

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL
OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
Département De Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

PAR

Sujet

**Résolvabilité des équations des opérateurs en utilisant
l'inverse généralisé de Moore-Pen Rose**

**Présenté par : Belaid Amina
Hamtime Aicha**

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Ghendir Aoun abdel latif	MCB.	Président	Univ. El Oued
Ahfouda Belhadi	MCB	Rapporteur	Univ. El Oued
Hariz Bakkar Al Orabi	MCA	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire : 2021/2022

DÉDICACE

C'est avec l'aide de **DIEU** tout puissant que ce modeste travail a pu être réalisé, **DIEU** qui m'a donné foi, raison et lucidité.

Merci mille fois et que «**Allah**» vous garde et protège.

Ma mère et ♡ " **Nadjet Guezzoun** " ♡ pour leurs amours, leurs patience et leur encouragement qui n'jamais cassé de me convenir Durant mes années d'études,

♡ ♡ à l'âme de mon père **Abd elazize**♡

♡ Me frère " **Abd elkarim, Hicham, Houdaifa , Amine** " ♡.

♡ Toute ma famille " **Belaid et Guezzoun**" ♡.

♡ Tous mes collègues de ma promotion **2022** ♡.

DÉDICACE

C'est avec l'aide de **DIEU** tout puissant que ce modeste travail a pu être réalisé, **DIEU** qui m'a donné foi, raison et lucidité.

Merci mille fois et que «**Allah**» -vont garde et protège.

Mes chers parents ♡ "**Hamtime Djamel**" ♡ et ♡ "**Terki Saida**" ♡ pour leurs amours, leurs patience et leur encouragement qui n'jamais cassé de me convenir Durant mes années d'études,

♡ Mes soeurs "**Rim, Ikram,Hadjer**" ♡.

♡ Me frère "**Mounir,Anoir**" ♡.

♡ Mon grand -père et ma grand-mère "**Bouben,Fatima**" ♡.

♡ A L'âme de ma grand- mère "**Arbia**" ♡ ♡ Mes amis proches ♡

♡ Toute ma famille "**Hamtime et Terki**" ♡.

♡ Tous mes collègues de ma promotion **2022** ♡.

REMERCIEMENTS

Avant toutes chose, nous tiens à remercier «**Allah**» le tous puissant, pour m'avoir donné la force et la patience.

J'exprime ma profonde gratitude et mes remerciements :

À mon encadreur de mémoire **Dr : Ahfouda Belhadi** Maitre de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de m'encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'on fait en acceptant de siéger à ma soutenance. Un remerciement spécial et sincère aux **mes parents**.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de me famille.

me sentiments de reconnaissance et mes remerciements chaleureux vont également au mes camarades de la promotion 2022 de Mathématiques et tous mes amis.

Finalement, je tiens réservons une mention particulière à toutes les personnes qui m'ont apporté le soutien et l'aide attendu.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	vi
1 Préliminaire	1
1.1 Espace de Hilbert	1
1.2 Produit scalaire	2
1.3 Opérateurs linéaires bornés :	3
1.3.1 Opérateurs linéaires dans les espace de Hilbert	3
1.3.2 Inverse d'un opérateur :	5
1.3.3 L'adjoint d'un opérateur :	5
1.4 Projection orthogonale	5
1.5 Spectres et Résolvantes	6
1.5.1 Valeurs et vecteurs propres	6
1.5.2 Spectres et résolvantes	7
1.6 Classification des points des spectraux d'un opérateur auto-adjoint	8
2 Les inverses généralisées	9
2.1 L' inverse intérieur	9
2.2 L'inverse extérieur	11
2.3 L'inverse généralisé	13

TABLE DES MATIÈRES

2.4	Groupe inverse	15
2.5	L'inverse de Drazin	17
2.6	L' inverse de Drazin d' une matrice carrée	19
3	Définitions et Propriétés des inverse Moore-Pen rose	23
3.1	L' inverse généralisé de Moore-Penrose	23
3.1.1	Définition de l'inverse généralisé de Moore	24
3.1.2	Définition de l'inverse généralisé de Penrose :	24
3.2	L'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire	27
3.3	L'inverse de Moore-Penrose d'une matrice	27
3.4	Relation entre l'adjoint et l' inverse de Moore-Penrose d' un opérateur	28
3.5	Existence de l'inverse de Moore-Penrose	30
4	Methode de calcul d'inverse Moore-Pen rose	32
4.1	Méthodes de calcul	32
4.1.1	Méthode de Gauss	32
4.1.2	Méthode de Gauss-Jordan	40
4.1.3	La méthode de projection du gradient	44
5	Les solutions des équations des opérateurs	51
5.1	L'équations linéaires $AX = B$	51
5.2	Résolution de l'équation matricielle $AXB = C$	54
5.3	Solution explicite de l'équation de l'opérateur $A^*X + X^*A = B$	56
	Conclusion générale	61
	Références	62

INTRODUCTION

La notion d'inversibilité est une notion très importante dans tous les domaines de Mathématiques. L'équation $Ax = y$ possède une solution unique lorsque l'opérateur linéaire A est inversible, on ne se trouve pas dans ce cas, en pratique, on obtient souvent des données sous forme de une matrice rectangulaire qui est un opérateur non inversible, ou bien dans le cas général on se trouve avec un opérateur non surjectif ou non injectif, ou d inverse non borné.

L'inversibilité est l'une des disciplines les plus répandues en Mathématiques, beaucoup de problèmes sont interprétés par une équation du type $Ax = y$, où A est une transformation linéaire donnée, qui est dans notre situation une matrice de type $m \times n$ sur \mathbb{K} (un opérateur linéaire défini d'un espace vectoriel E dans un autre F de dimensions respectives n et m) : comme l'analyse numérique, l'optimisation, la théorie de contrôle, théorie de codage, la statistique et les modèles linéaires, ce problème est aussi manipulé via le concept d'un inverse généralisé (ou le pseudo inverse) d'une matrice (ou d'un opérateur linéaire). Devant des questions de ce type on cherche un opérateur ayant le maximum de propriétés dont l'inverse usuel réjouit, et d'une manière que cet inverse existe pour une classe aussi large d'opérateurs linéaires.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des solutions des équations des opérateurs en utilisant inverse généralisé de Moore-Penrose avec quelques exemples.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le premier chapitre on donne quelque rappels sur les opérateurs linéaires bornés.

Dans le deuxième chapitre , on donne les définitions des inverses généralises.

Le troisième chapitre est s'intéresse à les définitions et l'étude des propriétés de l'inverse de Moore-Pen Rose.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons quelques méthodes de calcul de l'inverse de Moore-Pen Rose .

Et enfin est consacré à l'étude Résolvabilité des équations d'opérateur en utilisant inverse généralisé de Moore-Pen Rose.

NOTATIONS GÉNÉRALES

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous listons cidessous :

H Espace de Hilbert .

$\langle ., . \rangle$ Produit scalaire dans H .

A^* Adjoint de l'opérateur A .

$N(A)$ Noyau de l'opérateur A c'est-à-dire l'ensemble $\{u \in D(A) : Au = 0\} \subseteq H$.

$R(A)$ L'image de l'opérateur A c'est-à-dire l'ensemble $\{Au, u \in D(A) \subseteq H\}$.

A^+ le Moore-Penrose inverse de A .

$A^\#$ le Groupe inverse de A .

A^D le Drazin inverse de A .

A^t la matrice transposée de A .

$\|\cdot\|$ La norme.

\mathbb{R} Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices $m \times n$ sur \mathbb{K} .

$ind(A)$ l'indice de A .

$B(H)$ Espace des opérateurs linéaires bornés de H dans H .

$M_{n \times n}(\mathbb{K})$ L'ensmble des matrices ces carrés de degre dans \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

On rappelle dans ce chapitre quelques définitions et propriétés utiles.

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. Soit H un espace vectoriel sur \mathbb{C} , on appelle un produit scalaire, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, qui à tout couple $(x; y)$ associe le nombre complexe $\langle x, y \rangle$ telle que $\forall x, y, z \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

1. $\langle \lambda x + \mu z, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle z, y \rangle$.
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Si H est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Un espace vectoriel H sur \mathbb{C} muni d'un produit scalaire est dit espace pré-hilbertien, tout espace pré-hilbertien est un espace vectoriel normé, la norme est donnée par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Si l'espace pré-hilbertien est complet, il est appelé espace de Hilbert.

Exemple 1.1. Soit $H = L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un borélien, muni de la mesure de Lebesgue ou

1.2 Produit scalaire

la mesure discrète. Si $f, g \in L^2(\Omega)$ alors $f\bar{g} \in L^1(\Omega)$ et

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f\bar{g}$$

est bien défini, et $\|f\| = \sqrt{\int |f|^2} = \|f\|_2$.

Définition 1.1.2. (*Identité de parallélogramme*). Soit $x, y \in H$ avec H est un espace pré-hilbertien alors

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Remarque 1.1.1. Un espace vectoriel normé est un espace pré-hilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité de parallélogramme.

Définition 1.1.3. On dit que deux éléments x, y d'un espace pré-hilbertien sont orthogonaux si $\langle x; y \rangle = 0$ et on note $x \perp y$.

Définition 1.1.4. On appelle espace de Banach, tout espace vectoriel normé complet sur le corps.

Remarque 1.1.2. Un espace de Banach est un espace de Hilbert si sa norme vérifie l'identité de parallélogramme.

1.2 Produit scalaire

Définition 1.2.1. Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres réels. Un produit scalaire sur E est une fonction $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur le produit cartésien $E \times E$ à valeurs dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, vérifiant les cinq propriétés suivantes :

1. $\forall u, v, w \in E : f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$ (additivité par rapport à la première variable, la seconde étant fixée quelconque).
2. $\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v)$ (homogénéité par rapport à la première variable étant fixée, quelconque).
3. $\forall u, v \in E : f(u, v) = f(v, u)$ (symétrie).
4. $\forall u \in E : f(u, u) \geq 0$ (positivité).

1.3 Opérateurs linéaires bornés :

5. $f(u, u) = 0 \implies u = 0$ (séparation, mais on dit plutôt que f est définie).

Pour $u \in E, v \in E$ donnés le nombre réel ($> 0, < 0$, ou $= 0$) $f(u, v)$ s'appelle (un produit scalaire de u et v (ou bien de u par v)).

1.3 Opérateurs linéaires bornés :

1.3.1 Opérateurs linéaires dans les espace de Hilbert

Définition 1.3.1. Une application A définie d'une espace de Hilbert H dans \mathbb{K} est dit "Opérateur linéaire" si A satisfait les deux propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in H, A(x + y) = A(x) + A(y)$:(Additivité)
2. $\forall x \in H, \forall \alpha \in \mathbb{K}, A(\alpha x) = \alpha A(x)$:(Homogénéité).

L'opérateur identité I est défini par $Ix = x$ pour tout $x \in H$.

L'opérateur nul 0 est défini par $0x = 0$, pour tout $x \in H$.

Le noyau de A notée $N(A)$ et image de A , notée $R(A)$ sont définis par :

Soit $A : H \longrightarrow K, \{y \in K; \exists x \in H : y = Ax\}$:

$N(A) = \{x \in H, Ax = 0\}$ et $R(A) = \{Ax, x \in H\}$:

Définition 1.3.2. Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{C} et $\lambda \in \mathbb{C}$:

L'application $A_\lambda : H \rightarrow H$ définie pour $x \in H$ par

$$A_\lambda(x) = \lambda x$$

est un opérateur linéaire. En effet, pour $x_1, x_2 \in H$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, On a

$$A_\lambda(\alpha x_1 + x_2) = \lambda(\alpha x_1 + x_2) \tag{1.1}$$

$$= \alpha(\lambda x_1) + (\lambda x_2) \tag{1.2}$$

$$= \alpha A_\lambda(x_1) + A_\lambda(x_2) \tag{1.3}$$

Cet opérateur est appelé une homothétie de rapport λ de l'espace linéaire H . Si H est un espace linéaire tel que $\dim(E) = 1$, alors tout opérateur linéaire de H vers H est une dilatation.

1.3 Opérateurs linéaires bornés :

Définition 1.3.3. L'opérateur linéaire A sur un espace de Hilbert H est dit borné s'il existe un nombre positif c tel que :

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in H$$

Définition 1.3.4. On dénote par $B(H)$ ou $B(H)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Hilbert H .

Définition 1.3.5. On définit une norme de l'opérateur linéaire borné A par

$$\|A\| = \inf \{c > 0 : \|Ax\| \leq c\|x\|; \forall x \in H\}.$$

Théorème 1.1. Soit $A \in B(H)$: la norme de A est donnée par :

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Preuve :

On démontre les inégalités dans le deux sens.

