



République Algérienne Démocratique et
Populaire Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche
Scientifique



UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Résolution des quelques problèmes aux
limites d'équations différentielles de type
Caputo-Hadamard via la théorie
de point fixe**

Présenté par : Khezzane Fatima

Benine Meriem

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président	Mr. Guedda Lamine	Prof	Université El Oued
Examineur	Mr. Gabsi Hocine	MCA	Université El Oued
Encadreur	Mr. Said Beloul	Prof	Université El Oued

Année universitaire : 2023 – 2024

Remerciements

Nous aimerions en premier lieu remercier notre dieu "**Allah**" qui nous avoir donnée la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Nous exprimons nos reconnaissance à notre directeur de mémoire, **Prof. Beloul Said**, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche dès le début à la fin de ce travail.

Nous adressons un grand merci à toute nos familles en particulier nos parents qui a toujours été présente lorsque nous en avons eu besoin, nos professeurs dès la primaire jusqu'à l'université, nos amies, nos proches.

En fin, nous remercions tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

***J**e dédie ce modeste travail :*

***A** mes chers parents ma mère et mon père*

***P**our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

***A** mes chers frères*

***A**ucun mot ne pourra décrire vos dévouements et vos sacrifices.*

***A** tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je plus de succès.*

Khezzane Fatima

Dédicaces

La reconnaissance et la gratitude de Dieu pour le commencement et la fin

Ce parcours n'était pas court et ne devrait pas être court . Le rêve aussi n'était pas proche et le chemin n'était plein de roses, Mais je le fait . Merci a Dieu qui me facilite le début et m'atteint la fin avec sa générosité.

A celui qui a décoré mon prénom avec les plus beaux noms , celui qui m'a soutenu illimité et m'a donné gratuitement , qui était ma force en détresse qui m'a appris que la vie est un combat , ses larmes est la connaissance et l'apprentissage ,à celui qui a instillé les morales,l'éthique et l'éducation dans ,on âme,mon soutient ma force et ma fierté : mon père Hamza.

A celui qui a butté ,a combattu avec moi, à qui Dieu a fait le paradis sous ses pieds, qui m'a embrassé avec son cœur avant ses mains et m'a facilité les détresses avec ses prières, au cœur doux qui était ma bougie dans les plus sombres nuits . Le secret de ma force, mon succès ma mère Messaouda.

A celui qui participe avec moi, la joie et la tristesse, le succès et l'échec, qui m'a donné son temps, qui a tenu sa promesse et qui était le copin et l'ami. Mon soutien après Dieu,mon beau mari Ibrahim.

A mon âme sœur,l'ami de mon enfance,à celui qui était le père, le frère et l'ami. celui qui était le vrai et le bon aide. A qui Dieu a fait son amour instinct. Mon grand frère Abbes.

A ceux qui avec leurs je serai grand, à ceux qui avec je dépends ceux qui en leur présence je serai plus fort, à ceux qui je savais le sens de la vie avec eux, mes chers frère Ali, Salim, Moussa et mes belles sœurs Roumaissa, Zineb, Manar, Rayan, Hadil.

A qui m'ont aidé et supports , ceux qui ont cru en moi dans les moment difficiles pour arriver à ce que je suis. Mes chères amies Radhia, Rania, Oumaima, Affef, Islem.

A qui avait une fraternité, qui a été fidele Mon binôme Fatima.

Benine Meriem

Table des matières

Introduction	5
1 Préliminaires	7
1.1 Espaces normés	7
1.2 Espaces Banach	7
1.3 Espaces fonctionnels	8
1.3.1 Espace des fonctions continues	8
1.3.2 Espaces des Fonctions Lebesgue Intégrables L^p	9
1.3.3 Fonctions absolument continues	9
1.4 Compacité	9
1.4.1 Opérateur Compact	10
1.5 Convexité	10
1.6 Fonctions Spéciales	10
1.6.1 Fonction Gamma	10
1.6.2 Fontion Bêta	10
1.7 Intégration Fractionnaire	11
1.7.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	11
1.7.2 L'intégrale fractionnaire de Hadamard	11
1.8 Dérivation fractionnaire	13
1.8.1 Dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville	13
1.8.2 Dérivation fractionnaire de Caputo	14
1.8.3 Dérivation fractionnaire de Hadamard	15
1.8.4 Dérivation fractionnaire de Caputo-Hadamard	16
1.9 Lemmes Auxiliaires	18
1.10 Les avantages de la dérivation de Caputo-Hadamard	19
1.11 Quelques théorèmes de point fixe	19
1.11.1 Théorème d'Arzelà-Ascoli	19
2 Résolution d'un problème d'équations différentielles Fractionnaires de type Langevin	21
2.1 Existence et unicité de la solution utilisant le principe de contraction de Banach	26
2.2 Existence de la solution via le théorème de Schauder	30
2.3 Exemples	37
3 Étude du problème aux limites d'équations différentielles fractionnaires p-Laplacien	39
3.1 Introduction	39
3.2 Existence et unicité de la solution utilisant le principe de contraction de Banach	43
3.3 Existence de la solution via le théorème de Schaefer	49
3.4 Exemples	55

Introduction

Au cours des dernières décennies, on a constaté un regain d'intérêt parmi les chercheurs pour l'étude des équations différentielles fractionnaires. Cette attention accrue découle des applications variées des équations différentielles fractionnaires dans les disciplines de l'ingénierie et des sciences. Ces applications incluent des domaines tels que la dynamique des fluides, la théorie des fractales, la diffusion dans les milieux poreux, les neurones biologiques fractionnaires, le flux de trafic, la rhéologie des polymères, la modélisation des réseaux neuronaux, les panneaux viscoélastiques dans le flux de gaz supersonique, les systèmes réels caractérisés par des lois de puissance, l'électrodynamique des milieux complexes, l'identification des systèmes sandwich, les oscillations non linéaires des séismes, les modèles de croissance démographique, la modélisation mathématique de la diffusion de particules discrètes dans des fluides turbulents, les réacteurs nucléaires, et la théorie de la dynamique des populations.

Les équations différentielles fractionnaires servent d'outils cruciaux pour décrire les propriétés de mémoire et héréditaires exhibées par divers matériaux et phénomènes. Des perspectives plus approfondies sur la théorie et ses applications peuvent être trouvées dans des références bibliographiques telles que [20, 25, 27, 29].

De plus, le calcul fractionnaire a connu des avancées significatives dans divers domaines, allant de la théorie mathématique pure aux sciences appliquées. Les applications s'étendent à des domaines tels que la modélisation du transfert de chaleur dans des milieux hétérogènes, la modélisation du chauffage des ultracapaciteurs et des faisceaux, et plus encore. Ces applications sont principalement motivées par l'observation selon laquelle de nombreux systèmes physiques présentent une dynamique d'ordre fractionnaire, avec leurs comportements régis par des équations différentielles fractionnaires (EDF).

La signification notable de l'utilisation des EDF réside dans leur capacité à décrire des propriétés non locales, où l'état actuel et tous ses états précédents influencent l'état suivant d'un système dynamique. Cependant, il est essentiel de noter que l'obtention de solutions analytiques pour les problèmes de calcul fractionnaire pose des défis significatifs. Par conséquent, des méthodes numériques et d'approximation sont couramment proposées pour obtenir des solutions approximatives à de tels problèmes, comme en témoignent des travaux tels que [4, 3, 14, 18, 17, 28].

Des études récentes se sont également penchées sur les équations différentielles d'ordre fractionnaire équipées de diverses conditions aux limites. La littérature dans ce domaine englobe des résultats d'existence et d'unicité liés à des problèmes classiques, à des problèmes de valeur initiale, à des conditions périodiques/antipériodiques, non locales, multipoints, à des conditions aux limites intégrales, et à des conditions aux limites fractionnaires intégrales. Des références importantes incluent les monographies d'Ahmed et al. [1], Benchohra et al. [6], W. Benhamida et al. [8], D. Chergui et al. [11], Chen et al. [10], Goodrich et al. [16], et Zhang et al. [33].

La différence entre l'approche de Caputo-Hadamard est que la dérivée d'une constante par rapport à Caputo-Hadamard est nulle, contrairement à l'approche de Hadamard qui donne une dérivée non nulle. L'avantage le plus important de la dérivation de Caputo-Hadamard est son applicabilité à un ensemble plus diversifié de systèmes, y compris ceux avec des conditions initiales non nulles, ce qui étend son utilité pratique.

La théorie de point fixe joue un rôle important dans l'étude de l'existence et de l'unicité de divers

problèmes de valeurs aux limites, où quelques théorèmes de point fixe ont été utilisés de cette manière, tels que les théorèmes de Banach, de Schauder et de Schaefer. Cette approche théorique fournit un cadre solide pour étudier les propriétés mathématiques et physiques des solutions fixes et leurs effets sur les différents systèmes, contribuant ainsi à une compréhension approfondie des phénomènes complexes dans ce contexte.

Ce mémoire se compose d'une introduction et trois chapitres :

Dans **Chapitre 1**, nous présentons quelques définitions et notions de base de l'analyse fonctionnelle, telles que les espaces de Banach, la compacité et la convexité. Nous donnons également quelques définitions et propriétés concernant le calcul fractionnaire, comme l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire dans différents sens, au sens de Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard et Caputo-Hadamard. Certains théorèmes de point fixe sont présentés, comme le principe de Banach, le théorème de point fixe de Schauder et le théorème Schaefer, qui ont été utilisés dans la suite de ce travail.

Chapitre 2, est réservé à exposer certains résultats d'existence et d'unicité de solutions concernant un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire de type Langevin. Nos résultats sont fournis par les théorèmes du point fixe de Banach et Schauder. Nous intéressons à l'existence et à l'unicité des solutions pour le problème de valeur aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\beta(D^\alpha + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), & 1 < t < e, \\ x(1) = 0, \quad x(e) = \mu \int_1^e x(s) ds, \\ D^\alpha x(1) + D^\alpha x(e) = 0 \end{cases}$$

où D^α et D^β sont les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard, $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta \leq 2$, $\lambda > 0$, et $\mu > 0$ sont des nombres réels, et $f \in C([1, e] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Enfin, deux exemples sont donnés pour illustrer nos résultats.

Dans **Chapitre 3**, On donne des résultats d'existence et d'unicité de solutions des problèmes aux limites concernant des équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Caputo-Hadamard, en se basant sur les théorèmes de point fixe de Banach et Schaefer. Nous intéressons à l'existence de solutions pour l'équation différentielle fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha(\varphi_p(D^\beta x(t))) = f(t, x(t)), & 1 < t < e, \\ x(1) = 0, \quad D^\beta x(1) = 0, \quad x(e) = \lambda \int_1^e x(s) ds, \end{cases} \quad (1)$$

où $0 < \alpha \leq 1$, $1 < \beta \leq 2$ et $\lambda > 0$, D^α et D^β désignent la dérivée de Caputo-Hadamard. $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$ avec $p > 1$ et $f \in C([1, e] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Enfin, deux exemples sont proposés pour supporter nos résultats.

Préliminaires

1.1 Espaces normés

Définition 1.1 (Norme). Soit E un espace vectoriel. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tous x, y dans E et tout α dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité),
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.2. On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1,$$

pour tout $x \in E$.

Définition 1.3. On appelle espace normé $(E, \|\cdot\|)$ tout ensemble E muni norm $\|\cdot\|$.

Exemple 1. L'espace $C([0; 1], \mathbb{R})$ est normé lorsqu'il est muni d'une des normes suivantes :

1. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$
2. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f(t)]^2 dt}$
3. $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|$ (La norme de la convergence uniforme)

1.2 Espaces Banach

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ représente le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 1.4. [21] On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .

Définition 1.5. [15] Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (**evn**) complet.

Corollaire 1.1. [9] Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.

Lemme 1.1. Tout evn de dimension finie est un espace de Banach.

Lemme 1.2. Soit $C([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur un compact $[a, b]$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

est un espace de Banach.

Preuve. Il s'agit de montrer que $C([a, b])$ est complet. Pour ce faire, on considère une suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C([a, b])$ et montrons qu'elle converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction $f \in C([a, b])$

D'après le critère de Cauchy :

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > N \text{ et } \forall x \in [a, b] \text{ on a :}$

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon \quad (1.1)$$

Il s'ensuit que la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (qui est complet), d'où

$$\exists f(x) \in \mathbb{R} : \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

Ensuite, montrons que la convergence est uniforme. Pour cela, considérons la limite supérieure de $|f_m(x) - f_n(x)|$ lorsque $m \rightarrow \infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \|f - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Ce qui nous donne que (f_n) converge uniformément vers f dans $[a, b]$.

De plus $\|f\|_\infty \leq \|f_N\|_\infty + \varepsilon < \infty$; d'où f est borné.

Maintenant, montrons que $f \in C([a, b])$. Pour ce faire, utilisons la continuité de f_N :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \sigma > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in [a, b], \quad |x - y| \leq \sigma \Rightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon.$$

D'où

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_N\|_\infty + \|f_N(x) - f_N(y)\|_\infty \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Cela prouve que f est continue sur $[a, b]$.

