافها.[16]
- كما يعرفها البعض المعلومات أيضا بأنها عبارة عن بيانات Date تحت معالجتها بغرض تحقيق هدف معين يقود إلى اتخاذ القرار.

وعلى أساس هذه التعاريف، فغن البيانات هي مواد خام تعتمد عليها المعلومات، والتي تأخذ شكل أرقام أو رموز أو عبارات أو جمل لا معنى لها إلا إذا تمت معالجتها، وارتبطت مع بعضها البعض بشكل منطقي مفهوم لتتحول إلى معلومة أو معلومات.

2. خصائص المعلومات:

ونلخصها فيما يلي:[17]

[15] – أحمد الخطيب، خالد زيغان، **إدارة المعرفة ونظم المعلومات**، ط1، عالم الكتب الحديث للنشر والتوزيع، الأردن، 2009، ص ص: 67،68.

[16] – عبد الستار العلي وآخرون، **إدارة المعرفة**،ط1،دار الميسرة للنشر والتوزيع، عمان،2006،ص ص:113،114.

[17] – نعيم إبراهيم الظاهر، **إدارة المعرفة**،ط1،جدار للكتاب العالمي للنشر والتوزيع، عمان– الأردن، 2009،ص:181.

2-1- قابلية نقلها عبر مسارات محددة (الانتقال بالموجه) أو بثها على المشاع لمن يرغب في استقبالها.

2-2- قابلية الاندماج العالية للعناصر المعلوماتية، فيمكن بسهولة تامة ضم عدة قوائم في قائمة أو تكوين نص جديد أو فقرات يتم استخلاصها من نصوص سابقة.

2-3-بينما أتسمت العناصر المادية بالندرة وهو أساس اقتصادياتها، تتميز المعلومات بالوفرة لذا يسعى منتجوها إلى وضع قيود على انسيابها لخلق نوع من الندرة المصطنعة، حتى تصبح المعلومة سلعة لتخضع إلى قوانين العرض والطلب.

2-4- خلافا للموارد الأولية التي تنفذ مع الاستهلاك لا تتأثر موارد المعلومات باستهلاك بل على العكس فهي عادة ما تنمو مع زيادة استهلاكها.

2-5- سهولة النسخ، حيث يستطيع مستقبل المعلومة نسخ ما يتلقاه من معلومات بوسائل يسيرة للغاية.

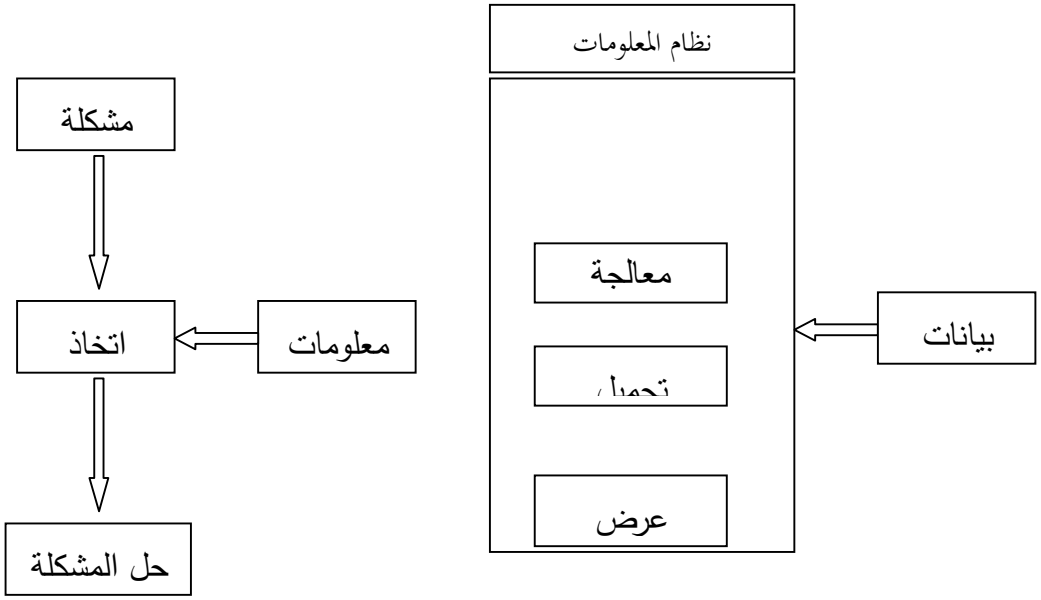
2-6- إمكان استنتاج معلومات صحيحة من معلومات غير صحيحة أو مشوشة، وذلك من خلال تتبع مسارات عدم الاتساق والتعويض على نقص المعلومات الغير مكتملة وتلخيصها من الضوضاء.

3. ضرورة التفرقة بين المعلومات والبيانات

إن هناك فروق بين البيانات والمعلومات، فالبيانات هي حقائق تم تسجيلها بشأن أحداث معينة تمت أو ستتم مستقبلا، أما المعلومات فهي بيانات تم معالجتها بشكل أعطى لها معنى بالنسبة لمستقبلها أو مستخدمها وهي قيمة حقيقية بالنسبة لعمليات صنع السياسات واتخاذ القرارات الحالية والمستقبلية ويمكن التعبير عن العلاقة بين البيانات والمعلومات، كما في الشكل التالي.[18]

[18]- أحمد الخطيب، خالد ريغان، مرجع سبق ذكره، ص ص: 68،69.

الشكل (01): يوضح الفرق بين المعلومات والبيانات



المصدر: أحمد الخطيب، خالد زيغان، إدارة المعرفة ونظم المعلومات،ط1، عالم الكتب للنشر والتوزيع، الأردن، 2009، ص69.

8-أساليب بحوث العمليات :

تقع أغلب أساليب بحوث العمليات ضمن تصنيفين عامين هما:[19]

- **الأساليب البيانية:** وتعتمد على المحاولة والخطأ.
- **الأساليب الرياضية:** وهي الأساليب التي تهدف إلى الحل الأمثل.

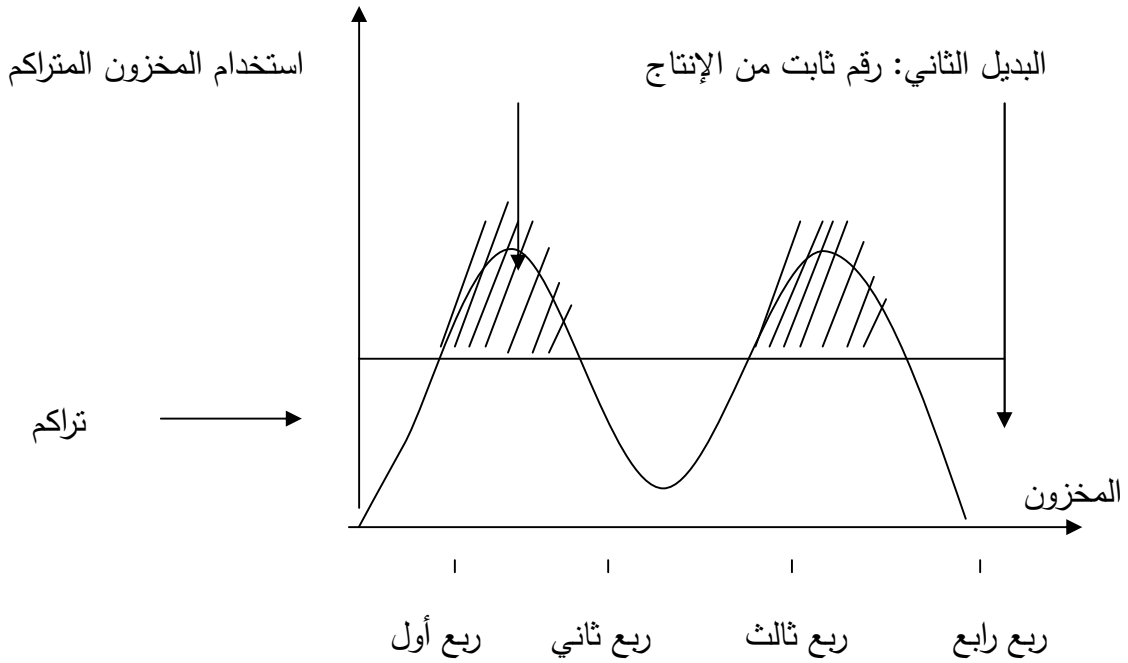
1- الأساليب البيانية:

تقوم هذه الطريقة على إعداد قائمة تتضمن أكثر من إستراتيجية لمواجهة الطلب المتقلب والتي يمكن عن طريقها تحديد أرقام الإنتاج، ثم تقدير التكاليف الإجمالية السنوية المترتبة على كل منها واختيار الإستراتيجية التي تحقق أقل التكاليف بينهما.[20]

[19]- محمد العزاوي،الانتاج وإدار العمليات –منهج كمي تحليلي-دار اليازوري للنشر،هما ن ، الاردن ،2006 ، ص:123.

[20]- محمد توفيق ماضي، محمد صالح الحناوي، **بحوث العمليات في التخطيط ومراقبة الإنتاج**، ط؟،الدار الجامعية، الإسكندرية،2006،ص ص:238،237.

الشكل (02): يوضح مستوى طلب منقلب على مدار العام



المصدر: محمد توفيق ماضي، محمد صالح حناوي، بحوث العمليات في التخطيط ومراقبة الإنتاج،ط:؟، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2006، ص:237.

يوضح هذا الشكل حالة افتراضية لمستوى طلب على مدار العام، والذي يمكن مواجهته عن طريق إستراتيجيتين:

1-1- الإنتاج المتغير حسب الطلب مع تغير حجم العمالة.

1-2- الإنتاج الثابت مع تغير حجم المخزون.

✓ أما في الحالة الأولى فسوف ينطبق منحنى الطلب المتوقع على منحنى الإنتاج ولا يوجد تكلفة تخزين، حيث أن كل ما ينتج يباع في ذات الفترة، بينما هناك نوع آخر من التكاليف هو تكاليف تغيير حجم العمالة. فسوف يقوم المشروع خلال النصف الأول من الربع الأول من العام بالاستغناء عن بعض العاملين ثم يقوم مرة أخرى بتعيين عاملين جدد حتى نهاية النصف الأول من الربع الثاني...

✓ أما في الحالة الثانية فسوف لا يترتب عليها تكاليف تغيير عمالة بينما سوف يترتب عليها تكاليف الاحتفاظ بالمخزون.

2- الأساليب الرياضية:

وهنا عدة أساليب وطرق رياضية لمعالجة مشكلة تخطيط الإنتاج الإجمالي والتي تحاول الوصول إلى الحل الأمثل لها ومن بينها نذكر ما يلي:[21]

- البرمجة الخطية.
- مشاكل النقل.
- مشاكل التخصيص (التعيين).

2-1- البرمجة الخطية:[22] تسعى نماذج البرمجة الخطية في التخطيط الإجمالي إلى خطة إنتاج مثلى، إذ باستطاعة نماذج البرمجة الخطية أن تتعامل مع عدد كبير من المتغيرات والقيود، حيث يمكن استخدام نماذج البرمجة الخطية لتحيد المستويات المثلى من الخزين والطلبات المتأخرة وكميات المتعاقد عليها باطنيا وكميات الإنتاج بوقت إضافي.

2-1-1- افتراضات البرمجة الخطية: وتمثل افتراضات البرمجة الخطية شروط أساسية يجب المحافظة عليها في بناء النموذج لضمان الاستخدام السليم للنموذج. ونعرض فيما يأتي الافتراضات بشكل موجز:[23]

2-1-1-1- التناسبية: إن دالة الهدف يجب أن تكون متناسبة خطية مع مستوى استخدام متغيرات القرار، إن شرط الخطية تجعل هذا النموذج مختلفا عن النماذج الأخرى ويخضع لمجموعة القيود، حيث تتمثل في دالة خطية تعطى بالعلاقة التالية: $Y= a+bx$

حيث: x: متغير مستقل

Y: متغير تابع

2-1-1-2- الإضافية: ولتوضيح هذا الافتراض فإن كل نشاط يضاف بالعلاقة مع الموارد يتحد بمجموعة القيود، ففي مشكلة المزيج الإنتاجي لمنتجين مثلا (x2-x1)، المنتج (x1) لا يؤثر على ربحية المنتج (x2) مهما أنتج من (x1) والعكس صحيح.

2-1-1-3- التأكد: البرمجة الخطية تفترض أن تكون متغيرات القرار ومعاملات القيود معلومة وثابته. ففي مشكلة المزيج الإنتاجي مثلا فإن الربح الناتج عن الوحدة الواحدة من المنتوج(x1) والمنتوج (x2) يكون معلوما وثابتا.

---

[21]- محمد العزاوي، مرجع سبق ذكره، ص:123.

[22]- نفس المرجع،ص:124.

[23]- نجم عبود نجم، مرجع سبق ذكره،ص:191،193.

2-1-1-4- قابلية القسمة: إن هذا الافتراض يشير غلى أن متغيرات القرار يمكن أن تأخذ قيم كسرية، ففي مشكلة المزيج الإنتاجي يمكن أن تكون متغيرات القرار مواد أولية أو ساعات عمل وبالتالي فإن(0.2)وحدة من مادة أولية أو من ساعات عمل تكون قيمة ممكنة.

2-1-1-5- عدم السلبية أو السالبية: وهذا الافتراض سهل الفهم لأنه مثلا في مشكلة المزيج الإنتاجي من غير الممكن توقع أن تنتج أقل من الصفر وبالتالي فإن $(x1.x2 \geq 0)$ وهذا هو مضمون هذا الافتراض.

2-1-2- نموذج البرمجة الخطية

وهناك حالتين لدالة الهدف، حالة أقل تكاليف وحالة تعظيم الأرباح.

- حالة أقل تكاليف: سنرمز إلى التكاليف بـ CJ كما يلي:

Min

ومنه: $Min\ Z = \sum_{j=1}^{m} (X_j . C_j)$

- حالة تعظيم الأرباح:[24] سنرمز إلى الأرباح بـ k_jكما يلي:

$$Min\ Z = X_1K_1 + X_2K_2 + X_3K_3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots + X_nK_n$$

ومنه: أن $X_j \geq 0$ حيث J=1.2.3

أما بالنسبة للقيود فيعبر عنها كالتالي:

$A_{11}X_1$

$A_{21}X_1$

$A_{m1}X_1$

أما في حالة Min فتكون القيود من الشكل:

[24] فريد النجار، بحوث العمليات في الإدارة، ط1، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2009، ص199.

$A_{11}X_1$
$A_{21}X_1$

$A_{m1}X_1$

حيث $X_j \geq 0$

2-2- مشاكل النقل: تعتبر مشكلة النقل حالة خاصة من البرمجة الخطية والتي يمكن حلها بطريقة أكثر كفاية من طريقة السمبلكس بسبب طبيعة تكوينها . وهي تعالج بصفة عامة مشاكل نقل البضائع وتوزيعها . إلا هذا لا يمنع من استخدام نموذج مشكلة النقل بعد تعديله في حل مشاكل أخرى مماثلة من حيث التكوين ولا يشترط أن يكون لها علاقة بالمواصلات ونقل البضائع.

2-3- مشاكل التخصيص:[25] تعتبر نماذج التعيين إحدى أشكال البرمجة الخطية فهي على سبيل المثال تعتبر عدد أفراد عارضي العمل تساوي عدد الفرص المطلوبة أي حالة التوازن باعتبارها مبدأ تقوم عليه عملية التخصيص. كما يمكن أن ينظر إلى التعيين على أساس أنه إحلال عامل محل آخر أو موقع محل آخر يأخذ بنظر الاعتبار تكاليف الفرص البديلة المضحى بها.

وكمصطلح تعتبر مشكلة التخصيص:[26] هي مشكلة تدفق الشبكي يتم فيها غالبا تخصيص للوكلاء على المهام، من الممكن صياغتها كمشكلة برمجة خطية وهي حالة خاصة من مشكلة النقل.

2-3-1- شروط نموذج التخصيص: ومن أجل استخدام طريقة تخصيص في هذه المسائل لابد من أن تتوفر بعض الشروط وهي:[27]

- أن عدد الصفوف (الأعمال مثلا) يجب أن يتساوى مع عدد الأعمدة (الآلات مثلا).
- أن كل عمل من الأعمال يجب أن يخصص لآلة واحدة فقط (عدم جواز تخصيص أكثر من عمل لعدة آلات).
- إن كل آلة من الآلات تستطيع القيام بأي عمل من الأعمال.

[25]- عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، **مدخل لبحوث العمليات**،ط:1،دار وائل للنشر والتوزيع، عمان- الأردن،2001،ص:127.
[26]- محمد توفيق البلقيني، مرفت طلعت المحلاوي، مرجع سبق ذكره، ص:516.
[27]- نجم عبود نجم، مرجع سبق ذكره، ص:370.

❖ وأخيرا إن تكلفة القيام بكل عمل من الأعمال على أية آلة من الآلات تكون معروفة وثابتة.

2-3-2- طرق التخصيص:

وهناك مجموعة من الطرق يمكن استخدامها في حل مسائل التخصيص منها:[28]

2-3-2-1- طريقة العدد الكامل (التوافيق):

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص وتعتمد على عدد المرات التي يمكن بها التوافق بين البدائل المحتملة لكل مشكلة تخصيص تساوي مضروب عدد الصفوف او البدائل عدد الأعمدة، فإن كان عدد الصفوف أو الأعمدة يساوي ثلاث مثلا، فإن عدد البدائل المحتملة لعملية التخصيص تساوي 3*2*1=6 بدائل.

2-3-2-2- الطريقة الهنجارية:

إن من أبرز عيوب طريقة الحد الكامل أنها تستخدم فقط لإيجاد الحل الأمثل في حالة المسائل ذات المتغيرات قليلة العدد فتصبح غير كفؤة في حالة المسائل الكبيرة ذات المتغيرات الأربعة وما فوق، لهذا السبب تم تطوير أسلوب يعد أكثر كفاءة في إيجاد الحل الأمثل على يد الرياضي المجري د.كوينج الذي بنى نموذجها وعرفت بالطريقة الهنجارية والتي تتميز بقدرتها على التعامل مع المشاكل ذات المتغيرات الكثيرة ودون الحاجة إلى إجراء مقارنات للبدائل المتاحة لاختيار البديل الأمثل الذي يحقق الحل الأمثل.

[28]- أكرم محمد عرفان، مرجع سبق ذكره، ص:158،161.

الفصل الثاني :

نماذج البرمجة الخطية

الفصل الثاني : نماذج البرمجة الخطية

I.مدخل نظري حول البرمجة الخطية :

تقدمت وسائل التحليل الرياضي للمشاكل الإدارية والاقتصادية تقدما كبيرا وتعتبر البرمجة الخطية إحدى هذه الوسائل وقد استخدمة كلمة Programming كاداه تهدف إلى استغلال الموارد المتاحة للمنشاة من قوة عاملة ومواد أولية الخ لتحقيق اكبر عائد ممكن، وتهدف البرمجة الخطية إلى الإجابة باسلوب التحليل الرياضي على بعض الأسئلة وحل المشاكل بما يحقق اكبر ربح ممكن أو اقل تكلفة ممكنة في ظل القيود والمحددات القائمة[1]

تسعى نماذج البرمجة الخطية في التخطيط الإجمالي إلى خطة إنتاج مثلى، إذ باستطاعة نماذج البرمجة الخطية أن تتعامل مع عدد كبير من المتغيرات والقيود، حيث يمكن استخدام نماذج البرمجة الخطية لتحيد المستويات المثلى من الخزين والطلبات المتأخرة وكميات المتعاقد عليها باطنيا وكميات الإنتاج بوقت إضافي.

1/. **تعريف البرمجة الخطية:** يمكننا إعطاء عدة تعاريف للبرمجة الخطية وذلك باختلاف أراء المفكرين والمنظرين ، وفيما يلي بعض التعاريف التي تناولت هذا الموضوع:

- **البرمجة الخطية** هي أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة أي أن يكون توزيعها مثالياً، وتعتبر نماذج البرمجة الخطية من أبسط وأسهل النماذج الرياضية والتي يمكن إنشاؤها لمعالجة معضلات البرمجة الصناعية والحكومية الكبرى.
- **البرمجة الخطية** أسلوب رياضي يساعد على إستخدام كفء للموارد الإقتصادية المتاحة و ذلك إما بهدف تعظيم المنافع كالأرباح أو تدنية التكاليف ،وتعتبر البرمجة الخطية بمثابة أداة يمكن للإدارة استخدامها في تسهيل عملية اتخاذ القرار.

[1] – عبدالرسول عبدالرزاق الموسوي " :**المدخل لبحوث العمليات**"،دار وائل للنشر،الأردن، 2001 ،ص21

- **البرمجة الخطية** بصفة عامة بأنها أسلوب رياضي يمكن من الحصول على أفضل حل للمشاكل التي يكون لها عدت حلول ممكنة بديلة و تستخدم البرمجة الخطية عادة للمساعدة في حل المشاكل التي تتضمن توزيع الموارد المحدودة على الأنشطة المختلفة التي تتنافس على إستخدام هذه الموارد و تستخدم البرمجة الخطية نماذج رياضية لوصف المشكلة.
- **البرمجة الخطية** أسلوب رياضي بحث يستفاد منه في إيجاد الحلول المثلى للمشاكل الإقتصادية التي تواجه الوحدة الإنتاجية، فهي تبين ما يجب أن تكون عليه الأوضاع في ظل افتراضات و أهداف معنية و لكن لا تستطيع و صف الظواهر الإقتصادية كما هي عليه. ومن خلال التعاريف السابقة الذكر يمكن إعطاء تعريف شامل **للبرمجة الخطية** بأنها أسلوب رياضي تمكن من الحصول على أفضل حل للمشاكل و ذلك بالتوزيع الكفء للموارد المتاحة على الأنشطة المتنافسة لاستخدامها بهدف تعظيم المنافع كالأرباح أو تدنيه التكاليف لا كتساب ميزة تنافسية و كما تساعد في إتخاذ القرارات المناسبة[2].

2- التطور التاريخي للبرمجة الخطية:قدم جورج دانتزج(Gearge Dantzig)في عام 1947 ما عرف بأسلوب السمبلكس(simplex méthode)الذي يستخدم في حل المشكلة العامة للبرمجة الخطية، و قد اعتمد **دانتزج** على أن دالة الهدف و القيود المستخدمة يمكن وضعها في شكل علاقات خطية و بالتالي يمكن استخدام قواعد جبر المصفوفات في حل تلك المجموعة من المعادلات معا مع مراعاة أن يكون الحل النهائي هو أفضل الحلول بناء على دالة الهدف،ولحسن الحظ فهناك أسلوب أبسط يستخدم في إيضاح ماهية المشكلة وكيفية حلها وهو أسلوب الرسم البياني و لكن يجاب عليه أنه لا يستخدم إلا في حالة وجود إستخدامين فقط (سلعتين) .

و على الرغم من التعقيد الرياضي الذي يتصف به إثبات و اشتقاق أسلوب السمبلكس إلا أن خطوات الحل سلسلة و محددة خصوصا في حالة المشاكل الصغيرة، و قد ساعد وجود الكومبيوتر .

3-إستخدامات البرمجة الخطية : تستخدم البرمجة الخطية في أهم المجالات التالية:

[2]- Gérald Baillargeon ,"**Programmation linéaire appliquée**", les édition SMG ,Québec ,Canada,1996 .p 05

3-1 مشاكل الإنتاج:كتحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل نوع من المنتجات، التي ينتجها المشروع بالشكل الذي يعظم الأرباح، و ذلك في ظل إمكانيات مختلفة

3- 2المزيج الإنتاجي:في كثير من الصناعات، هناك عدد من المكونات أو العناصر التي تخلط مع بعضها وبنسب معنية لتعطي منتجا آخرا جديدا كصناعة الأعلاف و الأدوية والأسمدة ....الخ.والهدف هنا هو تحديد الكميات التي يجب استخدامها من كل عنصر،وذلك لصنع المنتج الجديد عند أقل تكلفة ممكنة مع ضمان وجود خصائص إنتاجية معنية في ذلك المنتج.