1. Posons $a = \sup\{\|Ax\|, x \in H, \|x\| = 1\}$, si l'opérateur A est borné, alors

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| = \|A\| \text{ pour } \|x\| = 1$$

2. Pour tout vecteur $x \in H$ on a :

$$\|Ax\| = \left\| A \left(\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| \left(A \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \|x\| \leq a\|x\|$$

d'où

$$\|A\| \leq a = \sup\{\|Ax\|, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

En combinant les deux inégalités dans 1) et 2) on obtient l'égalité désirée.

Théorème 1.2.

Pour tout opérateur linéaire sur un espace de Hilbert H , les assertions suivantes sont équivalentes

1. A est borné.
2. A est continu sur l'espace H .
3. A est continu en un point x_0 (x_0 est un vecteur) de l'espace H .

Théorème 1.3. Soit H un espace de Hilbert, et f est une forme linéaire continue sur H . Il existe un vecteur $a \in H$ et un seul, tel que :

$$\forall x \in H, f(x) = \langle a, x \rangle.$$

1.4 Projection orthogonale

1.3.2 Inverse d'un opérateur :

Définition 1.3.6. On dit que l'opérateur $A \in B(H)$ est inversible sur l'espace de Hilbert H , s'il existe un opérateur $B \in B(H)$ qui vérifie :

$$BA = AB = I$$

où I est l'opérateur identité dans H . On écrit $B = A^{-1}$ est dit l'opérateur inverse de A .

1.3.3 L'adjoint d'un opérateur :

Définition 1.3.7. Pour tout opérateur $A \in B(H)$, A^* désigne l'opérateur adjoint de l'opérateur A , défini par

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle,$$

pour tout $x, y \in H$. Rappelons dans la proposition suivante quelques élémentaires.

Proposition 1.3.1. Si A et B sont deux opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Hilbert H , alors leurs adjoints suivantes sont vérifiées :

1. $\|A^*\| = \|A\|$.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
3. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
4. $(A^*)^* = A$.
5. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, si A est inversible.
6. $(AB)^* = B^*A^*$.

1.4 Projection orthogonale

Définition 1.4.1. [5] Soit P un endomorphisme de E dans E , on dit que P est un projecteur orthogonal, sur E si

1. $P^2 = P$.
2. $P^t = P$.

Définition 1.4.2. [5] Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors, A est dite symétrique, si et seulement si, $A^t = A$.

1.5 Spectres et Résolvantes

Lemme 1.4.1. [5] Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors, A est symétrique, si et seulement si, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$.

Lemme 1.4.2. [5] Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}_q)$, telle que $A^2 = A$, alors, A est symétrique si et seulement si, $N(A) = (R(A))^\perp$.

Preuve :

Supposons que $A^2 = A$ et $N(A) = (R(A))^\perp$, alors, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$x_1 = Ax_1 + (I_n - A)x_1, x_2 = Ax_2 + (I_n - A)x_2.$$

D'où,

$$Ax_1 = A^2x_1 + (A - A^2)x_1$$

ce qui implique

$$(I_n - A)x_1, (I_n - A)x_2 \in N(A) = (R(A))^\perp$$

Par conséquent,

$$\langle Ax_1, x_2 \rangle = \langle Ax_1, Ax_2 + (I_n - A)x_2 \rangle = \langle Ax_1, Ax_2 \rangle.$$

De manière analogue, on a, $\langle x_1, Ax_2 \rangle = \langle Ax_1, Ax_2 \rangle$, ce qui donne $A = A^t$, d'après le lemme 1.4.1. Inversement, supposons que $A = A^t, \forall x \in \mathbb{R}_q^n, y \in N(A)$, alors,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$$

ce qui donne $R(A) \subset (N(A))^\perp$. D'après le théorème des dimensions, on obtient

$$(N(A))^\perp = R(A).$$

i.e. $N(A) = (R(A))^\perp$.

1.5 Spectres et Résolvantes

1.5.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition 1.5.1. Soit V un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} et A un opérateur linéaire sur V .

1.5 Spectres et Résolvantes

un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $v \in V$ non nul tel que :

$$(A - \lambda I)v = 0 \iff Av = \lambda v.$$

Le vecteur v est alors appelé un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ .

Théorème 1.4. Pour $A \in B(H)$, H est un espace de Hilbert si A auto-adjoint alors toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Preuve :

Soit A auto-adjoint dans $B(H)$ et λ une valeur propre de A ($Ax = \lambda x, x \neq 0$)

on a

$$\begin{aligned}\lambda \langle x, x \rangle &= \langle \lambda x, x \rangle \\ &= \langle Ax, x \rangle \\ &= \langle x, A^* x \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle \\ &= \langle x, \lambda x \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle x, x \rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle,$$

$$\text{mais } x \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \text{ alors } \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.5.2 Spectres et résolvantes

L'ensemble des valeurs propres forme une partie d'un sous-ensemble de \mathbb{C} , qui est incluse et égale à un sous ensemble de \mathbb{C} que l'on appelle spectre de A , et on note par $\sigma(A)$.

1.5.2.1 Rappels et définitions

Définition 1.5.2. Le spectre d'un opérateur $A \in B(H)$ est le sous-ensemble de \mathbb{C} défini par :

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \}$$

Définition 1.5.3. L'ensemble résolvant de A est le complémentaire dans \mathbb{C} du spectre de A . $\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ est inversible} \}$.

1.6 Classification des points des spectraux d'un opérateur auto-adjoint

Définition 1.5.4. On appelle *rayon spectral* $r(A)$ de l'opérateur A est le scalaire :

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

On appelle application résolvante de A l'application $\mathfrak{R}(\cdot, A)$ défini :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(A) : \rho(A) &\longrightarrow B(H) \\ \lambda &\longmapsto \mathfrak{R}(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}. \end{aligned}$$

1.6 Classification des points des spectraux d'un opérateur auto-adjoint

Soit A un opérateur auto-adjoint son spectre $\sigma(A)$ admet la décomposition en plusieurs composantes disjointes :

1-Le Spectre ponctuel de A est l'ensemble :

$$\sigma_P(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

(l'ensemble des valeurs propre isolés d'ordre fini).

2-Le Spectre Continu de A est l'ensemble :

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (A - \lambda I)^{-1}, (A - \lambda I)^{-1} \text{ non borné}\}$$

ou

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) = \{0\}, \overline{\text{Range}(A - \lambda I)} = H, \text{Range}(A - \lambda I) \neq H\}$$

3-Le Spectre résiduel de A est l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_P(A), \overline{(\lambda I - A)(H)} \neq H\}.$$

4- Le Spectre essentiel Le spectre essentiel d'un opérateur linéaire fermé est l'ensemble $\sigma_{\text{ess}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A) \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice } 0\}$.

6- Le Spectre approché de A est l'ensemble :

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset H : \|x_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (A - \lambda I)x_n = 0\}$$

CHAPITRE 2

LES INVERSES GÉNÉRALISÉES

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et A un opérateur linéaire défini de E dans F . Nous définissons B l'inverse généralisée de A , par solution du système suivant

$$\begin{cases} ABA = A \\ BAB = B \end{cases}$$

Où B est un opérateur défini de F dans E . Remarquons que le système précédent admet plusieurs solutions.

2.1 L' inverse intérieur

Définition 2.1.1.

Soit $B : F \rightarrow E$ un opérateur linéaire, on dit que B est une inverse généralisée intérieure de A , si $ABA = A$, l'ensemble des inverses de l'opérateur A est noté par $A^{(1)}$ ou $A\{1\}$.

Exemple 2.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ admet } B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dots$$

Comme inverses généralisées intérieures. car

2.1 L' inverse intérieur

$$\begin{aligned}
 AB_1A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

L'inverse généralisée intérieure n'est pas unique.

Proposition 2.1.1. [5] Soit B un inverse intérieur de A , alors

- a) $(AB)^2 = AB$ et
- b) $(BA)^2 = BA$
- c) $R(AB) = R(A)$ et
- d) $N(A) = N(BA)$

Preuve :

- a) $ABA = A \Rightarrow ABAB = AB \Rightarrow (AB)^2 = AB.$
- b) $ABA = A \Rightarrow BABA = BA \Rightarrow (BA)^2 = BA.$
- c) $R(A) = R(ABA) \subset R(AB) \subset R(A).$
- d) $N(A) \subset N(BA) \subset N(ABA) = N(A).$

Théorème 2.1. [5] Tout opérateur linéaire admet un inverse intérieur linéaire.

Exemple 2.2. Soit A est un opérateur linéaire de $B_2(H)$ dans lui même, défini par :

$$A(x_1; x_2; \dots) = (0; x_1; x_2; \dots)$$

On définit l'opérateur B de $B_2(H)$ dans lui même par :

$$B(x_1; x_2; \dots) = (x_2; x_3; \dots)$$

Donc

$$ABA(x_1; x_2; \dots) = AB(0; x_1; x_2; \dots) = A(x_1; x_2; \dots)$$

2.2 L'inverse extérieur

Remarque 2.1.1. On considère l'équation $Av = w$ tel que $v \in V$ et $w \in W$

Soit $B : W \rightarrow V$ un opérateur linéaire, alors B est un inverse intérieur de A si et seulement si B est une solution de l'équation $Av = w$ pour tout w appartenant à $R(A)$.

Proposition 2.1.2. [5] Soit B est un inverse intérieur de A , alors $(I - BA)$ est un projecteur sur $N(A)$.

preuve :

$$(I - BA)^2 = I + BA - 2BA = I - BA$$

et $(I - BA)v = v - BA v = v \forall v \in N(A)$; (i.e; $R(I - BA) = N(A)$).

Proposition 2.1.3. [5] soit $B : W \rightarrow V$ est un inverse intérieur linéaire de A , alors $V = N(A) \oplus R(BA)$ et $W = R(A) \oplus N(BA)$

Proposition 2.1.4. [5] Soit B inverse intérieur de A Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $ABA = A$.
2. $(AB)^2 = AB$ et $R(AB) = R(A)$.
3. $(BA)^2 = BA$ et $N(A) = N(BA)$
4. $(BA)^2 = BA$ et $E = N(A) \oplus R(BA)$.
5. $(AB)^2 = AB$ et $F = R(A) \oplus N(AB)$
6. $(BA)^2 = BA$ et $N(A) \cap R(A) = \{0\}$.

Proposition 2.1.5. Soit B une inverse intérieure de A , et soit $P' = 1 - BA$ et $Q' = AB$ deux projecteurs tels que $R(P') = N(A)$ et $R(Q') = R(A)$, alors

$$B' = (I + P - P')B(I - Q + Q') = (2I - BA - P')B(I - AB + Q')$$

est une autre inverse de A satisfait $I - B'A = P'$ et $AB = Q'$.

$$AB'A = A(I + P - P')B(I - Q + Q')A = A(I + P - P')BA = ABA = A.$$

2.2 L'inverse extérieur

Définition 2.2.1. Soit $B : W \rightarrow V$ est un opérateur linéaire, on dit que B est un inverse extérieur de A , si $BAB = B$.

2.2 L'inverse extérieur

Exemple 2.3.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est une inverse extérieure de A , car

$$\begin{aligned} BAB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1. [5] Soit $B : W \rightarrow V$ un inverse extérieur de A , alors

- 1) $(BA)^2 = BA$ et $(AB)^2 = AB$
- 2) $R(BA) = R(B)$ et $N(B) = N(AB)$
- 3) $V = N(BA) \oplus R(B)$ et $W = N(B) \oplus R(AB)$

Proposition 2.2.2. [5] Soit B inverse extérieur de A Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $BAB = B$.
2. $(BA)^2 = BA$ et $R(BA) = R(B)$.
3. $(BA)^2 = BA$ et $E = N(BA) \oplus R(B)$.
4. $(BA)^2 = BA$ et $N(B) = N(AB)$.
5. $(AB)^2 = AB$ et $F = N(B) \oplus R(AB)$.
6. $(AB)^2 = AB$ et $N(A) \cap R(B) = \{0\}$.

2.3 L'inverse généralisé

Définition 2.3.1. Soit $B : F \longrightarrow E$ un opérateur linéaire, on dit que B est une inverse généralisée de A , si $BAB = B$ et $ABA = A$. Si B est une inverse généralisée de A , alors $B \in A^{(1)} \cap A^{(2)}$.

Proposition 2.3.1. Tout opérateur linéaire admet un inverse généralisé.

Exemple 2.4. On rappelle que $C([0; 1])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0; 1]$

Soit $A : C([0; 1]) \rightarrow C([0; 1])$ un opérateur linéaire, tel que $A(x(t)) = x(t^2)$.

On définit B de $C([0; 1])$ dans lui-même par : $B(x(t)) = x(\sqrt{t})$ Nous avons,

$$ABA(x(t)) = AB(x(t^2)) = A(x(t))BAB(x(t)) = BA(x(\sqrt{t})) = B(x(t))$$

Alors, B est un inverse généralisé de A .

Proposition 2.3.2. Soit B est un inverse généralisée de A , alors

1. $(AB)^2 = AB$ et $(BA)^2 = BA$
2. $N(B) = N(AB)$ et $N(A) = N(BA)$.
3. $R(AB) = R(A)$ et $R(BA) = R(B)$.