Ainsi, $f \in C([a, b])$ et donc $C([a, b])$ est complet. □

1.3 Espaces fonctionnels

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Nous présentons quelques espaces fonctionnels :

1.3.1 Espace des fonctions continues

Définition 1.6. Soit $C([a, b])$ l'espace de Banach des fonctions continues à valeurs complexes $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, équipé de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |u(t)|.$$

De manière analogue, $C^n([a, b])$ est l'espace de Banach des fonctions $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, où u est n fois différentiables continûment sur $[a, b]$.

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_\infty = \sum_{k=0}^n \left(\max_{t \in [a, b]} |f^{(k)}(t)| \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

En particulier, si $n = 0$, $C^0([a, b]) \equiv C([a, b])$.

Équicontinuité d'une famille de fonctions

Définition 1.7. [12] Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur U avec $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que la famille de fonctions $\{f_n\}$ est équicontinue si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in U, \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

1.3.2 Espaces des Fonctions Lebesgue Intégrables L^p

On note par $L^1([a, b], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions u intégrables selon Lebesgue avec la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_a^b |u(t)| dt.$$

Alors que $L^p([a, b], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions intégrables selon Lebesgue sur $[a, b]$ où $|u|^p$ appartient à $L^1([a, b], \mathbb{R})$, équipé de la norme

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_a^b |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty.$$

En particulier, si $p = \infty$, $L^\infty([a, b], \mathbb{R})$ est l'espace de toutes les fonctions u essentiellement bornées sur $[a, b]$ avec un supremum essentiel

$$\|u\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{t \in [a, b]} |u(t)| = \inf \{c \geq 0 : |u(t)| \leq c \text{ pour presque tout } t\}.$$

1.3.3 Fonctions absolument continues

Définition 1.8. [32] Soit E un espace de Banach, une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition finie $[a_i, b_i]_{i=1}^p \subset [a, b]$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^p (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^p \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon$$

Remarque :

1. On note $AC([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$

$$f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a, b]) \text{ telle que } f = c + \int_a^x \varphi(t) dt.$$

2. On note $AC^n([a, b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace des fonctions f définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui ont des dérivées continues sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre $n - 1$ donc :

$$AC^n([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a, b]), k = 0, \dots, n - 1, f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}.$$

3. $AC_\delta^n([a, b]) = \{h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \delta^{n-1} h(t) \in AC([a, b])\}$,
où $\delta = \frac{d}{dt}$ est la dérivation de Hadamard

1.4 Compacité

Définition 1.9. Soit (E, τ) un espace topologique. Une famille de parties $(U_j)_{j \in J}$ de E est appelée un recouvrement de l'ensemble G de E si nous avons :

$$G \subset \bigcup_{j \in J} U_j$$

où J est un ensemble d'indice quelconque.

Définition 1.10. (Compacité)

Soit U un sous-ensemble d'un espace normé X . On dit que U est compact si pour tout recouvrement de U par des ouverts de U , on peut extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes :

$$\forall V_j; j \in J \text{ (ouverts) tels que } U \subset \bigcup_{j \in J} V_{j(k)}, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1; 2; \dots; n$$

tel que

$$U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}$$

Définition 1.11. Un ensemble U est dit séquentiellement compact si pour toute suite d'éléments dans U , il existe une sous-suite qui converge vers un élément de U .

Définition 1.12. (relativement compact)

Un sous-ensemble A d'un espace normé E est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

1.4.1 Opérateur Compact

Définition 1.13. Soit $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F . On dit que T est un opérateur compact s'il satisfait l'une des trois définitions suivantes, qui sont équivalentes entre elles :

1. Pour chaque ensemble borné A dans E , l'image de A par T est relativement compacte dans F .
2. L'image de la boule unité fermée de E par T est relativement compacte dans F .
3. Pour chaque suite bornée (x_n) dans E , il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $T(x_{n_k})$ converge dans F .

1.5 Convexité

Définition 1.14. Une sous-ensemble X d'un espace vectoriel normé E est dit convexe si et seulement si

$$\forall (x, y) \in X \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1], \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in X.$$

Autrement dit, un ensemble est convexe s'il contient tout segment passant par deux de ses points.

Exemple 2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel E . Pour tout $x \in E$ et $r \geq 0$, la boule centrée en x et de rayon r (ouverte ou fermée) est convexe :

$$B(x, r) := \{y \in E \mid \|x - y\| \leq r\}$$

1.6 Fonctions Spéciales

1.6.1 Fonction Gamma

Définition 1.15. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, la fonction $\Gamma(z)$ est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Proposition 1.1. Pour tout $z > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

1. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n + 1) = n!$.
3. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Quelques exemples de valeurs spécifiques de la fonction Gamma ($\Gamma(\alpha)$)

- * $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1$
- * $\Gamma(0^+) = +\infty$
- * $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

1.6.2 Fonction Bêta

Définition 1.16. [13] La fonction Bêta est définie par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \quad \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Proposition 1.2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $B(x, y) = B(y, x)$.
2. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

1.7 Intégration Fractionnaire

1.7.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La généralisation de la formule de Cauchy à l'ordre réel α est réalisée à travers l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Cette intégrale s'exprime de la manière suivante : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on note

$$I^1 f(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

Une double intégration

$$I^2 f(t) = \int_a^t \int_a^s f(\mu) d\mu ds = \int_a^t (t-s)f(s) ds.$$

En répétant le processus $(n-1)$ fois, on obtient la relation suivante :

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds,$$

ainsi

$$I^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Et pour un ordre α plus général, on a la définition suivante :

Définition 1.17. [20][26] L'intégrale fractionnaire d'ordre α ($\alpha > 0$) de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in C[a, b]$ est donnée par

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Exemple 3. On considère la fonction f définie par , $f : t \rightarrow (t-a)^\beta$. On a :

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds,$$

par le changement de variable $y = \frac{s-a}{t-a}$, on obtient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 y^\beta (1-y)^{\alpha-1} dy, \\ I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Proposition 1.3. [20] Soit $f \in C([a, b])$. Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

1. $I_a^0 f(t) = f(t)$.
2. $I_a^\alpha (I_a^\beta f)(t) = I_a^\beta (I_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t)$.
3. $I_a^\alpha [\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)] = \lambda_1 I_a^\alpha f(t) + \lambda_2 I_a^\alpha g(t)$.

1.7.2 L'intégrale fractionnaire de Hadamard

Définition 1.18. L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction $f \in C([a, b])$ définit par :

$$^H I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds,$$

Exemple 4. Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f(t) = \left(\ln \frac{t}{a}\right)^\beta$. Alors,

$${}^H I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha + \beta} \quad (1.3)$$

En effet,

$${}^H I_a^\alpha \left(\ln \frac{t}{a}\right)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{s}{a}\right)^\beta \frac{ds}{s},$$

pour évaluer cette intégrale, on effectue le changement de variable

$$u = \frac{\left(\ln \frac{s}{a}\right)}{\left(\ln \frac{t}{a}\right)},$$

,

$$\begin{aligned} {}^H I_a^\alpha \left(\ln \frac{t}{a}\right)^\beta &= \frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4 (La linéarité). [7] Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et prenant des valeurs dans l'ensemble des nombres réels. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\forall \alpha > 0$, on a :

$${}^H I_a^\alpha (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) dx = \lambda_1 {}^H I_a^\alpha f(x) dx + \lambda_2 {}^H I_a^\alpha g(x) dx.$$

Proposition 1.5. [7] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \in L^p([a, b])$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} {}^H I_a^\alpha ({}^H I_a^\beta f)(x) &= {}^H I_a^{\alpha+\beta} f(x). \\ &= {}^H I_a^\beta ({}^H I_a^\alpha f)(x). \end{aligned}$$

Preuve : Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$${}^H I_a^\alpha ({}^H I_a^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}. \quad (1.4)$$

On remarque que : $a \leq t \leq x$ et $a \leq s \leq t$,

Donc, on prend $s \leq t \leq x$.

Puis, on pose le changement de variable :

$$y = \frac{\left(\ln \frac{t}{s}\right)}{\left(\ln \frac{x}{s}\right)} \quad (1.5)$$

On obtient alors :

$${}^H I_a^\alpha ({}^H I_a^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_s^t \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \right] \frac{ds}{s}. \quad (1.6)$$

On remplace (1.5) dans (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_s^t \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} &= \int_0^1 \left[\ln x - y \ln \frac{x}{s} - \ln s \right]^{\alpha-1} \left[y \ln \frac{x}{s} + \ln s - \ln s \right]^{\beta-1} \ln \left(\frac{x}{s}\right) dy \\ &= \int_0^1 ((1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1}) \left(\ln \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} dy. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la fonction Bêta, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_s^t \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} &= B(\alpha, \beta) \left(\ln \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\ln \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

L'égalité (1.4) devient :

$$\begin{aligned} {}^H I_a^\alpha ({}^H I_a^\beta f)(x) &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} ds \\ &= {}^H I_a^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

De la même façon, on trouve :

$${}^H I_a^\beta ({}^H I_a^\alpha f)(x) = {}^H I_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

1.8 Dérivation fractionnaire

1.8.1 Dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.19. [20, 26] Soit une fonction $f \in C([a, b))$, la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville de f est

$${}^{RL} D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$= {}^{RL} D_a^n I_a^{n-\alpha} f(t).$$

Exemple 5. [20] Soit $f(t) = (t-a)^\beta$ et $\alpha > 0, \beta > -1$

Alors,

$${}^{RL} D_a^\alpha (t-a)^\beta = D^n I_a^{n-\alpha} (t-a)^\beta$$

D'après (1.2), on obtient

$$I_a^{n-\alpha} (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} (t-a)^{\beta+n-\alpha}$$

Donc,

$${}^{RL} D_a^\alpha (t-a)^\beta = D^n \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} (t-a)^{\beta+n-\alpha} \right).$$

En utilisant la formule de dérivation entière suivante :

$$D^n (t-a)^k = k(k-1) \cdots (k-n+1) (t-a)^{k-n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} (t-a)^{k-n},$$

on aura

$$\begin{aligned} {}^{RL} D_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1-n)} (t-a)^{\beta+n-\alpha-n} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1. Si nous fixons β à 0 dans l'exemple précédent, nous observons que la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas égale 0. En effet,

$${}^{RL}D_a^\alpha 1(t) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Proposition 1.6. [20] Soit $\alpha > \beta > 0$, si $f \in C([a, b])$, alors

$${}^{RL}D_a^\beta (I_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t). \quad (1.6)$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors

$${}^{RL}D_a^\alpha (I_a^\alpha f)(t) = f(t). \quad (1.7)$$

Proposition 1.7. [20] Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $m-1 \leq \alpha < m$, $f \in C([a, b])$. Alors, l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^{RL}D_a^\alpha$ possède les propriétés suivantes :

1. ${}^{RL}D_a^\alpha$ est un opérateur linéaire.
2. Si ${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = 0$, alors

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^{\alpha+j-m}.$$

1.8.2 Dérivation fractionnaire de Caputo

Définition 1.20. Pour une fonction $f \in AC^n([a, b])$, et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire au sens du Caputo de f est définie par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \quad n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^* \\ &= I_a^{n-\alpha} D_a^n f(t), \end{aligned}$$

Exemple 6. La dérivée de Caputo de la fonction puissance $(t-a)^\beta$, où $\alpha > 0$, $\beta > 1$, et $n = [\alpha] + 1$, est alors la relation suivante :

$${}^cD_a^\alpha (t-a)^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta > n-1 \\ 0 & \text{si } \beta \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases}$$

où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

Proposition 1.8. [20] Soit $\alpha > \beta > 0$. Si $f \in C([a, b])$, alors :

$${}^cD_a^\beta I_a^\alpha f(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t).$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors

$${}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t).$$

Proposition 1.9. Soit $\alpha > 0$

1. ${}^cD_a^\alpha C = 0$, $C \in \mathbb{R}$.
2. ${}^cD_a^\alpha ({}^cD_a^\beta f(t)) = ({}^cD_a^{\alpha+\beta} f)(t) = {}^cD_a^\beta ({}^cD_a^\alpha f(t))$, où $f \in C^1[a, b]$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ et $0 < \alpha + \beta < 1$.
3. Soit $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :

$${}^cD_a^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^cD_a^\alpha f(t) + {}^cD_a^\alpha g(t)$$

En effet, pour 1,

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha c &= I_a^{n-\alpha} D_a^n c \\ &= I_a^{n-\alpha} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

En effet, pour 2,

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha ({}^c D_a^\beta f(t)) &= I_a^{1-\alpha} D_a^1 I_a^{1-\beta} D_a^1 f(t) \\ &= I_a^{1-\alpha+\beta-\beta} D_a^1 I_a^{1-\beta} D_a^1 f(t). \end{aligned}$$

On sait que $I_a^\beta (D_a^1 f(t)) = ({}^c D_a^{1-\beta} f)(t)$. Alors,

$$\begin{aligned} I_a^{1-\alpha-\beta} I_a^\beta D_a^1 I_a^{1-\beta} D_a^1 f(t) &= I_a^{1-\alpha-\beta} D_a^{1-\beta} I_a^{1-\beta} D_a^1 f(t) \\ &= I_a^{1-\alpha-\beta} D_a^1 f(t). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha ({}^c D_a^\beta f(t)) &= {}^c D_a^{\alpha+\beta} f(t) \\ &= {}^c D_a^\beta ({}^c D_a^\alpha f(t)). \end{aligned}$$

Lemme 1.3. On suppose que $n-1 \leq \alpha \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe, alors

$${}^c D^\alpha D^m f(t) = {}^c D^{\alpha+m} f(t) \neq D^{mc} D^\alpha f(t). \quad (1.7)$$

Lemme 1.4. Supposons que $n-1 \leq \alpha \leq n$, $\beta = \alpha - (n-1)$, ($0 < \beta < 1$), $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et soit $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe, alors

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^c D^\beta D^{n-1} f(t).$$

Preuve : On remplace β par α et $n-1$ par m dans l'équation (1.7), alors

$$\begin{aligned} {}^c D^\beta D^{n-1} f(t) &= {}^c D^{\beta+n-1} f(t), \\ &= {}^c D^{\alpha-(n-1)+n-1} f(t), \\ &= {}^c D^\alpha f(t). \end{aligned}$$

Lemme 1.5. Let $\alpha > \beta > 0$, and $f \in L^1([a, b])$. Then we have :

1. ${}^c D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t)$;
2. ${}^c D_a^\beta I_a^\alpha f(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t)$.