3- 3 تخطيط الاستثمارات : لنفترض أن هناك مبلغا ماليا معينا و يراد تحديد مقدار ما ينفق على عدد من البدائل الإستثمارية وذلك لجعل مجموع العوائد السنوية أكبر ما يمكن علما بأن المشروع ليس لديه أية أموال أخرى، عدا هذا المبلغ و يمكن علاج هذا النوع من المشاكل باستخدام البرمجة الخطية .

3-4 التخطيط للدعاية والإعلان: في هذا النوع من المشاكل يكون الهدف هو تحديد حجم الأموال التي يجب صرفها على مجموعة مختلفة من وسائل الإعلان، من أجل ترويج السلعة المنتجة بفعالية مثلي، وذلك تحت عدد من القيود، مثل قدرة السوق الإستيعابية،و محدودية الموارد المالية، و الحدود المفروضة على استخدام كل وسيلة من تلك الوسائل الإعلانية.

3-5 مشاكل الشحن : كم عدد الوحدات التي يجب شحنها من عدد من المنتجات المختلفة و ذلك باستخدام وسيلة نقل معنية ذات طاقة تحميلية محدودة لتعظيم الأرباح في الوقت الذي يراد فيه نقل كميات معنية مطلوبة من السلعة المنتجة .

4- أساليب بحوث العمليات: تصنف الأساليب والنماذج إلى عدة تصنيفات، وذلك تبعاً للمعايير المعتمدة في التصنيف وسنحاول ذكر بعض هذه المعايير كالتالي:

4-1 تصنيف رئيسي للأساليب:بموجب هذا التصنيف، تصنف النماذج إلى:

4-1-1 أساليب قياسية(معيارية):وهي تهدف إلى وصف مايجب أن يكون عليه الواقع، مثل نموذج **البرمجة الخطية**، مشاكل النقل، نماذج التعيين (التخصيص) ، البرمجة الديناميكية، نماذج التدفق الأعظمي وماشابه ذلك.

4-1-2 أساليب وصفية: وتستخدم للتعبير عن الظواهر والعلاقات بين المتغيرات، بالإعتماد على الوصف، حيث يمكن أن يكون هذا الوصف شفويا وكتابيا،ومن أمثلتها نماذج المحاكاة **S**umalation Porgramming، ونماذج صفوف الإنتظار Files d attente.

4-2تصنيف الأساليب حسب تدرج تجردها: حسب هذا التصنيف تقسم الأساليب إلى:

4-2-1 الأساليب المجسدة: وهي نماذج تستخدم بهدف مشاهداتها على أرض الواقع، وعرض صورة مجسدة عنها، مثال ذلك نموذج السيارة.

4-2-2 الأساليب المجردة: وهي التي تصف الواقع المدروس دون الحاجة إلى عملية التجسيد بل تكتفي بطريقة الكتابة،أي عرض الواقع على شكل علاقات رياضية.

4-2-3 الأساليب الرياضية: هي مجموعة من المعادلات والمتراجحات التي تبين العلاقات بين المتغيرات، وذلك بالإعتماد على إستعمال الرموز وعادة مايضم النموذج الرياضي متغيرات ومؤشرات.وتنقسم الأساليب الرياضية إلى أربعة أنواع رئيسية وهي:

II. أساليب البرمجة الخطية :

هناك نوعان من الاساليب للبرمجة الخطية وهما [3]:

1- الأساليب الرياضية للبرمجة الخطية:وهي أساليب رياضية مكونة من متغيرات وعلاقات واضحة لدى متخذ القرار، أي لا تتأثر بالمؤشرات الإحتمالية الداخلية أوالخارجية التي من شأنها التأثير في علاقات المشكلة المدروسة، وبتالي على صياغة النموذج الرياضي، ومن هذه النماذج نذكر:

- ✓ نموذج البرمجة الخطية، والنموذج الثنائيDual.
- ✓ مشكل النقل والتخصيص Problème de transport et spécification.

[3]-محمد العزاوي، مرجع سبق ذكره، ص:123.

- ✓ نموذج البرمجة اللاخطيةnon linéaire Porgrammation ومن أهمها نماذج السيطرة على التخزين.
- ✓ نماذج البرمجة الديناميكية Porgrammationdynamique.
- ✓ نماذج شبكات الأعمال (المشاريع) .

2-الأساليب الرياضية الإحتمالية: وهي نماذج تتكون متغيرات وعوامل غير واضحة بشكل تام، كما لايمكن السيطرة عليها بالكامل من قبل متخذ القرار،وهذا يعود إلىطبيعة المشكلة المدروسة، وماتنطوي عليه من عوامل ومتغيرات إحتمالية أو عشوائية،ومن أمثلة هذه النماذج :

- ✓ نموذج نظرية صفوف الإنتظار Files dattente
- ✓ نموذج المعولية (الموثوقية) La Surete.

- **الأساليب ذات الطبيعة الإستراتيجية:** يعتمد متخذ القرار في صياغة النماذج، على موقف أو ردود أفعال الطرف الأخر، الذي يتنافس معه حول هدف مشترك، وبالتالي فصياغة النموذج تعتمد على المعلومات التي تخص الطرف الأخر، والصياغة تكون بسيطة في حالة وجود متنافسين فقط، وتعتمد عملية بناء النموذج في حالة تعداد الأطراف المتنافسة في هذه العملية، ومن بين الأمثلة الرياضية على هذه النماذج الإستتراتيجية، نماذج نظرية الألعاب(المباراة) .
- **-الأساليب ذات الطبيعة الإحصائية والحسابية:** من بين الأمثلة هذه النماذج نموذج الوسط الحسابي، ونموذج الإرتباط الخطي وكذا نموذج الإنحدار الخطي،والذي تتم عملية التقدير معالمه وفق طريقة المربعات الصغرى العادية(MCO)،هذه النماذج تدعى بالنماذج الإحصائية، أما النماذج الحسابية فتتمثل في نموذج أقساط الإهتلاك المحاسبي، هذه الأنواع من النماذج بصورة عامة لها إستعمالات ثابتة ومعروفة وتتسم بالبساطة والخطية .

III. **شروط البرمجة الخطية :** هناك عدد من الشروط ينبغي توافرها عند استخدام البرمجة الخطية، ومن أبرزها ما يلي[4] :

[4]- محمد توفيق ماضي، محمد صالح الحناوي،"**بحوث العمليات في التخطيط ومراقبة الإنتاج**"، ط؟،الدار الجامعية، الإسكندرية،2006،ص ص:237،238.

- وجود هدف واضح و محدد و هو ما يمثل دالة الهدف، و الذي يعبر عن أقصى عائد أو أدنى كلفة، إذ لا بد من التعبير عن ذلك الهدف بنموذج رياضي .
- وجود عدد من المتغيرات، إذ يتأثر حدوث أي تغير فيها على القرارات المتخذة من قبل الإدارة، و يمكن زيادتها أو تخفيضها حسب الخطة الموضوعة لحل المشكلة المطروحة ومن ثم سوف تؤثر هذه الزيادة أو النقصان على الهدف المطلوب تحقيقه .
- وجود علاقة خطية بين المتغيرات و درجة تحقق الأهداف و يمكن تمثيل هذا الشرط رياضيا، أي يتم التغيرات عن دالة الهدف و القيود على هيئة معادلات أو متباينات من الدرجة الأولى .
- إمكانية التعبير عن الفعاليات أو المتغيرات موضوع البرمجة بصورة كمية، إن هذا الشرط يشير مثلا إلى ضرورة التعبير عن رأس المال بعدد من الدنانير أو الأيدي العاملة بعدد العاملين أو الطاقة الإنتاجية المتاحة بعدد الساعات المتوافرة في العمل خلال مدة زمنية معنية (أسبوع، شهر، سنة، و هكذا).
- وجود عدد من القيود أو المحددات تعبر عن محدودية الموارد المتاحة مثل الأيدي العاملة المواد الأولية، المكان ورأس المال المطلوب، والتي تستلزم الاستخدام الأمثل لتلك الموارد بسبب المنافسة الشديدة للحصول عليها.
- ينبغي أن تكون المتغيرات المختلفة و الممثلة للقيود أكبر أو مساوية للصفر، وهو ما يطلق علبه بشرط عدم السلبية .

IV. صياغة نموذج البرمجة الخطية:

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية. و نعني بالنموذج هو التعبير عن علاقات واقعية بعلاقات رياضية مفترضة و مبنية على دراسة الواقع و تحليله وتبعا لصيغة المسألة يمكن تقييم النموذج إما بيانيا أو رياضيا.و بعد الانتهاء من تكوين النموذج الملائم يجب التأكد من مطابقته للمشكلة قيد الدراسة ثم الإنتقال إلى المرحلة التالية و المتمثلة في تقييمه و تحليله للتعرف على تأثيرات العوامل المختلفة في المشكلة و الوصول إلى الحل المناسب، ولكن ليس

لكل مشكلة يمكن حلها بأسلوب البرمجة الخطية حيث يتطلب حل المشكلة بأسلوب البرمجة الخطية أن تتوافر الشروط التالية[5]:

1/ تحديد دالة الهدف Function objective:وهو الهدف المنشود والذي نرغب في تحقيقه وإمكانية التعبير عن هذا الهدف في صورة دالة خطية linearfunction والحصول على قيمة رقمية له ومحاولة تعظيمهذه القيمة وإيجاد النهاية العظمى لهاA Maximum Point إذا كان الهدفالمنشودربحا أو تقليل القيمة وإيجاد النهاية الصغرىA Minimum Point إذا كان الهدف تكلفة أي الوصول إلى أدنى تكلفة ممكنة، وتتكون دالة الهدف من المتغيرات، أما المعامل الخاص بكل متغير هو عبارة عن ربح الوحدة الواحدة في حالة تعظيم دالة الهدف أو يكون المعامل عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة الهدف.

2/ تحديد القيود (الموارد) Contraints:أي إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والإمكانيات المتاحة في صورة قيود خطية Linear Contraints **وهي** توضح ماتحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة بشكل متراجحات LinearInequalities أو معادلات خطيةLinear Equationsأو خليط منها وتسمى بالقيود الهيكلية.

3/ شرط عدم السلبية Non- Negativiy:إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة.

تمارين محلولة في كيفية صياغة نموذج البرمجة الخطية:

لتوضيح عملية صياغة نموذج البرمجة الخطية سنطرح بعض الحالات التالية:

التمرين الاول : تنتج إحدى الشركات نوعين من السلع، نوع A ونوع Bتصنع كل سلعة على ثلاث مراحل كل مرحلة في احد الأقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فإذا كان تصنيع السلعة Aيحتاج إلى ساعتين عمل في القسم الأول وساعة عمل في القسم الثاني وأربع ساعات عمل في القسم الثالث ويحتاجتصنيع السلعة B إلى ساعتين عمل في كل قسم كما أن عدد ساعات العمل المتاحة

[5]- نفس المرجع،ص:124.

في القسم الأول هي 160 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثاني 120 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثالث 280 ساعة وإذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو 3 دينار ومن السلعة B عمل أسبوعيا . هو 2 دينار. **والمطلوب:** ايجاد البرنامج الخطي لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين إذا كان هدف الشركة هو الحصول على أكبر ربح ممكن.

الحل: لتسهيل فهم المشكلة نضعها على شكل جدول كالتالي :

السلع	الوقت اللازم للتصنيع			الربح
	القسم الأول	**القسم الثاني**	**القسم الثالث**	بالدينار
السلعة A	**2**	**1**	**4**	**2**
السلعة B	**2**	**2**	**2**	**3**
الوقت المتاح	**160**	**120**	**280**	

تكوين النموذج:

- تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية ولذلك نفرض أن : X_1 هو السلعة A و X_2 هو السلعة
- تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات أو متراجحات أو خليط منها:

والقيود هنا هي أن الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود ويجب أن نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ أن الوق تاللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة من السلعة A و B

بالنسبة للقسم الأول :الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة A) مضروب في (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة A) + (عدد الوحدات المنتجة من السلعة B) مضروب في (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة B)، ويجب أن لايتجاوز عددالساعات العمل المتاحة في القسم الأول وكما في المتراجحة الآتية:

$$2X_1 + 2X_2 \leq 160 \ldots\ldots\ldots (1)$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للقسمين الثاني والثالث أيضا وكما في المتراجحات الآتية:

القسم الثاني : $X_1 + 2X_2 \leq 120.....(2)$

القسم الثالث : $4X_1 + 2X_2 \leq 280.....(3)$

ومنه البرنامج الخطي يكون كما يلي : $MaxZ = 2X_1 + 3X_2$

St

$$2X_1 + 2X_2 \leq 160$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 120$$
$$4X_1 + 2X_2 \leq 280$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

التمرين الثاني:

تحاول مؤسسة *IFRI* إنتاج أكبر عدد من منتجين اثنين: مياه معدنية و عصائر، و ذلك في ظل القيود التي تفرضها الطاقة الإنتاجية و الطاقة التمويلية، و الجدول أدناه يوضح البيانات الخاصة بالمنتجين.

المنتجات	سعر بيع الوحدة	تكلفة الوحدة	عدد الساعات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة		
			القسم أ	القسم ب	القسم ج
المياه المعدنية	14	10	0,5	0,3	0,2
العصائر	11	8	0,3	0,4	0,1
الطاقة المتاحة بالأقسام	-	-	500	400	200

حيث أن المؤسسة تتوفر على مبلغ 30000دج، علما أنه يتم تخزين هذه المنتجات قبل تسويقها في مخزن طاقته الاستيعابية 300 وحدة، حيث أن الحجم التخزيني للعصائر ضعف المياه المعدنية.

المطلوب: بناء النموذج الرياضي لهذه المسألة.

حل التمرين الثاني:

1- تحديد متغيرات القرار:

تمثل x_1 عدد الوحدات المنتجة من **المياه المعدنية** و التي تحقق للمؤسسة أعظم ربح؛

تمثل x_2 عدد الوحدات المنتجة من **العصائر** و التي تحقق للمؤسسة أعظم ربح.

2- صياغة دالة الهدف:

الربح الإجمالي للمؤسسة = الربح المترتب عن بيع المياه المعدنية + الربح المترتب عن بيع العصائر

الربح الإجمالي للمؤسسة = $(14 - 10 = 4\ x_1) + (11- 8 = 3\ x_2)$

و عليه تصبح دالة الهدف كالتالي:

$$Max\ Z = 3\ x_1 + 4\ x_2$$

3- صياغة القيود:

إنتاج المنتجتين يجب أن لا يتجاوز المبلغ المتاح و المقدر بـ 30.000دج.

الوقت المستغرق في كل قسم = الوقت المستغرق لإنتاج المياه المعدنية + الوقت المستغرق لإنتاج العصائر

مثلا: الوقت المستغرق في القسم أ = الوقت المستغرق لإنتاج المياه المعدنية $(0.5\ x_1)$ + الوقت المستغرق لإنتاج العصائر $(0.3\ x_2)$

و عليه تصبح القيود كالتالي:

$$\begin{cases} 0.3\ x_2 \leq 500 + 0.5\ x_1 & \text{قيد القسم الأول} \\ 0.4\ x_2 \leq 400 + 0.3\ x_1 & \text{قيد القسم الثاني} \\ 0.1\ x_2 \leq 200 + 0.2\ x_1 & \text{قيد القسم الثالث} \\ 8\ x_2 \leq 30.000 + 10\ x_1 & \text{قيد المبلغ المتاح} \\ x_2 \leq 3002 + x_1 1 & \text{قيد التخزين} \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$ قيد عدم سلبية المتغيرة الأولى

$x_2 \geq 0$ قيد عدم سلبية المتغيرة الثانية

التمرين الثالث:

تنتج مؤسسة ما 3 أنواع من المنتجات P_1، P_2، P_3 باستخدام نوعين من المنتجات الأولية M_1، M_2، استهلاك الوحدة الواحدة من كل منتج من كل نوع من المواد الأولية و معلومات أخرى متعلقة بالمشكل موضوع الدراسة مبينة في الجدول أدناه:

المواد الأولية / المنتجات	M_1	M_2	سعر البيع
P_1	01	02	04
P_2	02	02	01
P_3	01	–	03
المتاح من المواد الأولية	100	150	

المطلوب: أكتب النموذج الرياضي لهذا المشكل علما أن الطاقة التخزينية المتاحة هي 500 وحدة.

حل التمرين الثالث:

1- تحديد متغيرات القرار:

تمثل x_1 عدد الوحدات المنتجة من **المنتج الأول** P_1؛

تمثل x_2 عدد الوحدات المنتجة من **المنتج الثاني** P_2؛

تمثل x_3 عدد الوحدات المنتجة من **المنتج الثالث** P_3.

2- صياغة دالة الهدف:

$$Max\ Z = 4\ x_1 + 1\ x_2 + 3\ x_3$$

3- صياغة القيود:

قيد الآلة الأولى $2\ x_2 + 1\ x_3 \leq 100 + 1\ x_1$

قيد الآلة الثانية $2\ x_2 \leq 150 + 2\ x_1$

قيد التخزين $1\ x_2 + 1\ x_3 \leq 500 + 1\ x_1$

قيد عدم سلبية $x_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$

➢ تمارين غير محلولة

التمرين الاول: مصنع يقوم بإنتاج نوعين من الخزانات المعدنية هما A وBوكل نوع يمر بماكنتين (الماكنة الأولى لقطع الصفائح وطاقاتها التشغيلية 70 ساعة أسبوعياً، **والماكنة** الثانية لطي ووصل الصفائح لتعطيها شكل الخزان المناسب المطلوب وطاقاتها التشغيلية 60 ساعة أسبوعياً.

إذا علمت أن النوع الأولA يحتاج 4 ساعات على الماكنة الأولىو10 ساعات على الماكنة الثانية والنوع B يحتاج 5ساعات على الماكنة الأولى و6 ساعات على الماكنة الثانية.

المطلوب: كتابة وصياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعلى ربح ممكن إذا كان ربح الخزان الواحد من النوع الأولAيقدرب 3 دنانير وربح الخزان من النوع الثاني Bيقدر ب 6دنانير.

التمرين الثاني: إحدى الشركات الصناعية تقوم بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات 1،3،2 وترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يومياُ من كل منتج بحيث تحصل على أكبر ربح ممكن يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج المرور على ثلاث عمليات إنتاجية C1،C2،C3والجدول الأتي يبين الزمن (بالدقائق) المطلوب للوحدة الواحدة لكل منتج من العمليات المختلفة وكذلك الربح المحقق من الوحدة الواحدة والزمن الكلي المتاح للعمليات الثلاثة. والمطلوب صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعلى ربح ممكن.

العملية	منتج 1	منتج 2	منتج3	الزمن المتاح للتشغيل دقيقة يومياً
C1	2	2	3	420
C2	5	0	4	440
C3	3	6	0	465
ربح الوحدة الواحدة	5	4	7	

التمرين الثالث: أستلمت شركة كيميائية طلباً للحصول على 1400 كيلو غرام من خليط مكون من ثلاث مركبات وبالمواصفات التالية:

1- يجب أن لايحتوي الخليط على أكثر من 400 كيلو غرام من المركب الأول.

2- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل من 200 كيلو غرام من المركب الثاني.

3- يجب أن يحتوي الخليط على الأقل من 150 كيلو غرام من المركب الثالث.

إذا علمت أن كلفة الكيلو غرام من المركب الأول والثاني والثالث على التوالي 4،3،2 دينار.

المطلوب: أكتب نموذج البرمجة الخطية لهذه المسألة والذي يحقق أقل تكلفة ممكنة.

V. طرق حل نماذج البرمجة الخطية:

بعد أن تتم صياغة نماذج البرمجة الخطية سواء كانت مشكلة تعظيم أرباح أو تقليل تكاليف ، سيتم التعرف على كيفية حل هذه النماذج وماهي قيم التغيرات التي تحدد أعلى ربح أو أقل تكلفة.

1/ طريقة الرسم البياني

تعتبر طريقة الرسم البياني وسيلة أولية لحل مشاكل البرمجة الخطية وتستخدم هذه الطريقة إذاكان النموذج يحتوي على متغيرين فقط ، إذا يتعذر رسم النموذج في حالة إحتواءه على أكثر من متغيرين تقوم هذه الطريقة على فكرة تمثيل القيود بمعادلة خط مستقيم ومن ثمة تحديد منطقة الحلول الممكنة ولحل نموذج البرمجة الخطية نتبع الأتي[6]:

1- نرسم محورين أحدهما أفقي وليكن X_1 والثاني عمودي وليكن X_2.

2- نرسم القيود بعد تحويل التباينات إلى معادلات وذلك بتحويل إشارات $\leq$ و $\geq$ إلى إشارة = ، إن عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم ،ولمعرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحور X_2 نفرض أن $X_1 = 0$ ثم يتم حل المعادلة بالنسبة إلى X_2 ، ولمعرفة نقطة تقاطع الخط المستقيم مع المحور X_1 نفرض أن $X_2 = 0$ ، ثم يتم حل المعادلة إلى X_1 ، ويتم تحديد نقاط التقاطع على المحورين X_1 ، X_2 ثم نصل بينهما بخط مستقيم.

[6]- دلال صادق الجواد ،"**بحوث العمليات**" ،دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ، الطبعة العربية ، عمان الاردن ، 2008، ص :31.

3- تحديد منطقة الحل الممكن وهي منطقة تقاطع مناطق الحل والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق جميع القيود في أن واحد وأن شرط عدم السلبية تحدد منطقة الحل في الربع الأول.

4- يتم تحديد الحل الأمثل من منطقة الحل الممكن ويكون الحل هو أكبر قيمة في الشكل الناتج إذا كانت دالة الهدف تعظيم وأصغر قيمة إذا كانت دالة الهدف تقليل.