D'autre part,

$$V = N(A) \oplus R(B), W = N(B) \oplus R(A).$$

Remarque 2.3.1. Si B est un inverse généralisé de A , alors AB est un projecteur sur $R(A)$ et BA est un projecteur sur $R(B)$. On suppose que

$$V = T \oplus N(A) \quad \text{et} \quad W = R(A) \oplus S$$

Soient P et Q deux projecteurs sur $N(A)$ et $R(B)$ respectivement tel que, le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} XBX = X \\ AXA = A \\ AX = Q \\ XA = I - P \end{array} \right.$$

Admet une solution unique, on la note par $A_{P,Q}^*$

2.3 L'inverse généralisé

Preuve :

$$X \neq Y$$

$$X = XAX = XAXAX = YAXAY = YAY = Y.$$

L'inverse généralisé $A_{P,Q}^*$ est donné par : $A_{P,Q}^* = I\hat{A}^{-1}Q$

Théorème 2.2. Soient P et Q deux projecteurs tel que $R(P) = N(A)$ et $R(Q) = R(A)$, alors ,le système :

$$\begin{cases} XAX = X \\ XA = I - P \\ AX = Q \end{cases} \quad (2.1)$$

Admet la solution unique $X = A_{P,Q}^*$.

preuve :

$$X = (XA)X = (I - P)X = YAX = YQ = YAY = Y$$

Proposition 2.3.3. [10] Soit B inverse généralisée de A , Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. B est un inverse généralisé de A .
2. $(AB)^2 = AB$ et $W = N(B) \oplus R(A)$.
3. $(BA)^{\mathbb{R}} = BA$ et $V = N(A) \oplus R(B)$.
4. $(AB)^2 = AB, N(B) = N(AB)$ et $R(AB) = R(A)$.
5. $(BA)^2 = BA, R(BA) = R(B)$ et $N(A) = N(BA)$.
6. $B = B_{T,S} = \hat{A}^{-1}Q$ où $\hat{A} := A_{/T}, V = T \oplus N(A), W = R(A) \oplus S..$ Tel que Q est un projecteur sur $R(A)$.
7. B est un inverse intérieur de A , s'il vérifie :
 $BA(x) = x, \forall x \in T$ et $B(y) = 0; \forall y \in S.$ et $B(y_1 + y_2) = B(y_1)$ tels que $y_1 \in R(A); \forall y_2 \in S.$
8. $B = B_{T,S} = (I - P)B_1Q$ tel que $AB_1A = A.$ P et Q sont des projecteurs sur $N(A)$ et $R(A)$ respectivement.

Proposition 2.3.4. [8] Soient B_1, B_2 deux inverses intérieurs de A , on pose $AB_1 = Q_1, AB_2 = Q_2, I - P_1 = B_1A$ et $I - P_2 = B_2A,$ Alors

2.4 Groupe inverse

1. $B_1AB_2 = A_{P_1, Q_2}^*$
2. $A_{P_1, Q_1}^* = A_{P_1, Q_2}^* AA_{P_2, Q_1}^*$

preuve :

1. $AB_1AB_2 = AB_2 = Q_2, \quad I - B_1AB_2A = I - B_1A = P_1.$
2. $A_{P_1, Q_1}^* = B_1AB_1 = (B_1AB_2)A(B_2AB_1) = A_{P_1, Q_2}^* AA_{P_2, Q_1}^*.$

2.4 Groupe inverse

Définition 2.4.1. [4] *Le groupe inverse d'un opérateur carré A est un opérateur notée A^\sharp , qui satisfait les conditions suivantes*

$$\begin{cases} A^\sharp AA^\sharp = A^\sharp \\ A^\sharp A = AA^\sharp \\ AA^\sharp A = A \end{cases}$$

Remarque 2.4.1. *Soit A est idempotent, alors $A = A^\sharp$.*

Preuve :

Soit A est un opérateur idempotent, alors

$$\begin{aligned} A &= A^2 A^\sharp = AA^\sharp = A(A^\sharp)^2 A \\ &= A^2 (A^\sharp)^2 = A(A^\sharp)^2 \\ &= A^\sharp \end{aligned}$$

Théorème 2.3. [4] *Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors A^\sharp si et seulement si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2)$*

Preuve :

Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2) \implies \text{ind}(A) = 1 \implies A^\sharp$ existe. Si

$$\begin{aligned} A^\sharp \text{ existe} &\implies A^2 A^\sharp = A \\ &\implies R(A^2) = R(A) \\ &\implies \text{rang}(A) = \text{rang} A^2 \end{aligned}$$

2.4 Groupe inverse

Théorème 2.4. [10] Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice d'indice 1, alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^\#)$.

Preuve : On a

$$\text{rang}(A^\#) = \text{rang}(A^\# A A^\#) \leq \text{rang}(A A^\#) \leq \text{rang}(A), \dots (1).$$

et

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A A^\# A) \leq \text{rang}(A^\# A) \leq \text{rang} A^\# \dots (2)_1$$

d'après (1) et (2) on a $\text{rang}(A^\#) = \text{rang}(A)$.

Corollaire 2.4.1. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice non singulière, alors $\text{ind}(A) = 0$.

Preuve :

Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice non singulière, alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(I_n) = n \implies \text{rang}(A) = \text{rang}(A^0) = n \implies \text{ind}(A) = 0$$

Corollaire 2.4.2. Si A est un élément idempotent, alors $\text{ind}(A) = 1$.

Preuve :

$$\begin{aligned} A \text{ est idempotent} &\implies A^2 = A \\ &\implies \text{rang}(A) = \text{rang} A^2 \\ &\implies \text{ind}(A) = 1 \end{aligned}$$

Théorème 2.5. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est une matrice symétrique d'indice 1, alors $A^\# = (A^\#)^\star$.

Preuve :

Comme A est un groupe inverse de A , et $A = A^\star$, alors

$$\begin{aligned} (A^\#)^\star A &= (A^\#)^\star A^\star \\ &= A^\star (A^\#)^\star = A (A^\#)^\star, \\ (A^\#)^\star A (A^\#)^\star &= (A^\#)^\star A^\star (A^\#)^\star \\ &= ((A^\#) A (A^\#))^\star = (A^\#)^\star = A^\# \\ A (A^\#)^\star A &= A^\star (A^\#) A^\star \\ &= (A (A^\#) A)^\star = A^\star = A \end{aligned}$$

Corollaire 2.4.3. Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, telle que $\text{ind}(A) = 1$, alors $(A^\#)^\# = A$.

2.5 L'inverse de Drazin

Étant donné une matrice carrée A . On sait que la suite des sous-espaces suivante

$$R(I) = R(A^0) \supset R(A) \supset R(A^2) \dots \supset R(A^k) \supset R(A^{k+1}) \dots$$

est stationnaire. Soit p le plus petit entier non négatif pour lequel $R(A^p) = R(A^{p+1})$. On dit dans ce cas que A est d'indice p noté $\text{ind}(A)$. Si

$R(A^p) = \{0\}$, on dit que f est nilpotent d'indice de nilpotence p . Le lemme suivant résume les propriétés les plus importantes de l'indice.

Lemme 2.5.1. [11]

Soit $f \in \ell(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est d'indice p .
2. $R(f^p) = R(f^{p+1})$.
3. $E = N f^p \oplus R(f^p)$.

Remarque 2.5.1. [11] D'après le lemme précédent, nous concluons que : si $\text{ind}(A) = p$, alors $\text{ind}(A^p) = 1$, donc $(A^p)^\#$ existe. Par conséquent, pour toute matrice A d'indice $p \geq 1$ il existe un groupe $C(A^p)$.

Définition 2.5.1. [11] On appelle indice de la matrice A le plus petit entier positif k tel que $\text{rang}(A^{k+1}) = \text{rang}(A^k)$, (range de A c'est le nombre des vecteurs linéaires indépendantes soit les colonnes où lignes).

Exemple 2.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

rang de A est :

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 0 \\ -\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 4\beta \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ alors}$$

$$\text{rang}(A) = 2$$

2.5 L'inverse de Drazin

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$

$$\text{rang}(A^2) = \text{rang}(A) \rightarrow \text{donc } \text{ind}(A) = 1.$$

Définition 2.5.2. [11] Soit A une matrice carrée d'indice p . L'inverse de Drazin de A est une matrice carrée notée A^D , qui satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} A^D A A^D = A^D \\ A^D A = A A^D \\ A^D A^{p+1} = A^p \end{cases}$$

Proposition 2.5.1. [11] Si A^D est l'inverse de Drazin de la matrice A on a les égalités suivantes scmt équivalents :

1. $A^k A^D A = A^k$.
2. $A A^D A^k = A^k$.
3. $A^{k+1} A^D = A^k$.
4. $A^D A^{k+1} = A^k$.

Prouve :

(1) \implies (2)

$$\begin{aligned} A^k &= A^k A^D A = A \cdot A \cdot A \cdot A A^D A \\ \underbrace{A A A \cdot A^D A^2}_{k-1} &= \underbrace{A A \cdot \cdot A^D A^3}_{k-2} \\ &= \dots = A A A^D A^{k-1} = A^D A^k. \end{aligned}$$

(2) \implies (1) Evident.

(2) \implies (3) (On a (2) \implies (1) \implies (4))

$$\begin{aligned} A A^D A^k = A^k &\implies A^k = A^k A^D A \\ &= A^k (A A^D) = A^{k+1} A^D. \end{aligned}$$

(3) \implies (4)

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k+1} A^D = A^k A A^D = A^k A^D A = A^{k-1} A A^D A \\ &= A^{k-1} A^D A^2 = \dots = A^D A^{k+1}. \end{aligned}$$

2.6 L' inverse de Drazin d' une matrice carrée

- Proposition 2.5.2.**
1. $(A^*)^D = (A^D)^*$.
 2. $(A^T)^D = (A^D)^T$.
 3. $(A^l)^D = (A^D)^l$ si $l = 1, 2, \dots$
 4. si A est indice k , A^l est indice 1.
 5. $(A^D)^D = A$ si et seulement si A est ind $(A) = 1$.
 6. $((A^D)^D)^D = A^D$.

Proposition 2.5.3. A^D est un inverse de A , $\text{ind}(A) = k$ alors

$$A^k (A^D)^{k+1} = A^D.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} A^k (A^D)^{k+1} &= A^k (A^D)^k A^D = (AA^D)^k A^D \\ &= AA^D A^D \\ &= A^D AA^D = A^D. \end{aligned}$$

2.6 L' inverse de Drazin d' une matrice carrée

Dans cette section, nous considérons un autre type de l'inverse généralisée pour les matrices carrées. L'inverse dans le théorème, en raison de Drazin, a une variété d'application.

Théorème 2.6. [11] Pour toute matrice carrée A , il existe une matrice unique X de telle sorte que

$$(1) A^k = A^{k+1} X.$$

pour K un entier positif.

$$(2) X^2 A = X.$$

$$(3) AX = XA.$$

Preuve :

Si $A = 0$ est la matrice nulle, alors A et $X = 0$ satisfont (1), (2) et (3). Supposons $A \neq 0$ est

2.6 L' inverse de Drazin d' une matrice carrée

tout $n \times n$ matrice. Alors il existe scalaires d_1, \dots, d_t , pas tous égaux à zéro, de telle sorte que

$$\sum_{i=1}^t d_i A^i = 0$$

où $t \leq n^2 + 1$ depuis le A^i peut être considérée comme vecteurs avec n^2 éléments, et d_k le premier coefficient non nul. On peut écrire (4) $A^k = A^{k+1}U$ où

$$U = -\frac{1}{d_k} \left(\sum_{i=1+k}^t d_i A^{i-k-1} \right)$$

On U est un polynôme en A, U et A commute. En outre, la multiplication de deux côtés de (4) par AU donne

$$A^k = A^{k+2}U^2 = A^{k+3}U^3 = \dots$$

Et ainsi (5) $A^k = A^{k+m}U^m$ pour tout $m \geq 1$. Soit $X = A^k U^{k+1}$. Ensuite, pour ce choix de X ,

$$A^{k+1}X = A^{2k+1}U^{k+1} = A^k$$

et

$$X^2A = A^k U^{k+1} A^k U^{k+1} A = (A^{2k+1} U^{k+1}) U^{k+1} = A^k U^{k+1} = X,$$

par utilisation de (5). En outre, X et A commute U et A aussi. Ainsi, les conditions (1), (2) et (3) sont valables pour cette X .