1.8.3 Dérivation fractionnaire de Hadamard

Définition 1.21. [20] Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b)$. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de f au sens de Hadamard est définie par :

$$\begin{aligned} {}^H D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds \\ &= \delta^n {}^H I_a^{n-\alpha} f(t), \end{aligned}$$

tel que $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta = t \frac{d}{dt}$.

Exemple 7. Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f(t) = \left(\ln \frac{t}{a} \right)^\beta$

$${}^H D_a^\alpha f(t) = \delta^n \left({}^H I_a^{n-\alpha} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^\beta \right).$$

D'après (1.3), on obtient

$${}^H I_a^{n-\alpha} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{n-\alpha+\beta}.$$

Alors,

$${}^H D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \delta^n \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{n-\alpha+\beta}.$$

on a,

$$\delta^n \left(\ln \frac{t}{a} \right)^k = k(k-1) \dots (k-n+1) \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{k-n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{k-n}$$

on aura,

$${}^H D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \times \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\beta-\alpha}.$$

Donc,

$${}^H D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\beta-\alpha}$$

Remarque 1.2. Si nous laissons $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, nous constatons que la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Hadamard d'une constante n'est pas nulle. En effet,

$${}^H D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{-\alpha}$$

Proposition 1.10. Soit $f \in C[a, b]$ et $\alpha > 0$, alors :

$${}^H D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t). \quad (1.7)$$

La signification de la propriété (1.7) est que l'opérateur de dérivation fractionnaire selon Hadamard agit comme un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire selon Hadamard du même ordre.

Proposition 1.11. Soit $f \in C[a, b]$ et $\alpha > 0$, alors :

$${}^H I^\alpha ({}^H D^\alpha f(t)) \neq f(t). \quad (1.8)$$

Proposition 1.12. [20] Soit $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $AC^n([a, b])$. La relation entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville peut être exprimée comme suit :

$${}^c D_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right]$$

1.8.4 Dérivation fractionnaire de Caputo-Hadamard

Définition 1.22. [19] Soit $\alpha \geq 0$ et $n-1 < \alpha < n$ et $f \in AC_\delta^n[1, +\infty)$. La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre α de f est définie par :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{n-\alpha-1} \delta^n f(s) \frac{ds}{s} \\ &= {}^H I_a^{n-\alpha} (\delta^n f)(t). \end{aligned}$$

tel que $\delta = t \frac{d}{dt}$.

Exemple 8. On considère la fonction f définie par :

$$f : t \mapsto \left(\ln \frac{t}{a} \right)^\beta.$$

On a alors

$$D_a^\alpha \left(\ln \frac{t}{a} \right)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{n-\alpha-1} \delta^n \left(\ln \frac{s}{a} \right)^\beta \frac{ds}{s}.$$

La formule de différenciation logarithmique donner par

$$\delta^n \left(\ln \frac{s}{a} \right)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \left(\ln \frac{s}{a} \right)^{\beta-n}$$

on aura,

$$D_a^\alpha \left(\ln \frac{t}{a} \right)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{n-\alpha-1} \left(\ln \frac{s}{a} \right)^{\beta-n} \frac{ds}{s}.$$

Ainsi,

$$D_a^\alpha \left(\ln \frac{t}{a} \right)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} {}^H I_a^{n-\alpha} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\beta-n}.$$

D'après (1.3), on obtient

$${}^H I_a^{n-\alpha} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\beta-n} = \frac{\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\beta-1}.$$

Donc,

$$D_a^\alpha \left(\ln \frac{t}{a} \right)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \times \frac{\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\beta-1}.$$

Alors,

$$D_a^\alpha \left(\ln \frac{t}{a} \right)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\beta-\alpha}.$$

Dans la suite, on donne une relation reliant la dérivée de Hadamard à celle de Caputo-Hadamard.

Proposition 1.13. [20] Soit $f \in AC_\delta^n([a, b])$ et $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$. La relation entre la dérivée de Caputo-Hadamard et celle de Hadamard est donnée par :

$$D_a^\alpha f(x) = {}^H D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{(k)} f(a)}{k!} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^k \right], \quad (1.9)$$

où

$$D_a^\alpha f(x) = {}^H D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{(k)} f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{k-\alpha}.$$

Proposition 1.14. [20] Soit $\alpha > \beta > 0$. Si $f \in C([a, b])$, alors

$$D_a^\beta ({}^H I_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t).$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors

$$D_a^\alpha ({}^H I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Preuve. En appliquant la relation (1.9) pour la fonction $I_a^\alpha f(t)$, on trouve la résultat suivante.

$$\begin{aligned} D_a^\beta ({}^H I_a^\alpha f)(t) &= {}^H D_a^\beta \left[{}^H I_a^\alpha f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\delta_H^j I_a^\alpha f(a)}{j!} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^j \right] \\ &= {}^H I_a^{\alpha-\beta} f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\delta_H^j I_a^\alpha f(a)}{j!} {}^H D_a^\beta \left(\ln \frac{t}{a} \right)^j \\ &= {}^H I_a^{\alpha-\beta} f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\delta_H^j I_a^\alpha f(a)}{j!} \delta_H^n I_a^{n-\beta} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^j. \end{aligned}$$

Et comme $j-1 < \alpha$, pour $j = 0, 1, \dots, m-1$, alors les dérivées $\delta_H^j I_a^\alpha f(a) = 0$, ce qui donne

$$D_a^\beta ({}^H I_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t).$$

□

1.9 Lemmes Auxiliaires

Les lemmes suivants sont utilisés dans la démonstration de nos résultats.

Lemme 1.6. [20]-[26] Soit $\alpha \geq 0$. L'équation différentielle fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = 0$$

admet des solutions de la forme :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i,$$

où $c_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 0, \dots, n-1$, et $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.7. [20]-[26] Soient $\alpha \geq 0$ et $f \in AC^n([a, b])$ (où AC^n désigne la classe des fonctions absolument continues jusqu'à l'ordre n). Alors l'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de f est :

$$I_a^\alpha ({}^C D_a^\alpha f)(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i + f(t).$$

avec $c_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 0, \dots, n-1$, et $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.8. [20] Pour $n-1 < \alpha < n$, où n est un nombre naturel non nul, et $f \in C([a, b])$, l'équation différentielle fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard :

$${}^H D_a^\alpha f(t) = 0,$$

admet comme solution générale la fonction :

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha-i}, \quad (c_i)_{i=0,1,\dots,n-1} \in \mathbb{R}$$

Lemme 1.9. [20] Soient $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in C([a, b])$. Alors on a :

$${}^H I_a^\alpha ({}^H D_a^\alpha f)(t) = f(t) + \sum_{i=1}^n c_i \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha-i}.$$

Lemme 1.10. [20] Pour $n-1 < \alpha < n$, où n est un nombre naturel non nul, et $f \in AC_\delta^n([a, b])$ (classe des fonctions absolument continues jusqu'à l'ordre n avec une densité δ), l'équation différentielle fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo-Hadamard :

$$D_a^\alpha f(t) = 0,$$

admet des solutions de la forme :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(\ln \frac{t}{a} \right)^j, \quad (c_j)_{j=0,1,\dots,n-1} \in \mathbb{R}.$$

Lemme 1.11. [20] Soient $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in AC_\delta^n([a, b])$. Alors, on a :

$${}^H I_a^\alpha (D_a^\alpha f)(t) = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\ln \frac{t}{a} \right)^i.$$

1.10 Les avantages de la dérivation de Caputo-Hadamard

1. **Flexibilité des Conditions Initiales :** Une gamme plus large de conditions initiales possibles, permettant une analyse plus large du système.
2. **Applications Plus Générales :** Applicable à un ensemble plus diversifié de systèmes, y compris ceux avec des conditions initiales non nulles, ce qui élargit son utilité pratique.
3. **Adaptation aux équations différentielles ordinaires :** La DCH est spécifiquement développée pour s'harmoniser avec les équations différentielles ordinaires. Cette caractéristique permet d'élargir l'applicabilité des méthodes et des outils d'analyse existants aux systèmes fractionnaires, simplifiant ainsi la résolution et l'interprétation des modèles mathématiques complexes.
4. **Domaines d'application étendus :** La DCH est utilisée dans une vaste gamme de secteurs, tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la finance, et bien d'autres encore. Grâce à sa souplesse et à sa précision, elle permet de modéliser et de décrypter des phénomènes complexes dans ces domaines, proposant ainsi des solutions plus précises et plus fiables aux défis rencontrés.

1.11 Quelques théorèmes de point fixe

Définition 1.23. Soit (E, d) un espace métrique complet et $T : E \rightarrow E$ une application. On dit que T est une application contractante, s'il existe une constante $0 < K < 1$ telle que :

$$d(T(x), T(y)) \leq Kd(x, y), \forall x, y \in E$$

Théorème 1.1 (Théorème de Banach). [20] Soit E un espace métrique complet, et soit l'opérateur $T : E \rightarrow E$ est contractant alors, T admet un point fixe unique c.à.d :

$$\exists u^* \in E \text{ tel que } : Tu^* = u^*.$$

Théorème 1.2 (Théorème du point fixe de Schauder). [12]

Soit U une partie convexe et fermée d'un espace de Banach E , et soit $T : U \rightarrow U$ un opérateur continu et compact. Alors l'opérateur T possède au moins un point fixe.

Théorème 1.3 (Théorème du point de Schaefer). [30] Soient E un espace de Banach et $T : E \rightarrow E$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\{x \in E : x = \lambda Tx, \lambda \in]0, 1[\}.$$

est borné, alors T possède au moins un point fixe.

1.11.1 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Définition 1.24. [2] Soit X un espace de Banach. Un ensemble $E \subset C(X)$ est dit équicontinu si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$:

$$\|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\|_E < \epsilon, \quad \forall T \in E.$$

Définition 1.25. [2] Une application $T : X \rightarrow X$ est complètement continue si l'ensemble $T(E)$ est relativement compact pour tout sous-ensemble borné E de X .

Théorème 1.4. (Arzelà-Ascoli) [31] Soit E un espace de Banach et A un sous-ensemble de $C([a, b], E)$. A est relativement compact dans $C([a, b]; E)$ tel que si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. L'ensemble A est borné, c'est-à-dire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\|f(x)\| \leq K, \quad \forall x \in [a, b] \text{ et } \forall f \in A.$$

2. L'ensemble A est équicontinu, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| < \epsilon \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b] \text{ et } \forall f \in A$$

3. Pour tout $x \in [a, b]$, l'espace $A(x)$ défini par

$$A(x) = \{f(x); f \in A\},$$

est relativement compact dans E .

Exemple 9. Considérons l'ensemble de fonctions $F = \{f_n(x) = \sin(nx)\}$ pour $x \in [0, 2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$.

Vérification des conditions du théorème :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 2\pi]$, on a :

$$|f_n(x)| = |\sin(nx)| \leq 1$$

Donc, la famille F est uniformément bornée par la constante $M = 1$.

Soit $\epsilon > 0$. La période de la fonction $f_n(x)$ est $\frac{2\pi}{n}$.

Si $|x - y| < \delta = \frac{\epsilon}{n}$, alors :

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |\sin(nx) - \sin(ny)| \leq |nx - ny| = n|x - y| < n\delta = \epsilon$$

Donc, la famille F est équicontinue.

Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, l'ensemble F est relativement compact dans l'espace $C([0, 2\pi])$.

Résolution d'un problème d'équations différentielles Fractionnaires de type Langevin

Dans ce chapitre on va étudier l'existence et l'unicité de solution pour le problème d'équation fractionnaire de type Langevin suivante avec des conditions intégrales et anti-périodiques :

$$\begin{cases} D^\beta(D^\alpha + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), & 1 < t < e, \\ x(1) = 0, \quad x(e) = \mu \int_1^e x(s)ds, \\ D^\alpha x(1) + D^\alpha x(e) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où D^α et D^β sont les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard , $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta \leq 2$, $\lambda > 0$, et $\mu > 0$ sont des nombres réels, et $f \in C([1, e] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Lemme 2.1. *Soit $h \in C(1, e) \cap L(1, e)$, la solution unique du problème de valeur aux limites fractionnaire linéaire de Caputo- Hadamard*

$$\begin{cases} D^\beta(D^\alpha + \lambda)x(t) = h(t), & 1 < t < e, \\ x(1) = 0, \quad x(e) = \mu \int_1^e x(s)ds, \\ D^\alpha x(1) + D^\alpha x(e) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

est donnée par

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & - \frac{(\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & - \frac{(\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & + \left[\frac{\lambda \mu (\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mu (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{1 - \alpha} \right] \int_1^e x(s) ds \\
 & + \frac{\lambda (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \\
 & - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds.
 \end{aligned}$$

Preuve. Soit l'équation :

$$D^\beta (D^\alpha + \lambda)x(t) = h(t) \quad (2.3)$$

Alors,

$${}^H \mathcal{I}^\beta D^\beta (D^\alpha + \lambda)x(t) = {}^H \mathcal{I}^\beta h(t) \quad (2.4)$$

D'après Lemme 1.11, on obtient

$$(D^\alpha + \lambda)x(t) = {}^H \mathcal{I}^\beta h(t) + c_0 + c_1 \ln t \quad (2.5)$$

Donc,

$$D^\alpha x(t) = {}^H \mathcal{I}^\beta h(t) + c_0 + c_1 \ln t - \lambda x(t) \quad (2.6)$$

D'après Lemme 1.11, on obtient

$$\begin{aligned}
 x(t) = & {}^H \mathcal{I}^{\alpha + \beta} h(t) + c_0 {}^H \mathcal{I}^\alpha 1 + c_1 {}^H \mathcal{I}^\alpha \ln t - \lambda {}^H \mathcal{I}^\alpha x(t) + c_2 \\
 = & \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds + c_0 \frac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
 & + c_1 \frac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds + c_2.
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

par condition aux limites $x(1) = 0$, on trouve $c_2 = 0$.

Alors l'équation (2.7), devient

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds + c_0 \frac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
 & + c_1 \frac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds.
 \end{aligned}$$

En appliquant la condition aux limites $x(e) = \mu \int_1^e x(s)ds$, nous obtenons :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds + \frac{c_0}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{c_1}{\Gamma(\alpha + 2)} - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds = \mu \int_1^e x(s)ds.$$

D'après la condition aux limites

$$D^\alpha x(1) + D^\alpha x(e) = 0 \quad (2.8)$$

Alors,

$$D^\alpha x(1) = c_0 \quad (2.9)$$

et

$$D^\alpha x(e) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds + c_0 + c_1 - \lambda \mu \int_1^e x(s)ds \quad (2.10)$$

En remplaçant (2.9) et (2.10) dans (2.8), on obtient

$$2c_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - s)^{\beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds + c_1 - \lambda \mu \int_1^e x(s)ds = 0$$

Par calcul direct ,on a

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \left[(-2\mu\Gamma(\alpha + 1) + \lambda\mu) \int_1^e x(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds - 2\lambda \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \right] \\ &= -2\mu \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha - 1} \int_1^e x(s)ds + \lambda\mu \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \int_1^e x(s)ds - \frac{\alpha + 1}{(\alpha - 1)\Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\ &\quad + 2 \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds - 2\lambda \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\alpha - 1} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \\ c_0 &= \frac{1}{(\alpha - 1)\Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds - \frac{\lambda\mu}{\alpha - 1} \int_1^e x(s)ds + \frac{\mu\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha - 1} \int_1^e x(s)ds \\ &\quad - \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds + \frac{\lambda\alpha(\alpha + 1)}{\alpha - 1} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds + \frac{(\ln t)^\alpha}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & - \frac{\lambda \mu (\ln t)^\alpha}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha + 1)} \int_1^e x(s) ds + \frac{\mu (\ln t)^\alpha \Gamma(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha + 1)} \int_1^e x(s) ds \\
 & - \frac{(\ln t)^\alpha \Gamma(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & + \frac{\lambda \alpha (\alpha + 1) (\ln t)^\alpha}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha + 1)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds - \frac{2\mu (\ln t)^{\alpha + 1}}{\alpha - 1} \int_1^e x(s) ds \\
 & + \frac{\lambda \mu (\alpha + 1) (\ln t)^{\alpha + 1}}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha + 2)} \int_1^e x(s) ds - \frac{(\alpha + 1) (\ln t)^{\alpha + 1}}{(\alpha - 1)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + 2)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & + \frac{2(\ln t)^{\alpha + 1}}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & - 2 \frac{\lambda \alpha (\alpha + 1) (\ln t)^{\alpha + 1}}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha + 2)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds
 \end{aligned}$$

Ensite,

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & + \left[\frac{(\alpha + 1) (\ln t)^{\alpha + 1}}{(1 - \alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + 2)} - \frac{(\ln t)^\alpha}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta)} \right] \times \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & + \left[\frac{\lambda \mu (\ln t)^\alpha}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{\lambda \mu (\alpha + 1) (\ln t)^{\alpha + 1}}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 2)} \right] \times \int_1^e x(s) ds \\
 & + \left[\frac{2\mu (\ln t)^{\alpha + 1}}{1 - \alpha} - \frac{\mu \Gamma(\alpha + 2) (\ln t)^\alpha}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \right] \times \int_1^e x(s) ds \\
 & + \left[\frac{(\alpha + 1) (\ln t)^\alpha}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + \beta)} - \frac{2(\ln t)^{\alpha + 1}}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + \beta)} \right] \times \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & + \left[\frac{2\lambda \alpha (\ln t)^{\alpha + 1}}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{\lambda \alpha (\alpha + 1) (\ln t)^\alpha}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \right] \times \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \\
 & - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds.
 \end{aligned}$$

Alors, le solution de (2.2) satisfait

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & - \frac{(\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & - \frac{(\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{h(s)}{s} ds \\
 & + \left[\frac{\lambda \mu (\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mu (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{1 - \alpha} \right] \int_1^e x(s) ds \\
 & + \frac{\lambda (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \\
 & - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds.
 \end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.

- (i) $\max_{t \in [1, e]} |(\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)| = \max \left\{ \left(\frac{\alpha}{2} \right)^\alpha, 1 - \alpha \right\};$
- (ii) $\max_{t \in [1, e]} (\ln t)^\alpha (1 - \ln t) = \frac{\alpha^\alpha}{(1 + \alpha)^{1 + \alpha}}.$

Preuve.

- (i) Soit $h(t) = (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)$, $1 \leq t \leq e$, ainsi :

$$h'(t) = \frac{(\ln t)^{\alpha - 1}}{t} (2(\alpha + 1) \ln t - \alpha^2 - \alpha),$$

Pour étudier le signe de h' , on résoudre l'équation suivant :

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \frac{(\ln t)^{\alpha - 1}}{t} (2(\alpha + 1) \ln t - \alpha^2 - \alpha) = 0 \\
 &\Rightarrow 2(\alpha + 1) \ln t - \alpha^2 - \alpha = 0 \\
 &\Rightarrow t = e^{\frac{\alpha}{2}}
 \end{aligned}$$

Alors,

t	1	$e^{\frac{\alpha}{2}}$	e
$h'(t)$	-	0	+
$h(t)$	0	$-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^\alpha$	$1-\alpha$

En conclusion, $|h(t)|_{\max} = \max\{|h(e^{\frac{\alpha}{2}})|, h(e)\} = \max\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^\alpha, 1-\alpha\right\}$.

(ii) Soit $h(t) = (\ln t)^\alpha(1 - \ln t)$, $0 \leq t \leq 1$, alors $h'(t) = \frac{(\ln t)^{\alpha-1}}{t}[\alpha - (\alpha+1)\ln t]$.

t	1	$\frac{\alpha}{1+\alpha}$	e
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	0	$\frac{\alpha^\alpha}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}$	0

Ainsi $h(t)_{\max} = h\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) = \frac{\alpha^\alpha}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}$.

Soit $\eta = \frac{1}{1-\alpha} \max\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^\alpha, 1-\alpha\right\}$.

□

2.1 Existence et unicité de la solution utilisant le principe de contraction de Banach

On posons ,

$$\begin{aligned}
 M = & \left[\frac{(1-\alpha)(1+\alpha)^{1+\alpha}\Gamma(\alpha+1)[1-\eta\mu(e-1)]}{(1+\eta)(1-\alpha)(1+\alpha)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1) + \alpha^\alpha\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right. \\
 & \left. - \lambda \frac{\mu\alpha^\alpha(e-1) + (\eta+1)(1-\alpha)(1+\alpha)^{1+\alpha}}{(1+\eta)(1-\alpha)(1+\alpha)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1) + \alpha^\alpha\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right] \\
 & \times \Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\beta+1)
 \end{aligned}$$

On considère l'hypothèse suivante :

(H1) Il existe une constante $L > 0$ tel que :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall t \in [1, e], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Théorème 2.1. *Supposons que l'hypothèse (H1) est vérifiée. Si*

$$\begin{aligned} L < & \left[\frac{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{1+\alpha} \Gamma(\alpha + 1) [1 - \eta \mu (e - 1)]}{(1 + \eta)(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) + \alpha^\alpha \Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right. \\ & \left. - \lambda \frac{\mu \alpha^\alpha (e - 1) + (\eta + 1)(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{1+\alpha}}{(1 + \eta)(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) + \alpha^\alpha \Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right] \\ & \times \Gamma(\alpha + \beta + 1) \Gamma(\beta + 1) \end{aligned}$$

Alors, le problème (2.1) possède une solution unique .

Preuve. Pour transformer le problème (2.1) en un problème de point fixe. Soit $E = C[1, e]$ un espace de Banach si il dotée de la norme comme suit :

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in [1, e]} |x(t)|.$$

Considérons l'opérateur $T : C[1, e] \rightarrow C[1, e]$ défini par :

$$\begin{aligned} (Tx)(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\ & - \frac{(\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\ & - \frac{(\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta-1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\ & + \left[\frac{\lambda \mu (\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mu (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{1 - \alpha} \right] \int_1^e x(s) ds \\ & + \frac{\lambda (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha-1} \frac{x(s)}{s} ds \\ & - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha-1} \frac{x(s)}{s} ds \end{aligned} \tag{2.11}$$

Clairment, les points fixes de l'opérateur T sont des solutions du problème (2.1).

On doit montrer que T est une application contractante, pour cela, on applique le principe de contraction de Banach.