مثال تطبيقي اليك البرنامج الخطي التالي

$$Max\ Z = 1000\,x_1 + 1200\,x_2$$

$$\text{Soumise aux contraintes}$$

$$\begin{cases} 10\,x_1 + 5\,x_2 \le 200 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 \le 60 \\ x_1 \le 34 \\ x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1-1- القيد الأول:

$$10\,x_1 + 5\,x_2 \le \mathbf{200}$$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\,x_1 + 5\,x_2 = \mathbf{200}$

نضع:

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow 5\,x_2 = 200 \quad \Rightarrow x_2 = 40$ A (0 , 40)

نضع: B (20 , 0) $x_2 = 0 \quad \Rightarrow 10\,x_1 = 200 \quad \Rightarrow x_1 = 20$

1-2- القيد الثاني: $2x_1 + 3\,x_2 \le 60$

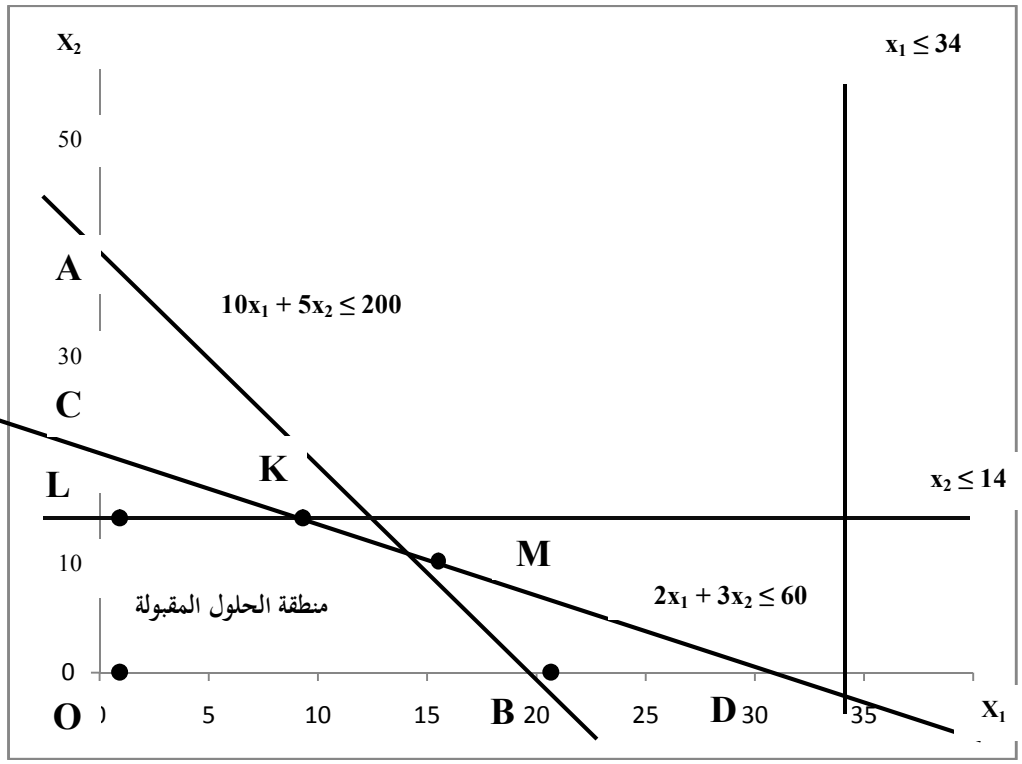
يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي:

$$2x_1 + 3\,x_2 = 60$$

نضع: C (0 , 20) $x_1 = 0 \quad \Rightarrow 3\,x_2 = 60 \quad \Rightarrow x_2 = 20$

نضع: D (30 , 0) $x_2 = 0 \quad \Rightarrow 2\,x_1 = 60 \quad \Rightarrow x_1 = 30$

هذا إضافة إلى تحويل القيدين الأخيرين إلى معادلات: $x_1 = 34$ و $x_2 = 14$، ثم تمثيلها جميعا على معلم متعامد و متجانس.



المصدر: من إعداد الباحث بناءً على معطيات المثال

عند رسم القيود نلاحظ أنها تقسم المستوي إلى قسمين: قسم يقع على يمين المستقيم و آخر يقع على يساره.

فلو أخذنا على سبيل المثال القيد الأول $10 x_1 + 5 x_2 \leq 200$ نلاحظ أنه يقسم المستوي إلى قسمين، أحدهما على يمين المستقيم و الآخر على يساره، و كلاهما يحتوي على عدد لانهائي من النقاط، فلو أخذنا أي نقطة من النقاط الواقعة على **اليمين** و عوضنا إحداثياتها في المتراجحة فإننا نلاحظ أنها لا تحقق القيد.

مثل: النقطة G(50,30) عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على: $10(50) + 5(30)$ 200 فهي لا تحقق القيد، و عليه فإن جميع النقاط الواقعة يمين (أعلى) المستقيم لا تحقق القيد و بالتالي فهي **ليست حلا** للمتراجحة.

أما لو أخذت النقاط الواقعة على يسار المستقيم و تم تعويضها في القيد فنلاحظ أنها تحقق القيد أعلاه.

مثل: النقطة N(10,10) (و التي تقع تحت المستقيم)، عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على 200 10(10) + 5(10)، و النقطة P(12,16) (و التي تقع على المستقيم) عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على 200 = 10(12) + 5(16) فكلاهما يحقق القيد، و عليه فإن جميع النقاط الواقعة يسار (تحت) القيد تحقق القيد، و بالتالي فهي **حل** للمتراجحة.

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

نسمي المنطقة OLKMB **منطقة الحلول المقبولة**، و هي تحتوي عدد لانهائي من النقاط، و التي تتوزع داخل المنطقة أو على حدودها، أو على النقاط الرأسية (*Pointsextrêmes*): O, L, K, M, B.

من أجل أي نقطة من منطقة الحلول المقبولة هناك قيمة لدالة الهدف Z، و ما يهمنا هو إيجاد النقطة التي تعطي لـ Z أعظم (أمثل) قيمة، و هاته النقطة تتواجد على أحد رؤوس منطقة الحلول المقبولة، لذلك نضطر إلى إيجاد و حساب إحداثيات النقط الرأسية، ليتم تعويضها في دالة الهدف و من ثَم اختيار النقطة الرأسية التي تعطي لـ Z القيمة الأمثل.

3- تحديد إحداثيات النقاط الرأسية و تقييم Z:

من الشكل أعلاه تتضح لنا إحداثيات النقاط:

$$O(0,0) \Rightarrow Z = 1000(0) + 1200(0) \Rightarrow Z = 0$$

$$L(0,14) \Rightarrow Z = 1000(0) + 1200(14) \Rightarrow Z = 16800$$

$$B(20,0) \Rightarrow Z = 1000(20) + 1200(0) \Rightarrow Z = 20000$$

أما النقاط M و K فيتم حساب إحداثياتها جبريا.

بالنسبة للنقطة M فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $x_1 + 3x_2 = 602$ و $10x_1 + 5x_2 = 200$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = 200 \\ (-5)\times 2x_1 + 3x_2 = 60 \ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

بضرب المعادلة الثانية في (-5)، و جمع المعادلتين نحصل على:

$$10x_1 + 5x_2 + (-10x_1 - 5x_2) = 200 - 300$$

$$-10x_2 = 100 \Rightarrow x_2 = 10$$

بتعويض قيمة x_2 في إحدى المعادلتين (و لتكن المعادلة الثانية)، نحصل على:

$$2x_1 + 3(10) = 60 \Rightarrow 2x_1 = 60 - 30 \Rightarrow x_1 = 15$$

و منه:

$$M\ (15\ ,\ 10) \quad \Rightarrow \quad Z = 1000\ (15) + 1200\ (10) \Rightarrow Z = 27000$$

أما بالنسبة للنقطة K فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $x_2 = 14$ و $2x_1 + 3x_2 = 60$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$\begin{cases} x_2 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \end{cases}$$

بتعويض قيمة x_2 في المعادلة الثانية نحصل على:

$$2x_1 + 3(14) = 60 \quad \Rightarrow 2x_1 = 60 - 42 = 42 \quad \Rightarrow x_1 = 9$$

و منه: $K\ (9\ ,\ 14) \quad \Rightarrow \quad Z = 1000\ (9) + 1200\ (14) \Rightarrow Z = 25800$

و عليه فإن الحل الأمثل هو النقطة: $M\ (15\ ,\ 10)$.

و بعد إيجاد الحل الأمثل للنموذج، يمكن أن نخلُص إلى أن البرنامج الإنتاجي الأمثل للمؤسسة هو كالتالي:

$x_1 = 15$ أي على المؤسسة إنتاج 15 وحدة من المنتج الأول؛

$x_2 = 10$ أي على المؤسسة إنتاج 10 وحدات من المنتج الثاني.

التمرين الثاني :

يقوم مصنع بإنتاج سلعتين يمر إنتاج كل سلعة على مرحلتين هي الطهي والتعبئة ، والجدول الأتي يبين متوسط الزمن بالساعة الذي يستغرقه إنتاج الوحدة في مراحل الإنتاج ، وكذلك الربح الذي تحققه الواحدة والساعات المتاحة لكل مرحلة.

المطلوب: تحديد الكميات المثلى للإنتاج لكل من السلعتين بحيث تحقق أكبر ربح ممكن بإستخدام الطريقة البيانية؟.

	الطهي	التعبئة	ربح الوحدة
السلعة الأولى	3	1	40
السلعة الثانية	2	1	50
الساعات المتاحة	15	12	

الحل :

نفرض أن X_1 تمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى ، وأن X_2 تمثل عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية.

المشكلة هي إيجاد قيم $X_1\ X_2$.

وعليه فإن نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل المشكلة يأخذ الشكل التالي:

$$MaxZ = 40X_1 + 50X_2$$

$$ST$$

$$3X_1 + X_2 \le 15$$

$$X_1 + 2X_2 \le 12$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

ولتمثيل المشكلة بيانياً يتم تحويل القيود إلى معادلات وكالأتي :

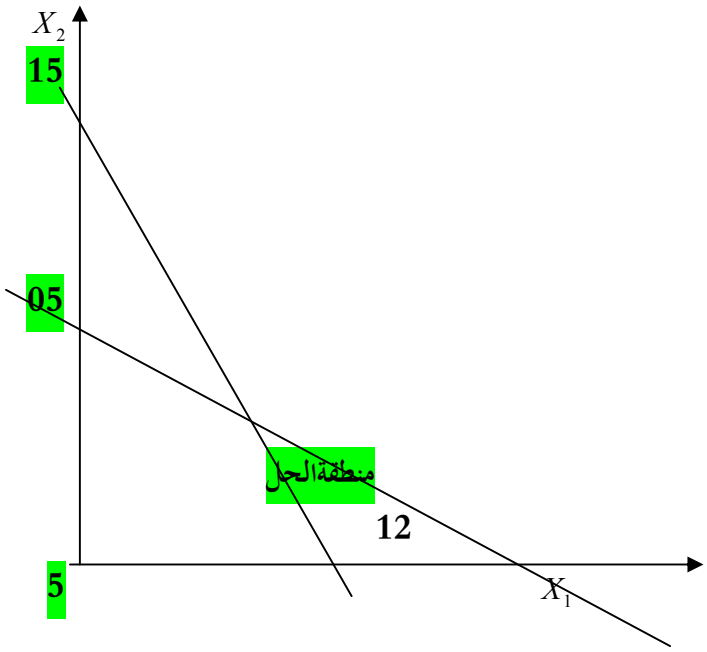
$$3X_1 + X_2 = 15 \ldots\ldots (1)$$

$$X_1 + 2X_2 = 12 \ldots\ldots (2)$$

الجدول الأتي يبين نقاط التقاطع للمعادلات 1 و2:

	X_1	X_2
المعادلة الأولى	**0**	**15**
	5	**0**
المعادلة الثانية	**0**	**6**
	12	**0**

يتم تحديد نقاط التقاطع للمعادلات 1 و2 على المحورين $X_1\ X_2$ ثم نصل بينهما بخط مستقيم وكما هو مبين بالشكل التالي:



إن النقاط داخل المنطقة المظللة تمثل منطقة الحل الممكن، وهي منطقة تقاطع مناطق الحل والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق القيدين في أن واحد ونقا ط الحلول الأساسية A، B، C،D أما نقطة التقاطع بين المستقيمين $C(3.6,4.2)$ تم الحصول عليها بحل المستقيمين أنياً.

يتم تحديد الحل الأمثل وذلك بتعويض كل من الحلول الأربعة في دالة الهدف لتعظيم الربح كالأتي :

المنطقة	X_2	X_1	MaxZ= $40X_1+50X_2$
A	0	0	0
B	0	6	300
C^*	3.6	4.2	354
D	5	0	200

من الجدول نجد أن النقطة C تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية إلى 354.

2- الطريقة الجبرية (تعداد حلول الأساس) لحل نماذج البرمجة الخطية

إن مجال استخدام هذه الطريقة أوسع من الطريقة البيانية، حيث تستخدم لحل المسائل متعددة المتغيرات، و تعد هذه الطرقة تمهيدا لفهم طريقة السمبلكس، و التي تفوق إمكانياتها الطريقتين: البيانية و الجبرية.[7]

2-1- الشكل القانوني لنماذج البرمجة الخطية (*La formeCanonique*):

يمكن القول أن نموذج البرمجة الخطية مكتوب على شكله النموذجي (القانوني)، إذا تحقق الشرطان:[8]

أ- جميع القيود الوظيفية للنموذج تكون:

- **أقل** أو **تساوي** في حالة نموذج التعظيم (*Max*)؛
- **أكبر** أو **تساوي** في حالة نموذج التدنية (*Min*).

ب-جميع متغيرات القرار تكون موجبة أو معدومة ($x_j \geq 0 : j=1,\dots,n$).

وبناءً على ذلك يمكن التمييز بين 3 حالات:

2-1-1- الحالة الأولى: إشارات القيود الوظيفية للنموذج ($\leq$، =، $\geq$)

يمكن أن تحتوي نماذج البرمجة الخطية على قيود وظيفية بإشارات لا تتوافق و دالة الهدف، كأن يكون النموذج من نوع تعظيم (*Max*) و قيوده الوظيفية بإشارات **أكبر أو تساوي**، و هي بذلك لا تحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج، لذلك يجب تحويلها إلى إشارة **أقل أو تساوي** و ذلك بضرب طرفي القيد في (-1) لتحويل إشارتها، و العكس لنموذج التدنية، فإن كانت قيوده بإشارات **أقل أو تساوي** يتم ضرب طرفي المتراجحات في (-1) لتتحول بذلك إلى إشارات أكبر أو تساوي.

التمرين الاول :أكتب نموذج البرمجة الخطية أدناه على الشكل القانوني:

$$Max\ Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 100 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \leq 200 \\ 10x_1 + 11x_2 + 12x_3 \geq 500 \end{cases}$$

[7] محمد عبد العال النعيمي و آخرون، **بحوث العمليات**، دار وائل للنشر،عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011، ص 41.

[8] محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2006،ص 41.

$$x_3 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_1 \geq 0$$

نلاحظ أن القيدين الأول و الأخير لا يحققان شروط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه، لذلك يتوجب كتابتهما وفق إشارة أقل أو تساوي و ذلك لأن النموذج من نوع تعظيم، و عليه يتم ضرب طرفي المتراجحة في (−1):

$4x_1+5x_2+6x_3 \geq 100 \ldots\ldots\ldots\ldots \times(-1) \Rightarrow -4x_1-5x_2-6x_3 \leq -100$ $x_1+11x_2+12x_3 \geq 500 \ldots\ldots\ldots\ldots \times(-1) \Rightarrow -10x_1-11x_2-12x_3 \leq -500$

و عليه يصبح النموذج وفق الشكل القانوني كالتالي:

$$Max\ Z = x_1+2x_2+3x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} -4x_1-5x_2-6x_3 \leq -100 \\ 7x_1+8x_2+9x_3 \leq 200 \\ -10x_1-11x_2-12x_3 \leq -500 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

أما إن كان النموذج يحتوي على قيود بإشارات **تساوي تماما**، فذلك يعني أن القيد يمكن كتابته وفق متراجحتين، فإما أن يكون بإشارة **أكبر أو يساوي** أو **أقل أو يساوي**، و هنا يمكن التمييز بين حالتين:

- ❖ في حالة نموذج التعظيم، فإن القيد الذي يكون بإشارة أكبر أو تساوي يتم ضرب طرفيه في القيمة (−1) ليتحول إلى إشارة أقل أو تساوي؛
- ❖ في حالة نموذج التدنية، فإن القيد الذي يكون بإشارة أقل أو تساوي يتم ضرب طرفيه في القيمة (−1) ليتحول إلى إشارة أكبر أو تساوي.

التمرين الثاني : أكتب نموذج البرمجة الخطية أدناه على الشكل القانوني:

$$Min\ Z= 14x_1+22\ x_2+5\ x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 6x_1+15\ x_2+10\ x_3 \geq 1100 \\ 2\ x_1+12\ x_2+\ x_3 \geq 380 \\ 11\ x_1+21\ x_2+\ 3x_3 =820 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الأخير لا يحقق شروط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه لأنه مكتوب بإشارة (=)، لذلك يتوجب تحويله وفق إشارة أكبر أو تساوي و ذلك لأن النموذج من نوع تدنية، و عليه يمكن كتابته كما يلي:

$$11x_1+21\ x_2+3\ x_3 \leq 820$$

$$11\ x_1+21\ x_2+\ 3x_3 \geq 820$$

نلاحظ أن المتراجحة الأولى لا تحقق شرط الشكل القانوني لذلك وجب تحويلها إلى إشارة أكبر أو تساوي،و ذلك بضرب طرفيها في القيمة (-1)، فتصبح:

$$11x_1+21\ x_2+3\ x_3 \leq 820 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times(-1) \Rightarrow (-11x_1-21\ x_2-\ 3\ x_3 \geq -820)$$

و عليه يصبح النموذج وفق الشكل القانوني كالتالي:

$$Min\ Z= 14x_1+22\ x_2+5\ x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 6x_1+15\ x_2+10\ x_3 \geq 1100 \\ 2\ x_1+12\ x_2+\ x_3 \geq 380 \\ -11x_1-21\ x_2-\ 3\ x_3 \geq -820 \\ 11\ x_1+21\ x_2+\ 3x_3 \geq 820 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3 \geq 0$$

2-1-2- الحالة الثانية: إشارات المتغيرات غير محددة ($x_j \in R$)

من المتفق عليه أن متغيرات نماذج البرمجة الخطية عموما تكون إما موجبة أو معدومة، إلا أنه في بعض مسائل البرمجة الخطية قد تأخذ متغيرات القرار قيما سالبة، و هذا ما يفسر اقتصاديا بانخفاض كمية الإنتاج مثلا، و هذا ما يعبر عنه رياضيا بالكتابة: $x_j \in R$، ذلك أن إشارة المتغيرات غيرة محددة.

ففي هذه الحالة يتوجب علينا كتابة كل متغيرة تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقة في صورة فرق متغيرتين موجبتين على مستوى القيود الوظيفية، و كذا على مستوى دالة الهدف، كما يلي:[9]

$$x_j = x'_j - x''_j$$

$$x'_j \geq 0, \quad x''_j \geq 0$$

و نصبح نتعامل فرق المتغيرتين $x'_j - x''_j$ بدلا من x_j

فإذا كانت:

$x'_j \geq x''_j$ أي: $x'_j - x''_j \geq 0$ فـــإن: $x_j \geq 0$

$x'_j \leq x''_j$ أي: $x'_j - x''_j \leq 0$ فـــإن: $x_j \leq 0$

التمرين الثالث :

أكتب نموذج البرمجة الخطية أدناه على الشكل القانوني:

$$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

[9] صوار يوسف، طاوش قندوسي، **محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B**– كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر،ص 33.

$$x_2 \in R$$

نلاحظ أن إشارات القيود لنموذج التعظيم أعلاه محققة، إضافة إلى قيود عدم السلبية، عدا المتغيرة x_2 و التي يجب علينا تعويضها بفرق متغيرتين موجبتين كما يلي:

$$Max\ Z = 2x_1 + 3(x'_2 - x''_2)$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + (x'_2 - x''_2) \leq 5 \\ 2x_1 + (x'_2 - x''_2) \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x'_2 \geq 0 \\ x''_2 \geq 0 \end{cases}$$

2-1-3- الحالة الثالثة: إشارة المتغيرات سالبة ($x_j \leq 0$)

قد تأخذ بعض متغيرات نموذج البرمجة الخطية قيما سالبة، فقد يظهر مثلا في فكرة رصيد الحساب الذي قد يكون في بعض الأحيان سالبا، و بغرض كتابة مثل هذه النماذج في شكلها القانوني و الذي يشترط أن تكون متغيرا النموذج فيه موجبة أو معدومة، يتوجب تعويض كل متغيرة سالبة بمتغيرة أخرى ($-x'_j$)، على مستوى القيود الوظيفية و كذا على مستوى دالة الهدف، حيث أن x'_j متغيرة موجبة أو معدومة، أي:[10]

$$x_j = -x'_j$$

$$x'_j \geq 0$$

التمرين الرابع : أكتب نموذج البرمجة الخطية أدناه على الشكل النموذجي:

$$Max\ Z = 15x_1 + 12x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 \leq 25 \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ x_1 \quad 0 \end{cases}$$

[10] صوار يوسف، طاوش قندوسي، **مرجع سبق ذكره**، ص 33.

$$x_2 \geq 0$$

نلاحظ أن المتغيرة x_1 لا تحقق شرط عدم سلبية متغيراتالقرار، و بغرض جعلها تحقق ذلك يتوجب علينا تعويضها بمتغيرة أخرى $(-x'_1)$ حيث أن $x'_1 \geq 0$، و عليه يصبح النموذج كالتالي:

$$Max\ Z = -15\,x'_1 + 12\,x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} -7\,x'_1 + 9x_2 \leq 25 \\ -8\,x'_1 + 4x_2 \leq 40 \\ x'_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2-2- متغيرات الفجوة (*Les variables d'écart*):

سبق و أن تطرقنا إلى تحليل القيود الوظيفية، و التي قلنا أنها عبارة عن كمية مستخدمة (في شقها الأيسر)، و كمية متاحة في شقها الأيمن، و بغرض حل نموذج البرمجة الخطية ينبغي أولا تحويل تلك المتراجحات (القيود) إلى معادلات، و ذلك لا يتحقق إلا بإضافة متغيرات جديدة غير سالبة تسمى متغيرات الفجوة، و التي تعبر اقتصاديا عن الكمية المتبقية أو غير المستخدمة، و عادة ما يُرمز لمتغير الفرق بالرمز S.

2-2-1-في حالة القيود الوظيفية التي تكون بالإشارة أقل أو تساوي:

يتم إضافة متغيرة الفجوة مسبوقة بالإشارة (+)، ذلك أن الكمية المستخدمة دائما أقل من المتاحة و لذا وجب إضافة كمية متبقية للوصول إلى الاستخدام التام.

مثل: $2x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 5x_4 \leq 1200$

$$2x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 5x_4 + S_1 = 1200$$

2-2-2-في حالة القيود الوظيفية التي تكون بالإشارة أكبر أو تساوي:

يتم إضافة متغيرة الفجوة مسبوقة بالإشارة (-)، ذلك أن الكمية المستخدمة قد تجاوزت المتاح و لذا وجب إنقاص هذه الكمية التي تفوق المتاح.

مثل: $15x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 1200$

$$15x_1 + 7x_2 + 3x_3 - S_1 = 120$$

2-2-3-متغيرات الفجوة في دالة الهدف:

تكون متغيرات الفجوة على مستوى دالة الهدف ذات معاملات معدومة، كون أن هذه المتغيرات لا تحقق أي ربح للمؤسسة (في حالة نموذج التعظيم).

3-2- الشكل المعياري لنماذج البرمجة الخطية (*La forme Standard*): يكون نموذج البرمجة الخطية مكتوبا على شكله المعياري، إذا تحققت الشروط التالية:

أ- القيود الوظيفية مكتوبة على شكل معادلات بدلا من متراجحات؛

ب- يجب أن يكون الطرف الأيمن للقيود الوظيفية (المتاح) موجبا أو معدوما؛

ت- يجب أن تكون جميع متغيرات النموذج موجبة أو معدومة.