Pour montrer que X est unique, supposons que Y est également une solution de (1), (2) et (3), où X correspond à un k_1 d'exposant et Y correspondent à un exposant dans k_2 (1). Laissez $y = \max(k_1, k_2)$. Ensuite, il suit en utilisant (1), (2), (3) et (5) :

$$X = X^2A = X^3A^2 = \dots = X^{\bar{y}+1}A^{\bar{y}} = X^{\bar{y}+1}A^{\bar{y}+1}Y$$

$$\begin{aligned} &= XAY = \dots = XA^{\bar{y}+1}Y^{\bar{y}+1} = A^{\bar{y}}Y^{\bar{y}+1} \\ &= \dots = AY^2 = Y^2A = Y \end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'unicité

2.6 L' inverse de Drazin d' une matrice carrée

Nous allons appeler la matrice unique de X dans l'inverse de Drazin de A et on écrit $X = A^D$, on appelle aussi le plus petit entier k l'indice de A . Ce A^D est une inverse généralisée de A est apparente notant que (1) est vérifiée avec $k = 1$ lorsque $X = A^{-1}$ existe et également (2) et (3). Observez, par ailleurs, que dans générale (1) peut être réécrite comme (6) $A^k X A = A^k$ et (2) devient $X A X = X$, par utilisation de (3), de sorte que les équations définissent peuvent être considérées comme une alternative à celles utilisées pour A^+ dans laquelle $A X A = A$ est remplacée par (6), (2) reste inchangée, et

$$(1^*) \cdots (A X)^* = A X$$

et

$$(2^*) \cdots (X A)^* = X A$$

sont remplacées par la condition de (3) que A et X traject. Comme on le verra ci-après la démonstration

Lemme 2.6.1. , factorisations de rang plein de A peuvent être utilisés efficacement dans la construction de A^D , on a $B, C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ Pour toute factorisation

$$A = B C, A^D = B [(C B)^D]^2 C$$

Exemple 2.6. Soit A est une matrice singulière

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

On écrit comme la factorisation de rang plein

$$B_1 C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$C_1 B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2.6 L' inverse de Drazin d' une matrice carrée

est une matrice non singulière, alors A possède un indice, et

$$= \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 6 & -26 & 30 \\ 3 & 35 & -33 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour le cas spécial des matrices avec un indice nous avons : (9) $AA^D A = A, A^D AA^D = A^D, AA^D = A^D A$ pour que (10) $(A^D)^D = A$ Par la dualité dans les rôles de A et A^D . Inversement, si (10) tient, puis les premières et dernières relations dans (9) sont définies dans les relations (2) et (3) est appliqué à $(A^D)^D$ et A^D , et la deuxième relation (est simplement (8) pour A^D et A . par conséquent, (10) devient si et seulement si A possède un indice Dans ce cas particulier, l'inverse de Drazin de A est un inverse du groupe de A que pour toute factorisation de rang plein $A = BC$,

$$A^* = B(CB)^{-2}C$$

CHAPITRE 3

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS DES INVERSE MOORE-PEN ROSE

3.1 L' inverse généralisé de Moore-Penrose

Définition 3.1.1. [2] Soit $A \in B(H)$. On appelle :

1. inverse généralisé de A , l'opérateur $B \in B(H)$ vérifiant :

$$\begin{cases} ABA = A \\ BAB = B \end{cases}$$

2. inverse de Moore-Penrose de A (MP inverse de A), l'inverse généralisé B de A , note $B = A^+$, vérifiant :

$$\begin{cases} (AB)^* = AB \\ (BA)^* = BA \end{cases}$$

Théorème 3.1. [2] Soit $A \in B(H)$. alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A possède un inverse généralisé.
2. $R(A)$ est ferme.

3.1 L' inverse généralisé de Moore-Penrose

3. A^+ existe et il est unique.

D'après la théorème précédent, on conclut que si l'inverse de Moore-Penrose de $A \in B(H)$ existe alors :

$$* R(A^+) = R(A^+A) = R(A^*).$$

$$* N(A^+) = N(AA^+) = N(A^+).$$

3.1.1 Définition de l'inverse généralisé de Moore

Si $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, alors A^+ l'unique généralisé qui vérifie les équations suivantes :

$$— A^+A = P_{R(A^+)}.$$

$$— AA^+ = P_{R(A)}.$$

3.1.2 Définition de l'inverse généralisé de Penrose :

Définition 3.1.2. $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, alors A^+ est la solution unique du système suivant :

$$(s) \begin{cases} XAX & = X \\ AXA & = A \\ (XA)^* & = XA \\ (AX)^* & = AX \end{cases} \quad (3.1)$$

Théorème 3.2. Les deux définitions précédentes sont équivalentes.

Preuve :

supposons que, $A^+A = P_{R(A^*)}$ et $AA^+ = P_{R(A)}$, on applique (c) et (d) de alors : A^+A et AA^+ sont des projecteurs orthogonaux. D'autre part,

$$A^+AA^+ = P_{R(A^*)}A^+ = P_{R(A^*)}A^+ = A^+.$$

Et

$$AA^+A = P_{R(A)}A = A$$

Enfin, A^+ est une solution du système (s). Réciproquement, si A^+ est une solution du système (s) alors, Nous avons, $AA^+A = A \Rightarrow A^+AA^+A = A^+A \Rightarrow (A^+A)^2 = A^+A$ on a

$$(A^+A)^* = A^+A \text{ et } R(A^+A) = R(A^+) = R(A^*)$$

3.1 L' inverse généralisé de Moore-Penrose

Donc, $A^+A = P_{R(A^*)}$. De la même façon, nous montrons que $AA^+ = P_{R(A)^*}$

Remarque 3.1.1. On montre que A^+ est une solution unique du système (s) On suppose que l'on a A_1^+, A_2^+ deux inverses de Penrose de A

$$\begin{aligned} A_1^+ &= A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*A^*A_2^+A \\ &= A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+(AA_1^+)(AA_2^+) = A_1^+AA_2^+ \\ &= A_1^+AA_2^+AA_2^+ = (AA_1^+)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+ \\ &= A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = (A_2^+A)A_2^+ = A_2^+ \end{aligned}$$

Proposition 3.1.1. Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}(\mathbb{C})$; $\lambda \in \mathbb{C}$, alors :

- $(A^+)^+ = A$.
- $(A^+)^* = (A^*)^+$.
- $(\lambda A)^+ = A^+\lambda^+$ tel que si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^+ = \frac{1}{\lambda}$ et si $\lambda = 0$, alors $\lambda^+ = 0$.
- $A^* = A^*AA^+ = A^+AA^*$.
- $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$.
- $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+$.
- $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$, tel que U et V des matrices unitaires

Preuve :

a) $(A^+)^+ : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$

$$\forall x \in R(A^*); (\underline{A}^+)^+ x = \left((\underline{A}_{/R(A^*)})^{-1} \right)^+ x = \left((\underline{A}_{/R(A^*)})^{-1} \right)^+ x = \underline{A}x$$

Et

$$\forall x \in R(A^*)^\perp; (A^+)^+ x = 0, \text{ Donc } (A^+)^+ = A.$$

b) $\forall y \in R(A^*), (\underline{A}^*)^+ y = (A_{\pi(A)}^*)^{-1} y = \left((A_{\pi(A^*)})^{-1} \right)^* y = (A^+)^* y$. D'autre part,

$$N\left((A^*)^+\right) = R(A^*)^\perp; N\left((A^+)^*\right) = R(A^+)^\perp = R(A^*)^\perp.$$

c) Evident.

d) $A^+AA^* = P_{r. A^*}A^* = A^*$ et $A^*AA^+ = A^*P_{r.2}[A] = A^*$ Puisque A^+A et AA^+ sont des projecteurs orthogonaux sur $R(A^*)$ et $R(A)$ respectivement.

3.1 L' inverse généralisé de Moore-Penrose

e) $A^* (AA^*)^+ = A^* A^{*+} A^+ = A^* A^{*+} A^+ = (A^+ A)^* A^+ = A^+ AA^+ = A^+ D'$ autre part,

$$(A^* A)^+ A^* = A^+ A^{*+} A^* = A^* A^{*+} A^* = A^+ (AA^+)^* = A^+ AA^+ = A^+$$

f) Il suffit de vérifier que la matrice $A^+ (A^*)^+$ est une solution du système de Penrose suivant :

$$(s1) \begin{cases} X (A^* A) X = X \\ (A^* A) X (A^* A) = A \\ (X (A^* A))^* = X (A^* A) \\ ((A^* A) X)^* = (A^* A) X \end{cases}$$

g) Il suffit de vérifier que la matrice $V^* A^+ U^*$ est une solution du système de Penrose suivant :

$$(s11) \begin{cases} X(UAV)X = X \\ (UAV)X(UAV) = A \\ (X(UAV))^* = X(UAV) \\ ((UAV)X)^* = (UAV)X \end{cases}$$

Proposition 3.1.2. Soit $A \in \mathbb{C}^{m, m}(\mathbb{C})$, alors :

- 1) $R(A) = R(AA^+) = R(AA^*)$.
- 2) $R(A^+) = R(A^*) = R(A^+ A) = R(A^* A)$.
- 3) $R(I - AA^+) = N(AA^+) = R(A^* A)^\perp$.
- 4) $R(I - A^+ A) = N(A^+ A) = N(A) = R(A^*)^\perp$.

Théorème 3.3. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times m}(\mathbb{C})$, si $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$

est une base de $R(A^*)$ et $\{w_1, w_2, \dots, w_{m-r}\}$ est une base de $N(A^*)$,

alors $A^+ = [v_1, v_2, \dots, v_r, 0, \dots, 0] [Av_1, Av_2, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, w_{m-r}]^{-1}$

En utilisons la définition de A^+ , nous trouvons

$$\begin{aligned} A^+ [Av_1, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, w_{m-r}] &= [A^+ Av_1, \dots, A^+ Av_r, A^+ w_1, A^+ w_2, \dots, A^+ w_{m-r}] \\ &= [v_1, v_2, \dots, v_r, 0, \dots, 0] \end{aligned}$$

Autre part,

$\{Av_1, Av_2, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, w_{m-r}\}$ est une base de \mathbb{C}^m , donc

$$A^+ = [v_1, v_2, \dots, v_r, 0, \dots, 0] [Av_1, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, w_{m-r}]^{-1}$$

3.2 L'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire

3.2 L'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire

Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert.

Proposition 3.2.1. Soient $A \in B(H_1, H_2)$ et $R(A) = \overline{R(A)}$, Il existe l'inverse généralisé unique de A , on le note par A^+ , qui vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} XAX = X & \dots (1) \\ AXA = A & \dots (2) \\ XA = I - P_{N(A)} & \dots (3) \\ AX = P_{R(A)} & \dots (4) \end{cases}$$

A^+ est appelé l'inverse de Moore-Penrose de l'opérateur A .

Preuve :

$N(A)$ et $R(A)$ sont des sous espace fermé dans H_1 et H_2 alors ils existent deux projecteurs Orthogonaux $P_{N(A)}$ et $P_{R(A)}$ sur $N(A)$ et $R(A)$ respectivement, tels que

$$H_1 = N(A) \oplus N(P_{N(A)}) = N(A) \oplus N(A)^\perp$$

Et

$$H_2 = R(A) \oplus N(P_{R(A)}) = R(A) \oplus R(A)^\perp$$

A^+ existe et A^+ défini par :

$$A^+(y) = 0; \forall y \in R(A)^\perp \text{ et } A^+y = (A|_{R(A^*)})^{-1}y; \forall y \in R(A)$$

3.3 L'inverse de Moore-Penrose d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, on définit $\underline{A}^+ : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ par :

$$\underline{A}^+(y) = 0; \forall y \in R(A)^\perp \text{ et } \underline{A}^+y = (\underline{A}|_{R(A^*)})^{-1}y; \forall y \in R(A)$$

Remarquons que \underline{A}^+ est un inverse généralisé de \underline{A} .

Proposition 3.3.1. [6] Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, alors

1. $A^+Ax = 0, \forall x \in N(A)$ et $A^+Ax = x, \forall x \in R(A^*) = R(A^+)$.

3.4 Relation entre l'adjoint et l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur

2. $AA^+y = 0, \forall y \in R(A)^\perp$ et $AA^+y = y, \forall y \in R(A)$.
3. A^+A est le projecteur orthogonal sur $R(A^*) = R(A^+)$ dans C^m .
4. AA^+ est le projecteur orthogonal sur $R(A)$ dans C^n .