Soient $x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [1, e]$, on a :

$$\begin{aligned}
 |(Tx)(t) - (Ty)(t)| = & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \right. \\
 & - \frac{(\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\
 & - \frac{(\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\
 & + \left[\frac{\lambda \mu (\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mu (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{1 - \alpha} \right] \int_1^e x(s) ds \\
 & + \frac{\lambda (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \\
 & - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \\
 & - \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{f(s, y(s))}{s} ds \\
 & + \frac{(\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{f(s, y(s))}{s} ds \\
 & + \frac{(\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{f(s, y(s))}{s} ds \\
 & - \left[\frac{\lambda \mu (\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mu (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{1 - \alpha} \right] \int_1^e y(s) ds \\
 & - \frac{\lambda (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{y(s)}{s} ds \\
 & \left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{y(s)}{s} ds \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \frac{(\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}}{s} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right. \\
 &\quad - \frac{(\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}}{s} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \\
 &\quad - \frac{(\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\beta - 1}}{s} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \\
 &\quad + \left[\frac{\lambda \mu (\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mu (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{1 - \alpha} \right] \int_1^e x(s) - y(s) ds \\
 &\quad + \frac{\lambda (\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\alpha - 1}}{s} (x(s) - y(s)) ds \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \frac{(\ln t - \ln s)^{\alpha - 1}}{s} (x(s) - y(s)) ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \frac{(\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}}{s} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
 &\quad + \frac{\eta}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}}{s} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
 &\quad + \frac{\alpha^\alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{\alpha + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \\
 &\quad \times \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\beta - 1}}{s} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
 &\quad + \frac{\lambda \mu \alpha^\alpha}{(1 + \alpha)^{\alpha + 1} (1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} \int_1^e |x(s) - y(s)| ds \\
 &\quad + \mu \eta \int_1^e |x(s) - y(s)| ds \\
 &\quad + \frac{\lambda \eta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\alpha - 1}}{s} |x(s) - y(s)| ds \\
 &\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \frac{(\ln t - \ln s)^{\alpha - 1}}{s} |x(s) - y(s)| ds
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \|(Tx)(t) - (Ty)(t)\|_\infty &\leq \frac{L\|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \frac{(\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}}{s} ds + \frac{\eta L\|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}}{s} ds \\
 &\quad + \frac{\alpha^\alpha L\|x - y\|_\infty}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{1 + \alpha} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\beta - 1}}{s} ds \\
 &\quad + \frac{\lambda \mu \alpha^\alpha \|x - y\|_\infty}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{1 + \alpha} \Gamma(\alpha + 1)} (e - 1) + \mu \eta \|x - y\|_\infty (e - 1) \\
 &\quad + \frac{\lambda \eta \|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\alpha - 1}}{s} ds + \frac{\lambda \|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \frac{(\ln t - \ln s)^{\alpha - 1}}{s} ds \\
 &\leq \frac{L\|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (\ln t)^{\alpha + \beta} + \frac{\eta L\|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\
 &\quad + \frac{\alpha^\alpha L\|x - y\|_\infty}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{1 + \alpha} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \\
 &\quad + \frac{\lambda \mu \alpha^\alpha \|x - y\|_\infty}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{1 + \alpha} \Gamma(\alpha + 1)} (e - 1) + \mu \eta \|x - y\|_\infty (e - 1) \\
 &\quad + \frac{\lambda \eta \|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\lambda \|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} (\ln t)^\alpha
 \end{aligned}$$

Enfin, on obtient

$$\begin{aligned}
 \|(Tx)(t) - (Ty)(t)\|_\infty &\leq \left[\frac{(1 + \eta)L}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{\alpha^\alpha L}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{1 + \alpha} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda \mu \alpha^\alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{1 + \alpha} \Gamma(\alpha + 1)} (e - 1) + \eta(e - 1)\mu + \frac{\lambda(\eta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] \|x - y\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Puisque nous avons $L < M$, donc T est une contraction. En utilisant le principe de contraction de Banach, alors T admet un point fixe unique, ce qui implique que le problème (2.1) admet une seule solution dans E . $\square$

2.2 Existence de la solution via le théorème de Schauder

On considère les hypothèses suivantes :

(H2) La fonction $f : [1, e] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(H3) Il existe une constante $L_1 > 0$ telle que

$$|f(t, x)| \leq L_1, \quad \forall t \in [1, e] \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses (H2)-(H3) le problème (2.1) admet au moins une solution dans E .*

Preuve. Clairment, les points fixes de l'opérateur T sont des solutions du problème (2.1). Soit

$$K \geq \frac{\frac{L_1(1+\eta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{L_1\alpha^\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha)^{1+\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta+1)}}{1-A}$$

tel que , $A = \frac{\lambda\mu\alpha^\alpha(e-1)}{(1+\alpha)^{\alpha+1}(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} + \mu\eta + \frac{\lambda(\eta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$

Soit $K > 0$, on considère l'ensemble :

$$B_K = \{x \in C[1, e], \|x\|_\infty \leq K\}.$$

où B_K est fermé, borné et convexe .En effet, l'ensemble B_K est convexe :

Soit $x, y \in B_K$ et $t \in [0, 1]$.

Nous devons montrer que $tx + (1-t)y \in B_K$. Soit $x, y \in B_K$ ce qui signifie que $\|x\|_\infty \leq K$ et $\|y\|_\infty \leq K$. On a,

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y\|_\infty &\leq t\|x\|_\infty + (1-t)\|y\|_\infty \\ &\leq tK + (1-t)K = K. \end{aligned}$$

Alors, B_K est convexe.

Nous allons montrer que T satisfait les hypothèses du théorème de point fixe de Schauder. La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : Nous montrons que T est continue

Soit $\{x_n\}$ une suite qui converge vers x dans $C[1, e]$, pour tout $t \in [1, e]$, on a

$$\begin{aligned}
|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \frac{(\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}}{s} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \\
&+ \frac{\eta}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}}{s} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \\
&+ \frac{\alpha^\alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{\alpha + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \\
&\times \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\beta - 1}}{s} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \\
&+ \frac{\lambda \mu \alpha^\alpha}{(1 + \alpha)^{\alpha + 1} (1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} \int_1^e |x_n(s) - x(s)| ds \\
&+ \mu \eta \int_1^e |x_n(s) - x(s)| ds \\
&+ \frac{\lambda \eta}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\alpha - 1}}{s} |x_n(s) - x(s)| ds \\
&+ \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \frac{(\ln t - \ln s)^{\alpha - 1}}{s} |x_n(s) - x(s)| ds \\
&\leq \frac{\|f(\cdot, x_n(\cdot)) - f(\cdot, x(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (\ln t)^{\alpha + \beta} + \frac{\eta \|f(\cdot, x_n(\cdot)) - f(\cdot, x(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\
&+ \frac{\alpha^\alpha \|f(\cdot, x_n(\cdot)) - f(\cdot, x(\cdot))\|_\infty}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{1 + \alpha} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \\
&+ \frac{\lambda \mu \alpha^\alpha \|x_n - x\|_\infty}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{1 + \alpha} \Gamma(\alpha + 1)} (e - 1) + \mu \eta \|x_n - x\|_\infty (e - 1) \\
&+ \frac{\lambda \eta \|x_n - x\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\lambda \|x_n - x\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} (\ln t)^\alpha.
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, on donc

$$\|T(x_n) - T(x)\|_\infty \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Alors, T est continue.

Étape 2 : Nous montrons que $T(B_K) \subset B_K$.

En effet, à partir de (H2), alors pour $x \in B_K = \{x \in C[0, 1], \|x\| \leq K\}$ et pour chaque $t \in [1, e]$, on a

$$\begin{aligned}
 |(Tx)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{|f(s, x(s))|}{s} ds \\
 &+ \frac{|(\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)|}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{|f(s, x(s))|}{s} ds \\
 &+ \frac{(\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{|f(s, x(s))|}{s} ds \\
 &+ \left[\frac{\lambda \mu (\ln t)^\alpha (1 - \ln t)}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mu |(\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)|}{1 - \alpha} \right] \int_1^e |x(s)| ds \\
 &+ \frac{\lambda |(\ln t)^\alpha (2 \ln t - \alpha - 1)|}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{|x(s)|}{s} ds \\
 &+ \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\ln t - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{|x(s)|}{s} ds. \\
 &\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^t \frac{(\ln t - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}}{s} ds + \frac{L_1 \eta}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}}{s} ds \\
 &+ \frac{L_1 \alpha^\alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{\alpha + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\beta - 1}}{s} ds \\
 &+ \frac{\lambda \mu \alpha^\alpha \|x\|_\infty (e - 1)}{(1 + \alpha)^{\alpha + 1} (1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \mu \eta \|x\|_\infty (e - 1) \\
 &+ \frac{\lambda \eta \|x\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \frac{(1 - \ln s)^{\alpha - 1}}{s} ds + \frac{\lambda \|x\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \frac{(\ln t - \ln s)^{\alpha - 1}}{s} ds.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (\ln t)^{\alpha + \beta} + \frac{L_1 \eta}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\
&\quad + \frac{L_1 \alpha^\alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{\alpha + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} + \frac{\lambda \mu \alpha^\alpha \|x\|_\infty (e - 1)}{(1 + \alpha)^{\alpha + 1} (1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} \\
&\quad + \mu \eta \|x\|_\infty (e - 1) + \frac{\lambda \eta \|x\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\lambda \|x\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} (\ln t)^\alpha. \\
&\leq \frac{L_1(1 + \eta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{L_1 \alpha^\alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{\alpha + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \\
&\quad + \frac{\lambda \mu \alpha^\alpha \|x\|_\infty (e - 1)}{(1 + \alpha)^{\alpha + 1} (1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \mu \eta \|x\|_\infty + \frac{\lambda \|x\|_\infty (\eta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}. \\
&\leq \frac{L_1(1 + \eta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{L_1 \alpha^\alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^{\alpha + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \\
&\quad + \frac{\lambda \mu \alpha^\alpha K (e - 1)}{(1 + \alpha)^{\alpha + 1} (1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \mu \eta K + \frac{\lambda K (\eta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}. \\
&\leq K.
\end{aligned}$$

Alors, $(Tx)(t) \in B_K$ implique $T(B_K) \subset B_K$.

Étape 3 : Nous montrons que $T(B_K)$ est équicontinu. D'après l'Étape précédente, on a trouvé que $\|Tx\| < K$ est, donc $T(B_K)$ est uniformément borné.

Pour l'équicontinuité de $T(B_K)$, soient $t_1, t_2 \in [1, e]$, $t_1 < t_2$ et $x \in B_K$, nous avons

$$\begin{aligned}
 |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| = & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^{t_2} (\ln t_2 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \right. \\
 & - \frac{(\ln t_2)^\alpha (2 \ln t_2 - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\
 & - \frac{(\ln t_2)^\alpha (1 - \ln t_2)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\
 & + \left[\frac{\lambda \mu (\ln t_2)^\alpha (1 - \ln t_2)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mu (\ln t_2)^\alpha (2 \ln t_2 - \alpha - 1)}{1 - \alpha} \right] \int_1^e x(s) ds \\
 & + \frac{\lambda (\ln t_2)^\alpha (2 \ln t_2 - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \\
 & - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_2} (\ln t_2 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \\
 & - \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^{t_1} (\ln t_1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\
 & + \frac{(\ln t_1)^\alpha (2 \ln t_1 - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\
 & + \frac{(\ln t_1)^\alpha (1 - \ln t_1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\
 & - \left[\frac{\lambda \mu (\ln t_1)^\alpha (1 - \ln t_1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mu (\ln t_1)^\alpha (2 \ln t_1 - \alpha - 1)}{1 - \alpha} \right] \int_1^e x(s) ds \\
 & - \frac{\lambda (\ln t_1)^\alpha (2 \ln t_1 - \alpha - 1)}{(1 - \alpha) \Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \\
 & \left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} (\ln t_1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \right|
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^{t_1} \frac{f(s, x(s))}{s} [(\ln t_2 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} - (\ln t_1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1}] ds \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_{t_1}^{t_2} (\ln t_2 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\
 &\quad + \frac{(\alpha + 1)((\ln t_2)^\alpha - (\ln t_1)^\alpha) + 2(\ln t_1)^{\alpha + 1} - (\ln t_2)^{\alpha + 1}}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + \beta)} \\
 &\quad \times \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha + \beta - 1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \\
 &\quad + \frac{(\ln t_2)^{\alpha + 1} - (\ln t_1)^{\alpha + 1} + (\ln t_1)^\alpha - (\ln t_2)^\alpha}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\beta - 1} ds \\
 &\quad + \frac{\lambda\mu((\ln t_1)^{\alpha + 1} - (\ln t_2)^{\alpha + 1}) + \lambda\mu((\ln t_2)^\alpha - (\ln t_1)^\alpha)}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \int_1^e x(s) ds \\
 &\quad + \frac{\mu(\alpha + 1)(\ln t_1)^\alpha - (\ln t_2)^\alpha + 2\mu((\ln t_2)^{\alpha + 1} - (\ln t_1)^{\alpha + 1})}{1 - \alpha} \int_1^e x(s) ds \\
 &\quad + \frac{\lambda(\alpha + 1)((\ln t_1)^\alpha - (\ln t_2)^\alpha) + 2\lambda((\ln t_2)^{\alpha + 1} - (\ln t_1)^{\alpha + 1})}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)} \int_1^e (1 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \\
 &\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{t_1} \frac{x(s)}{s} [(\ln t_1 - \ln s)^{\alpha - 1} - (\ln t_2 - \ln s)^{\alpha - 1}] ds \\
 &\quad - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (\ln t_2 - \ln s)^{\alpha - 1} \frac{x(s)}{s} ds \Big| \\
 &\leq \frac{L_1[(\ln t_2)^{\alpha + \beta} - (\ln t_1)^{\alpha + \beta}]}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\
 &\quad + \frac{L_1|(\alpha + 1)[(\ln t_2)^\alpha - (\ln t_1)^\alpha] + 2[(\ln t_1)^{\alpha + 1} - (\ln t_2)^{\alpha + 1}]|}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\
 &\quad + \frac{L_1|(\ln t_2)^{\alpha + 1} - (\ln t_1)^{\alpha + 1} + (\ln t_1)^\alpha - (\ln t_2)^\alpha|}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \\
 &\quad + \frac{|\lambda\mu[(\ln t_1)^{\alpha + 1} - (\ln t_2)^{\alpha + 1}] + \lambda\mu[(\ln t_2)^\alpha - (\ln t_1)^\alpha]| \|x\|(e - 1)}{(1 - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{|\mu(\alpha+1)(\ln t_1)^\alpha - (\ln t_2)^\alpha + 2\mu[(\ln t_2)^{\alpha+1} - (\ln t_1)^{\alpha+1}]||x|(e-1)}{1-\alpha} \\
 & + \frac{|\lambda(\alpha+1)[\ln t_1]^\alpha - (\ln t_2)^\alpha + 2\lambda[(\ln t_2)^{\alpha+1} - (\ln t_1)^{\alpha+1}]||x|}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \\
 & + \frac{\lambda\|x\|}{\Gamma(\alpha+1)}[(\ln t_2)^\alpha - (\ln t_1)^\alpha] \\
 & \leq \frac{L_1[(\ln t_2)^{\alpha+\beta} - (\ln t_1)^{\alpha+\beta}]}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \left[\frac{2L_1}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{L_1}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\lambda\mu K(e-1)}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2\mu K(e-1)}{(1-\alpha)} + \frac{2\lambda K}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \right] ((\ln t_2)^{\alpha+1} - (\ln t_1)^{\alpha+1}) \\
 & \quad + \left[\frac{L_1(\alpha+1)}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{L_1}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} + \frac{\lambda\mu K(e-1)}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\mu(\alpha+1)K(e-1)}{1-\alpha} + \frac{\lambda(\alpha+1)K}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda K}{\Gamma(\alpha+1)} \right] ((\ln t_2)^\alpha - (\ln t_1)^\alpha).
 \end{aligned}$$

Lorsque $t_1 \rightarrow t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Ainsi, $T(B_K)$ est équicontinu. Alors, par le théorème d'Arzelà-Ascoli, T est complètement continue.