التمرين الخامس أكتب نموذج البرمجة الخطية أدناه على الشكل المعياري:

$$Max\ Z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 60 \\ 7x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 88 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq -45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيود الثلاثة لا تحقق الشروط السابق و عليه يجب تحويلها بما يتوافق و الشكل المعياري:

$3x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 60 \qquad 3x_1 + x_2 + 4x_3 - \mathbf{S_1} = 60 \qquad 0 \ldots\ldots\ldots$

$7x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 88 \qquad 0 \ldots\ldots\ldots$

$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq -45 \qquad x_1 + 4x_2 + x_3 + \mathbf{S_3} = -45 \qquad 0 \ldots\ldots\ldots$

$(-1)[x_1 + 4x_2 + x_3 + \mathbf{S_3}] = (-1)(-45)$

$-x_1 - 4x_2 - x_3 - \mathbf{S_3} = 45 \qquad 0 \ldots\ldots\ldots$

و عليه يصبح الشكل المعياري النهائي للنموذج أعلاه كالتالي:

$$Max\ Z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 - S_1 = 60 \\ 7x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 88 \\ -x_1 - 4x_2 - x_3 - S_3 = 45 \\ x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 x_3 \geq 0 \\ S_1 \geq 0 S_3 \geq 0 \end{cases}$$

4-2 - خطوات حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة الجبرية: بهدف معرفة خطوات حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة تعداد حلول الأساس، سنأخذ المثال التالي:

التمرين السادس : ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 10x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 96 \\ 8x_1 + 2x_2 + 12x_3 \leq 150 \\ x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 x_3 \geq 0 \end{cases}$$

لحل النموذج أعلاه و الوصول إلى الحل الأمثل، نقوم بإتباع الخطوات التالية:

4-2-1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

كما تمت الإشارة إليه سابقا، يتم تحويل قيود النموذج إلى معادلات و ذلك بإضافة متغيرات الفجوة (الفرق) حتى يتوافق و شروط الشكل المعياري لنماذج البرمجة الخطية، و عليه يصبح النموذج كالتالي:

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 4x_2 + 6x_3 + \mathbf{0S_1} + \mathbf{0S_2}$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + \mathbf{S_1} + \mathbf{0S_2} = 9 \\ 8x_1 + 2x_2 + 12x_3 + \mathbf{0S_1} + \mathbf{S_2} = 150 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ S_1 \geq 0 \\ S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + \mathbf{S_1} = 96 \\ 8x_1 + 2x_2 + 12x_3 + \mathbf{S_2} = 150 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ S_1 \geq 0 \\ S_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ من خلال الشكل المعياري للنموذج أعلاه، أنه عبارة عن جملة معادلات تحتوي على 5 متغيرات (3 متغيرات القرار، 2 متغيرات الفجوة)، علما أنه يحتوي على معادلتين، و بناء على ذلك فإنه يتعذر علينا حل الجملة التي يكون فيها عدد المجاهيل يفوق عدد المعادلات.

و حتى نتمكن من حل الجملة يجب جعل عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات، و يتم ذلك عن طريق عدم **3 متغيرات** (الفرق بين عدد المجاهيل و عدد المعادلات)، و الحل المتحصل عليه يسمى **حل الأساس** (*Solution de base*)، و الذي يتكون من 3 متغيرات معدومة تسمى **متغيراتخارج الأساس** (*Variables hors base*)، و أخرى غير معدومة تسمى **متغيرات الأساس** (*Variables de base*).

4-2-2 تعداد حلول الأساس:

حتى يتسنى لنا حل النموذج أعلاه (جملة المعادلات)، يتوجب علينا في كل مرة عدم ثلاث (3) متغيرات، و بالتالي يتم في كل مرة اختيار توليفة من المتغيرات التي سيتم عدمها و استنتاج حل الأساس لها، و عليه فإنه يوجد عدد من الطرق التي يمكن بها اختيار هذه المتغيرات أو التوليفات و الذي يمكن حسابه رياضيا كالتالي:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

أي أن النموذج يقبل 10 توليفات مختلفة يكون بها 3 متغيرات معدومة (متغيرا القرار أو متغيرات الفجوة أو الاثنين معا)، و يتم حساب الأخرى بتعويضها في القيود الوظيفية، و من ثم استنتاج حل الأساس.

و عليه يتم تلخيص حلو ل الأساس في الجدول التالي:

الجدول رقم 03: تعداد حلول الأساس للمثال 03-06

الرقم	متغيرات خارج الأساس	التعويض في القيود الوظيفية	متغيرات الأساس	نوع الحل
01	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$	$2(0) + 2(0) + 6(0) = 96$ $8(0) + 2(0) + 12(0) = 150$	$S_1 = 96$ $S_2 = 150$	
02	$x_1 = S_1 = S_2 = 0$	$2(0) + 2\,x_2 + 6\,x_3 + 0 = 96$ $8(0) + 2\,x_2 + 12\,x_3 + 0 = 150$	$x_3 = 9$ $x_2 = 42$	
03	$x_2 = S_1 = S_2 = 0$	$2\,x_1 + 2(0) + 6\,x_3 + 0 = 96$ $8\,x_1 + 2(0) + 12\,x_3 + 0 = 150$	$x_1 = -21$ $x_3 = 23$	
04	$x_3 = S_1 = S_2 = 0$	$2\,x_1 + 2\,x_2 + 6(0) + 0 = 96$ $8\,x_1 + 2\,x_2 + 12(0) + 0 = 150$	$x_1 = 9$ $x_2 = 39$	
05	$x_1 = x_2 = S_1 = 0$	$(0) + 6\,x_3 + 0 = 962(0) +$ $8(0) + 2(0) + 12\,x_3 + S_2 = 150$	$x_3 = 16$ $S_2 = -42$	
06	$x_1 = x_2 = S_2 = 0$	$(0) + 6\,x_3 + S_1 = 9622(0) +$ $8(0) + 2(0) + 12\,x_3 + 0 = 150$	$x_3 = 12{,}5$ $S_1 = 21$	
07	$x_1 = x_3 = S_1 = 0$	$x_2 + 6(0) + 0 = 9622(0) +$ $8(0) + 2\,x_2 + 12(0) + S_2 = 150$	$x_2 = 48$ $S_2 = 54$	
08	$x_1 = x_3 = S_2 = 0$	$x_2 + 6(0) + S_1 = 9622(0) +$ $8(0) + 2\,x_2 + 12(0) + 0 = 150$	$x_2 = 75$ $S_1 = -54$	
09	$x_2 = x_3 = S_1 = 0$	$(0) + 6(0) + 0 = 9622\,x_1 +$ $(0) + 12(0) + S_2 = 15028\,x_1 +$	$x_1 = 48$ $S_2 = -234$	
10	$x_2 = x_3 = S_2 = 0$	$(0) + 6(0) + S_1 = 9622\,x_1 +$ $(0) + 12(0) + 0 = 15028\,x_1 +$	$x_1 = 18{,}75$ $S_1 = 58{,}5$	

المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال

ما يلاحظ من الجدول أن هنالك حلول أساس (متغيرات الأساس، متغيرات خارج الأساس) **موجبة** أو **معدومة**، و تسمى هذه الحلول **بحلول الأساس المقبولة**، و منها ما يأخذ قيما **سالبة** و تسمى **بحلول الأساس غير المقبولة**، لأنها لا تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات.

4-2-3- تقييم دالة الهدف عند حلول الأساس المقبولة:

من أجل كل حل أساس مقبول، سوف تكون هناك قيمة لدالة الهدف، و ما يهمنا هو حل الأساس المقبول الذي يعطي لدالة الهدف أمثل قيمة و هو الحل رقم: **04**

$$Z = 10(9) + 4(39) + 6(0) = 246$$

و يتم تفسير حل الأساس المقبول الأمثل المتوصل إليه كما يلي:

$x_1 = 9$ أي على المؤسسة إنتاج 9 وحدة من المنتج الأول؛

$x_2 = 39$ أي على المؤسسة إنتاج 39 وحدات من المنتج الثاني؛

$x_3 = 0$ أي على المؤسسة عدم إنتاج أي وحدة من المنتج الثالث.

و عند تعويض قيم حل الأساس المقبول الأمثل في القيود الوظيفية نلاحظ أن القيدين الأول و الثاني محققان بإشارة تساوي ما يعني أنهما مشبعان، أي: $S_1 = S_2 = 0$.

4-2-4- التفسير الهندسي لحلول الأساس المقبولة:

لمعرفة التفسير الهندسي لحلول الأساس المقبولة، سنأخذ المثال أدناه.

مثال 03-07: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 10\,x_1 + 12\,x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 48 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 26 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

سنقوم بحل هذا النموذج وفق طريقة تعداد حلول الأساس ثم وفق الطريقة البيانية. و كمرحلة أولى يتعين علينا كتابة هذا النموذج على الشكل المعياري (إضافة متغيرات الفرق) ليصبح كالتالي:

$$Max\ Z = 10x_1 + 12x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 20 \\ 3x_1 + 2x_2 + S_2 = 48 \\ 2x_1 + 2x_2 + S_3 = 26 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

و بما أن النموذج يحتوي جملة معادلات بها 5 متغيرات، فإنه يتعين علينا عدم متغيرتين، حيث أن النموذج يقبل 10 توليفات للمتغيرات المعدومة و بالتالي فإنه يقبل 10 حلول أساس، و ذلك وفقا للعلاقة:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

و بناء على ذلك، نُلخص حلول الأساس في الجدول أدناه:

الجدول رقم 04: تعداد حلول الأساس للمثال 03-07

الرقم	متغيرات خارج الأساس	التعويض في القيود الوظيفية	متغيرات الأساس	نوع الحل
01	$x_1 = x_2 = 0$	$(0)+2(0)+S_1 = 20$ $3(0)+2(0)+S_2 = 48$ $2(0)+2(0)+S_3 = 26$	$S_1 = 20$ $S_2 = 48$ $S_3 = 26$	
02	$x_1 = S_1 = 0$	$(0)+2x_2+0 = 20$ $3(0)+2x_2+S_2 = 48$ $2(0)+2x_2+S_3 = 26$	$x_2 = 10$ $S_2 = 38$ $S_3 = 6$	
03	$x_1 = S_2 = 0$	$(0)+2x_2+S_1 = 20$ $3(0)+2x_2+0 = 48$ $2(0)+2x_2+S_3 = 26$	$x_2 = 24$ $S_1 = -28$ $S_3 = 2$	
04	$x_1 = S_3 = 0$	$(0)+2x_2+S_1 = 20$ $3(0)+2x_2+S_2 = 48$ $2(0)+2x_2+0 = 26$	$x_2 = 13$ $S_1 = -6$ $S_2 = 22$	

05	$x_2 = S_1 = 0$	$x_1+2(0)+0= 20$ $3x_1+2(0)+S_2= 48$ $2x_1+2(0)+S_3 = 26$	$x_1 = 20$ $S_2 = -12$ $S_3 = -14$	
06	$x_2 = S_2 = 0$	$x_1+2(0)+S_1= 20$ $3x_1+2(0)+0= 48$ $2x_1+2(0)+S_3 = 26$	$x_1 = 16$ $S_1 = 4$ $S_3 = -6$	
07	$x_2 = S_3 =0$	$x_1+2(0)+S_1= 20$ $3x_1+2(0) +S_2= 48$ $2x_1+2(0)+0 = 26$	$x_1 = 13$ $S_1 = 7$ $S_2 = 9$	
08	$S_1 = S_2 = 0$	$x_1+2x_2 +0= 20$ $3x_1+2x_2 +0= 48$ $2x_1+2x_2+S_3 = 26$	$x_1 = 14$ $x_2 = 3$ $S_3 = -8$	
09	$S_1 = S_3 = 0$	$x_1+2x_2 +0= 20$ $3x_1+2x_2 +S_2= 48$ $2x_1+2x_2+0 = 26$	$x_1 = 6$ $x_2 = 7$ $S_2 = 16$	
10	$S_2 = S_3 = 0$	$x_1+2x_2 +S_1= 20$ $3x_1+2x_2 +0= 48$ $2x_1+2x_2+0 = 26$	$x_1 = 22$ $x_2 = -9$ $S_1 = 16$	

المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال

عند تقييم دالة الهدف عند حلول الأساس المقبولة المتوصل إليها أعلاه، نلاحظ أن الحل الأمثل للنموذج يتمثل في الحل رقم 09: $Z = 10(6) + 12(7) = 144$

3- الطريقة المبسطة simplex :

في حالة وجود أكثر من ثلاث متغيرات في المشكلة فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية، لذلك يتم تقديم طريقة أخرى و المسماة طريقة السمبلكس *Simplexe* التي ابتكرها الرياضي *George Dantzig* عام 1947، و هي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليل مشاكل البرمجة الخطية، و

يعتمد هذا الأسلوب على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كلمن دالة الهدف و القيود و يهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف و القيود.[11]

1-3- خطوات الحل باستخدامطريقة السمبلكس:

تعد طريقة السمبلكس من أهم طرق حل نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات التي تحتويها المشكلة، و هي طريقة تتابعية تنطلق من حل ابتدائي ممكن مروراً بحل أفضل وصولا إلى حل أمثل، مما يجعلنا نطلق عليها مصطلح خوارزمية السمبلكس.[12] و فيما يلي خطوات و مراحل تطبيق السمبلكس:

التمرين الاول : ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 70\ x_1+40\ x_2+60\ x_3$$

$$Soumise\ aux\ contraintes$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3 \leq 1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3 \leq 800 \\ x_1+3x_2+x_3 \leq 400 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$Max\ Z = 70\ x_1+40\ x_2+60\ x_3+0S_1+0S_2+0S_3$$

$$Soumise\ aux\ contraintes$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3+S_1+0S_2+0S_3 = 1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3+0S_1+S_2+0S_3 = 800 \\ x_1+3x_2+x_3+0S_1+0S_2+S_3 = 400 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$Max\ Z = 70\ x_1+40\ x_2+60\ x_3$$

$$Soumise\ aux\ contraintes$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3+S_1 = 1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3+S_2 = 800 \\ x_1+3x_2+x_3+S_3 = 400 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

[11] محمد عبد العال النعيمي و آخرون، **مرجع سبق ذكره**، ص 45.

[12] صوار يوسف، طاوش قندوسي، **مرجع سبق ذكره**، ص 46-47.

2- إيجاد أول حل أساس مقبول:

بما أن النموذج يحتوي على 6 متغيرات، و 3 معادلات فإنه يتم الحصول على أول حل أساي مقبول عن طريق عدم 3متغيرات (3=3-6)و لتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) x_1=0، x_2=0، x_3=0 و بعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس: S_1=1000، S_2=800، S_3=400، و الذي يعتبر حل الأساس المقبول الأول، حيث أن Z=0 ما يعني أن المؤسسة لازالت في بداية نشاطها و لم تقم بعملية الإنتاج.

3- تشكيل جدول السمبلكس الأول:

- تتم في المرحلة الأولى تشكيل جدول يضم في السطرين الأول و الثاني متغيرات النموذج (متغيرات القرار، متغيرات الفجوة)، حيث تكتب في السطر الأول معاملات هذه المتغيرات (C_j) في دالة الهدف و في السطر الثاني تكتب المتغيرات؛
- تكتب في العمودين الأول و الثاني (على اليسار) متغيرات الأساس المتحصل عليها من أول حل أساس مقبول مع معاملاتها (C_j)في دالة الهدف؛
- في باقي خانات الجدول تتم كتابة معاملات كافة المتغيرات في القيود الوظيفية؛
- في العمود *B rayon* تتم كتابة المتاح (من القيود الوظيفية)؛
- في السطر $Z_j=\sum C_j x_j$ يتم ضرب معاملات المتغيرة الأولى لكافة القيود الوظيفية في معاملات متغيرات الأساس، ثم جمعها، مثلا: $(4\times0)+(2\times0)+(1\times0)=0$، و ذلك للحصول على القيمة Z_jوهكذا؛
- في السطر $Z=C_j-Z_j$ يتم طرح قيم Z_j من معاملات كافة المتغيرات في دالة الهدف (أول سطر C_j)؛
- للحصول على قيمة دالة الهدف Z يتم ضرب معاملات متغيرات الأساس (العمود الأول C_j).

C_j →		70	40	60	0	0	0	B	
↓		↓ x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
0	← S_1	**4**	2	4	1	0	0	1000	1000/4 = 250
0	S_2	2	2	1	0	1	0	800	800/2 = 400
0	S_3	1	3	1	0	0	1	400	400/1 = 400
$Z_j=\sum C_jx_j$		0	0	0	0	0	0	Z = 0	
$Z=C_j- Z_j$		70	40	60	0	0	0		

3-2- قراءة حل الأساس المقبول الموافق للجدول:

أ- **تحديد المتغيرة الداخلة:** المتغيرة الداخلة هي تلك المتغيرة خارج الأساس المعدومة التي تتحول إلى متغيرة أساس موجبة يتم اختيارها كما يلي: ذات **أكبر معامل موجب** في $Z=C_j-Z_j$، و يشار إليها بسهم في الجدول، و في مثالنا هذا هي المتغيرة x_1 ذات المعامل $Z=70$ (أقل معامل سالب في حالة نموذج *Min*).

ب- تحديد المتغيرة الخارجة: المتغيرة الخارجة هي متغيرة أساس موجبة و التي تتحول إلى متغيرة خارج الأساس معدومة يتم تحديدها في الجدول كما يلي: نقوم بقسمة قيم الشعاع B (1000, 800, 400) على قيم عمود المتغيرة الداخلة x_1 (4, 2, 1) فنحصل على قيم R_i (250, 400, 400). و بناءً على ذلك فإن المتغيرة الخارجة هي التي تقابل **أقل حاصل قسمة موجب** (R_i)، و يشار إليها في الجدول بسهم، و في مثالنا هذا تمثل S_1 المتغيرة الخارجة.

جـ- تحديد عنصر الارتكاز: يمثل عنصر الارتكاز نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة $Pivot = L_p\ C_p$، يشار إليه بدائرة في الجدول، و في مثالنا هو 4.

1- 5-تشكيل جدول السمبلكس الثاني:

C_j ⟶		70	40	60	0	0	0	B	
↓		x_1	⬇ x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
70	x_1	1	1/2	1	1/4	0	0	250	500
0	S_2	0	1	−1	−1/2	1	0	300	300
0	⬅S_3	0	5/2	0	−1/4	0	1	150	60
$Z_j=\sum C_j x_j$		70	35	70	70/4	0	0	Z = 17500	
$Z=C_j-Z_j$		0	5	−10	−70/4	0	0		

- يتم تشكيل جدول السمبلكس الثاني بإدخال المتغيرة الداخلة مكان المتغيرة الخارجة؛
- تتم قسمة قيم سطر الارتكاز (L_p)في الجدول الأول على عنصر الارتكاز نفسه (L_p/P)؛
- قيم عمود الارتكاز في الجدول الأول تصبح أصفاراً في الجدول الثاني($C_p=0$)، ماعدا عنصر الارتكاز الذي يبقى مساويا للواحد($P=1$)؛
- قيم باقي الأسطر يتم حسابها عن طريق ضرب عدد في قيم سطر الارتكاز الجديدة، مع إضافة القيم القديمة للسطر)في الجدول الأول) أي: القيمة الجديدة للسطر = $L_{initiale} + L_p.(a)$.

مثال: قيم السطر الثاني يتم حسابها كما يلي:

$(-2)(L_p=1)+(L_i=2)=0$, $(-2)(1/2)+(2)=1$, $(-2)(1)+(1)=-1$, $(-2)(1/4)+(0)=-1/2$

- يتم الحصول على قيم Z_jعن طريق ضرب معاملات متغيرات الأساس في معاملات المتغيرات في القيود الوظيفية.

مثال: $(1\times70)+(0\times0)+(0\times0)=70$، $(2/1\times70)+(1\times0)+(2/1\times0)=35$.

- بعدها يتم تحديد قيمة Z إن كانت مثلى، و ذلك إن كانت جميع معاملاتها سالبة أو معدومة، و في حالتنا هذه، قيمة Z ليست مثلى لأن هناك قيمة موجبة (5)، و عليه يتم إنشاء جدول سمبلكس ثالث بغية تحسين الحل مرة أخرى، و ذلك بدءً بحساب قيم R_i و تحديد المتغيرة الداخلة و الخارجة.
- تتم قراءة حل الأساس المقبول الموافق للجدول الثاني كما يلي:

متغيرات الأساس: $x_1=250,\ S_2=300,\ S_3=150$

متغيرات خارج الأساس: $x_2=0,\ x_3=0,\ S_1=0$

و عليه و بالاعتماد على الخطوات السابقة يتم الانتقال من أول حل أساس مقبول ذو $Z=0$ إلى حل أساس مقبول آخر ذو $Z=17500$، أي يتم تحسين الحل الأول.

6-تشكيل جدول السمبلكس الثالث: تمثل x_2 المتغيرة الداخلة في هذه الحالة لأنها توافق أكبر معامل لـ Z و S_3 هي المتغيرة الخارجة لأنها توافق أدنى قيمة لـ R_i، و عليه فإن نقطة تقاطع سطر الارتكاز (المتغيرة الخارجة) و عمود الارتكاز (المتغيرة الداخلة) تمثل نقطة الارتكاز P=5/2.

C_j ⟶ / ⟵		70	40	60	0	0	0	**B**	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	**rayon**	R_i
70	x_1	1	0	1	3/10	0	−1/5	220	
0	S_2	0	0	−1	−2/5	1	−2/5	240	
40	x_2	0	1	0	−1/10	0	2/5	60	
$Z_j=\sum C_j x_j$		70	40	70	17	0	2	Z = 17800	
$Z=C_j-Z_j$		0	0	−10	−17	0	−2		

من جدول السمبلكس الثالث نجد أن حل الأساس المقبول المُحسن هو:

$$x_1=220,\quad x_2=60,\quad S_2=240,\quad x_3=0,\quad S_1=0,\quad S_3=0 \Rightarrow Z=17800$$

- بالنسبة لـ Z نجد أنه لا يمكننا تحسين الحل مرة أخرى لأن النموذج تعظيم، و إذا أخذنا المتغيرة x_3 فإننا سوف نُخفض Z بـ (10−) لكل وحدة من x_3، لذا نتوقف؛

- بما أن جميع معاملات متغيرات النموذج لـ Z سالبة أو معدومة فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل (لأن اختيار أي وحدة أخرى سوف يؤدي إلى تخفيض قيمة دالة الهدف)؛

- إذا كانت معاملات متغيرات النموذج من نوع تعظيم *Max* سالبة أو معدومة، فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل، أما في النموذج من نوع تدنية *Min* فإننا نحصل على الحل الأمثل عندما تكون كافة المعاملات موجبة أو معدومة.

إن الهدف من طريقة السمبلكس هو الوصول إلى الحل الأمثل كالطرق السابقة، إلا أن هذه الطريقة تنطلق من أول حل أساس مقبول و تمر على بعض حلول الأساس المقبولة إلى أن تصل إلى الحل الأمثل.

نشير إلى أن طريقة السمبلكس تشترط بغرض تطبيقها توفر أول حل أساس مقبول، إلا أنه في بعض النماذج لا يتوفر هذا الشرط، و هنا يتم اللجوء إلى طريقة أخرى تُعرف بطريقة *Big M*.

4- خطوات الحل باستخدام طريقة *Big M*:

طور هذا الأسلوب العالم *Charne*، و يقوم هذا الأسلوب على أساس إضافة معامل للمتغير الاصطناعي في دالة الهدف، و يتم حل النموذج بطريقة السمبلكس بصفة عادية.[13] وبغية التعرف على مراحل تطبيق هذه الطريقة سوف نأخذ المثال التالي:

التمرين الثاني : ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\ Z = 30\ x_1 + 24\ x_2 + 18\ x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 80 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 60 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$Min\ Z = 30\ x_1 + 24\ x_2 + 18\ x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - S_1 = 80 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - S_2 = 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

2- إيجاد أول حل أساس مقبول:

[13] صوار يوسف، طاوش قندوسي، **مرجع سبق ذكره**، ص 54.

بما أن النموذج يحتوي على 5 متغيرات، و 2 معادلات فإنه يتم الحصول على أول حل أساي مقبول عن طريق عدم 3متغيرات (3=2−5)و لتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) x_1=0، x_2=0، x_3=0 و بعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس: S_1=(−80)، S_2=(−60)، و الذي يعتبر حل أساس غير مقبول، لأن S_1 وS_2 لا تحققان قيود عدم سلبية المتغيرات، أي أن النموذج لا يتوفر على حل أساس مقبول، و عليه لا يمكن تطبيق طريقة السمبلكس لاشتراطها على توفر أول حل أساس مقبول.