Preuve :

1. $Ax = 0; \forall x \in N(A) \Rightarrow A^+Ax = 0; \forall x \in N(A)$
 Et $Ax \in R(A); \forall x \in R(A^*) \Rightarrow A^+Ax = (A_{/R(A^*)})^{-1}Ax = x; \forall x \in R(A^*)$
2. $\forall y \in R(A)^\perp \Rightarrow A^+y = 0, \forall y \in R(A) \Rightarrow AA^+y = y, \forall y \in R(A)^\perp$
 Et $\forall y \in R(A) \Rightarrow A^+y = (A_{/R(A^+)})^{-1}y \Rightarrow AA^+y = A(A_{/R(A^*)})^{-1}y = y$.
3. Nous avons, $R(A^+A) = R(A^+)$

Appliquons 1) on trouve

A^+A est un projecteur de $R(A^+)$ sur C^n

Soient $x, x' \in C^n$,

nous avons $x = x_1 + x_2, x' = x'_1 + x'_2$, tels que $x_1, x'_1 \in N(A)$ et $x_2, x'_2 \in R(A^*)$

$$\begin{aligned} (A^+Ax, x') &= (A^+A(x_1 + x_2), x'_1 + x'_2) \\ &= (A^+Ax_1, x'_1) + (A^+Ax_1, x'_2) + (A^+Ax_2, x'_1) + (A^+Ax_2, x'_2) = \langle x_1, x'_1 \rangle \\ \langle x_1 A^+ A x' \rangle &= \langle x_1 + x_2, A^+ A (x'_1 + x'_2) \rangle \\ &= \langle x_1, A^+ A x'_1 \rangle + \langle x_1, A^+ A x'_2 \rangle + \langle x_2, A^+ A x'_1 \rangle + \langle x_2, A^+ A x'_2 \rangle = \langle x_1, x'_1 \rangle \end{aligned}$$

Donc, $(A^+A)^* = A^+A$

4. De même façon, nous montrons que AA^+ est le projecteur orthogonal sur $R(A)$.

3.4 Relation entre l'adjoint et l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur

Théorème 3.4. Soit $A \in B(H)$ Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A^+ existe.
2. $(AA^*)^+$ existe.
3. $(A^*)^+$ existe.
4. $(A^*A)^+$ existe.

3.4 Relation entre l'adjoint et l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur

Proposition 3.4.1. *Soit $A \in B(H)$. Si $R(A)$ est ferme, alors on a :*

1. $(A^*)^+ = (A^+)^*$.
2. $(A^*A)^+ = A^+(A^+)^*$.
3. $(AA^*)^+ = (A^+)^+ A^+$.
4. $A^* = A^+AA^* = A^*AA^+$.
5. $A^+ = (A^*A)^+ A^* = A^*(AA^*)^+$.
6. $(A^*)^+ = A(A^*A)^+ = (AA^*)^+ A$.

Preuve :

1. D'après la définition de A^+ , on obtient :

$$\begin{aligned} (A^+)^* A^* (A^+)^* &= (A^+AA^+)^* = (A^+)^* \\ A^* (A^+)^* A^* &= (AA^+A)^* = A^* \\ (A^* (A^+)^*)^* &= A^+A = (A^+A)^* = A^* (A^+)^* \text{ et} \\ ((A^+)^* A^*)^* &= AA^+ = (AA^+)^* = (A^+)^* A^* \end{aligned}$$

Donc $(A^+)^*$ est le Moore-Penrose inverse de A^* .

2. Puisque on :

$$\begin{aligned} A^*AA^+(A^+)^*A^*A &= A^*AA^+(AA^+)^*A = A^*AA^+AA^+A = A^*A, \\ A^+(A^+)^*A^*AA^+(A^+)^* &= A^+(AA^+)^*AA^+(A^+)^* = A^+AA^+(A^+)^* = A^+(A^+)^* \\ (A^*AA^+(A^+)^*)^* &= A^+AA^+A = A^+A = (A^+A)^* = (AA^+A)^*(A^+)^* = A^*AA^+(A^+)^* \\ \text{et } (A^+(A^+)^*A^*A)^* &= (A^+(A)A^+A)^* = A^+A = A^+(A^+)^+A^*A. \end{aligned}$$

donc $A^+(A^+)^*$ est le Moore-Penrose inverse de A^*A .

3. Se déduit de 2) en remplaçant A par A^+ .
4. Comme A^+A est une projection sur $R(A^*)$, on obtient $A^* = A^+AA^* = (A^+A)^*A^* = A^*(AA^+)^* = A^*AA^+$.
5. Il est bien clair que $A^+ = A^+(A^+)^*A^*$. Par l'utilisation de 2), on obtient la première égalité de 5). De la même méthode, on peut trouver la deuxième égalité de 5).
6. Se déduit de 5).

3.5 Existence de l'inverse de Moore-Penrose

Théorème 3.5. [6] Soit A une matrice de $M_{m \times n}(\mathbb{R}_q)$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'inverse de Moore-Penrose de A existe est que les deux décompositions suivantes soient simultanément vérifiées :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_q^n &= N(A) \oplus (N(A))^\perp \\ \mathbb{R}_q^m &= R(A) \oplus (R(A))^\perp\end{aligned}$$

En effet, la preuve est une conséquence immédiate de la définition de l'inverse de Moore-Penrose

Théorème 3.6. [6] Si l'inverse de Moore-Penrose A^+ de A existe, alors, elle est unique.

Preuve :

Supposons qu'il y a deux inverses de Moore-Penrose B et C de A . Alors, $AB = (AB)^t = B^t A^t = B^*(ACA)^t = B^t A^t C^t A^t = (AB)^t (AC)^t = ABAC = AC$. De la même manière, $BA = CA$. D'où, $B = BAB = CAB = CAC = C$.

Exemple 3.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur \mathbb{R}_2 .

On a $r(A) = r(A^*A) = r(AA^t) = 2$. Alors, A^+ existe et $A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 3.5.1. [6] Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}_q)$ - Un g -renverse de A , note A^- est une matrice $X \in M_{n \times m}(\mathbb{R}_q)$ satisfaisant l'équation suivante : $XAX = X$ (i.e A est un g -inverse de X)

Proposition 3.5.1. [6] Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}_q)$, et A^- g -renverse de A , alors

1. $r(A^-) \leq r(A)$.
2. $(A^t)^- = (A^-)^t$.
3. Si $A = [I_m, 0]Q$, où 0 est la matrice nulle de type $m \times (n - m)$, $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R}_q)$, inversible, alors, $A^- = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, où X et Y vérifient $X^2 = X$ et $YX = Y$.

3.5 Existence de l'inverse de Moore-Penrose

Preuve :

1. Comme A est un g-inverse de A^- .
2. Comme $A^-AA^- = A^-$, alors, $(A^-)^t A^t (A^-)^t = (A^-AA^-)^t = (A^-)^t$, ce qui fait $(A^-)^t$ est un g-reinverse de A^t .

CHAPITRE 4

METHODE DE CALCUL D'INVERSE MOORE-PEN ROSE

4.1 Méthodes de calcul

4.1.1 Méthode de Gauss

Soit A une matrice $n \times m$ de rang $k \leq \min(n, m)$. Il est toujours possible de réarranger les colonnes de A de sorte que les k premières colonnes soient linéairement indépendantes tandis que les colonnes restantes sont des combinaisons linéaires des premières k . Ce revient à dire que pour une matrice de permutation, P (une matrice carrée de zéros et de uns avec exactement une entrée non nulle dans chaque ligne et colonne).

$$AP = (R \setminus S) \tag{4.1}$$

où R est $n \times k$ et de rang k et les colonnes de S sont des combinaisons linéaires des colonnes de R :

$$S = RU \text{ pour certains } U. \tag{4.2}$$

4.1 Méthodes de calcul

P est une matrice orthogonale telle que

$$A = (R \mid RU)P^T$$

et

$$A^+ = P[R(I \mid U)]^+.$$

Le rang de $(I \mid U)$ est le même que le rang de $(I \mid U)(I \mid U)^T = I + UU^T$, qui est k . Par conséquent, les lignes $(I \mid U)$ sont linéairement indépendantes pour que

$$\begin{aligned} [R(I \mid U)]^+ &= (I \mid U)^+ R^+ \\ &= (I \mid U)^T (I + UU^T)^{-1} R^+, \end{aligned}$$

par conséquent

$$A^+ = P(I \mid U)^T (I + UU^T)^{-1} R^+ \quad (4.3)$$

La dernière équation est le point de départ de la procédure de calcul basée Gauss; Gauss est utilisé pour évaluer P, R, U et $(I + UU)^{-1}$:

1. Évaluation de P

Effectuez un Gauss sur les colonnes de A , mais ne normalisez pas : c'est-à-dire, dénotez les colonnes de A par a_1, a_2, \dots, a_m laissez

$$\begin{aligned} c_1^* &= a_1 \\ c_j^* &= a_j - \sum_{i \in S_j} \frac{a_j^T c_i^*}{\|c_i^*\|^2} c_i^* \end{aligned}$$

où

$$S_j = \{i : i \leq j - 1 \text{ et } c_i^* \neq 0\}.$$

Les vecteurs c^* sont orthogonaux entre eux et

$$B(c_1^*, c_2^*, \dots, c_i^*) = B(a_1, a_2, \dots, a_i) \quad \text{pour chaque } i.$$

Si les vecteurs $c_1^*, c_2^*, \dots, c_m^*$ sont permutés de sorte que les vecteurs non nuls (dont il y aura k) viennent en premier, la même matrice de permutation appliquée aux vecteurs

4.1 Méthodes de calcul

$a_1 a_2 \dots, a_m$ les réarrangera pour que les premiers k soient linéairement indépendants, tandis que les $m - k$ derniers sont des combinaisons linéaires des premiers k , puisque $c_j^* = 0$ si et seulement si a_j est une combinaison linéaire des a précédents. Donc, si P est une matrice quelconque pour laquelle

$$(c_1^* \mid c_2^* \mid \dots \mid c_m^*) P = (c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_m)$$

ou

$$\|c_j\| \begin{cases} > 0 & j = 1, 2, \dots, k \\ = 0 & j = k + 1, \dots, m \end{cases}$$

alors

$$AP = (a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_m) P = (R \mid S)$$

ou R et $n \times k$ de rang k et les colonnes de S sont des combinaisons linéaires des colonnes de R .

2. calcul de R^+

les vecteurs (non nuls), c_1, c_2, \dots, c_k définies ci dessus, représentent un Gauss des colonnes de R . si on laisse

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{c_1}{\|c_1\|} & \frac{c_2}{\|c_2\|} & \dots & \frac{c_k}{\|c_k\|} \end{array} \right)$$

Alors

$$R(Q) = R(R)$$

il existe une matrice $k \times k$ matrice B telle que.

$$RB = Q.$$

En effet puisque R est rang k , $B = (R^T R)^{-1} R^T Q$. Nous dériverons un algorithme pour B . comme les colonnes de Q sont orthonormées, $Q^T Q = I$ de sorte que B est non singulier ($Q^T RB = I$).

donc

$$R = QB^{-1}.$$

4.1 Méthodes de calcul

3. Calcul de B et U

Notons les colonnes de R par r_1, r_2, \dots, r_k les colonnes de S par s_1, s_2, \dots, s_{m-k} . les vecteurs $(c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1}, \dots, c_m)$ representent Gauss non normalisé de $(r_1, r_2, \dots, r_k, s_1, \dots, s_{m-k})$. En effet

$$c_1 = r_1$$

$$c_j = r_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{r_j^T c_i}{\|c_i\|^2} c_i \quad j = 2, \dots, k \quad (4.4)$$

et

$$0 = c_{k+j} = s_j - \sum_{i=1}^k \frac{s_j^T c_i}{\|c_i\|^2} c_i \quad j = 1, \dots, m - k.$$

D'ou il est facile de déduire (par récurrence sur j) que

$$c_j = \sum_{i=1}^j \gamma_{ij} r_i \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j \\ 1 & i = j \\ -\sum_{\alpha=1}^{j-1} \frac{(r_j^T c_\alpha)}{\|c_\alpha\|^2} \gamma_{i\alpha} & i < j \end{cases}$$

D'autre part, montre que

$$s_j = \sum_{i=1}^k \omega_{ij} r_i$$

ou ω_{ij} S'obtient en substituant :

$$s_j = \sum_{\alpha=1}^k \frac{s_j^T c_\alpha}{\|c_\alpha\|^2} \left(\sum_{i=1}^{\alpha} \gamma_{i\alpha} r_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{\alpha=i}^k \frac{s_j^T c_\alpha}{\|c_\alpha\|^2} \gamma_{i\alpha} \right) r_i.$$

$$\omega_{ij} = \sum_{\alpha=i}^k \frac{(s_j^T c_\alpha)}{\|c_\alpha\|^2} \gamma_{i\alpha} \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, \dots, m - k.$$

$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc|c} c_1 & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline \end{array} \right) = RB$$

4.1 Méthodes de calcul

ou B est la matrice $k \times k$ dont la (i, j) ième entrée qui

$$\beta_{ij} = \gamma_{ij} / \|c_j\|$$

tout en forme que de nous concluons que

$$S = RU$$

ou U est matrice $k \times m - k$ dont la (i, j) ième entrée est ω_{ij} .

Notez que définit, en termes γ_{ij} les calculs of $\gamma_{ij-1}, \gamma_{ij-2}, \dots, \gamma_{ii}$ sont commodément effectués dans l'ordre suivant : $\gamma_{11}; \gamma_{22}, \gamma_{12}; \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{13}; \gamma_{44}, \gamma_{34}, \gamma_{24}, \gamma_{14};$ etc.