En conséquence du théorème de point fixe de Schauder, on en déduit que T admet des points fixes qui sont des solutions du problème (2.1). $\square$

2.3 Exemples

Dans cette section, on présente quelques exemples pour illustrer nos résultats.

Exemple 1

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}(D^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{9})x(t) = f(t, x(t)), & 1 < t < e, \\ x(1) = 0, \quad x(e) = \frac{1}{9} \int_1^e x(s) ds, \\ D^{\frac{1}{4}}x(1) + D^{\frac{1}{4}}x(e) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Ici $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\lambda = \mu = \frac{1}{9}$
Avec

$$f(t, x) = \frac{\sin^2(\pi t)}{e^t + 10} \left(\frac{|x|}{|x| + 1} + 1 \right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Clairement, la fonction f est continue. Pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [1, e]$, nous avons

$$|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq \frac{1}{10}|x - y|.$$

Ainsi, l'hypothèse (H1) est satisfaite avec $L = \frac{1}{10}$. De plus,

$$M = \left[\frac{(1-\alpha)(1+\alpha)^{1+\alpha}\Gamma(\alpha+1)[1-\eta\mu(e-1)]}{(1+\eta)(1-\alpha)(1+\alpha)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)+\alpha^\alpha\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right. \\ \left. - \lambda \frac{\mu\alpha^\alpha(e-1)+(\eta+1)(1-\alpha)(1+\alpha)^{1+\alpha}}{(1+\eta)(1-\alpha)(1+\alpha)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)+\alpha^\alpha\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right] \\ \times \Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\beta+1) \simeq 0.2978$$

et

$$L < 0.2978.$$

Par conséquent, selon la conclusion du Théorème (2.1), il s'ensuit que le problème (2.12) admet une solution unique définie sur $[1, e]$.

Exemple 2

$$\begin{cases} D^{\frac{7}{4}}(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8})x(t) = \frac{1}{t^2+8} \sin x, & 1 < t < e, \\ x(1) = 0, & x(e) = \frac{1}{7} \int_1^e x(s)ds, \\ D^{\frac{1}{2}}x(1) + D^{\frac{1}{2}}x(e) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

où $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{7}{4}$, $\lambda = \frac{1}{8}$, $\mu = \frac{1}{7}$ et

$$f(t, x(t)) = \frac{1}{t^2+8} \sin x$$

Clairement, la fonction f est continue. Pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [1, e]$, nous avons

$$|f(t, x(t))| = \left| \frac{1}{t^2+8} \sin x \right| \leq \frac{1}{9}$$

Ainsi, l'hypothèse (H3) est satisfaite avec $L_1 = \frac{1}{9}$.

et

$$B_K = \{x \in C[0, 1], \|x\| \leq K\}.$$

est un ensemble fermé, borné et convexe. Avec K satisfait :

$$K \geq \frac{\frac{L_1(1+\eta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{L_1\alpha^\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha)^{1+\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta+1)}}{1-A} \simeq 0,2686$$

tel que $A \simeq 0,4516$.

Par conséquent, selon la conclusion du Théorème (2.2), il s'ensuit que le problème (2.13) admet au moins une solution définie sur $[1, e]$.

Étude du problème aux limites d'équations différentielles fractionnaires p-Laplacien

3.1 Introduction

Ces dernières années, la théorie des équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaires a connu un essor important, avec un nombre croissant de résultats obtenus. Cependant, la plupart des travaux se concentrent sur l'étude de ces équations dans des intervalles finis et avec des conditions aux limites initiales. Les conditions aux limites anti-périodiques, quant à elles, interviennent dans la modélisation mathématique de nombreux phénomènes physiques, comme le montrent les travaux d'Ahmed et al. [5], Chen et al. [10] et Mattar [22, 23, 24].

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha (\varphi_p(D^\beta x(t))) = f(t, x(t)), & 1 < t < e, \\ x(1) = 0, \quad D^\beta x(1) = 0, \quad x(e) = \lambda \int_1^e x(s) ds, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $0 < \alpha \leq 1$, $1 < \beta \leq 2$ et $\lambda > 0$, D^α et D^β désignent la dérivée de Caputo-Hadamard. $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$ avec $p > 1$ (φ_p)⁻¹(s) = $\varphi_q(s)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f : [1, e] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée.

Soit $C([1, e], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[1, e]$ avec des valeurs réelles, équipé de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq t \leq e} |x(t)|$, cet espace est un espace de Banach.

Lemme 3.1. *Soit $y \in C[1, e]$ une fonction continue. La solution unique du problème de valeur aux limites fractionnaire linéaire de Caputo-Hadamard*

$$\begin{cases} D^\alpha (\varphi_p(D^\beta x(t))) = y(t), & 1 < t < e, \\ x(1) = 0, \quad D^\beta x(1) = 0, \quad x(e) = \lambda \int_1^e x(s) ds, \end{cases} \quad (3.2)$$

est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{y(\tau)}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\ & - \ln t \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{y(\tau)}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. - \lambda \int_1^e x(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Preuve. En appliquant l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre α à des deux côtés de l'équation

$$D^\alpha (\varphi_p(D^\beta x(t))) = y(t).$$

Nous avons

$$\varphi_p(D^\beta x(t)) = {}^H I^\alpha y(t) + c_0.$$

Ainsi,

$$D^\beta x(t) = \varphi_q \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} y(s) \frac{ds}{s} + c_0 \right]$$

Par la condition au limite $D^\beta x(1) = 0$, nous avons $c_0 = 0$. Ensuite,

$$x(t) = {}^H I^\beta \phi_q({}^H I^\alpha y(t)) + c_1 + c_2 \ln t.$$

La condition au limite $x(1) = 0$ implique

$$|c_1|^{q-2} c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Alors, $c_1 = 0$. Par conséquent, cela satisfait

$$x(t) = {}^H I^\beta \phi_q({}^H I^\alpha y(t)) + c_2 \ln t. \quad (3.3)$$

Par la condition au limite $x(e) = \lambda \int_1^e x(s) ds$, nous avons

$$\begin{aligned} c_2 &= \lambda \int_1^e x(s) ds - {}^H I^\beta \phi_q({}^H I^\alpha y(e)) \\ &= \lambda \int_1^e x(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{y(\tau)}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

En remplaçant la valeur de c_2 dans (3.3), nous obtenons la solution de (3.2) comme suit

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{y(\tau)}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\ &\quad - \ln t \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{y(\tau)}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\ &\quad \left. - \lambda \int_1^e x(s) ds \right]. \end{aligned}$$

□

Cela complète la preuve .

Lemme 3.2. Si $a, b \geq 0$, $\gamma > 0$, alors

$$(a+b)^\gamma \leq \max\{2^{\gamma-1}, 1\}(a^\gamma + b^\gamma).$$

Preuve. De toute évidence, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $0 < a < b$, $\gamma \neq 1$.

Soit $\psi(t) = t^\gamma$, $t \in [0, +\infty)$.

(i) Si $\gamma > 1$, alors $\psi(t)$ est convexe sur $(0, +\infty)$, et donc

$$\psi \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \right) \leq \frac{1}{2}\psi(a) + \frac{1}{2}\psi(b),$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{2^\gamma}(a+b)^\gamma \leq \frac{1}{2}(a^\gamma + b^\gamma).$$

Ainsi

$$(a+b)^\gamma \leq 2^{\gamma-1}(a^\gamma + b^\gamma).$$

(ii) Si $0 < \gamma < 1$, alors $\psi(t)$ est concave sur $[0, +\infty)$, et donc

$$\begin{aligned}\psi(a) &= \psi\left(\frac{b}{a+b} \cdot 0 + \frac{a}{a+b} \cdot (a+b)\right) \\ &\geq \frac{b}{a+b}\psi(0) + \frac{a}{a+b}\psi(a+b) \\ &= \frac{a}{a+b}\psi(a+b)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi(b) &= \psi\left(\frac{a}{a+b} \cdot 0 + \frac{b}{a+b} \cdot (a+b)\right) \\ &\geq \frac{a}{a+b}\psi(0) + \frac{b}{a+b}\psi(a+b) \\ &= \frac{b}{a+b}\psi(a+b)\end{aligned}$$

Ainsi, $\psi(a) + \psi(b) \geq \psi(a+b)$, à savoir,

$$(a+b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma.$$

Par (i), (ii) ci-dessus, nous avons

$$(a+b)^\gamma \leq \max\{2^{\gamma-1}, 1\}(a^\gamma + b^\gamma).$$

□

Lemme 3.3. [10] Soit ϕ_p l'opérateur p-Laplacien. Alors,

(i) Si $p > 2$ et $|x|, |y| \leq M$, alors

$$|\phi_p(x) - \phi_p(y)| \leq (p-1)M^{p-2}|x-y|.$$

(ii) Si $1 < p \leq 2$, $xy > 0$, et $|x|, |y| \geq m > 0$, alors

$$|\phi_p(x) - \phi_p(y)| \leq (p-1)m^{p-2}|x-y|.$$

Preuve. Soit $\phi_p(x) = |x|^{p-2}x$, $x \in \mathbb{R}$, ϕ_p est continue sur intervalle $[x, y]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et dérivable sur $]x, y[$

On appliquer le théorème des accroissements finis on a :

$$\exists c \in]x, y[, \text{ tel que } \phi_p(x) - \phi_p(y) = \phi'_p(c)(x-y)$$

(i) Si $p > 2$ et $|x|, |y| \leq M$

Alors,

$$\phi_p(x) - \phi_p(y) = \phi'_p(c)(x-y) \Rightarrow |\phi_p(x) - \phi_p(y)| = |\phi'_p(c)||x-y|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\phi_p(x) - \phi_p(y)}{x-y} \right| = |\phi'_p(c)|$$

On a

$$\phi_p(x) = \begin{cases} x^{p-1} & , x > 0 \\ (-1)^{p-2}x^{p-1} & , x < 0 \end{cases}$$

Donc,

$$\phi'_p(x) = \begin{cases} (p-1)x^{p-2} & , x > 0 \\ (-1)^{p-2}(p-1)x^{p-2} & , x < 0 \end{cases}$$

on a $|x| < M$,

Si $x > 0$,

$$\begin{aligned} |\phi'_p(x)| &= |(p-1)x^{p-2}| \\ &= (p-1)|x|^{p-2} \\ &\leq (p-1)M^{p-2} \end{aligned}$$

Si $x < 0$,

$$\begin{aligned} |\phi'_p(x)| &= |(-1)^{p-2}(p-1)x^{p-2}| \\ &= (p-1)|x|^{p-2} \\ &\leq (p-1)M^{p-2} \end{aligned}$$

Donc,

$$|\phi'_p(x)| \leq (p-1)M^{p-2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Alors, $|\phi'_p(c)| \leq (p-1)M^{p-2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{|\phi_p(x) - \phi_p(y)|}{|x - y|} &= |\phi'_p(c)| \\ &\leq (p-1)M^{p-2} \end{aligned}$$

Alors,

$$|\phi_p(x) - \phi_p(y)| \leq (p-1)M^{p-2}|x - y|.$$

(ii) Si $1 < p \leq 2$, $xy > 0$, et $|x|, |y| \geq m > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a,

$$|x| \geq m \Rightarrow \frac{1}{x^{2-p}} \leq \frac{1}{m^{2-p}}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ on a,

$$\begin{aligned} |\phi'_p(x)| &\leq (p-1)|x|^{p-2} \\ &= \frac{p-1}{x^{2-p}} \\ &\leq \frac{p-1}{m^{2-p}} \\ &= (p-1)m^{p-2} \end{aligned}$$

Donc, $|\phi'_p(c)| \leq (p-1)m^{p-2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{|\phi_p(x) - \phi_p(y)|}{|x - y|} &= |\phi'_p(c)| \\ &\leq (p-1)m^{p-2} \end{aligned}$$

Alors,

$$|\phi_p(x) - \phi_p(y)| \leq (p-1)m^{p-2}|x - y|.$$

□

3.2 Existence et unicité de la solution utilisant le principe de contraction de Banach

On considère les hypothèses suivantes :

(H1) Il existe une fonction continue positive w telle que

$$|f(t, x(t))| \leq w(t), \quad (t, x) \in [1, e] \times \mathbb{R}$$

(H2) Il existe une constante positive k telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|, \quad \forall t \in [1, e]$$

(H3) Il existe une fonction continue positive Υ telle que

$$|f(t, x(t))| \geq \Upsilon(t), \quad (t, x) \in [1, e] \times \mathbb{R}$$

Théorème 3.1. *Supposons que $1 < p \leq 2$. On suppose que les hypothèses (H1)-(H2) sont vérifiées. Si*

$$k < \frac{1 - \lambda(e - 1)}{N}$$

avec

$$N = \frac{(q - 1)M^{q-2}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{(q - 1)M^{q-2}}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}$$

où

$$M = \frac{\|w\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

Alors, le problème (3.1) possède une solution unique .