و حتى يتسنى لنا توفير حل الأساس المقبول يتوجب علينا الاستعانة بمتغيرات جديدة تسمى المتغيرات المساعدة (الوهمية، الاصطناعية)، حيث تضاف متغيرة واحدة على مستوى كل قيد ليصبح النموذج كالتالي:

$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3$$

$$Soumise\ aux\ contraintes$$

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3 - S_1+\boldsymbol{t_1} = 80 \\ 3x_1+3x_2+3x_3 - S_2+\boldsymbol{t_2} = 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \\ t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

بعد إضافة المتغيرات الوهمية t_1 و t_2 يصبح النموذج مكونا من 7 متغيرات و 2 معادلات، و عليه يمكن إيجاد أول حل أساس مقبول و ذلك عن طريق عدم متغيرات 5 متغيرات (5=2−7) فيصبح حل الأساس المقبول الأول كالتالي:

$$x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=0,\quad S_1=0,\quad S_2=0,\quad S_3=0 t_1=80\quad t_2=60$$

نضيف متغيرات الفجوة و الاصطناعية إلى دالة الهدف، بمعامل 0 لمتغيرات الفجوة و معامل M التي تمثل كمية موجبة كبيرة إلى المتغيرات الاصطناعية، أما إذا كان النموذج من نوع Max فيتم إضافة معامل $(-M)$ إلى المتغيرات الاصطناعية.[14] فتكون دالة الهدف كما يلي:

$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3+0\ S_1+0\ S_2+\boldsymbol{M}\ t_1+\boldsymbol{M}\ t_2$$

[14] محمد عبد العال النعيمي و آخرون، **مرجع سبق ذكره**، ص 57.

$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3+0\ S_1+0\ S_2+\mathbf{M}\ (t_1+t_2)$$

بعدها يتم استخراج قيم المتغيرات الاصطناعية من القيود الوظيفية لتعويضها في دالة الهدف:

$$\mathbf{t_1} = 80-5x_1-2x_2-x_3+S_1$$

$$\mathbf{t_2} = 60-3x_1-3x_2-3x_3+S_2$$

$$\mathbf{t_1}+\mathbf{t_2} = 140-8x_1-5x_2-4x_3+S_1+S_2$$

بتعويض قيم المتغيرات الوهمية في دالة الهدف نحصل على:

$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3+\mathbf{M}\ (140-8x_1-5x_2-4x_3+S_1+S_2)$$

$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3+140\ M-8x_1\ M-5x_2\ M-4x_3\ M+M\ S_1+M\ S_2$$

و عليه يصبح النموذج في صيغته النهائية كالتالي:

$$Min\ Z = (30-8M)\ x_1+(24-5M)\ x_2+(18-4M)\ x_3+M\ S_1+M\ S_2+140\ M$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3-S_1+t_1 = 80 \\ 3x_1+3x_2+3x_3-S_2+t_2 = 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \\ t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

3- تشكيل جدول السمبلكس الأول:

$C_j \rightarrow$		30	24	18	0	0	M	M	**B**	
$\downarrow$		$\downarrow x_1$	x_2	x_3	S_1	S_2	t_1	t_2	**rayon**	R_i
M	$\leftarrow t_1$	(5)	2	1	−1	0	1	0	80	16
M	t_2	3	3	3	0	−1	0	1	60	20
$Z_j=\sum C_j x_j$		8M	5M	4M	−M	−M	M	M	140M	
$Z=C_j-Z_j$		30−8M	24−5M	18−4M	M	M	0	0		

– بما أن النموذج عبارة عن تدنية *Min* فإنه يتم في هذه الحالة اختيار المتغيرة الداخلة عن طريق اختيار أقل معامل سالب لـ *M* في قيم *Z* و في مثالنا هذا (8–) هو أدنى معامل سالب و الذي يوافق المتغيرة x_1؛

– يتم بعدها قسمة قيم الشعاع *B* على معاملات المتغيرة الداخلة، للحصول على R_iو بناء على ذلك تصبح المتغيرة الخارجة هي التي توافق أقل حاصل قسمة موجب، لتكون في مثالنا هذا t_1ثم تحديد عنصر الارتكاز

– بما أن معاملات Z تضم قيما سالبة فإن 140M ليس هو الحل الأمثل، لذا وجب علينا تحسين الحل إلى غاية الحصول على معاملات موجبة أو معدومة باعتبار أن النموذج عبارة عن تدنية.

4– تشكيل جدول السمبلكس الثاني:

C_j →		30	24	18	0	0	M	M	*B*	
↓		x_1	x_2	⬇x_3	S_1	S_2	t_1	t_2	*rayon*	R_i
30	x_1	1	2/5	1/5	−1/5	0	1/5	0	16	80
M	⬅t_2	0	9/5	12/5	3/5	−1	−3/5	1	12	5
$Z_j=\sum C_j x_j$		30	12+9/5M	6+12/5M	− 6+3/5M	−M	6−3/5M	M	480+12M	
$Z=C_j- Z_j$		0	12−9/5M	12− 12/5M	6−3/5M	M	− 6+8/5M	0		

بما أن معاملات Z تضم قيما سالبة فإن 480+12M ليس هو الحل الأمثل، لذا وجب علينا تحسين الحل إلى غاية الحصول على معاملات موجبة أو معدومة و ذلك بتشكيل جدول سمبلكس ثالث.

5– تشكيل جدول السمبلكس الثالث:

C_j →		30	24	18	0	0	M	M	B	R_i
↓		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	t_1	t_2	rayon	
30	x_1	1	1/4	0	−1/4	1/12	/	/	15	
18	x_3	0	3/4	1	1/4	− 5/12	/	/	5	
$Z_j=\sum C_j x_j$		30	21	18	−3	−5	/	/	450+90 = 540	
$Z=C_j-Z_j$		0	3	0	3	5	/	/		

نلاحظ من خلال جدول السمبلكس الثالث أن قيم معاملات Z كلها موجبة أو معدومة، و بالتالي فإن الحل الأخير المتوصل إليه هو الحل الأمثل (Z=540).

تمارين محلولة:

التمرين الأول: باستخدام طريقة السمبلكس أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه.

$Min\ Z= -6x_1 -7x_2 -8x_3$	$Max\ Z= 7x_1+4x_2+6x_3$	$Max\ Z= 40x_1+60x_2 -20x_3$
Soumise aux contraintes	Soumise aux contraintes	Soumise aux contraintes
$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \geq 100 \\ 3x_1+4x_2+2x_3 \geq 120 \\ 2x_1+4x_2+6x_3 \geq 200 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3 \geq 100 \\ 2x_1+2x_2+x_3 \geq 80 \\ x_1+3x_2+2x_3 \geq 40 \end{cases}$	$3x_1+6x_2 \geq 300$ $4x_1+2x_2+x_3 \geq 220$ $x_2+x_3 \leq 100$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

حل التمرين الأول:

C_j →		40	60	−20	0	0	0	B	R_i
↓		x_1	↓ x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	
0	← S_1	3	6	0	1	0	0	300	50
0	S_2	4	2	1	0	1	0	220	110

0	S_3	0	1	1	0	0	1	100	100
$Z_j=\sum C_j x_j$		0	0	0	0	0	0	Z = 00	
$Z=C_j-Z_j$		40	60	−20	0	0	0		
C_j →		40	60	−20	0	0	0	B rayon	R_i
↓		↓x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
60	x_2	1/2	1	0	1/6	0	0	50	100
0	←S_2	3	0	1	−1/3	1	0	120	40
0	S_3	−1/2	0	1	−1/6	0	1	50	/
$Z_j=\sum C_j x_j$		30	60	0	10	0	0	Z = 3000	
$Z=C_j-Z_j$		10	0	−20	−10	0	0		
C_j →		40	60	−20	0	0	0	B rayon	R_i
↓		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
60	x_2	0	1	−1/6	2/9	−1/6	0	30	
40	x_1	1	0	1/3	−1/9	1/3	0	40	
0	S_3	0	0	7/6	−2/9	1/6	1	70	
$Z_j=\sum C_j x_j$		40	60	10/3	80/9	10/3	0	Z = 3400	
$Z=C_j-Z_j$		0	0	− 50/3	− 80/9	− 10/3	0		

الحل الأمثل هو: $x_1=40,\quad x_2=30,\quad x_3=0,\quad S_1=0,\quad S_2=0,\quad S_3=70$

C_j →		07	04	06	0	0	0	B rayon	R_i
↓		↓x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	←S_1	4	2	4	1	0	0	100	25
0	S_2	2	2	1	0	1	0	80	40
0	S_3	1	3	2	0	0	1	40	40
$Z_j=\sum C_j x_j$		0	0	0	0	0	0	Z = 00	
$Z=C_j-Z_j$		07	04	06	0	0	0		

C_j		07	04	06	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
07	x_1	1	1/2	1	1/4	0	0	25	50
0	S_2	0	1	−1	−1/2	1	0	30	30
0	S_3	0	5/2	1	−1/4	0	1	15	06
$Z_j=\sum C_j x_j$		07	7/2	07	7/4	0	0	Z = 175	
$Z=C_j-Z_j$		0	1/2	−01	−7/4	0	0		

C_j		07	04	06	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
07	x_1	1	0	4/5	3/10	0	−1/5	22	
0	S_2	0	0	−7/5	−2/5	1	−2/5	24	
04	x_2	0	1	2/5	−1/10	0	2/5	06	
$Z_j=\sum C_j x_j$		07	04	36/5	17/10	0	1/5	Z = 178	
$Z=C_j-Z_j$		0	0	−6/5	−17/10	0	−1/5		

الحل الأمثل هو: $x_1=22,\quad x_2=6,\quad x_3=0,\quad S_1=0,\quad S_2=24,\quad S_3=0$

ثالثا:

C_j		−06	−07	−08	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
0	S_1	1	2	1	1	0	0	100	100

0	S_2	3	4	2	0	1	0	120	60
0	← S_3	2	6	4	0	0	1	200	50
$Z_j=\sum C_j x_j$		0	0	0	0	0	0	Z = 00	
$Z=C_j-Z_j$		−06	−07	−08	0	0	0		
↓ C_j →		−06	−07	−08	0	0	0	B rayon	R_i
		↓ x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	1/2	1/2	0	1	0	−1/4	50	100
0	← S_2	2	1	0	0	1	−1/2	20	10
−08	x_3	1/2	3/2	1	0	0	1/4	50	100
$Z_j=\sum C_j x_j$		−04	−12	−08	0	0	−02	Z = − 400	
$Z=C_j-Z_j$		−02	05	0	0	0	02		
↓ C_j →		−06	−07	−08	0	0	0	B rayon	R_i
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	0	3/4	0	1	−1/4	−1/8	45	
−06	x_1	1	1/2	0	0	1/2	−1/4	10	
−08	x_3	0	5/4	1	0	−1/4	3/8	45	
$Z_j=\sum C_j x_j$		06	−13	−08	0	−01	−3/2	Z = − 420	
$Z=C_j-Z_j$		0	06	0	0	01	3/2		

الحل الأمثل هو: $x_1=10,\quad x_2=0,\quad x_3=45,\quad S_1=45,\quad S_2=0,\quad S_3=0$

التمرين الثاني: باستخدام طريقة السمبلكس أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه.

$Min\ Z=100\ x_1+120\ x_2+200\ x_3$ Soumise aux contraintes $x_1+3\ x_2+2x_3 \geq 6$ $2\ x_1+4\ x_2+6\ x_3 \geq 7$ $x_1+2x_2+4\ x_3 \geq 8$ $x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$	$Min\ Z= 100\ x_1+80\ x_2+40\ x_3$ Soumise aux contraintes $4\ x_1+2\ x_2+x_3 \geq 7$ $2\ x_1+2\ x_2+3\ x_3 \geq 4$ $4x_1+x_2+2\ x_3 \geq 6$ $x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$	$Min\ Z= 80\ x_1+120\ x_2+84\ x_3$ Soumise aux contraintes $5x_1+15\ x_2+7\ x_3 \geq 20$ $10\ x_1+12\ x_2+21\ x_3 \geq 15$ $4\ x_1+5\ x_2+3\ x_3 \geq 18$ $x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

حل التمرين الثاني:

$$Min\ Z=100\ x_1+120\ x_2+200\ x_3+M\ t_1+M\ t_2+M\ t_3$$

$Min\ Z=100\ x_1+120\ x_2+200\ x_3$

Soumise aux contraintes

$x_1+3\ x_2+2x_3 \geq 6$

$2\ x_1+4\ x_2+6\ x_3 \geq 7$

$x_1+2x_2+4\ x_3 \geq 8$

$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

$\Rightarrow$

Soumise aux contraintes

$x_1+3\ x_2+2x_3 - S_1+t_1 = 6$

$2\ x_1+4\ x_2+6\ x_3 - S_2+t_2 = 7$

$x_1+2x_2+4\ x_3 - S_3+t_3 = 8$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$

$S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0 \geq 0,$

$t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0,\ t_3 \geq 0$

$C_j \rightarrow$		100	120	200	0	0	0	M	M	M	B	
		x_1	⬇ x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
M	t_1	1	3	2	−1	0	0	1	0	0	06	02
M	⬅ t_2	2	4	6	0	−1	0	0	1	0	07	7/4
M	t_3	1	2	4	0	0	−1	0	0	1	08	04
Z_j		4M	9M	12M	− M	− M	− M	M	M	M	**Z = 21 M**	
$C_j - Z_j$		100− 4M	120− 9M	200− 12M	M	M	M	0	0	0		

$C_j \rightarrow$		100	120	200	0	0	0	M	M	M	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	⬇ S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
M	⬅ t_1	−1/2	0	−5/2	−1	3/4	0	1	/	0	3/4	01
120	x_2	1/2	1	3/2	0	−1/4	0	0	/	0	7/4	/
M	t_3	0	1	1	0	1/2	−1	0	/	1	9/2	08
Z_j		60− 1/2M	120	180− 3/2M	− M	− 30+5/2M	− M	M	/	M	**210+21/4 M**	
$C_j - Z_j$		100−	0	20+3/2M	M	30−5/2M	M	0	/	0		

		4M										
$C_j \rightarrow$		100	120	200	0	0	0	M	M	M	**B rayon**	**R_i**
$\downarrow$		x_1	x_2	$\downarrow x_3$	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3		
0	S_2	−2/3	0	−10/3	−4/3	1	0	/	/	0	01	/
120	x_2	1/3	1	2/3	−1/3	0	0	/	/	0	02	03
M	$\leftarrow t_3$	1/3	0	(8/3)	2/3	0	−1	/	/	1	04	3/2
Z_j		40+1/3M	120	80+8/3M	− 40+2/3M	0	− M	/	/	M	**Z = 240+4 M**	
$C_j - Z_j$		60−1/3M	0	120− 8/2M	40−2/3M	0	M	/	/	0		
$C_j \rightarrow$		100	120	200	0	0	0	M	M	M	**B rayon**	**R_i**
$\downarrow$		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3		
0	S_2	−1/4	0	0	−1/2	1	−5/4	/	/	/	06	
120	x_2	1/4	1	0	−1/2	0	1/4	/	/	/	01	
200	x_3	1/8	0	1	1/4	0	−3/8	/	/	/	3/2	
Z_j		145	120	200	− 10	0	− 45	/	/	/	**Z = 420**	
$C_j - Z_j$		− 45	0	0	10	0	45	/	/	/		

الحل الأمثل هو: $x_1=0,\quad x_2=01,\quad x_3=3/2,\quad S_1=0,\quad S_2=06,\quad S_3=0$

$Min\ Z=100\ x_1+80\ x_2+40\ x_3$ *Soumise aux contraintes* $4\ x_1+2\ x_2+x_3 \geq 7$ $2\ x_1+2\ x_2+3\ x_3 \geq 4$ $4\ x_1+x_2+2\ x_3 \geq 6$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$		

C_j		100	80	40	0	0	0	M	M	M	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
M	t_1	4	2	1	−1	0	0	1	0	0	07	7/4
M	t_2	2	2	3	0	−1	0	0	1	0	06	03
M	t_3	4	1	2	0	0	−1	0	0	1	04	01
Z_j		10M	5M	6M	− M	− M	− M	M	M	M	Z = 17 M	
$C_j - Z_j$		100-10M	80-5M	40-6M	M	M	M	0	0	0		

C_j		100	80	40	0	0	0	M	M	M	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
M	t_1	0	1	−1	−1	0	1	1	0	/	01	01
M	t_2	0	3/2	2	0	−1	1/2	0	1	/	01	2/3
100	x_1	1	1/4	1/2	0	0	−1/4	0	0	/	3/2	06
Z_j		100	25+5/2M	50+M	− M	−M	−25+3/2M	M	M	/	Z=150+2 M	
$C_j - Z_j$		0	55−5/2M	10 − M	M	M	25−3/2M	0	0	/		

C_j		100	80	40	0	0	0	M	M	M	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
M	t_1	0	0	−7/3	−1	2/3	2/3	1	/	/	1/3	1/2
80	x_2	0	1	4/3	0	−2/3	1/3	0	/	/	2/3	02
100	x_1	1	0	1/6	0	1/6	−1/3	0	/	/	4/3	/
Z_j		100	80	370/3−7/3M	− M	− 110/3+2/3M	− 20/3+2/3M	M	/	/	560/3+1/3 M	
$C_j - Z_j$		0	0	−250/3−7/3M	M	110/3+2/3M	20/3−2/3M	0	/	/		

$C_j \rightarrow$		100	80	40	0	0	0	M	M	M	B	
↓		x_1	x_2	↓x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
0	S_3	0	0	−7/3	−3/2	1	1	/	/	/	1/2	/
80	←x_2	0	1	(5/2)	1/2	−1	0	/	/	/	1/2	1/5
100	x_1	1	6	1	−1/2	1/2	0	/	/	/	3/2	3/2
Z_j		100	80	100	−10	−30	0	/	/	/	Z = 190	
$C_j - Z_j$		0	0	−60	10	30	0	/	/	/		

$C_j \rightarrow$		100	80	40	0	0	0	M	M	M	B	
↓		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
0	S_2	0	7/5	0	−4/5	−2/5	1	/	/	/	6/5	
40	x_3	0	2/5	1	1/5	−2/5	0	/	/	/	1/5	
100	x_1	1	2/5	0	−3/10	1/10	0	/	/	/	17/10	
Z_j		100	104	40	− 22	0	0	/	/	/	Z = 178	
$C_j - Z_j$		0	24	0	0	0	0	/	/	/		

الحل الأمثل هو: $x_1=17/10,\quad x_2=0,\quad x_3=1/5,\quad S_1=0,\quad S_2=6/5,\quad S_3=0$

الفصل الثالث

النموذج المقابل

الفصل الثالث : النموذج المقابل

I. تقديم

أن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية أطلق عليها إصطلاح النماذج الأولية **Primal Models**، ومن الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب أخر يطلق عليه إصطلاح النموذج المقابل(الثنائي)**Dual**، إذا أن لكل نموذج يوجد نموذج أخر يقابله، من هذا يتبين لنا أن كل مشكلة تتوفر فيها شروط البرمجةالخطية ويمكن تمثيلها على شكل نموذج برمجة خطية يوجد لها نموذجان، الأول هو الذي يمثل المشكلة الأولية، أما النموذج الثاني هو النموذج المقابل الذي يمثل الجانب الأخر من المشكلة الخطية.

أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل له ومشتق منه ، فإذا كان النموذج الأولي يتعلق بتعظيم دالة الهدف فإن النموذج المقابل له سيكون تقليل دالة الهدف وتصاغ عادة من نفس البيانات التي يتضمنها النموذج الأولي والعكس بالعكس وعليه فإن كل صيغة من هذه الصيغ تحمل تفسيرات معينة يمكن إستخدامها لحل مسألة برمجة خطية واحدة بطرق مختلفة بالرغم من أن النتائج والمعلومات التي يتم الحصول عليها من حل مسائل البرمجة الخطية هي متشابهة في كلتا الحالتين.

II. مميزات النموذج المقابل(الثنائي)Dual

من مميزات النموذج المقابل الأتي:

– يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعضالأحيان وذلكبتقليص خطوات الحل، أي أن طريقة حل المشكلة المقابلة تستلزم خطوات رياضية أقل تعقيد من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية أحياناً.

– يمكن إيجاد الحل الأمثل في النموذج المقابلعند وجود متغير أساسي في النموذج ذو قيمة سالبة، في حين لا يمكن حل النموذج الأولي إدا كان لأحد متغيرات النموذج الأولي قيمة سالبة.

– يساعد النموذج المقابل إلى إجراء تحليل مابعد الأمثلية والتوصل إلى الحل بصورة مختصرة في حالة إضافة قيود جديدة للمشكلة أو إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية.

1- تحويل النموذج الأولي Primal إلى النموذج المقابل Dual وبالعكس:لغرض تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل وبالعكس يمكن ذلك بإتباع الخطوات الأتية:

-إدا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي من نوع تعظيم **Max**فإنها تقلب إلى نوع تصغير **Min**في النموذج المقابل والعكس صحيح.

- عدد المتغيرات في النموذج الأولي يكون مساوياً لعدد القيود في النموذج المقابل ، لو كان النموذج الأولي يحتوي على ثلاثة متغيرات فإن النموذج المقابل سيحتوي على ثلاثة قيود.

- عدد القيود في النموذج الأولي يكون مساوياً لعدد المتغيرات في النموذج المقابل،فمثلاً لوكان النموذج الأولي يحتوي على أربعة قيود فإن النموذج المقابل سيحتوي علىأربعة متغيرات.

- إدا كانت القيود في النموذج الأولي على شكل أكبر أو يساوي فإنها تتغير في النموذج المقابل إلى أقل أو يساوي والعكس الصحيح أيضاً.

- معاملات دالة الهدف في النموذج الأولي هي قيم الجوانب اليمنى لقيود النموذج المقابلوقيم الجانب الأيمن في النموذج المقابل تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج المقابل.

-معاملات القيود j في النموذج الأولي هي عبارة عن معاملات الصف في النموذج المقابل.

والجدول التالي يبين بعض التغيرات لأخرى التي تحدث بين الأصلية والثنائية:

	الثنائية		الأصلية
المتغيرات	**القيود**	**الهدف**	**هدف الأصلية في الشكل المعياري**
غير مقيد	$\geq$	$MinW$	$MaxZ$
غير مقيد	$\leq$	$MaxW$	$MinZ$

2- صياغة المشكلة المقابلة الثنائية: أفرض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية الأصلية التالية:

$$MaximizeZ_X = C_1X_1 + C_2X_2$$

$$ST$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \le b_1 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \le b_2 \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

لغرض إجراء عملية القلب وللتمييز بين الصيغة الأولية والمقابلة نستخدم الرمز Y بدلا من X في الصيغة الأولية، وبإستخدم خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل فإن المشكلة المقابلة ستكون بالشكل الأتي:

$$MinimizeW = b_1Y_1 + b_2Y_2$$

$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 \ge C_1 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 \ge C_2 \ldots\ldots(2)$$

$$Y_1, Y_2 \ge 0$$

وعليه إدا كانت الصيغة العامة للمشكلة الأولية هي:

$$MaximizeZ_X = \sum_{j=1}^{n} C_J X_J \quad \sum_{J=1}^{n} a_{ij} X_J \le b_i$$

$$ST$$

$$X_j \ge 0$$

حيث أن: i=1.2.3……m

j=1.2.3……n

فإن الصيغة العامة للمشكلة المقابلة تكون كالأتي:

$$MinimizeW = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \ge C_J$$

$$Y_J \ge 0$$

حيث أن: i=1.2.3……m

j=1.2.3……n

التمرين الاول : ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 100\,x_1+200\,x_2+300\,x_3$$

$$ST$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3 \le 1000 \\ 5x_1+5x_2+7x_3 \le 1500 \\ 8x_1+9x_2+4x_3 \le 2000 \\ 5x_1+2x_2+x_3 \le 2500 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن النموذج يحتوي على 3 متغيرات و التي تمثل 3 أنواع من المنتجات، تعتمد المؤسسة في إنتاج هذه المنتجات على 4 موارد متاحة، حيث أنها تسعى من خلال هذه العملية إلى تعظيم الأرباح المترتبة عن بيع هذه المنتجات، في المقابل سيسعى مشتري هذه المنتجات إلى تدنية تكاليف شرائها مع تحفيز صاحب المؤسسة على البيع، فتصبح دالة الهدف الخاصة بهذا المشتري من نوع تدنية:

$$Min\ W = 1000\,y_1+1500\,y_2+2000\,y_3+2500\,y_4$$

حيث تمثل (y_1, y_2, y_3, y_4) أسعار المواد الأولية.