4. Evaluation de $(I + UU^T)^{-1}$ cette inversion via un autre Gauss :

Théorème 4.1. [10] Si U est une matrice $k \times r$ et un Gauss est effectué sur les colonnes de

$$\begin{matrix} & & r \\ & & U \\ k & \left(\begin{array}{c} \dots \\ I \end{array} \right) \\ & & r \end{matrix}$$

La matrice résultante de vecteurs orthonormés est

$$V = \begin{matrix} & & r \\ & & V_1 \\ k & \left(\begin{array}{c} \dots \\ V_2 \end{array} \right) \\ & & r \end{matrix}$$

ou

$$V_2 V_2^T = (I + U^T U)^{-1}$$

et

$$I - V_1 V_1^T = (I + UU^T)^{-1}.$$

4.1 Méthodes de calcul

Commentaire : Le rang de $\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}$ est r puisque $\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}$ à le meme rang que $\text{rang} \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = I + U^T U (r \times r)$ qui est non singulier, et donc de rang r . par conséquent, le Gauss, lorsqu'il est exécuté sur la colonne de $\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}$ ne générer que des vecteurs non nuls.

Preuve :

soit $H = \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}$. H est de rang r [de sorte que $H^+ H = I$,] et $R(V) = R(H)$, donc l'équation

$$HZ = V$$

a une solution

$$Z = H^+ V.$$

Puisque les colonnes de V sont orthonormées, $V^T V = I$, donc $V^+ = (V^T V)^+ V^T = V^T$. puisque $R(V) = R(H)$,

$$HH^+ = VV^+ = VV^T$$

Donc
$$\begin{aligned} ZZ^T &= H^+ (VV^T) H^{+T} = (H^T H)^+ \\ &= (H^T H)^{-1} \quad \text{puisque } H \text{ est de rang } r \end{aligned}$$

Puisque

$$HZ = \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

on a

$$UZ = V_1$$

et

$$Z = V_2.$$

donc

$$V_2 V_2^T = ZZ^T = (H^T H)^{-1} = (I + U^T U)^{-1}.$$

La seconde partie du théorème de colone de l'identité

$$(I + UU^T)^{-1} = I - U(U^T U + I)^{-1} U^T$$

et le fait que

$$V_1 = UZ = UV_2.$$

donc

$$(I + UU^T)^{-1} = I - U(V_2 V_2^T) U^T = I - V_1 V_1^T.$$

Résumé de la Méthode de Gauss

Pour trouver la pseudo-inverse de matrice A $n \times m$

1. Effectuez un Gauss sur les colonnes de A . Ne normalisez pas. Appeller cet ensemble de vecteurs $(C_1^* \mid \dots \mid C_m^*)$.
- 2) Permuter les c_j^* de sorte que $(C_1 \mid \dots \mid C_m) = (C_1^* \mid \dots \mid C_m^*)P$ ou P est une matrice de permutation choisie de telle sorte que

$$\begin{aligned} c_j &\neq 0 & j = 1, 2, \dots, k \\ c_j &= 0 & j = k + 1, \dots, m. \end{aligned}$$

3. Calculer γ_{ij} Pour $j = i + 1, \dots, k; i = 1, \dots, k$, ($\gamma_{ii} = 1, \gamma_{ij} = 0$ si $i < j$).
4. B est la matrice $k \times k$ dont la (i, j) entrée est le $\gamma_{ij} / \|c_j\|$, U est la matrice $k \times m - k$ dont la (i, j) éme entrée est ω_{ij} , $(I + UU^T)^{-1}$ est obtenu en effectuant un (normalisé) Gauss sr la colonne columns of $\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}$ et

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{c_1}{\|c_1\|} & \dots & \frac{c_k}{\|c_k\|} \end{array} \right).$$

5. $A^+ = P(I \mid U)^T (I + UU^T)^{-1} BQ^T$.

Exemple 4.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad c_3 = c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k = 2, \quad P = I, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1 Méthodes de calcul

$$\gamma_{11} = 1$$

$$\gamma_{22} = 1 \quad \gamma_{12} = -\frac{1}{2}$$

$$\omega_{11} = 1 \quad \omega_{12} = 1$$

$$\omega_{21} = -1 \quad \omega_{22} = 0.$$

$$\beta_{11} = 1/\sqrt{2}$$

$$\beta_{22} = 2/\sqrt{6} \quad \beta_{12} = -1/\sqrt{6}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{15} \\ 0 & 3/\sqrt{15} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \cdot I - V_1 V_1^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (I + UU^T)^{-1}.$$

$$(I + UU^T)^{-1} BQ^T = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot A^+ = \begin{pmatrix} I \\ U^- \end{pmatrix}$$

$$(I + UU^T)^{-1} BQ^T = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.1 Méthodes de calcul

4.1.2 Méthode de Gauss-Jordan

Si A est une matrice $n \times m$ de rang k , il existe toujours une matrice non singlière E et P et une matrice orthogonale telles que

$$EA^T AP = \begin{matrix} & \begin{matrix} k & m-k \end{matrix} \\ \begin{matrix} k \\ m-k \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} I & L \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

il existe de nombreux E et P . de ce type, si P diagonalise $A^T A$ de telle manière que les valeurs propres non nulles de $A^T A$ apparaissent dans le coin supérieur gauche :

$$P^T A^T AP = \begin{matrix} & \begin{matrix} k & m-k \end{matrix} \\ \begin{matrix} k \\ m-k \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

alors

$$E = \left(\begin{array}{c|c} D^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) P^T$$

fera l'affaire :

$$EA^T AP = \left(\begin{array}{c|c} D^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) (P^T A^T AP) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

que est une version plus forte . Cependant, la méthode décrite ici nécessite seulement que E et P soient choisis pour satisfaire.la présente méthode est basée sur l'identite suivante :

Théorème 4.2. [10] de E et non singular et P orthogonal, choisi por satisfaire, alors

$$A^+ = P (EA^T AP)^+ EA^T$$

Preuve :

L 'équation

$$A^T AX = A^T$$

A toujours une solution dans X , d'ou équation

$$A^T APY = A^T \tag{4.5}$$

4.1 Méthodes de calcul

A toujours une solution dans Y puisque P is non singulier, donc

$$EA^T APY = EA^T \quad (4.6)$$

A toujours une solution dans Y . parmi toutes les solutions , l'unique matrice qui minimise $\text{tr}(Y^T Y)$ et

$$\hat{Y} = (EA^T AP)^+ EA^T \quad (4.7)$$

L'ensemble des matrice Y est le même que l'ensemble des matrices puisque E est non singulier, donc \hat{Y} minimise aussi

$$\text{tr}(Y^T Y) = \text{tr}[(PY)^T(PY)] \quad (P \text{ est orthogonal})$$

sur cette classe,

$$P\hat{Y} = (A^T A)^+ A^T = A^+ \quad (4.8)$$

Corollaire 4.1.1. [10] Si E est non singular et P est orthogonal et $EA^T AP = \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix}$ alors

$$A^+ = P(H^+ | 0)(EA^T).$$

Il reste à montrer comment calculer EA^T , H^+ , et P .

1) Calcul de H , EA^T , et P

Ecrivez la matrice augmentée, $m(A^T A : A^T)$, et effectuez des opérations de ligne sur cette matrice jusqu' a ce que le bloc de gauche soit réduit au point ou une mutation par de ses colonnes se traduira par la forme d'échelon de ligne :

$$\begin{aligned} m \begin{pmatrix} m & n \\ A^T & A : A^T \end{pmatrix} &\xrightarrow[\text{seulement (tape1)}]{\text{linge operateur}} m \begin{pmatrix} m & n \\ EA^T & A : EA^T \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{m colonnes (tape2)}]{\text{permuter prmre}} m \begin{pmatrix} m & n \\ EA^T AP & : EA^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{matrix} k \\ m-k \end{matrix} \begin{pmatrix} k & m-k \\ I & L \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} : EA^T \end{aligned}$$

4.1 Méthodes de calcul

Les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles, donc E est non singulier, comme requis. La matrice de permutation P est orthogonale et enregistrée en colonnes de $EA^T A$ sont permutés pour obtenir la forme d'échelon de ligne. La matrice EAT occupe le bloc de droite de la matrice augmentée juste après l'étape I . La matrice H est $k \times m$ est donnée par $(I | L)$ après l'étape 2.

2) Calcul de H^+

$$H^+ = (I | L)^+ = \begin{pmatrix} I \\ L^{\hat{T}} \end{pmatrix} (I + LL)^{-1}$$

Exemple 4.2.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A : A^T) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -8 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 10 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -8 & 10 & 28 & 2 & -1 & 3 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pivotez sur le 4ème élément de la première ligne (ce qui signifie "réduire le 4ème élément de toutes les autres lignes à zéro en soustrayant un multiple approprié de la première ligne de chacune") :

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -18 & 12 & 6 & 0 & 4 & 5 & -1 & 1 & -5 & -4 \\ 18 & -12 & -6 & 0 & -4 & -5 & 1 & -1 & 5 & 4 \\ 54 & -36 & -18 & 0 & -12 & -15 & 3 & -3 & 15 & 12 \end{bmatrix}.$$

4.1 Méthodes de calcul

Pivotez ensuite sur le troisième élément de la deuxième rangée :

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & -2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -18 & 12 & 6 & 0 & 4 & 5 & -1 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, divisez la première ligne par -2 , la seconde par 6 :

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ -3 & 2 & 1 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{4}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (EA^T A \mid EA^T).$$

Ceci termine l'étape 1 : EA^T est le bloc 4×6 de droite. Le bloc de gauche est réduit à la forme ligne échelon par post multiplication par

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que place la colonne 4 dans la colonne 1, de colonne 3 la colonne 2, la colonne 1 dans la colonne 3, et la colonne 2 dans la colonne 4. le résultat :

$$EA^T AP = \left(\frac{H}{0} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

La matrice L est le bloc supérieur droit : $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. $I + LL^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$.

$$(I + L, L^T)^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} H^+ = \begin{bmatrix} (I + LL^T)^{-1} \\ \bar{L} (\bar{I} + \bar{L} L^T)^{-3} \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 3 \\ -1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} (H^+ | 0) EA^T =$$

4.1 Méthodes de calcul

$$\begin{aligned} & \frac{1}{102} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & -9 & 3 & -6 \\ 7 & 5 & 2 & -2 & -5 & -7 \\ -15 & -18 & 3 & -3 & 18 & 15 \\ 8 & 13 & -5 & 5 & -13 & -8 \end{pmatrix} P(H^+ | 0) EAT \\ &= \frac{1}{102} \begin{pmatrix} -15 & -18 & 3 & -3 & 18 & 15 \\ 8 & 13 & -5 & 5 & -13 & -8 \\ 7 & 5 & 2 & -2 & -5 & -7 \\ -6 & -3 & 9 & -9 & 3 & -6 \end{pmatrix} = A^+. \end{aligned}$$

4.1.3 La méthode de projection du gradient

Si A est une matrice $n \times m$ et soit $b \in R(A)$, l'équation

$$Ax = b \tag{4.9}$$

a au moins une solution et

$$\hat{x} = A^+b \tag{4.10}$$

est la seule solution qui se trouve dans $R(A^T)$. Soient les colonnes de A^T et a_1, a_2, \dots, a_n notée A_k (resp. b_k) la matrice $k \times m$ (resp. k -vecteur) obtenue en supprimant les $n - k$ dernières lignes (resp. composantes) de A (resp. b). puisque a une solution, il en va de meme

$$A_k x_k = b_k \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{4.11}$$

puisque l'ensemble des équations simultanées que représente est un sous -ensemble de ceux repsésntés

En outre,

$$\hat{x}_k = A_k^+ b_k \tag{4.12}$$

est la seule solution qui réside dans $R(A_k^T) \equiv B(a_1, \dots, a_k)$. et la présente procédure développe une récursivité simple qui relie \hat{x}_{k+1} puisque \hat{x}_k . est identique $\hat{x} = A^+b$ est le même que \hat{x}_n , la récursivité peut être effectuée en des temps solution générale aux résultats, à condition que b soit dans $R(A)$ des extensions au cas générale suivant facilement comme nous allons le montrer :

4.1 Méthodes de calcul

Par définition, \hat{x}_1 est l'unique vecteur dans $B(a_1)$ satisfaisant

$$a_1^T x_1 = \beta_1$$

Ou β_j et j la component de $b(j = 1, \dots, n)$. évidemment

$$\hat{x}_1 = (a_1^T)^+ \beta_1 = \beta_1 a_1 (\|a_1\|^2)^+.$$

Si \hat{x}_{k-1} est connu, on construit \hat{x}_k comme suit : Let (h_1, h_2, \dots, h_n) l'ensemble non normalisé des vecteurs qui résultent d'un orthogonalisation de Gramm-Schmidt de

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$h_1 = a_1$$

$$h_k = a_k - \sum_{j \in S_k} (a_k^T h_j) h_j / \|h_j\|^2$$

ou

$$S_k = \{j : j \leq k-1 \text{ and } \|h_j\| \neq 0\} \quad k = 1, \dots, n.$$

Nous avons montrée que $h_k \perp B(a_1, \dots, a_{k-1})$, et puisque \hat{X}_{k-1} satisfait

$$A_{k-1} \hat{l}_{k-1} = b_{k-1}$$

il s'ensuit que

$$a_j^T (\hat{x}_{k-1} + \alpha_k h_k) = \beta_j \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

pour tout x_k .