Preuve. On transforme le problème (3.1) a un problème du point fixe, dont les solutions du problème (3.1) sont identifiées à des points fixes de l'opérateur T qui est défini par :

$$\begin{aligned} Tx(t) = & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\ & - \ln t \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. - \lambda \int_1^e x(s) ds \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

En appliquant le principe de contraction de Banach, on va montrer que T est une contraction.

Par condition (H1), nous avons que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{|f(\tau, x(\tau))|}{\tau} d\tau \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{w(t)}{\tau} d\tau \\
 &\leq \frac{\|w\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} \\
 &\leq \frac{\|w\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln s)^\alpha \\
 &\leq \frac{\|w\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} = M
 \end{aligned}$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\
 &\quad - \frac{\ln t}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \lambda \ln t \int_1^e x(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\
 &\quad \left. + \frac{\ln t}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} - \lambda \ln t \int_1^e y(s) ds \right|
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \left[\phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right] \frac{ds}{s} \right. \\
 &\quad - \frac{\ln t}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \left[\phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right] \frac{ds}{s} + \lambda \ln t \int_1^e x(s) - y(s) ds \right|
 \end{aligned}$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
 |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| \frac{ds}{s} + \lambda \int_1^e |x(s) - y(s)| ds
 \end{aligned}$$

Par le Lemme 3.1 et le fait que $1 < p \leq 2 \Rightarrow q > 2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} (q-1)M^{q-2} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} (q-1)M^{q-2} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right| \frac{ds}{s} + \lambda \int_1^e |x(s) - y(s)| ds \\
 &\leq \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| \frac{d\tau}{\tau} \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| \frac{d\tau}{\tau} \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \lambda(e-1)\|x - y\|_\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{k(q-1)M^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau}\right)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{k(q-1)M^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s}\right)^{\beta-1} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau}\right)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} \frac{ds}{s} \\
&\quad + \lambda(e-1)\|x-y\|_\infty \\
&\leq \frac{k(q-1)M^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} (\ln s)^\alpha \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{k(q-1)M^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s}\right)^{\beta-1} (\ln s)^\alpha \frac{ds}{s} \\
&\quad + \lambda(e-1)\|x-y\|_\infty \\
&\leq \frac{k(q-1)M^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (\ln t)^{\alpha+\beta} + \frac{k(q-1)M^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \\
&\quad + \lambda(e-1)\|x-y\|_\infty \\
&\leq \frac{k(q-1)M^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{k(q-1)M^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \\
&\quad + \lambda(e-1)\|x-y\|_\infty \\
&\leq \left[\frac{k(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{k(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} + \lambda(e-1) \right] \|x-y\|_\infty \\
&\leq [kN + \lambda(e-1)] \|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

Puisque nous avons $k < \frac{1-\lambda(e-1)}{N}$, donc T est une contraction. En utilisant le principe de contraction de Banach, alors T admet un point fixe unique, ce qui implique que de problème (3.1) admet une seule solution dans $C[1, e]$. $\square$

Théorème 3.2. Supposons que $p > 2$. On suppose que les hypothèses (H2)-(H3) sont vérifiées.

Si

$$k < \frac{1 - \lambda(e-1)}{M^*}$$

avec

$$M^* = \frac{(q-1)m^{q-2}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{(q-1)m^{q-2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}$$

où

$$m = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Alors, le problème (3.1) possède une solution unique.

Preuve. Clairement, les points fixes de l'opérateur T sont des solutions du problème (2.2).

En appliquant le principe de contraction de Banach, on va montrer que T définie par (3.4) est une contraction.

Par la condition (H3), on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{\Upsilon(\tau)}{\tau} d\tau \\
 &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{C}{\tau} d\tau \\
 &\geq \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} = m.
 \end{aligned}$$

tel que $C = \min \Upsilon(\tau)$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [1, e]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \left[\phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right] \frac{ds}{s} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\ln t}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \left[\phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right] \frac{ds}{s} + \lambda \ln t \int_1^e x(s) - y(s) ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| \frac{ds}{s} + \lambda \int_1^e |x(s) - y(s)| ds
 \end{aligned}$$

Par le Lemme 3.1 et le fait que $p > 2 \Rightarrow 1 < q \leq 2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} (q-1)m^{q-2} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right| \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} (q-1)m^{q-2} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, y(\tau))}{\tau} d\tau \right| \frac{ds}{s} + \lambda \int_1^e |x(s) - y(s)| ds \\
&\leq \frac{(q-1)m^{q-2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| \frac{d\tau}{\tau} \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{(q-1)m^{q-2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| \frac{d\tau}{\tau} \frac{ds}{s} \\
&\quad + \lambda(e-1)\|x - y\|_\infty \\
&\leq \frac{k(q-1)m^{q-2}\|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{k(q-1)m^{q-2}\|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} \frac{ds}{s} \\
&\quad + \lambda(e-1)\|x - y\|_\infty \\
&\leq \frac{k(q-1)m^{q-2}\|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} (\ln s)^\alpha \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{k(q-1)m^{q-2}\|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} (\ln s)^\alpha \frac{ds}{s} \\
&\quad + \lambda(e-1)\|x - y\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{k(q-1)m^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\ln t)^{\alpha+\beta} + \frac{k(q-1)m^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \\
&\quad + \lambda(e-1)\|x-y\|_\infty \\
&\leq \frac{k(q-1)m^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{k(q-1)m^{q-2}\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \\
&\quad + \lambda(e-1)\|x-y\|_\infty \\
&\leq \left[\frac{k(q-1)m^{q-2}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{k(q-1)m^{q-2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} + \lambda(e-1) \right] \|x-y\|_\infty \\
&\leq [kM^* + \lambda(e-1)] \|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

Puisque nous avons $k < \frac{1-\lambda(e-1)}{M^*}$, donc T est une contraction. En utilisant le principe de contraction de Banach, alors T admet un point fixe unique, ce qui implique que le problème (3.1) admet une seule solution dans $C[1, e]$. $\square$

3.3 Existence de la solution via le théorème de Schaefer

On considère les hypothèses suivantes :

(H4) La fonction $f : [1, e] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(H5) Il existe des fonctions positives $a(t), b(t) \in C[1, e]$ telles que

$$|f(t, x(t))| \leq a(t) + b(t)|x(t)|^{p-1}, \quad \forall t \in [1, e], \quad x \in \mathbb{R}.$$

(H6) L'inégalité suivante est vérifiée

$$\max\{2^{q-1}, 1\} \|b\|_\infty^{q-1} L + \lambda(e-1) < 1$$

Théorème 3.3. *On suppose que les hypothèses (H4)-(H5)-(H6) sont vérifiées. Alors, le problème (3.1) admet au moins une solution.*

Preuve. Clairment, les points fixes de l'opérateur T sont des solutions du problème (3.1). Soit

$$K > \frac{\max\{2^{q-1}, 1\} L \|a\|_\infty^{q-1}}{1 - \lambda(e-1) - \max\{2^{q-1}, 1\} L \|b\|_\infty^{q-1}}$$

avec

$$L = \frac{1}{(\Gamma(\alpha+1))^{q-1}} \left[\frac{\Gamma(\alpha(q-1)+1)}{\Gamma(\beta+\alpha(q-1)+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right]$$

et considérons

$$B_K = \{x \in C[0, 1], \|x\| \leq K\}.$$

où B_K est un sous-ensemble fermé, borné et convexe.

Nous allons montrer que T satisfait les hypothèses du théorème de point fixe de Schaefer. La preuve sera donnée en quatre étapes :

Étape 1 : Nous montrons que T est continue

Soit $\{x_n\}$ une suite qui converge vers x dans $C[1, e]$, pour tout $t \in [1, e]$, on a

$$\begin{aligned}
 |(Tx_n)(t) - (Tx)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x_n(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x_n(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| \frac{ds}{s} + \lambda \int_1^e |x_n(s) - x(s)| ds \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x_n(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| ds \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x_n(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right. \\
 &\quad \left. - \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| ds + \lambda \int_1^e |x_n(s) - x(s)| ds
 \end{aligned}$$

à partir de la continuité de f , ϕ_q et par théorème de la convergence dominée, on a

$$\|T(x_n) - T(x)\|_\infty \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Donc, T est continue.

Étape 2 : Nous montrons que $T(B_K) \subset B_K$.

En effet, à partir de (H5), alors pour $x \in B_K$ et pour chaque $t \in [1, e]$, nous avons

$$\begin{aligned}
 |Tx(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\
 &\quad \left. - \ln t \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \lambda \int_1^e x(s) ds \right] \right| \\
 |Tx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \lambda \int_1^e |x(s)| ds. \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{a(\tau) + b(\tau)|x(\tau)|^{p-1}}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{a(\tau) + b(\tau)|x(\tau)|^{p-1}}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \lambda \int_1^e |x(s)| ds. \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1}}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1}}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\
 &\quad + \lambda(e-1)\|x\|_\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty K^{p-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} \right) \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty K^{p-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} \right) \frac{ds}{s} \\
&\quad + \lambda K(e-1). \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty K^{p-1}}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln s)^\alpha \right) \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty K^{p-1}}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln s)^\alpha \right) \frac{ds}{s} \\
&\quad + \lambda K(e-1). \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \left(\frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty K^{p-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^{q-1} (\ln s)^{\alpha(q-1)} \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \left(\frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty K^{p-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^{q-1} (\ln s)^{\alpha(q-1)} \frac{ds}{s} \\
&\quad + \lambda(e-1)K. \\
&\leq \frac{(\|a\|_\infty + \|b\|_\infty K^{p-1})^{q-1}}{(\Gamma(\alpha+1))^{q-1}} \left[I^\beta (\ln t)^{\alpha(q-1)} + I^\beta (\ln e)^{\alpha(q-1)} \right] + \lambda K(e-1). \\
&\leq \frac{(\|a\|_\infty + \|b\|_\infty K^{p-1})^{q-1}}{(\Gamma(\alpha+1))^{q-1}} \left[\frac{\Gamma(\alpha(q-1)+1)}{\Gamma(\beta+\alpha(q-1)+1)} (\ln t)^{\alpha(q-1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right] + \lambda(e-1)K. \\
&\leq \frac{(\|a\|_\infty + \|b\|_\infty K^{p-1})^{q-1}}{(\Gamma(\alpha+1))^{q-1}} \left[\frac{\Gamma(\alpha(q-1)+1)}{\Gamma(\beta+\alpha(q-1)+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right] + \lambda(e-1)K. \\
&= (\|a\|_\infty + \|b\|_\infty K^{p-1})^{q-1} L + \lambda(e-1)K. \\
&\leq \max\{2^{q-1}, 1\} (\|a\|_\infty^{q-1} + \|b\|_\infty^{q-1} K) L + \lambda(e-1)K. \\
&\leq K
\end{aligned}$$

Alors, $T(B_K) \subset B_K$.

Étape 3 : Nous montrons que $T(B_K)$ est équicontinu.