في الوقت نفسه ستقوم المؤسسة ببيع المنتجات في حال ما إذا كان العائد المحقق من بيعها أكبر من العائد على الإنتاج، فتصاغ هذه العملية كما يلي:

$$\begin{cases} 2y_1+5y_2+8y_3+5y_4 \ge 100 \\ y_1+5y_2+9y_3+2y_4 \ge 200 \\ 4y_1+7y_2+4y_3+4y_4 \ge 300 \end{cases}$$

و عليه فإن النموذج المرافق للنموذج الأولي أعلاه يكون من الشكل:

$$Min\ W = 1000\,y_1+1500\,y_2+2000\,y_3+2500\,y_4$$

$$ST$$

$$\begin{cases} 2y_1+5y_2+8y_3+5y_4 \ge 100 \\ y_1+5y_2+9y_3+2y_4 \ge 200 \\ 4y_1+7y_2+4y_3+4y_4 \ge 300 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

أما في حالة نماذج التدنية فيكون برنامج الثنائية كما يلي:

النموذج الثنائي	النموذج الأولي
$Min\ W = 100\ y_1+150\ y_2+220\ y_3$ ST $\begin{cases} 7y_1+2y_2+3y_3 \geq 5 \\ 6y_1+4y_2+9y_3 \geq 6 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$	$Max\ Z = 5\ x_1+6\ x_2$ ST $\begin{cases} 7x_1+6x_2 \leq 100 \\ 2x_1+4x_2 \leq 150 \\ 3x_1+9x_2 \leq 220 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$

التمرين الثاني : ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 5\ x_1+4\ x_2+9\ x_3$$

$$ST$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+8x_3 \leq 100 \\ 7x_1+4x_2+3x_3 \geq 200 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه، لذا وجب تحويله إلى متراجحة من الشكل **أقل أو تساوي** بضرب طرفيها في القيمة (-1)، فيصبح:

$$-7x_1 -4\ x_2 -3x_3 \leq -200$$

و عليه يصبح النموذج الثنائي كالتالي:

$$Min\ W = 100\ y_1-200\ \mathbf{y'_2}$$

$$ST$$

$$\begin{cases} 2y_1 - 7\mathbf{y_2} \geq 5 \\ 3y_1 - 4\mathbf{y_2} \geq 4 \end{cases}$$

$$8y_1 - 3y_2 \geq 9$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

نلاحظ أن القيد الثاني و بعد تعديله، لم يحافظ على إشارة بعض من معاملات النموذج الأصلي، و للمحافظة على إشارات النموذج الأولي نضع: $y_2 = y'_2 -$

فيصبح الشكل النهائي للنموذج الثنائي كما يلي:

$$Min\ W = 100\ y_1 + 200\ y_2$$

$$ST$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 7\ y'_2 \geq 5 \\ 3y_1 + 4\ y'_2 \geq 4 \\ 8y_1 + 3\ y'_2 \geq 9 \end{cases}$$

$$y_1, y'_{2+} \geq 0$$

4-<u>العلاقة بين الأصلية والثنائية</u>: هناك مجموعة من العلاقات التي تربط بين الأصلية والثنائية تتمثل في:

1- إذا كان يوجد حل أمثل للأصلية فإنه بالضرورة يوجد حل أمثل للثنائية.

2- من خلال حل الأصلية والثنائية، فإن هدف الأصلية يساوي هدف الثنائية أي أن :

$$MinZ = MaxW \text{ و} MaxZ = MinW$$

3- مسائل Max للأصلية تبدأ قيمة الهدف لها في تزايد من جدول إلى أخر وصولاً إلى الحل الأمثل، بينما الثنائية لها ، قيمة الهدف تبدأ في تناقص من جدول إلى أخر وصولاً إلى الحل الأمثل والعكس في حالة Min .

4- لأي زوج للأصلية وللثنائية حل عملي.

5- يمكن إيجاد متغيرات الأصلية من الحل الأمثل للثنائية مباشرة والعكس صحيح، وهذا عن طريق العلاقة التالية:

الفرق بين الطرف الأيسر والأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية	**يساوي**	**عناصر السطر Z لمصفوفة المتغيرات الأساسية للأصلية**

ملاحظة هامة: تكون هده العلاقة صالحة بتغيير مصطلحات الثنائية والأصلية لكل حالة.

6- كما يمكن إختصار بعض الإختلافات بين الأصلية والثنائية في الجدول التالي:

	الأصلية	**الثنائية**
المتغيرات	**وحدات منتجة نهائية**	**هامش القيمة للمورد (قيمة الوحدة للمورد) أو مقدار دالة الهدف في حالة إضافة وحدة واحدة من المورد.**
دالة الهدف	**تعظيم الربح أو تخفيض التكلفة(عدد الوحدات المنتجة) (هامش الربح للوحدة أو هامش التكلفة).**	**تخفيض هامش القيمة أو العكس(قيمة الوحدة للمورد) (المادة المستعملة)**
القيود	**قيود على إستعمال الموارد النادرة**	**لزوم لزيادة الربح لكل منتج**

كما يمكن إعطاء ملخص عام حول العلاقة بين الأصلية والثنائية و وهذا حسب الجدول التالي:

عمود الأساس	X_1	X_2	.....	X_i	.....	X_n	عمود الطرف الأيمن للقيود
S_1	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1i}	.....	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	.....	a_{2i}	.....	a_{2n}	b_2
S_i	a_{j1}	a_{j2}	.....	a_{ji}	.....	a_{jn}	b_i
S_m	a_{m1}	a_{m2}	.....	a_{mi}	.....	a_{mn}	b_m
Z	C_1	C_2	.....	C_i	.....	C_n	

معاملات الهدف الثنائية مقلوب المصفوفة للطرف الأيسر لقيود الثنائية الطرف الأيمن لقيود الثنائية

5- كيفية إيجاد الحل للمشكلة المقابلة الثنائية: يمكن إيجاد الحل لمشكلة القابلة وذلك بإستخدام إحدى الطرق – الطريقة المبسطة simplex – طريقة Mالكبيرة- وطريقة ذات المرحلتين -two phaseومعاملتها كأي مشكلة برمجة خطية أولية، إلا أنه يمكن الحصول على قيم المتغيرات ودالة الهدف للمشكلة الثنائية مباشرة وذلك من جدول الحل الأمثل- ولتوضيح ذلك نأخذ مشكلة البرمجة الخطية الآتية:

$$MaxZ = 2X + 3X_2$$

$$to\ Subject$$

$$X_1 + 2X_2 \le 20$$

$$X_1 + X_2 \le 12$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

لقد سبق وتم إيجاد الحل لها في المحاضرة رقم**03** وكان الجدول الأخير والحل الأمثل كالأتي:

المتغيرات الأساسية B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	**الثابت**
X_2	**0**	**1**	**1**	**-1**	**08**
X_1	**1**	**0**	**-1**	**2**	**04**
Z	**0**	**0**	**1**	**1**	**32**

وكما يتضح من الجدول **3** فإن جميع المعاملات في دالة الهدف إما موجبة أو صفرية، وهذا يعني التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة قيد الدراسة والذي يكون:

$X_1 = 4$ **و** $X_2 = 8 \Leftarrow$ وقيمة الهدف $Z = 32$

المطلوب: 1- تحويل البرنامج الخطي الأصلي primal أعلاه إلى البرنامج الثنائي المقابلDual؟.

2- إستنتج الحل الأمثل لثنائية من الحل الأمثل للأصلية؟.

الحل:1- يمكن صياغة النموذج المقابل للنموذج الأولي للمشكلة كالأتي: $MinW = 20Y_1 + 12Y_2$

$$to\ Subject$$

$$Y_1 + Y_2 \geq 2.....(1)$$

$$2Y_1 + Y_2 \geq 3.....(2)$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

2- إستنتاج الحل الأمثل لثنائية من الحل الأمثل للأصلية:

-في الجدول النهائي- الحل الأمثل- $MaxZ = MinW = 32$

- قيمة Zتبدأ في تتزايد إلى أن تصل **32**، بينما قيمة W تبدأ في تناقص إلى التعادل إلى أن تصل **32**، هذه النتيجة تتطلب الوصول إلى نقطة التعادل، والوصول إلى نقطة التعادل يكمن في حالة تعادل قيمة دالتي الهدف للأصلية والثنائية، وحالة التعادل تمثل الحل الأمثل، هاتين النتيجتين يمكن أن تعمم على أي زوج -الأصلية- الثنائية:

* لأي زوج حل عملي للأصلية والثنائية أي أن:

قيمة دالة الهدف في $MaxZ$ قيمة دالة الهدف في $MinW$

*عند الحل الأمثل للأصلية والثنائية:

قيمة دالة الهدف في $MaxZ$ = قيمة دالة الهدف في $MinW$

*إيجاد قيم الثنائية من الحل الأمثل للأصلية عن طريق العلاقة:

معاملات دالة الهدف في الحل الأمثل للأصلية= الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية

وتكون هذه العلاقة صالحة لإيجاد قيم الأصلية من الحل الأمثل لثنائية:

معاملات دالة الهدف في الحل الأمثل لثنائية= الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الأصلية المشارك مع المتغير الأساسي للثنائية

والملاحظ في جدول الأصلية قيم المتغيرات الغير الأساسية S_1و S_2 ومعاملاتها في الدالة الإقتصادية Z هي على التوالي: **1،1** أما قيود الثنائية المشاركة مع S_1و S_2 هي على التوالي: $Y_1 \geq 0$ ، $Y_2 \geq 0$ ، وبوضع هذه المعلومات في الجدول التالي يمكن إيجاد قيم Y_1و Y_2

المتغيرات الأساسية الأصلية	S_1	S_2
معاملات دالة الهدف في الحل الأمثل للأصلية	**1**	1
الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية	$Y_1 - 0$	$Y_2 - 0$

إذاوضعنا:

$$Y_1 - 0 = 1 \Rightarrow \qquad Y_1 = 1$$

$$Y_2 - 0 = 1 \qquad Y_2 = 1 \Rightarrow$$

نفس الشئ يمكن أن يطبق على إيجاد قيم الأصلية من الثنائيةو هذا بعكس المصطلحات السابقة كما تمت الإشارة إليه سابقاً.

6- <u>عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات</u>:في بعض الحالات يمكن أن تكون بعض المتغيرات في المسألة الأولية غير متقيدة بشرط عدم السالبية، غير أن نموذجالبرمجة الخطية يشترط عدم سالبية كل المتغيرات،وفي الحالة يجب إستعمال التحايل الرياضي، بحيث ندخل إلى النظام متغيرات كلها غير سالبة ودلكوفق المعالجات التالية:

6-1- إذا كان أحد المتغيرات أقل أويساويالصفر:أي $X_j \le 0 \Leftarrow$ في هده الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج وفق تغيير متغير بفرض:

$$X_j = -X'_j$$

$$X'_j \ge 0$$

يتم تعويض المتغير الجديد في البرنامج الأصلي، ثم نتبع جداول الحل الأمثل بشكل عادي، وعند الحل نحول المتغير X'_j إلى أصله وفق التحويل الأولي.

6-2- إذا كانأحد المتغيرات غير محدود(طليق): ويمكن في هده الحالة أن تأخذ المتغيرات قيمة مهما كانت في الإتجاه الموجب أو السالب وفق العلاقة التالية:

$$X_J \in (\infty-, \infty+)$$

قي هده الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بحيث نفرض:

$$X_J = X'_j - X''_J$$

$$\Leftarrow X'_j \ge 0, X''_J \ge 0$$ حيث أن:

أي أن X_j عبارة عن الفرق بين قيمتين موجبتين، بحيث نفرض:

- **إذا كان** X_j موجباً يكون: $\Leftarrow X'_j \rangle X''_J$
- **إذا كان** X_j سالبا يكون: $\Leftarrow X'_j \langle X''_j$
- **إذا كان** X_j معدوماً يكون : $\Leftarrow X'_j = X''_j$

يتم تعويض المتغير وفق التحويل الجديد في البرنامج الأصلي، ثم يتم إيجاد الحل الأمثل ، ونقوم بإيجاد قيمة المتغير الأصلي وفق صيغة التحويل أعلاه .

التمرين الاول: أوجد الحل الأمثل لبرنامج الخطي الأصلي التالي:

$$MaxZ = 3X_1 + 3X_2$$

$$ST$$

$$5X_1 + 6X_2 \le 10.....(1)$$

$$2X_1 + 2X_2 \le 14.....(2)$$

$$X_1 \ge 0, X_2 \ge 0$$

التمرين الثاني :أوجد الحل الأمثل لبرنامج الخطي الأصلي التالي:

$$MaxZ = 3X_1 + 10X_2$$

$$5X_1 + 6X_2 \le 10.....(1)$$

$$2X_1 + 7X_2 \le 14.....(2)$$

$$X_1 \ge 0, X_2 \ge 0$$

الفصل الرابع :

برمجة الأعداد الصحيحة (طريقة القطع)

الفصل الرابع : برمجة الأعداد الصحيحة(طريقة القطع)

بعض المتغيرات الاقتصادية الخاصة بالكميات (الفيزيائية) لا يمكن تجزئتها، وإلا فقدت صفتها، فعندما نكون مثلا بصدد تحديد كميات الإنتاج اليومي لأجهزة التلفاز لمصنع معين ونقول 40.66 تلفاز، الجهاز يجب أن يكون وحدة كاملة فنقول أن الإنتاج اليومي يجب أن يكون 40 تلفاز أو 41 تلفاز.

وفي البرامج الخطية كثيرا ما يعطينا الحل الأمثل قيمها بالفاصلة وهو ما أدى إلى البحث إلى هذا المشكل، وهو ما يعرف ببرمجة الأعداد الصحيحة التخلص من فبرمجة الأعداد الصحيحة هي طريقة من طرف البرمجة الخطية تقتضي البحث عن الحل الأمثل للبرامج الخطية بحيث يحتوي الحل الأمثل على متغيرات قيمها أعداد صحيحة ويتطلب ذلك المرور بعدة مراحل:

أولا: المرحلة الأولى :

إيجاد الحل الأمثل وفق البرنامج الأصلي، إذ حصل حل أمثل متغيراته صحيحة فذلك هو المطلوب، أما إذا حصل حل أمثل قيمة غير صحيحة ننتقل إلى المرحلة الثانية.

ثانيا : المرحلة الثانية :

وهناك طريقتان للحل هما:

الطريقة البيانية

طرية البرمجة الخطية

وسنتطرق إليهما تباعا في النقاط التالية:

1. **الطريقة البيانية :** وهناك طريقتين

طريقة المستوى القاطع لجوري Geomory's Cutting plane Method

طريقة الحد و الفرع Branch and Bound Method

1- طريقة المستوى القاطع : وتعتمد على الخطوات التالية:

أ- نجد الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني و تحديد منطقة الحل و نقطة الحل الأمثل .

ب- نعمل قاطع لـ X2 عند أقرب عدد صحيح لنقطة الحل .

ت - نعمل قاطع آخر لـ X1 عند أقرب عدد صحيح ! لنقطة الحل .

مثال 1: حل نموذج البرمجة بأعداد صحيحة التالي:

$$\text{Max } (Z) = 14X1 + 16X2$$

st

$$4X1 + 3X2 \leq 12$$

$$6X1 + 8X2 \leq 24$$

$$X1, X2 \geq 0 \quad \text{أعداد صحيحة}$$

الحل : نحول القيود إلى معادلات

المعادلة (1): $4X1+3X2=12$

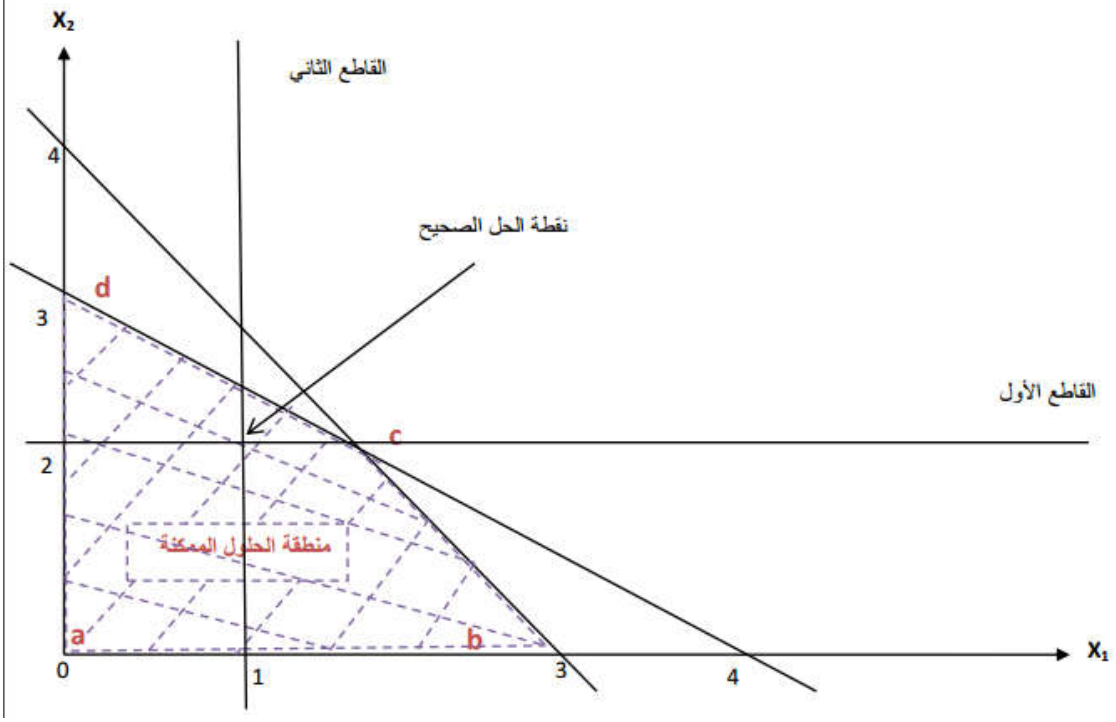
نفرض أن $X1=0$ فنجد أن $X2=4$

نفرض أن $X1=3$ فنجد أن $X2=0$

المعادلة (2): $6X1+8X2=24$

نفرض أن $X1=0$ فنجد أن $X2=3$

نفرض أن $X1=4$ فنجد أن $X2=0$



نجد احداثيات نقاط الحل

$$(-6)\ [\ 4(X_1 + 3X_2 = 12] \quad = -24X_1 - 18X_2 = -72$$

$$(4)\ [6X_1 + 8X_2 = 24] \quad = 24X_1 + 32X_2 = 96$$

بالجمع $14X_2=24 \Rightarrow X_2=24/14=1.71$

$X_1 = 1.71 \qquad X_2=1.71$

الحل	X_1	X_2	Z	
A	0	0	0	
B	3	0	42	
C	1.71	1.71	51.3	⟵ الحل الأمثل
D	0	3	48	

مثال 02 : أوجد الحل الصحيح لنموذج البرمجة الخطية التالي :

Max Z = 7X1+10X2

S.T :

$-X1 + 3X2 \leq 6$

$7X1 + X2 \leq 35$

$X_1, X_2 \geq 0$ أعداد صحيحة

الحل : تحويل القيود إلى معادلات

المعادلة (1): $-X1+3X2=6$

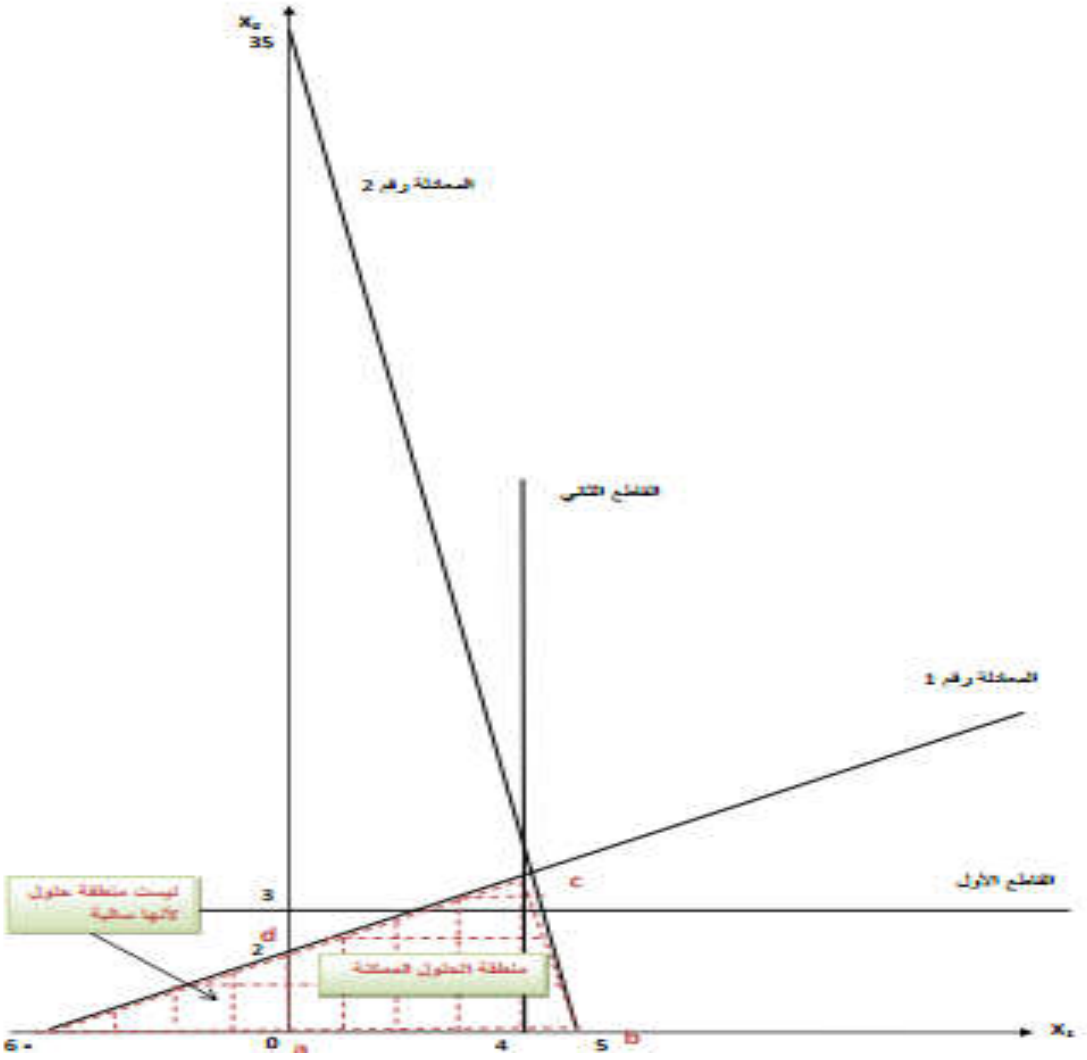
نفرض أن X1=0 فنجد أن X2=2

نفرض أن X1= 6− فنجد أن X2=0

المعادلة (2): $7X1+X2=35$

نفرض أن X1=0 فنجد أن X2=35

نفرض أن X1=5 فنجد أن X2=0



ايجاد احداثيات النقطة c :

بالجمع نجد :

$7\times(1)$ نضرب المعادلة $[-X_1+3X_2=6] = -7X_1+21X_2= 42$

$7X_1 + X_2 = 35 \qquad 7X_1+X_2 = 35$

$22X_2 = 77 \; X_2 = 77/22 = 3.5$

$X_1=4.5$

$X_2=3.5$

$Z=66.5$

الحل	X_1	X_2	Z	
A	0	0	0	
B	5	0	35	
C	4.5	3.5	66.5	الحل الأمثل ⟸
D	0	2	20	

وبالتالي يكون الحل الامثل الصحيح (بالأعداد الصحيحة) هو :

$$X_1=4$$

$$X_2=3$$

$$Z=58$$

2- طريقة الحد والفرع:

للحل بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

أ- نجد الحل الأمثل بالطريقة البيانية.