En particulier, si

$$\hat{\alpha}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } h_k = 0 \\ (\beta_k - a_k^T \hat{x}_{k-1}) / (h_k^T a_k) & \text{Par ailleurs} \end{cases}$$

alors

$$\hat{y}_k = \hat{x}_{k-1} + \hat{\alpha}_k h_k$$

satisfait

$$a_j^T y = \beta_j \quad j \in S_{k+1}$$

et

$$\hat{y}_k \in B(h_1, \dots, h_k)$$

4.1 Méthodes de calcul

par construction,

$$\begin{aligned} B(h_j; j \in S_{k+1}) &= B(h_1, \dots, h_k) \\ &= B(a_1, \dots, a_k) = B(a_j; j \in S_{k+1}) \end{aligned}$$

puisque $h_j = 0$ si et seulement si a_j est combinaison linéaire de ses prédécesseurs, donc \hat{y}_k est l'unique vecteur dans $B(a_j; j \in S_{k+1})$. D'autre part,

$$\hat{x}_k = A_k^+ b_k \in B(a_1, \dots, a_k) = \mathcal{S}(a_j; j \in S_{k+1})$$

satisfait

$$a_j^T x = \beta_j \quad j = 1, \dots, k$$

et donc satisfait également . puisque \hat{y}_λ est l'unique vecteur dans $B(a_j + j \in S_{k+1})$ satisfaisant , $\hat{y}_k = \hat{x}_k$.

Théorème 4.3. [1]

$$A^T = (a_1 : a_2 : \dots : a_n) \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in R(A)$$

alors

$$A^+ b = \hat{x}_n$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= 0 \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_{k-1} + \hat{\alpha}_k h_k \quad k = 1, 2, \dots, n \\ \hat{\alpha}_k &= \begin{cases} 0 & \text{si } h_k = 0 \\ (\beta_k - a_k^T \hat{x}_{k-1}) / (h_k^T a_k) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ soit les vecteurs non normalisés issus d'un Gauss $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

En général, si $b \notin R(A)$ [ou si vous n'êtes pas en mesure de décider si $b \in R(A)$ ou pas, commodément] recourir à l'astuce suivante : laisser

$$d = A^T b$$

4.1 Méthodes de calcul

et

$$C = A^T A.$$

Alors de $d \in R(A^T) = R(C)$ puisse être utilisé pour calculer $C^+ d$. puisque $C^+ d = (A^T A)^+ A^T b$, cette étape supplémentaire généralise la procédure au cas d' arbitraire b . Si, au lieu de $A^+ b$, on veut calculer A^+ , procéder de la manière suivante :

tout d'abord, effectuez un Gauss sur les colonnes de A . Dénotez l'ensemble normalisé de vecteurs non nuls (orthonormaux) par d_1, d_2, \dots, d_r . Ces vecteurs couvrent la même chose. Variété linéaire que les colonnes de A s'étendent, à savoir $R(A)$. il s'ensuit donc que

$$AA^+ = \sum_{j=1}^r d_j d_j^T.$$

Notons les colonnes de AA^+ par b_1, b_2, \dots, b_n . Puisque $R(A) = R(AA^+) = B(b_1, b_2, \dots, b_n)$, il faut que $b_j \in R(A)$ pour chaque j puisse être utilisé en n temps pour calculer $A^+ b_j$ ($j = 1, \dots, n$). puisque

$$(A^+ b_1 : A^+ b_2 : \dots : A^+ b_n) = A^+ (b_1 : b_2 : \dots : b_n) = A^+ (AA^+) = A^+,$$

cette procédure génère le résultat souhaité.

Résumé de La méthode de projection du gradient

1. Si on sait quelque soit $b \in R(A)$ alors peut être utilisé directement pour construire $A^+ b$.
2. Si on ne sait pas s'il s'agit ou non de $b \in R(A)$, calculer $d = A^T b$, $C = A^T A$ pour calculer $C^+ d$ qui coïncide avec $A^+ b$.
3. Pour calculer A^+ , effectuez d'abord un Gauss sur les colonnes de A . Notons les vecteurs orthonormés résultants par d_1, d_2, \dots, d_r . Construisons la matrice $\sum_{j=1}^r d_j d_j^T$ et notons les colonnes de cette matrice par b_1, b_2, \dots, b_n . Alors pour chaque j , $b_j \in R(A)$ peuvent être utilisés pour construire $A^+ b_j$, $j = 1, \dots, n$.

$$A^+ = (A^+ b_1 : A^+ b_2 : \dots : A^+ b_n).$$

4.1 Méthodes de calcul

Exemple 4.3. Calculer A^+ ou A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de A sont

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le Gauss génère l'ensemble orthonormé :

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad d_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$$AA^+ = d_1 d_1^T + d_2 d_2^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

les colonnes de AA^+ sont

$$b_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Pour construire $A^+ b_i$, en effecte un Gauss sur les colonnes de A^T : Les colonnes de A^T sont

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le Gauss non normalisé produit

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1 Méthodes de calcul

Pour calculer A^+b_1 :

$$\hat{a}_1 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \hat{x}_1 = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{a}_2 = -\frac{\sqrt{15}}{45} \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = A^+b_1.$$

Pour calculer A^+b_2 :

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sqrt{3}}{9} \quad \hat{x}_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\sqrt{15}}{9} \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^+b_2$$

Pour calculer A^+b_3 par :

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sqrt{3}}{9} \quad \hat{x}_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\alpha}_2 = \frac{4\sqrt{15}}{45} \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = A^+b_3.$$

4.1 Méthodes de calcul

Ainsi

$$A^+ = (A^+b_1 : A^+b_2 : A^+b_3) = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

CHAPITRE 5

LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DES OPÉRATEURS

5.1 L'équations linéaires $AX = B$

La méthode de résolution des systèmes linéaires $AX = B$ avec la matrice inverse ne fonctionne que si A est une matrice carrée, et encore elle ne fonctionne pas si le problème est singulier c'est à dire dans le cas où le déterminant de A est nul et que la matrice inverse n'existe pas. D'autre pas les matrice rectangulaires n'ont pas pas d'inverse ni de déterminant. Cependant nous souhaitons donner un sens à la solution de systèmes non inversibles et aussi triangulaires car ils sont fréquents.

5.1 L'équations linéaires $AX = B$

Soit A, B et X des opérateurs

$$\text{Si } A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Si $m = n$ et $\text{rang}(A) = n$, le système admet une solution unique donnée par la méthode de Cramer.

Si $m < n$, le système est dit sous-déterminé où il y'a moins d'équations que d'inconnues, le système admet une infinité de solutions.

Si $m > n$, le système est dit sur-déterminé où il y'a plus d'équations que d'inconnues, généralement le système n'a pas de solution. On peut chercher une solution approchée satisfaisant au mieux toutes les équations du système par la méthode des moindres carrés qui consiste à chercher une solution $X \in \mathbb{K}^n$ telle que

$$e(X) = \|AX - B\|^2 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k - b_i \right|^2$$

Soit minimal où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. On cherche donc

$$\sum_{i=1}^m \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k - b_i \right|^2$$

Soit minimal où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. On cherche donc X tel que $\frac{\partial}{\partial x_j} \|AX - B\|^2 = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \|AX - B\|^2 = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^m \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k - b_i \right|^2 \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (a_{ik}x_k - b_i) \overline{a_{ij}}, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

5.1 L'équations linéaires $AX = B$

Soit

$$A^*(AX - B) = 0 \text{ ou encore } A^*AX = A^*B$$

Si A^*A est inversible (on sait déjà que la matrice A^*A est symétrique et définie positive), alors

$$X = (A^*A)^{-1} A^*B,$$

donc $X = A^+B$. En effet, notons UDV^* la décomposition de la matrice A en valeurs singulières, on a :

$$\begin{aligned} (A^*A)^{-1} A^* &= (VD^*U^*UDV^*)^{-1} (VD^*U^*) \\ &= (V^*)^{-1} (D^*D)^{-1} (V^{-1}V) D^*U^* \\ &= V(D^*D)^{-1} D^*U^* \end{aligned}$$

Si D est de la forme $D = \begin{pmatrix} D_n \\ 0 \end{pmatrix}$ où $D_n = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$ avec $s_i > 0, i = 1, \dots, n$, alors

$$\begin{aligned} (D^*D)^{-1} D^* &= (D^tD)^{-1} D^t = (D_n^tD_n)^{-1} D^t \\ &= \text{diag}\left(\frac{1}{s_1^2}, \frac{1}{s_2^2}, \dots, \frac{1}{s_n^2}\right) (\text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n) \quad 0) \\ &= (D_n^{-1} \quad 0) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(A^*A)^{-1} A^* = A^+$$

et

$$X = (A^*A)^{-1} A^*B = A^+B.$$

Exemple 5.1. *Étant donné les matrices suivantes, A , et les vecteurs, b , déterminer lequel des ensembles d'équations $Ax = b$; avoir une solution mince, une infinité de solutions ou aucune solution exacte, et-construire les solutions uniques lorsqu'elles existent..*

$$(i) A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix};$$

5.2 Résolution de l'équation matricielle $AXB = C$

$$(ii) A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (iii) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(iv) A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(v) A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$(vi) A_6 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 5.2.

$$\text{si } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ alors } (AA^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

et donc

$$\therefore A^+ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2 Résolution de l'équation matricielle $AXB = C$

Considérons le système linéaire matriciel $AXB = C$ où $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{p,q}$ et $C \in \mathbb{K}^{p,q}$ sont données et $X \in \mathbb{K}^{n,p}$ est une matrice inconnue à déterminer. Comme

$$AXB = AA^+AXBB^+B,$$

une condition de compatibilité s'écrit :

$$AA^+CB^+B = C$$

qui est une condition nécessaire et suffisante pour avoir une solution de l'équation $AXB = C$.

5.2 Résolution de l'équation matricielle $AXB = C$

Théorème 5.1. [7] Soit $AXB = C$ où $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{p,q}$, $C \in \mathbb{K}^{p,q}$ et $Y \in \mathbb{K}^{p,q}$ alors :

La solution générale de l'équation compatible $AXB = C$ est donnée par :

$$X = A^+CB^+ + Y - A^+AYBB^+ \quad (5.1)$$

où Y est une matrice arbitraire de $\mathbb{K}^{n,p}$.

Preuve

Est bien une solution de l'équation $AXB = C$ car en utilisant la condition de compatibilité, on a :

$$\begin{aligned} AXB &= A(A^+CB^+ + Y - A^+AYBB^+)B \\ &= AA^+CB^+B + AYB - AA^+AYBB^+B \\ &= AA^+AA^+CB^+BB^+B + AYB - AA^+AYBB^+B \\ &= AA^+CB^+B + AYB - AYB = AA^+CB^+B = C \end{aligned}$$

De plus toute solution de $AXB = C$ peut s'écrire $X = X + A^+CB^+ - A^+AXBB^+$ qui est une forme particulière de avec (5.1) $Y = X$.

Exemple 5.3. si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Alors

$$A^+ = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -4 & 7 & -1 \end{bmatrix}, A^+b = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -3 \end{bmatrix} \neq b$$

et

$$X = A^+b = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

est la solution des moindres carrés de $AX = b$ avec $\|b - AX\|^2 = \frac{144}{11}$ minimum.

Après avoir établi A^+ pour les cas particuliers, il reste à établir l'existence pour le cas général d'une matrice arbitraire A . Pour cela nous avons d'abord besoin d'une définition.

5.3 Solution explicite de l'équation de l'opérateur $A^*X + X^*A = B$

5.3 Solution explicite de l'équation de l'opérateur $A^*X + X^*A = B$

H et K désignent des espaces de Hilbert arbitraires. Nous utilisons $B(H, K)$ pour désigner l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de H à K .

Aussi, $B(H) = B(H, H)$. Pour des opérateurs donnés $A \in B(H, K)$ et $B \in B(H)$, on s'intéresse à trouver la solution $X \in B(H, K)$ de l'équation

$$A^*X + X^*A = B \quad (5.2)$$

Pour $A \in B(H, K)$ nous utilisons $R(A)$ et $N(A)$, respectivement, pour désigner la plage et l'espace nul de A . L'inverse de Moore Penrose de A , noté par A^+ , est l'unique opérateur $A^+ \in B(K, H)$ remplissant les conditions de l'inverse Moore-Penrose. Soit $A \in B(H, K)$ un intervalle fermé. Alors AA^+ est la projection orthogonale de K sur $R(A)$ (parallèle à $N(A)$) et A^+A est la projection orthogonale de H sur $R(A^+) = R(A^*)$ (parallèle à $N(A)$). Il s'ensuit que A a la forme matricielle suivante :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}$$

où A_1 est inversible. Or, l'opérateur A a la forme suivante :

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix}$$

En utilisant ces formes matricielles d'opérateurs avec des plages fermées et des propriétés de l'inverse de Moore-Penrose, nous résolvons l'équation (5.2)

Théorème 5.2. [7] $A \in B(H, K)$ inversibles et $B \in B(H)$. Alors les énoncés suivants sont équivalents

1. il existe une solution $X \in B(H, K)$.
2. $B = B^*$. si 1 ou 2 est satisfait, alors toute solution de l' equation, a la form.

$$X = \frac{1}{2} (A^*)^{-1} B + ZA \quad (5.3)$$

où $Z \in B(K)$ satisfait $Z^* = -Z$.

5.3 Solution explicite de l'équation de l'opérateur $A^*X + X^*A = B$

Preuve : $1 \rightarrow 2$: Evident. $2 \rightarrow 1$: Il est facile de voir que tout opérateur X de la forme (5.3) est un solution de Eq. (5.2). D'autre part, Soit X une solution quelconque de (5.2)

Alors

$$X = (A^*)^{-1} B - (A^*)^{-1} X^* A \text{ et } (A^*)^{-1} X^* = (A^*)^{-1} B A^{-1} - X A^{-1}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} (A^*)^{-1} B + \left(\frac{1}{2} (A^*)^{-1} B A^{-1} - (A^*)^{-1} X^* \right) A \\ &= \frac{1}{2} (A^*)^{-1} B + \left(\frac{1}{2} [(A^*)^{-1} X^* + X A^{-1}] - (A^*)^{-1} X^* \right) A \\ &= \frac{1}{2} (A^*)^{-1} B + \frac{1}{2} (X A^{-1} - (A^*)^{-1} X^*) A \end{aligned}$$

En prenant $Z = \frac{1}{2} (X A^{-1} - (A^*)^{-1} X^*)$, we get $Z^* = -Z$. Maintenant, on résout l'eq. (5.2) dans le cas où A a une plage fermée.

Théorème 5.3. [7] *Let $A \in B(H, K)$ une plage fermée et $B \in B(H)$. Alors les énoncés suivant sont équivalent :*

1. *Il existe une solution $X \in B(H, K)$ of Eq. (5.2).*
2. *$B = B^*$ et $(I - A^+ A) B (I - A^+ A) = 0$. Si 1 ou 2 est satisfaite, alors toute solution d' Eq. (5.2) a la form*

$$X = \frac{1}{2} (A^*)^+ B A^+ A + (A^*)^+ B (I - A^+ A) + (I - A A^+) Y + A A^+ Z A, \quad (5.4)$$

ou $Z \in B(K)$ satistait $A^ (Z + Z^*) A = 0$, et $Y \in B(H, K)$ est arbitrare.*

Preuve : $1 \rightarrow 2$: Evident, $B^* = B$. alors,

$$\begin{aligned} (I - A^+ A) B (I - A^+ A) &= (I - A^+ A) (A^* X + X^* A) (I - A^+ A) \\ &= (A^* - (A A^+ A)^*) X (I - A^+ A) + (I - A^+ A) X^* A (I - A^+ A) = 0 \end{aligned}$$

$2 \rightarrow 1$: Notez que la condition $(I - A^+ A) B (I - A^+ A) = 0$ is est équivalente $B = A^+ A B + B A^+ A - A^+ A B A^+ A$. tout opérateur X de la forme (5.4) est une solution de l' Eq. (5.2).

D'autre part, supposons que X soit une solution de l'Eq. (5.2). Puisque $R(A)$ est fermé, On a $H = R(A^*) \oplus N(A)$ et $K = R(A) \oplus N(A^*)$. à présent, A a la forme matricielle.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix},$$

5.3 Solution explicite de l'équation de l'opérateur $A^*X + X^*A = B$

Ou A_1 est invertible. les conditions $B = B^*$ et $(I - A^+A)B(I - A^+A) = 0$ impliquent que B a la forme

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix},$$

Ou $B_1^* = B_1$. Soit X a la forme

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}$$

Alors $A^*X + X^*A = B$ implique $A_1^*X_{11} + X_{11}^*A_1 = B_1$ et $A_1^*X_{12} = B_2$. donc, $X_{12} = (A_1^*)^{-1}B_2$. Puisque A_1 est inversible, d'après la théoreme. il s'ensuit que X_{11} a la forme $X_{11} = \frac{1}{2}(A_1^*)^{-1}B_1 + Z_1A_1$, pour un opérateur $Z_1 \in B(R(A))$ satisfaisant $Z_1^* = -Z_1$. D'ou,

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_1^*)^{-1}B_1 + Z_1A_1 & (A_1^*)^{-1}B_2 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

X_{21} et X_{22} peuvent être pris arbitrairement. Soit

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}$$

et

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ -Z_{12}^* & Z_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}$$

ou Y_{11}, Y_{12} et Z_2 soit arbitraires. Notez que $A^*(Z + Z^*)A = 0$.

alors

$$\frac{1}{2}(A^*)^+BA^+A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_1)^{-1}B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A^*)^+B(I - A^+A) = \begin{bmatrix} 0 & (A_1^*)^{-1}B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(I - AA^+)Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

et

$$AA^+ZA = \begin{bmatrix} Z_1A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, X est de la forme (5.4). C'est une conséquent du théoreme de Gelfand-Naimark

5.3 Solution explicite de l'équation de l'opérateur $A^*X + X^*A = B$

-Segal et de theoreme Harte-Mbekhta le Theorem 4.3 est également valable C^* pour le algebras . est également axactement sililaires,nous obtenons l'analogue suivant de Theorem 4.3, dans lequ l' Eq. (5.2) est remplacé par

$$A^*X - X^*A = B. \quad (5.5)$$

Théorème 5.4. [7] Soit $A \in B(H, K)$ un domaine fermé et $B \in B(H)$. Alors les énoncés sont équivalents :

1. Il existe un solution $X \in B(H, K)$ de l'eq. (5.5) .

2. $B = -B^*$ et $(I - A^+A)B(I - A^+A) = 0$.

Si 1 ou 2 est satisfaite, alors tout solution de l'eq (5.5) a la forme

$$X = \frac{1}{2}(A^*)^+ BA^+A + (A^*)^+ B(I - A^+A) + (I - AA^+)Y + AA^+ZA$$

ou $Z \in B(K)$ satisfait $A^*(Z - Z^*)A = 0$, et $Y \in B(H, K)$ est arbitraire.

Preuve :

1 \Rightarrow 2

$$A^*X - X^*A = B$$

$$\begin{aligned} B^* &= (A^*X - X^*A)^* = (A^*X)^* - (X^*A)^* = X^*(A^*)^* - A^*(X^*)^* \\ &= X^*A - A^*X = -(A^*X - X^*A) = -B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I - A^+A)B(I - A^+A) &= (I - A^+A)(A^*X - X^*A)(I - A^+A) \\ &= (A^* - A^+AA^*)X(I - A^+A) - (I - A^+A)X^*(A - AA^+A) \\ &= (A^* - (A^+A)^*A^*)X(I - A^+A) - (I - A^+A)X^*(A - AA^+A) \\ &= (A^* - A^*(A^+)^*A^*)X(I - A^+A) - (I - A^+A)X^*(A - AA^+A) \\ &= (A^* - (AA^+A)^*)X(I - A^+A) - (I - A^+A)X^*(A - AA^+A) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{car : } A^* - (AA^+A)^* = A^* - A^* = 0 \text{ et } A - AA^+A = A - A = 0$$

2 \Rightarrow 1 De la même ,la preuve de théorème précédent

5.3 Solution explicite de l'équation de l'opérateur $A^*X + X^*A = B$

Exemple 5.4.

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\X &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\A^*X &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\X^*A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\A^*X + X^*A &= \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = B\end{aligned}$$

on pose $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 3 - \frac{31}{2} \\ a + b = 4 \\ 2c + d = 1 - \frac{17}{2} \\ c + b = 1 - \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{17}{2} \\ b = \frac{9}{2} \\ c = -7 \\ d = \frac{13}{2} \end{cases}$$

Donc $Z = \begin{pmatrix} -\frac{17}{2} & \frac{9}{2} \\ -7 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire on a donné des caractéristiques de l'inverse é de **Moore-Pen Rose** qui possède des propriétés très proches du inverse généralisé.

Et .Nous utilisons les propriétés et les méthodes de calcul d' inverse de moore -pen rose. pour trouves la solutions de system des équations d'opérateur linéaire de la forme $A^*X + X^*A = B$.en utilisant l'inverse généralisée de Moore-Pen rose, nous avons obtenir la solution des équations des seystem de l'opérateur

RÉFÉRENCES

- [1] G. Abdellah, "Mathématiques avancées de l'ingénieur : Théorie et Pratique du Calcul Matriciel." (2019).
- [2] K. Abdessalam, Rôle des projections dans la théorie des inverses généralisés. Diss. Université de Batna 2, 2012.
- [3] B. Bahri, and S. Guedjeba, "Existence des inverses généralisées des matrices sur un corps fini." (2013).
- [4] H.B.end B. c, S. collion, M. dellinger, Z. faget, L. lazzarini, F. schffhauser ; Mathématique L3 Analyse, Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés ; PERON Education, 10 Juin 2009.
- [5] M. Dijana, and Dragan S. Djordjević. "Formulae for the generalized Drazin inverse of a block matrix in terms of Banachiewicz–Schur forms." Journal of Mathematical Analysis and Applications 413.1 (2014) : 114-120.
- [6] R.B,MatrixAnalysis,Springer-Verlag,Newyork,(1997),Graduate
- [7] D. Dragan S, "Explicit solution of the operator equation $A^* X + X^* A = B$." Journal of Computational and Applied Mathematics 200.2 (2007) : 701-704. Textsin Mathematics.
- [8] M, D, and D S. Djordjević. "Several expressions for the generalized Drazin inverse of a block matrix in a Banach algebra." Applied Mathematics and Computation 220 (2013) : 374-381.

RÉFÉRENCES

- [9] H.Bomaza, end B. c, S. collion, M. dellinger, Z. faget, L. lazzarini, F. schffhauser ; Mathématique L3 Analyse, Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés ; PERON Education, 10 Juin 2009.
- [10] M.Jean-Pierre, Mathmatiques L3 analyse : cours complet avec 600 tests et exercices corrigš. Pearson Education France, 2009.
- [11] Z. Hanifa, Sur les propriétés algébriques des Gk-inverses des matrices. Diss. Batna, Université El-Hadj Lakhdar. Faculté des Sciences, 2011.
- [12] C. Randall E, Elements of the theory of generalized inverses for matrices. Newton, MA : Education Development Center, 1979.
- [13] G, Tomasz. and M, Ł. "Stacked Regression with a Generalization of the Moore-Penrose Pseudoinverse." STATISTICS 443 (2017).
- [14] G, T, and M, Ł. "Stacked Regression with a Generalization of the Moore-Penrose Pseudoinverse." STATISTICS 443 (2017).
- [15] C, Stephen L., and C , M. Generalized inverses of linear transformations. Society for industrial and applied Mathematics, 2009.
- [16] B,Rajendra . Matrix analysis. Vol. 169. Springer Science , Business Media, 2013.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions la solvabilité de système d'équations d'operater linéaires à l'aide de l'inverse de Moore Ben Rose, où nous commençons par présenter les types d'inverses généralisés. Pour les opérateurs linéaires utilisant l'inverse de Moore Ben Rose.

Mots clé : L' inverse généralisé, Opérateurs linéaires, L'inverse de Moore -Pen rose,des équations linéaires

Abstract

In this note we study the possibility of solving the sentences of linear influencer equations using the reciprocal of Moore Ben Rose, where we start by presenting the types of generalized inverters. For linear operators using the reciprocal of Moore Ben Rose.

Key words: inverse generalized ,the linear operator ,inverse de Moore -Pen rose ,the linear equation

ملخص

درسنا في هذه المذكرة قابلية حلول جمل معادلات المؤثرات الخطية باستخدام مقلوب مور بن روز، حيث نبدا بعرض انواع المقاليب المعممة.ونختص بدراسة مقلوب مور بن روز واهم خواصه وطرق حسابه،بينما نستعرض في الاخير حلول جمل المعادلات المؤثرات الخطية للمؤثرات الخطية باستعمال مقلوب مور بن روز.

الكلمات المفتاحية:

مقلوب معمم، مؤثرات خطية، مقلوب مور بن روز، معادلات خطية