ب- نأخذ كل أزواج النقاط الصحيحة ضمن منطقة الحل الأمثل (يمكن أخذ أقرب مربع لنقطة الحل الأمثل و ذلك للاختصار).

ت- يكون الحل لأكبر قيمة تعطي حل بأعداد صحيحة إذا كانت دالة الهدف (Max)،وأقلها إذا كانت (Min)

مثال 01 : أوجد حل نموذج البرمجة الصحيحة التالي:

Max Z = X1 + 2X2

S.T

$5X_1+7X_2 \leq 35$

$4X_1 + 9X_2 \leq 35$

$X_1, X_2 \geq 0$ شرط أن تكون أعداد صحيحة

المعادلة (1): $5X_1+7X_2 \leq 35$

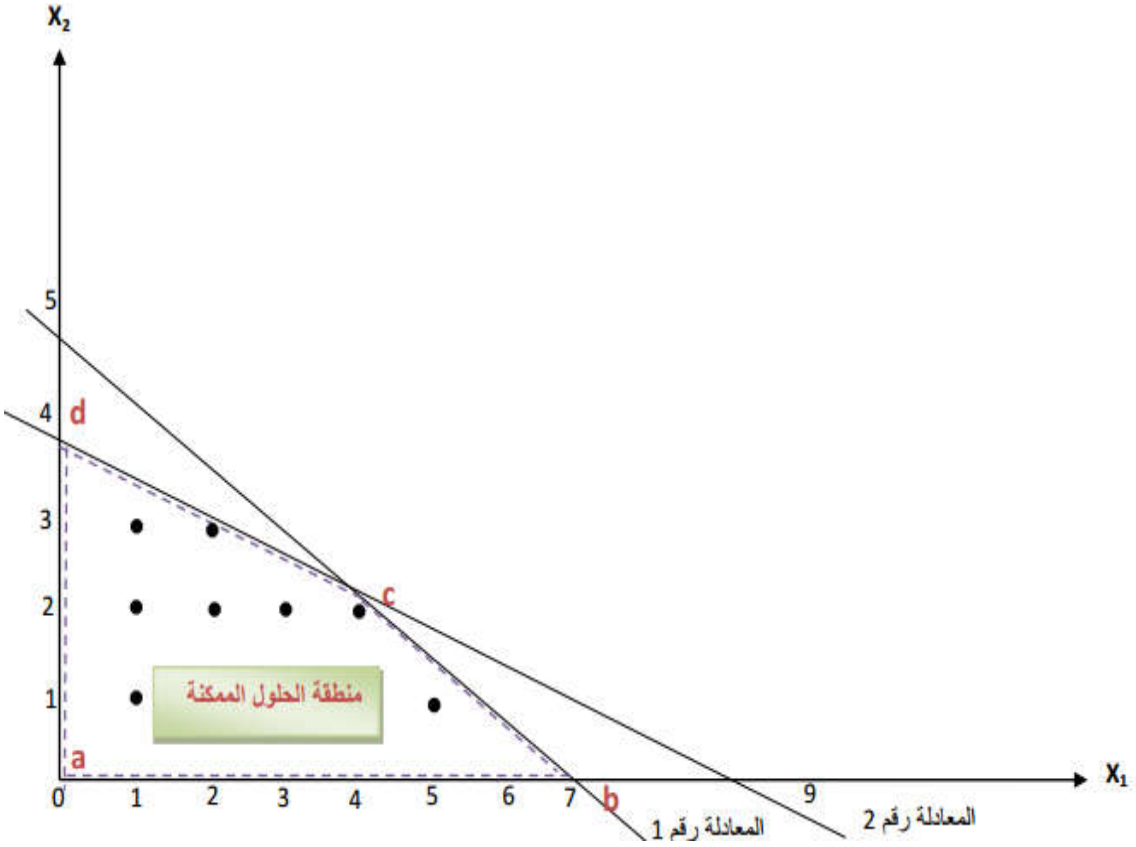
نفرض أن X1=0 فنجد أن X2 =5

نفرض أن X1=7 فنجد أن X2=0

المعادلة (2): $4X_1 + 9X_2 \leq 35$

نفرض أن X1=0 فنجد أن X2=4

نفرض أن X1=9 فنجد أن X2=0



نقاط الحل :

الحل	X_1	X_2	Z
A	0	0	0
B	7	0	7
C	3.71	2.35	8.41
D	0	4	8

إيجاد النقطة C :

بالجمع نجد : 20X1+28X2=140 ⇐ نضرب المعادلة 1 x(4) 5 X1+7X2=35

$4X1+9X2=36 \Rightarrow -20X1-45X2=-180$ نضرب المعادلة (2) x (−5)

$17X2= -40 \Rightarrow X2=40/17 \Rightarrow X2=2.35 , X1= 3.71$

بالإمكان أخذ كامل النقاط أو أخذ النقاط الأقرب للحل الأمثل:

(X1 . X2)	Z
(2 . 2)	6
(3 . 2)	7
(4. 2)	8
(2. 3)	8

وحتى النقطة (4 .0) أيضا تحقق الحل الأمثل، وعلى صاحب المشروع أن يختار لأن هذا البرنامج لديه أكثر من حل أمثل (حالة تعدد الحلول).

الفصل الخامس

نماذج النقل

الفصل الخامس : نماذج النقل الخطية

تعتبر مشكلة النقل أحد التطبيقات المهمة في البرمجة الخطية وتهدف أساسا إلى تخفيض التكلفة الكلية لنقل المواد أو المنتجات وسنتعرض إلى مفهوم نماذج النقل وكيفية صياغة نموذجها.

1- تعريف نماذج النقل

تهدف مسألة النقل غلى تخفيض تكلفة نقل المواد غلى أدنى تكلفة ممكنة، مما يؤدي بالنهاية إلى انخفاض التكلفة الإجمالية للسلعة، وبالتالي إمكانية تسعيرها بشكل يجعلها قادرة على منافسة السعرية.

وتعد تكاليف النقل بأقل تكاليف النقل بالوقت الحاضر عنصرا أساسيا وهاما من عناصر التكلفة الإجمالية لإنتاج السلعة، مما يعني ضرورة زيادة اهتمام مديري منشآت الأعمال بتكلفة النقل وبالوسائل التي من شأنها تخفيضها، ومن المتعارف عليه، أن تكلفة النقل تتناسب طرديا مع طول المسافة الفاصلة بين المورد والمنشأة المشترية، وبين المنشأة البائعة وأسوقها أو مواقع مخازنها.[1]

وتعتبر طريقة النقل من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع (أو المواد) من مصادر متعددة إلى مراكز متعددة بهدف سد احتياجات المراكز ذات العلاقة بأقل كلفة ممكنة.[2]

مما سبق نستنتج أن نماذج النقل هي أسلوب رياضي يتم من خلاله نقل السلع أو الخدمات من مصادر متعددة إلى مراكز متعددة بأقل تكلفة ممكنة.

2- التطور التاريخي لنماذج النقل:

لم يبدأ التحليل الرياضي لمشكلة النقل قبل عام 1941، عندما نشر F.L.Hitchcock، دراسته الأولى والتي تعلقت أساسا بتوزيع السلع، ومنذ هذا التاريخ قام العديد من الباحثين مثل: T.C.Koopmans و CreorgeB.Danstig و w.w.Cooper et A.Charned وعديدين آخرين بدراسة نفس المشكلة ففي عام 1947 قدم Koopmansدراسة ليست مرتبطة بدراسة Hitchcock موضوعها توسيع إستخدام فكرة أسلوب النقل كما قدم Danstig كيفية صياغة مشكلة النقل باستخدام أسلوب البرمجة

[1]- محمد عبيدات، **الأساليب الكمية في إتخاذ القرار**،ط:1،دار وائل، الأردن،2006،ص ص:260،259.

[2]- فتحي خليل حمدات، رشيق رفيق مرعي، مرجع سبق ذكره، ص:115.

الخطية في الحالات المختلفة، وساهما Charned وCooper في عام 1953 بتقديم طريقة تقييم الخلايا الفارغة والتي تعرف بأسلوب الحجر المتنقل.[3]

3- كيفية صياغة نموذج النقل

من خلال ما تعرفنا إليه في السابق نلاحظ أن مسألة النقل تتمركز على كيفية توزيع الخدمات والمواد من عدة مصادر إلى عدة مراكز بأقل تكلفة وتوزيع ممكن ولذلك يفترض النموذج الرياضي لمسألة النقل عدة فرضيات رئيسية وشروط يجب الالتزام بها.

⊂ فرضيات نموذج النقل

يحتاج استخدام نموذج النقل إلى توافر مجموعة من العناصر التي تتمثل فيما يلي:[4]

- ✓ تعدد مناطق الإنتاجية ونرمز لها بالرمز m(مراكز العرض).
- ✓ تعدد مناطق التوزيع ونرمز لها بالرمز n(مراكز الطلب).
- ✓ عرض المنتوجات قد تختلف من مصدر إلى آخر ونرمز له بالرمز (.....Sn)

حيث S1:الكمية التي يتم إنتاجها في المركز الإنتاجي الأول وهكذا.

- ✓ الطلب على هذه المنتوجات قد يختلف من مركز استقبال إلى آخر ونرمز له بالرمز

حيث D1:حجم الطلب المستقبل الأول وهكذا.

- ✓ تكلفة نقل الوحدة من المنطقة الإنتاجية i إلى مركز التوزيع j ونرمز لها بالرمز Cij.
- ✓ الكمية التي يمكن نقلها من المنطقة i إلى المركز j ونرمز لها بالرمز Xij.

⊂ شروط مشاكل النقل:

لحل مسألة النقل يتوجب علينا تشكيل مصفوفة النقل، ويتم تمثيل ذلك بالجدول التالي مع اعتبار ما يلي:

- ✓ معرفة الكميات المتاحة Aiحيث i=1..... m.
- ✓ معرفة الكميات المطلوبة Bj حيث j=1..... n.
- ✓ تكاليف النقلCij بين مراكز التوريد i ومراكز الاستهلاكj.

[3]- محمد توفيق ماضي، **الأساليب الكمية في مجال إدارة الإنتاج والعمليات**، ط:1، المكتب العربي الحديث، الإسكندرية،1992،ص:78.

[4]- إبراهيم احمد مخلوف، **التحليل الكمي في الإدارة**،ط:1،بدون دار نر، الرياض،1994،ص:141.

- ✓ وضع هذه المعلومات ضمن مصفوفة النقل.
- ✓ نرمز للكميات المنقولة Xij من المصدر i إلى المستهلك j.

مركز / مصدر	D_1	D_2	.....	D_n	العرض
S_1	X_{11} C11	X_{12} C12	.....	X_{1n} C1n	A_1
S_2	X_{21} C21	X_{22} C22	.....	X_{2n} C2n	A_2
↓	↓	↓	.....	↓	↓
S_m	X_m Cn1	X_{m2} Cm2	.....	X_{mn} Cmn	A_m
الطلب	B_2	B_2	.....	B_n	

دالة الهدف:[5]

$$Min$$
$$C_{21}.X$$
$$+C_m$$

$$Min = i=1^m \sum \; j = 1^m \sum \quad C_{ij}.X_{ij}$$

وتصبح المشكلة إيجاد قيم X_{ij} بحيث

$$I=1.2.....m \quad \text{و} \quad j=1.2.....n$$

وذلك باستخدام الدالة Min

طبقا للشروط الآتية:

$$j = 1^n \sum X_j = A_i$$

و

$$i = 1^m \sum X_{ij} = B_j$$

[5]– نفس المرجع، ص ص:142،143.

$X_{ij} \geq 0$ و I=1.2.....m

j=1.2.....n

1- ويلاحظ أن الصياغة السابقة لا تضمن أن حجم العرض الكلي يساوي حجم الطلب الكلي أي لا تتضمن أن:

$$i = 1^{m} \sum A_i = j = 1^{n} \sum B_j$$

ويتطلب حل البرنامج باستخدام طريقة النقل تساوي الطلب والعرض.

2- فإذا كان العرض أكبر من الطلب أي أنه إذا كان:

$$i = 1^{m} \sum A_i = j = 1^{n} \sum B_j$$

نكون مركز توزيع وهمي طاقته الاستيعابية تساوي زيادة العرض على الطلب ونضع التكلفة المقابلة لمركز التوزيع الوهمي مساوية للصفر.

3- ومن ناحية أخرى إذا كان العرض أقل من الطلب أي أنه:

نكون منطقة إنتاجية وهمية طاقتها الإنتاجية تساوي زيادة الطلب على العرض ونضع التكلفة المقابلة لها مساوية للصفر.

يجب عند تعبئة الخلايا في المصفوفة أن تكون:

عدد الخلايا الممتلئة مساوية لعدد الأسطر +عدد الأعمدة-1، أي أن عدد الخلايا الممتلئة =m+n-1

حيث m عدد الأسطر، و n عدد الأعمدة.

4- طرق حل نموذج النقل الخطي

تمر عملية حل مسائل النقل بمرحلتين الأولى هي مرحلة إيجاد الحل الأساسي الأول وتتم بعدة طرق والثانية هي مرحلة اختبار الحل وسيرورة تحسينه وتتم بطريقتين وفي هذا المبحث سنتطرق لطرق الحل الأساسي والأمثل.

4-1- طرق الحل الابتدائي الأولي

هذا الحل المبدئي يضمن أن كل منطقة إنتاجية توزع إنتاجها وأن كل مركز توزيع يشبع حاجته، كذلك فإن هذا الحل ينتج عنه عدد معين من الخانات المشغولة أو المتغيرات الأساسية يساوي (m+n-1)، حيث في الحل الأولي يجب تساوي العرض والطلب.

⊂ طريقة الزاوية الشمالية الغربية

تغطي كافة احتياجات الخلية الواقعة في الركن الشمالي الغربي من المصفوفة ككل بغض النظر عن تكلفة النقل إليها (الخلية S1،D1) إذا كان ذلك ممكنا، أي إذا توفرت من المصدر (S1) كمية تساوي احتياج المنطقة (D1)أو تزيد عنهما، أي إذا كان A1≥B1 . أما العكس فإذا توافرت في المصدر (S1)كمية أقل من احتياجات المنطقة (D1) بمعنى أن A1≤B1 فإنه يمكن تلبية جزء من احتياجات الخلية الموالية.[6]

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 2	1	8	10
S_2	5 7	18 4	2 3	25
S_3	6	2	20 4	20
الطلب	15	18	22	55 / 55

ويتم التوزيع بطريقة الزاوية الشمالية الغربية كما يلي:

الخلية X11 تحتاج إلى 15 ونعطيها من المورد S1،10حيث أن 15>10وهذا يعني أن العمود D1 يلزمه 5 ليشبع حاجته وننتقل إلى الخلية X12 فنجد ان المورد S1 لم يتبقى لديه أي أصبح يساوي الصفر وهكذا بالنسبة للخلية X13 وننتقل للخلية X21فنجد أنها تحتاج إلى 5 ونعطيها من المورد S2 لأن 5<25 وبالتالي نكون قد لبينا حاجيات العمود D1 وهكذا تتواصل عملية التوزيع إلى آخر خلية.

وتصبح التكلفة الإجمالية كما يلي:

$$F(X)=2(10)+7(5)+4(18)+3(2)+4(20)=213$$

➲ طريقة أقل تكاليف :

تختلف هذه الطريقة الأولى في إيجاد الحل الاساسي الأولي، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ في تشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية وهكذا، حتى يتم استفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي(m+n−1).[7]

[6]– مازن بكر عادل وآخرون،**بحوث العمليات للإدارة الهندسية**، ط:؟، دار الكتاب للنشر، جامعة الموطن، 1986،ص:61.

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	2	10 1	8	10
S_2	3 7	4	22 3	25
S_3	12 6	8 2	4	20
الطلب	15	18	22	55 / 55

ويتم التوزيع بطريقة أقل تكلفة كمايلي:

نبدأ التوزيع من الخلية ذات اقل تكلفة وهي الخلية (S1.D1)ونعطيها حاجتها ومن ثم ننتقل إلى الخلية ذات التكلفة "2" ونجد أنه هناك خليتين فنختار إحداهما حيث نختار الخلية (S3.D2)ونقوم بإعطائها حاجتها وهكذا إلى أن نصل إلى الخانة الأخيرة.

التكلفة الإجمالية هي كالتالي:

$$F(X)=1(10)+7(3)+3(22)+6(12)+2(8)=185$$

وهي أفضل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

➲ طريقة فوجل التقريبية Vogel

وتعرف أيضا بطريقة الجزاء وتقوم هذه الطريقة على الخطوات التالية:[8]

- ✓ حساب الفرق بين أقل تكلفتين للأعمدة وكذلك للصفوف وتوضح النتيجة في عمود وسطر إضافي.
- ✓ يتم إختيار العمود أو السطر ذو الفرق الأكبر ونختار الخلية ذات التكلفة الأقل فيه ويتم إشباعها بالكامل وذلك حسب الموارد المتاحة والكميات المطلوبة.
- ✓ نشطب السطر أو العمود الذي يتم إشباعه.
- ✓ نعود من جديد من الخطوة الأولى ونجري الخطوات اللاحقة وهكذا حتى نتوصل إلى حل امثل بإشباع جميع الأسطر والأعمدة.

[7]– محمد راتول، مرجع سابق ،ص:125.

[8]– كاسر نصر منصور، **الأساليب الكمية في إتخاذ القرارات الإدارية**، ط:1،دار الحامد، الأردن، 2006،ص:208.

ملاحظات:

1- في حالة وجود قيمتين عظيمتين من أرقام فوجل فإننا نقارن بين الكلفتين الدنيويتين، ونختار أقل تكلفة مقابلة وتشبع الخلية التي تنتمي إليها، وفي حالة + ما إذا كانت هاتين التكلفتين أيضا متساويتين نختار أحدهما لا على التعيين.

2- عند حساب أرقام فوجل فإنه في حالة وجود تكلفتين دنيويتين فإننا نحسب أيضا الفرق بينهما وهو الصفر.

	D_1	D_2	D_3	العرض	**فرق 1**	**فرق 2**	**فرق 3**
S_1	10 2	1	8	10	1		
S_2	3 7	4	22 3	25	1	1	**4**
S_3	2 6	18 2	4	20	2	2	2
الطلب	15	18	22				
الفرق 1	**4**	1	1				
الفرق 2	1	**2**	1				
الفرق 3	1		1				

نلاحظ من خلال الجدول أن السطر S1 والعمودين D2 وD3 شطبوا وبقي العمود D1 لم يشطب فإننا في هذه الحالة نقوم بتعبئة الخلايا المتبقية والموافقة للعمود D1 بالترتيب.

- التكلفة الإجمالية هي كالتالي:

$$F(X)=2(10)+7(3)+3(22)+6(2)+2(18)=155$$

وهي أقل من التكلفتين السابقتين باستخدام الطريقتين الزاوية الشمالية الغربية وأقل تكلفة وتعتبر طريقة فوجل التقريبية وأكثر دقة في توزيعها وبأقل تكلفة ممكنة.

5- التفرقة بين طرق الحل الأولي

5-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية: تعطي هذه الطريقة حلا أساسيا ولكن غالبا ما يحتاج الحل إلى اختيار وتحسين لأن الطريقة لا تأخذ بنظر الاعتبار تكاليف خاصة بالنقل من مصادر الإنتاج إلى مراكز التوزيع.[9]

5-2-طريقة أقل تكاليف: تحاول هذه الطريقة من التقليل في تكاليف النقل، ويكون حلها ليس بالضرورة هو الحل المبدئي الذي نتوصل إليه في طريقة الزاوية الشمالية ولكنه مجرد حلا مبدئيا وممكنا وأساسيا.

تكلفة هذا الحل تعد أقل من تكلفة الحل في الزاوية الشمالية وعادة ما تكون هذه هي النتيجة في معظم الحالات إلا أنها ليست بقاعدة عامة فذلك يتوقف على توزيع تكلفة نقل الوحدات داخل الخلايا.

- بالرغم من الميزة الأساسية لهذه الطريقة وهي أنها تأخذ التكلفة في الحسبان غلا أنه يعاب عليها بصفة أساسية أنه عند تطبيقها قد يؤدي اختيار خلية ذات تكلفة منخفضة إلى صعوبة اختيار خلية أخرى قد تكون أفضل من حيث التكلفة الكلية ويرجع ذلك غلى استبعاد كل صف أو كل عمود بسبب قيود الطاقة.[10]

5-3- طريقة فوجل التقريبية: تكون كلفتها الإجمالية أقل من التكلفة الإجمالية للطرقتين السابقتين، كما أن كلفتها الإجمالية تكون هي الكلفة المثلى.

رغم أنها غالبا وليس دائما ما تؤدي إلى الوصول إلى الحل الأمثل مباشرة بحيث تكون مصفوفة الحل الأولي هي مصفوفة الحل الأمثل شأنها شأن طريقة أقل تكاليف.[11]

1- أفضل طرق الحل الأولي

إن السمات العامة لطرف الحصول على حل أساسي أولي يمكن إجمالها فيما يلي:[12]

- الطرق الثلاث تساهم في تحقيق الحل الأولي (مسألة النقل).

[9]- صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، مرجع سبق ذكره، ص:216.

[10]- محمد توفيق ماضي، مرجع سبق ذكره، ص ص:90،91.

[11]- علي علاونة ومحمد عبيدات، بحوث العمليات في العلوم التجارية،الطبعة الأولى،دار المستقبل للنشر والتوزيع، عمان، الاردن،2000، ص:282.

[12]- سعدي رجال، مرجع سبق ذكره، ص: 194.

❖ بغض النظر عن الطريقة المتبعة فإن الحل الأولي الناتج يجب أن يخضع إلى التأكد من تحقيق الحل الأمثل للمسألة ذات العلاقة.

❖ تعتبر طريقة الجزاء (فوجل التقريبية) هي أفضل من طريقة أقل تكاليف في معظم الحالات وطريقتين أقل تكلفة وطريقة فوجل التقريبية تعدان أفضل بكثير من طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

4-2/ طرق الحل النهائي للوصول إلى الحل الأمثل

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى للاختيار هل الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل؟ وهل هو الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل أفضل منه أم أن هناك حلولا أمثل منه؟

وهناك طريقتين لاختيار أمثلة الحل هما طريقة المسار المتعرج وطريقة التوزيع المعدل.

☒ علما بأن تحسين الحل بالطريقتين يتطلب أن تكون مشكلة النقل في الحل الأساسي الأولي مستوفاة للشرط التالي[عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة)=عدد الصفوف+ عدد الأعمدة-1]

☒ أما في حالة لم يتحقق هذا التساوي فإن مشكلة النقل تكون حالة خاصة تسمى انحلال الحل.

1- طريقة المسار المتعرج:

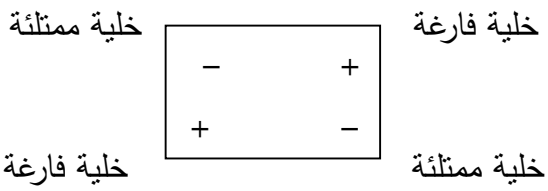
وقد يسمى أيضا بطريقة الحجر المتنقل (القفز على الصخور)، وهي أسلوب تكراري الهدف منه بيان ما إذا كان الحل أمثلا أم أن هناك إمكانية لتحسينه وذلك عن طريق تقييم الخلايا الغير مشغولة(الفارغة) في جدول (الحل الاولي) لمعرفة أثر استخدام كل خلية فارغة على مجموعة التكاليف ويتم ذلك من خلال عمل مسار مغلق لكل خلية فارغة، ويتم تقسيم أثر شغل كل من تلك الخلايا الفارغة وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية كالتالي:[13]

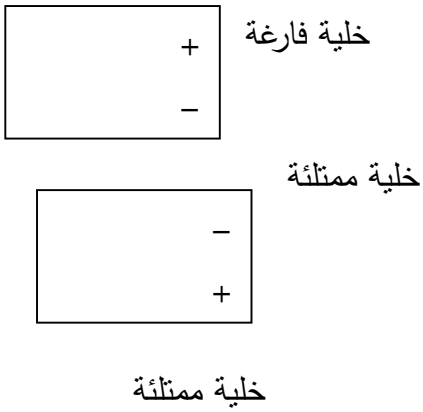
1-1- يجب أن يبدأ وينتهي المسار المغلق عند الخلية الفارغة المراد تقييمها.

1-2- تكوين مسار مغلق من مستقيمات أفقية وعمودية بحيث تقع الخلايا المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق.

[13]- فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مرجع سبق ذكره، ص ص: 135،136.

1-3- يتم وضع إشارة (+) للخلية المراد تقييمها ثم إشارة (-) للخلية التي تليها في المسار، ثم إشارة (+) للخلية الموالية في المسار، وهكذا تتالي الإشارة الموجبة والسالبة حتى نصل إلى الخلية التي بدأنا منها.





1-4- نقوم بحساب التكلفة الغير مباشرة للخلية، وذلك بجمع كلف جميع الخلايا الواقعة على المسار بعد وضع الإشارات عليها.

1-5- إذا كانت التكلفة غير مباشرة لخلية ما بالسالب فإن ذلك يعني أن شغل تلك الخلية سيؤدي إلى خفض تكاليف النقل.

1-6- في حالة وجود أكثر من خلية فارغة لها تكلفة غير مباشرة بالسالب، فإنه تغطي الأولوية للخلية صاحبة أكبر رقم سالب، حيث أن شغل تلك الخلية يكون أكثر فاعلية في خفض التكليف.

1-7- يتم إشغال الخلية الفارغة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفي المسار.

1-8- يفضل التوزيع بطريقة الركن الشمالي الغربي لحساب التكاليف المبدئية.

إلى / من	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	25 20	8	22	25
S_2	45 24	45 10	16	90
S_3	18	5 14	60 12	65
الطلب	70	50	66	

ون $CT=20(25)+24(45)+10(45)+14(5)+12(60)=2820$

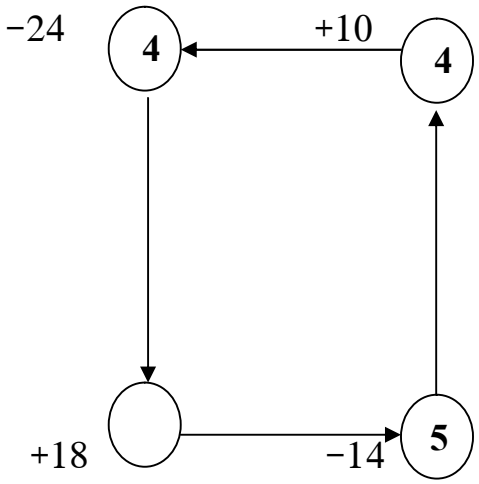
❖ دراسة أمثلية الحل الأولي (إيجاد الحل الأمثل)باستخدام طريقة المسار المتعرج:

- عدد الخلايا الممتلئة(الخلايا الداخلة في الحل)=m+n−1(محققة) 5=1−3+3.
- تحديد الخلايا الفارغة.
- رسم المسارات المغلقة للخلايا الفارغة.
- تحديد التكلفة الغير مباشرة للخلايا الفارغة.

الخلايا الفارغة	المسار المغلق	تكلفة غير مباشرة
$(S_1.D_2)$	$(S_1.D_2)$ $(S_1.D_2)$ $(S_2.D_1)$ $(S_2.D_2)$ $(S_1.D_2)$	+8−20+24−10=+2
$(S_1.D_3)$	$(S_1.D_2)$ $(S_1.D_1)$ $(S_2.D_1)$ $(S_2.D_2)$ $(S_1.D_2)$ $(S_3.D_3)$ $(S_1.D_3)$	+22−20+24−10+14−12=+4
$(S_2.D_3)$	$(S_1.D_2)$ $(S_1.D_1)$ $(S_2.D_1)$ $(S_2.D_2)$ $(S_1.D_2)$	+16−10+14−12=+8

$(S_3.D_1)$	$(S_1.D_2)$ $(S_1.D_1)$ $(S_2.D_1)$ $(S_2.D_2)$ $(S_1.D_2)$	$+18-14+10-24=-10$

من خلال التكاليف غير مباشرة نلاحظ وجود قيمة سالبة واحدة (-10) معناه أننا توصلنا إلى الحل الأمثل، نأخذ الخلية ذات القيمة السالبة $(S_3.D_1)$ وبملئها لأن ذلك سيخفض التكاليف.



نضيف (5) وحدة بحسب مسار الخلية فعند الإشارة الموجبة نضيف وعند الإشارة السالبة نطرح.

$(S_3.D_1)$:0+5=5

$(S_3.D_2)$:5−5=0

$(S_2.D_2)$:45+5=50

$(S_2.D_1)$:45−5=40

ومنه يصبح جدول النقل كما يلي:

إلى / من	D_1	D_2	D_3
S_1	25 20	8	22
S_2	45 24	50 10	16
S_3	5 18	14	60 12

ون $CT=20(25)+24(40)+10(50)+18(5)+12(60)=2770$

❖ دراسة أمثلية جدول النقل باستخدام المسار المتعرج:

- عدد الخلايا الداخلة في الحل m+n−1 محققة.
- نكرر العمليات السابقة لاختيار الخلايا الفارغة:

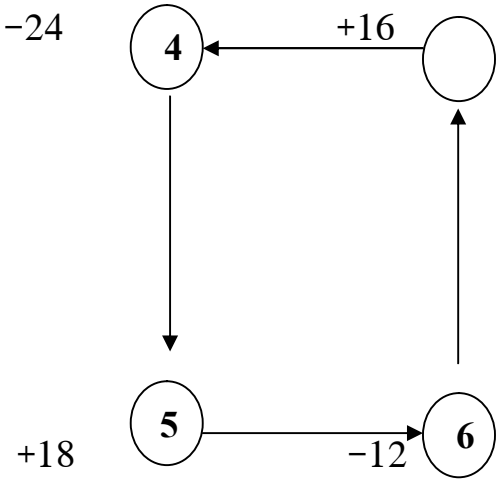
$(S_1،D_2)$:+8−20+24−10=+2

$(S_1،D_3)$:+22−20+18−12=+8

$(S_2،D_1)$:+16−24+18−12=−2

$(S_3،D_2)$:+14−10+24−18=+10

بما أنه توجد خلية بها تكلفة سالبة فإن الحل غير أمثل، ونأخذ الخلية $(S_2.D_3)$ ونقوم بملئها.



نضيف ونطرح 40 لكل خلية حسب إشارتها:

$(S_3.D_1)$:0+40=40

$(S_3.D_2)$:40−40=0

$(S_2.D_2)$:5+40=45

$(S_2.D_1)$:60−40=20

ومن يصبح جدول النقل كالتالي:

من \ إلى	D_1	D_2	D_3
S_1	25 20	8	22
S_2	24	50 10	40 16
S_3	45 18	14	20 12

ون CT=20(25)+10(50)+16(40)+18(45)+12(20)=2690

- دراسة أمثلية جدول النقل (3)باستخدام المسار المتعرج:
  - عدد الخلايا الداخلة في الحل m+n−1 محققة.
  - نكرر العمليات السابقة لاختيار الخلايا الفارغة:

$(S_1،D_2)$:+8−20+18−12+16−10=0

$(S_1،D_3)$:+22−20+18−12=+8

$(S_2،D_1)$:+24−18+12−16=+2

$(S_3،D_2)$:+14−12+16−10=+8

بما أن جميع التكلفة الغير مباشرة للخلايا الفارغة هي أكبر أو تساوي للصفر فإن جدول النقل (3) هو جدول الحل الأمثل حيث تكلفة النقل هي ون CT=2690

2- طريقة التوزيع المعدل

ومختصرها MODI وهي طريقة لتجنب رسم المسارات ومع ذلك فإن تقييم الخلايا الفارغة يؤدي إلى نفس نتائج طريقة المسار المتعرج، وتعتمد طريقة MODI على الأرقام القياسية للصفوف والأعمدة على افتراض منطقي هو أن تكون هناك في كل صف أو عمود على الأقل خلية مشغولة واحدة لأنها ضرورية لاحتساب الأرقام القياسية لكل صف أو عمود، أما خطوات الطريقة فهي:[14]

2-1- التوصل إلى الحل الأولي مع مراعاة شرط m+n−1 في الحل.

2-2- احتساب الرقم القياسي لكل صفVj أو عمود Ui وذلك بالاعتماد على الخلايا المشغولة فقط من خلال ما يأتي:

[14]- نجم عبود نجم، مرجع سبق ذكره، ص ص: 402،403.

- افتراض أن الرقم القياسي للصف الأول في جدول الحل الأول هو صفر أي V1=0.
- احتساب الرقم القياسي للعمود الخاص بكل خلية مشغولة في الصف الأول وفق الصيغةUi=Cij−Vj
- استخدام الأرقام القياسية لكل عمود ولكل صف أيضا التي تم التوصل إليها لاحتساب الأرقام القياسية للصفوف والأعمدة المتبقية،وبهذه الخطوة نتوصل إلى الأرقام القياسية للأعمدة والصفوف، كلها بالاعتماد على الخلايا المشغولة فقط.

2-3- تقييم الخلايا الفارغة بإستخدام الصيغة:

وبنفس قاعدة التقييم فإن تقييم الخلية إذا كان مرجبا فهذا يعني لا تحسين في الحل، إما إذا كان صفرا فهذا يعني وجود بديل آخر، أما إذا كان الناتج سالب فهذا يعني هناك تحسين ممكن في الحل

وسنحاول شرح ذلك من خلال المثال التالي:

		V_1	V_2	V_3	
		منصب 1	منصب 2	منصب 3	a_1
U_1	منبع 1	40 1	15 4	**5**	55
U_2	منبع 2	5	15 7	30 3	45
U_3	منبع 3	10	8	20 9	20
	b_i	40	30	50	120

- بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل لدينا$U_i+V_j=C_{ij}$، من خلالها نوجد المجاهيل U_iوV_j من خلال المعادلات التالية، مع فرض أن U_i لأول معادلة قيمتها صفر وهذا لتسهيل الحل:

✓ الخلية (1،1): $U_1+V_1=1 \Longrightarrow$

$V_1=1$

✓ الخلية (2،1): $U_1+V_2=4 \Longrightarrow V_2=4$

✓ الخلية (2،2): $U_2+V_2=7 \Longrightarrow {}_2+4=7 \Longrightarrow {}_2=3$

✓ الخلية (3،1): $U_2+V_3=3 \Longrightarrow +V_3=3 \Longrightarrow {}_3=0$

✓ الخلية (3،3): $U_3+V_3=9 \Longrightarrow {}_3+0=9 \Longrightarrow {}_3=9$

- بالنسبة للخلايا غير داخلة في الحل: وهي الخطوة الثانية، يتعين تقييم هذه الخلايا من خلال إيجاد التكاليف الحدية لكن بطريقة مختلفة عن طريقة التخطي، وذلك عن طريق المعادلة والتي نحصل من خلالها على الجدول التالي:

الخلية	c	c
$U_1،V_3$	5−0−0=5	5
$U_2،V_1$	5−3−1=1	1
$U_3،V_1$	10−9−1=0	0
$U_3،V_2$	8−9−4=−5	−5

يظهر في العمود الأخير أن تكاليف الحدية مساوية تماما لتلك المحصل عليها بطريقة التخطي، ويظهر أن الحل غير أمثل لأن الخلية (2،3)، سوف تؤدي إلى تحسين التكلفة بمقدار 5 وحدات نقدية لكل وحدة تنقل عبرها أي من المنبع 3 إلى المصب 2، وعليه يتم تحديد المسار وإجراء التحويلات بنفس الطريقة المشروحة ونحصل على الجدول.

	منصب 1	**منصب 2**	**منصب 3**	a_1
منبع 1	40 1	15 4	5	55
منبع 2	5	7	45 3	45
منبع 3	10	15 8	5 9	20
b_i	40	30	50	120

من جديد نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا، وهذا بنفس المنهجية السابقة، حيث نفرض أيضا أن U1=0، ونحصل على النتائج:

$U_1+V_1=1 \Longrightarrow V_1=1$

$U_1+V_2=4 \Longrightarrow V_2=4$

$U_3+V_2=8 \Longrightarrow U_3+4=8 \Longrightarrow U_3=4$

$U_3+V_3=9 \Longrightarrow 4+V_3=9 \Longrightarrow V_3=5$

$U_2+V_3=3 \Longrightarrow U_2+5=3 \Longrightarrow U_3=-2$

وفي الخطوة الموالية نشكل جدول التكاليف الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل وهو ما يظهره الجدول رقم 2-12 أدناه.

الخلية		
U1،V3	5−0−5=0	0
U2،V1	5−(−2)−1=6	6
U2،V2	7−(−2)−4=5	5
U3،V1	10−4−1=5	5

بما أن كل قيم σ_{ij} غير سالبة، لذلك فإن الجدول السابق هو جدول الحل الأمثل، ويتم شرحه تماما كما تم ذلك عند شرح جدول الحل الأمثل المحصل عليه بطريقة التخطي.

تمارين بالحل المختصر

تمرين 1:

تمتلك منشأة لصناعة السميد ثلاث معامل ، كانت الطاقة الانتاجية للمعمل الاول هي 350 طن من الطحين ، المعمل الثاني 300 طن ، المعمل الثالث 300 طن ، وتقوم المنشأة بتجهيز الاسواق في اربع مناطق والتي يبلغ احتياجاتها من السميد على التوالي المنطقة الاولى 350 الف دينار للطن الواحد ، المنطقة الثانية 225 الف دينار للطن ، المنطقة الثالثة 100 الف دينار للطن ، المنطقة الرابعة 125 الف دينار للطن ، واما كلف نقل السميد موجودة في الجدول الاتي :

إلى / من	D_1	D_2	D_3	D_4	الطاقة الانتاجية
S_1	10	8	12	14	350
S_2	6	7	13	11	300
S_3	4	9	10	5	300
الاحتياجات	350	225	100	125	

المطلوب :

1- ايجاد الحل الاولي بطريقة الركن الشمالي الغربي

2- ايجاد الحل الاولي بطريقة اقل التكاليف

3- ايجاد الحل الاولي بطريقة فوجل .

4- هل يمكن اعتبار الحلول السابقة حلول مثلى ، استعن بطرقة المسار الحرج لاثبات ذلك ؟

تمرين 2:

تمتلك مؤسسة لصناعة المبيدات ثلاث وحدات ، وتوزع منتوجاتها على ثلاث اسواق والجدول التالي يمثل العرض والطلب والتكاليف غير المباشرة لنقل الوحدات من المعامل للاسواق :

إلى / من	D_1	D_2	D_3	الطاقة الانتاجية
S_1	12	8	11	35
S_2	5	7	12	30
S_3	4	9	10	30
الاحتياجات	35	22	10	

المطلوب :

1- ايجاد الحل الاولي بطريقة الركن الشمالي الغربي

2- ايجاد الحل الاولي بطريقة اقل التكاليف

3- ايجاد الحل الاولي بطريقة فوجل .

4- ايجاد الحل الامثل بطريقة التوزيع المعدلة ؟

الخاتمة

الخاتمة

وختاما لهذا العمل والذي يحتوي على كل مايحتاجه الطالب الجامعي في مستوى السنة الثانية جذع مشترك للتخصصات الثلاثة علوم اقتصادية وعلوم تجارية وعلوم التسيير ،فقد اردت وضع اهم الدروس التي يحتويها البرنامج الدراسي الفصلي ، واعتمادا على خبرة تدريسية في المقياس فاقت عشر سنوات فان كل مايجب ان يستفيد منه الطالب خلال مدة سداسي واحد تم وضعه في المطبوعة معتمدا كثيرا على الجانب النظري اكثر منه من التطبيق ، لاحتياج الطالب لفهم الجانب النظري حتى يستطيع استخدام التطبيق ومن خلال كل الفصول المقدمة في هذه المطبوعة يتمكن الطالب في هذا المستوى بالاعتماد عليها لفهم الدروس المقدمة

وفي الاخير ارجو اني قد وفقت في اختيار مواضيع هذه المطبوعة وان تكون عونا للطالب الجامعي ، ومساعدته على فهم المقياس

قائمة المراجع

قائمة المراجع

1-أكرم محمد عرفان المهتدي، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية (بحوث عمليات)**،ط1، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان،

2- فتحي خليل حمدان، رشيق رفيع مرعي، **بحوث العمليات**، ط6، دار وائل للنشر، بدون بلد النشر، 2011

3- صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم حداد، **تطبيقات بحوث العمليات**، ط1، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن.

4- السعدي رجال، **بحوث العمليات (البرمجة الخطية)**، ط1، دار رجزو، قسنطينة، 2004

5- سهيلة عبد الله سعيد: الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، دار الحامد، عمان، 2007

6- سليمان محمد مرجان: بحوث العمليات، ط1، دار الكتب الوطنية، بنغازي، 2002،

7- علاء عبد الرزاق محمد السالمي: نظم دعم القرارات،ط1، دار وائل للنشر، عمان،

8- حيدر محمد فرحات، محمد سليمان، **بحوث العمليات**، ط1، دار الفكر للطباعة والنشر والتوزيع، عمان، 1998.

9- محمد توفيق البلقيني، مرفت طلعت المحلاوي، **الأساليب الكمية في الإدارة**، ط؟، دار المريخ للنشر، الرياض- المملكة العربية السعودية 2006،

10- صباح الدين بقجة جي وآخرون، **بحوث عمليات**، ط؟، بدون بلد النشر، دمشق،

11- نجم عبود نجم، **مدخل في الأساليب الكمية**،ط1، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان،

12- محمد سالم الغدي، **بحوث عمليات تطبيق وخوارزميات**، ط1، دار وائل للطباعة والنشر، عمان.

13- أحمد الخطيب، خالد زيغان، **إدارة المعرفة ونظم المعلومات**، ط1، عالم الكتب الحديث للنشر والتوزيع، الأردن، 2009.

14- عبد الستار العلي وآخرون، **إدارة المعرفة**،ط1،دار الميسرة للنشر والتوزيع، عمان،2006.

15- نعيم إبراهيم الظاهر، **إدارة المعرفة**،ط1،جدار للكتاب العالمي للنشر والتوزيع، عمان- الأردن، 2009.

16- محمد توفيق ماضي، محمد صالح حناوي، بحوث العمليات في التخطيط ومراقبة الإنتاج،ط:؟، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2006.

17- محمد العزاوي،الانتاج وإدار العمليات –منهج كمي تحليلي–دار اليازوري للنشر،همان ، الاردن ،2006 ،.

18- فريد النجار، بحوث العمليات في الإدارة، ط1، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2009.

19- عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، **مدخل لبحوث العمليات**،ط:1،دار وائل للنشر والتوزيع، عمان- الأردن.

20- محمد راتول، بحوث العمليات،ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر2006،.
21- علي الشرقاوي،إدارة النشاط الاقتصادي في المشروعات، دار النهضة العربية ،1992.
22- دلال صادق الجواد وحميد ناصر الفتال، بحوث العمليات، الطبعة الأولى ، دار اليازوري عمان ، الاردن ،2008.
23- حمودي حاج صحراوي، رياضيات المؤسسة كمدخل إلى التقنيات الكمية، الطبعة الأولى ، دار جيطالي ، برج بوعريريج،الجزائر.
24- حسن علي مشرقي ، زياد عبد الكريم القاضي ، بحوث العمليات (تحليل كمي في الإدارة) ، دار المسيرة ، عمان 1997 .
25- نبيل محمد مرسي ، الأساليب الكمية في الإدارة ، المكتب الجامعي الحديث ، الإسكندرية 2006.
26- أحمد رفيق قاسم ، بحوث العمليات ، جامعة حلب ،
27- مؤيد عبد الحسين الفضل ، الأساليب الكمية (نماذج خطية و تطبيقاتها في تخطيط الإنتاج ، دار مجدلاوي 2004.
28- حسن علي مشرقي ، زياد عبد الكريم القاضي ، بحوث العمليات (تحليل كمي في الإدارة) ، دار المسيرة ، عمان.
29- محمد عبيدات، **الأساليب الكمية في إتخاذ القرار**،ط:1،دار وائل، الأردن،2006.
30- محمد توفيق ماضي، **الأساليب الكمية في مجال إدارة الإنتاج والعمليات**، ط:1، المكتب العربي الحديث، الإسكندرية،.
31- إبراهيم احمد مخلوف، **التحليل الكمي في الإدارة**،ط:1،بدون دار نر، الرياض،1994.
32- مازن بكر عادل وآخرون، **بحوث العمليات للإدارة الهندسية**، ط:؟، دار الكتاب للنشر، جامعة الموطن.
33- كاسر نصر منصور، **الأساليب الكمية في إتخاذ القرارات الإدارية**، ط:1،دار الحامد، الأردن، 2006.
34- علي علاونة ومحمد عبيدات، بحوث العمليات في العلوم التجارية،الطبعة الأولى،دار المستقبل للنشر والتوزيع، عمان، الاردن،2000.
35- أحمد محمد غنيم، **تخطيط ومراقبة الإنتاج والعمليات**، الطبعة الأولى، المكتبة العصرية للنشر والتوزيع، جمهورية مصر العربية، 2006.
36- حسن ابراهيم البلوط، **إدارة المشاريع ودراسة جدواها الاقتصادية ، دار النهضة العربية ، بيروت ، لبنان 2006**.
37- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات**، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان- الأردن، 2008.
38- رشيق رفيق مرعي، فتحي خليل حمدان، **مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الرابعة، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان-الأردن.

39- محمد علي متولي عجوز، بحوث العمليات والإحصاء، الطبعة الأولى، دار الفكر الجامعي، الإسكندرية.
40- محمد توفيق ماضي، إدارة جدولة المشروع، الدار الجامعية للنشر والتوزيع، الإسكندرية،2008.
41- عبد الرزاق عبد الرسول الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان- الأردن، 2001.
42- محمد عبد العال النعيمي وآخرون، مقدمة بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، 1999.
43- محمد الطراونة، سليمان عبيدات، **مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الاولى، دار الميسرة للنشر والتوزيع، عمان- الاردن.