D'après l'Étape 2, nous avons $T(B_K) \subset B_K$. Ainsi, pour chaque $x \in B_K$, nous avons $\|N(x)\|_\infty \leq K$,

ce qui signifie que $T(B_K)$ est bornée. Ensuite, selon la condition (H5) il existe R tel que :

$$|I^\alpha(f(t, u(t)))| \leq R$$

Pour l'équicontinuité de $T(B_K)$, soit $t_1, t_2 \in [1, e]$, $t_1 < t_2$ et $x \in B_K$, on a

$$\begin{aligned} |Tx(t_2) - Tx(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^{t_2} \left(\ln \frac{t_2}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\ &\quad - \ln t_2 \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\ &\quad \left. - \lambda \int_1^e x(s) ds \right] - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^{t_1} \left(\ln \frac{t_1}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\ &\quad + \ln t_1 \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\ &\quad \left. - \lambda \int_1^e x(s) ds \right] \Big| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^{t_1} \left[\left(\ln \frac{t_2}{s} \right)^{\beta-1} - \left(\ln \frac{t_1}{s} \right)^{\beta-1} \right] \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\ln \frac{t_2}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\ &\quad - [\ln t_2 - \ln t_1] \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\ &\quad \left. - \lambda \int_1^e x(s) ds \right] \Big| \\ &\leq \frac{R^{q-1}}{\Gamma(\beta)} \int_1^{t_1} \left[\left(\ln \frac{t_2}{s} \right)^{\beta-1} - \left(\ln \frac{t_1}{s} \right)^{\beta-1} \right] \frac{ds}{s} + \frac{R^{q-1}}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\ln \frac{t_2}{s} \right)^{\beta-1} \frac{ds}{s} \\ &\quad + (\ln t_2 - \ln t_1) \left[\frac{R^{q-1}}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \frac{ds}{s} + \lambda \int_1^e |x(s)| ds \right] \\ &\leq \frac{R^{q-1}}{\Gamma(\beta+1)} [(\ln t_2)^\beta - (\ln t_1)^\beta] + (\ln t_2 - \ln t_1) \left[\frac{R^{q-1}}{\Gamma(\beta+1)} + \lambda K(e-1) \right]. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\|Tx(t_2) - Tx(t_1)\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $t_1 \rightarrow t_2$. En conséquence de l'Étape 1 à l'Étape 3, conjointement avec le théorème d'Arzelà-Ascoli, nous pouvons conclure que T est continue et

complètement continue.

Étape 4 : Il reste maintenant à montrer que l'ensemble

$$\Lambda = \{x \in C([1, e]) : x = \rho T(x) \text{ pour certains } 0 < \rho < 1\}$$

est borné.

Pour un tel $x \in \Lambda$, donc, pour chaque $t \in [1, e]$, on a

$$\begin{aligned} x(t) = & \rho \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\ & - \ln t \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. \left. - \lambda \int_1^e x(s) ds \right] \right] \end{aligned}$$

Soit $t \in [1, e]$, pour $\rho \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} |x(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| \frac{ds}{s} \\ & + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \left| \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, x(\tau))}{\tau} d\tau \right) \right| \frac{ds}{s} \\ & + \lambda \int_1^e |x(s)| ds. \\ \leq & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1}}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\ & + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^s \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1}}{\tau} d\tau \right) \frac{ds}{s} \\ & + \lambda(e-1)\|x\|_\infty. \\ \leq & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln s)^\alpha \right) \frac{ds}{s} \\ & + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \phi_q \left(\frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(\alpha+1)} (\ln s)^\alpha \right) \frac{ds}{s} \\ & + \lambda(e-1)\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} \left(\frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^{q-1} (\ln s)^{\alpha(q-1)} \frac{ds}{s} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\ln \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \left(\frac{\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^{q-1} (\ln s)^{\alpha(q-1)} \frac{ds}{s} \\
&\quad + \lambda(e-1)\|x\|_\infty. \\
&\leq \frac{(\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})^{q-1}}{(\Gamma(\alpha+1))^{q-1}} \left[\frac{\Gamma(\alpha(q-1)+1)}{\Gamma(\beta+\alpha(q-1)+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right] + \lambda(e-1)\|x\|_\infty. \\
&= (\|a\|_\infty + \|b\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1})^{q-1} L + \lambda(e-1)\|x\|_\infty. \\
&\leq \max\{2^{q-1}, 1\} (\|a\|_\infty^{q-1} + \|b\|_\infty^{q-1} \|x\|_\infty) L + \lambda(e-1)\|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Depuis (H6), on peut voir qu'il existe une constante $P^* > 0$ telle que

$$\|x\|_\infty < P^*$$

Cela montre que l'ensemble Λ est borné. En conséquence du théorème de point fixe de Schaefer, on déduit que T admet un point fixe qui est la solution du problème (3.1). $\square$

3.4 Exemples

Dans cette section, on présente quelques exemples pour illustrer nos résultats.

Exemple 1

Considérons le problème de valeur limite suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}} \left(\varphi_{\frac{3}{2}}(D^{\frac{3}{2}}x(t)) \right) = f(t, x(t)), & 1 < t < e, \\ x(1) = 0, \quad D^{\frac{3}{2}}x(1) = 0, \quad x(e) = \frac{1}{4} \int_1^e x(s) ds, \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $p = \frac{3}{2}$, $q = 3$, $\lambda = \frac{1}{4}$ et

$$f(t, x(t)) = \frac{1}{t^2 + 4} \left(\cos x + \frac{1}{4} \right), \quad \forall t \in [1, e], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Clairement, la fonction f est continue.

Il existe une fonction $w(t) = \frac{5}{4(t^2+4)} \geq 0$ pour tout $t \in [1, e]$, telle que

$$|f(t, x(t))| = \left| \frac{1}{t^2 + 4} \left(\cos x + \frac{1}{4} \right) \right|$$

$$\leq \frac{5}{4(t^2 + 4)}$$

Pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [1, e]$, nous avons

$$|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq \frac{1}{4}|x - y|$$

Ainsi, l'hypothèse (H2) est satisfaite avec $k = \frac{1}{4}$. De plus,

$$\frac{1 - \lambda(e - 1)}{N} = \frac{1 - \frac{1}{4}(e - 1)}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \frac{8}{3\pi\sqrt{\pi}}} \simeq 0,7496 > 0,25$$

Par conséquent, selon la conclusion du Théorème (3.1), il s'ensuit que le problème (3.5) admet une solution unique définie sur $[1, e]$.

Exemple 2

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{4}} \left(\varphi_2(D^{\frac{7}{4}}x(t)) \right) = \arctan(1 + t) + \frac{1}{100}e^{-t^2}x^4(t), & 1 < t < e, \\ x(1) = 0, \quad D^{\frac{7}{4}}x(1) = 0, \quad x(e) = \frac{1}{5} \int_1^e x(s) ds, \end{cases} \quad (3.6)$$

Ici $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{7}{4}$, $\lambda = \frac{1}{5}$, $p = q = 2$

Avec

$$f(t, x(t)) = \arctan(1 + t) + \frac{1}{100}e^{-t^2}x^4(t)$$

Clairement, la fonction f est continue. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [1, e]$, on a

$$|f(t, x(t))| \leq \frac{\pi}{2} + \frac{|x|^4}{100e}$$

Ainsi, l'hypothèse (H5) est satisfaite avec $a(t) = \frac{\pi}{2}$, $b(t) = \frac{1}{100e}$.

Ensuite, $\|a\|_{\infty} = \frac{\pi}{2}$ et $\|b\|_{\infty} = \frac{1}{100e}$ et

$$\max\{2^{q-1}, 1\} \|b\|_{\infty}^{q-1} L + \lambda(e - 1) \simeq 0.3511 < 1.$$

tel que $L \simeq 1,0061$.

et

$$B_K = \{x \in C[0, 1], \|x\| \leq K\}.$$

est un ensemble fermé, borné et convexe. Avec

$$K > \frac{\max\{2^{q-1}, 1\} L \|a\|_{\infty}^{q-1}}{1 - \lambda(e - 1) - \max\{2^{q-1}, 1\} L \|b\|_{\infty}^{q-1}} \simeq 9.0035$$

Par conséquent, selon la conclusion du Théorème (3.3), il s'ensuit que le problème (3.6) possède au moins une solution définie sur $[1, e]$.

Conclusion et Perspective

Nous avons étudié l'existence et l'unicité de certaines solutions pour des problèmes aux limites d'équations différentielles fractionnaires de type Langevin et de p -Laplacien avec la dérivation de Caputo-Hadamard. Ces résultats ont été obtenus en utilisant les théorèmes de point fixe (Banach, Schauder, Schaefer). Ce travail généralise et améliore des résultats précédents.

Pour élargir et généraliser les résultats de ce mémoire, il serait utile d'examiner les inclusions différentielles et d'étendre les problèmes étudiés dans les espaces de Banach en utilisant diverses techniques et théorèmes du point fixe, afin de déterminer les conditions optimales pour obtenir les meilleurs résultats.

Bibliographie

- [1] R. P. Agarwal, B. Ahmad, A. Alsaedi, Fractional-order differential equations with anti-periodic boundary conditions : a survey, *Bound. Value Probl.*, 2017 (2017), 1–27.
- [2] Y. Arioua, B. Basti and N. Benhamidouche : Initial value problem for nonlinear implicit fractional differential equations with Katugampola derivative. *Appl. Math. E-Notes* 19, 397–412 (2019).
- [3] P. Assari F. Asadi-Mehregan, Local radial basis function scheme for solving a class of fractional integro-differential equations based on the use of mixed integral equations, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 99 (2019), 1–28.
- [4] P. Assari, S. Cuomo, The numerical solution of fractional differential equations using the Volterra integral equation method based on thin plate splines, *Engineering with Computers*, 35 (2019), 1391–1408.
- [5] A. Bashir, and V. Otero-Espinar. Existence of solutions for fractional differential inclusions with antiperiodic boundary conditions. *Boundary Value Problems* 2009.
- [6] M. Benchohra, S. Hamani and S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order, *Surveys in Mathematics and its Applications*, 3 (2008), 1–12.
- [7] M. Bengrine and Z. Dahmani : Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations, *J. Open Problems Compt. Math.* , (2012).
- [8] W. Benhamida, J. R. Graef, S. Hamani, Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations with Integral and Anti-Periodic Conditions in a Banach Space, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 4 (2018), 65–70.
- [9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science and Business Media(2010).
- [10] T. Chen and W. Liu, An anti-periodic boundary value problem for the fractional differential equations with a p-Laplacian operator, *Appl. Math. Lett.*, 25 (2012), 1671–1675.
- [11] D. Chergui, T. E. Oussaeif, M. Ahcene, Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations depending on lower-order derivative with non-separated type integral boundary conditions, *AIMS Mathematics*, 4 (2019), 112–133.
- [12] F. Dugundji and A. Granas : *Fixed Point Theory*, Springer, New York, (2003). 12, 13.

BIBLIOGRAPHIE

- [13] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger et F. G. Tricomi, Higher Transcendental functions, vol. III, Krieger Pub, Melbourne, Florida, 1981.
- [14] N. Ford, M. Morgado, Fractional boundary value problems : Analysis and numerical methods, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 14 (2011), 554–567.
- [15] F. Golse, *Analyse réelle*, Springer, Paris, 2017.
- [16] C. Goodrich, Existence and uniqueness of solutions to a fractional differential equation with nonlocal conditions, *Comput. Math. Appl.*, 61 (2011), 191–202.
- [17] M. H. Heydari, Z. Avazzadeh, M. R. Mahmoudi, Chebyshev cardinal wavelets for nonlinear stochastic differential equations driven with variable-order fractional Brownian motion, *Chaos, Solitons and Fractals*, 124 (2019), 105–124.
- [18] M. H. Heydari, M. R. Mahmoudi, A. Shakiba, et al. Chebyshev cardinal wavelets and their application in solving nonlinear stochastic differential equations with fractional Brownian motion, *Commun Nonlinear Sci.*, 64 (2018), 98–121.
- [19] F. Jarad, D. Baleanu and T. Abdeljawad, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, *Adv. Differ. Equ.* 2012, No.1 (2012), 1–8.
- [20] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, 2006.
- [21] M. Marel, *La topologie des espaces métriques*, Elsevier Science publishers B.V. 1988.
- [22] M. MATAR, Existence of solution for fractional neutral hybrid differential equations with finite delay. (2020).
- [23] M. MATAR, Boundary value problem for fractional integro-differential equations with nonlocal conditions. *Int. J. Open Problems Comput. Math.* 2010, vol. 3, no 4, p. 481–489.
- [24] M. MATAR, Existence of Integral and Anti-periodic Boundary Valued Problem of Fractional Order $0 < \alpha \leq 3$, *Bull. Malays Math. Sci. Soc.* 40 (2017), p. 959–973.
- [25] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, John Wiley, New York, 1993.
- [26] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [27] I. Podlubny, I. Petras, B. M. Vinagre, et al. ' Analogue realizations of fractional-order controllers, *Nonlinear Dynam.*, 29 (2002), 281–296.
- [28] R. Roohi, M. H. Heydari, M. Aslami, et al. A comprehensive numerical study of space-time fractional bioheat equation using fractional-order Legendre functions, *The European Physical Journal Plus*, 133 (2018), 412.
- [29] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
- [30] H. Schaefer, Some theorems on continuous mappings of convex sets. *Transactions of the American Mathematical Society.* 93 (3) : 526–541 (1965).

BIBLIOGRAPHIE

- [31] D.R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [32] K. Yosida, Functional Analysis, 6th edn. Springer-Verlag, Berlin, 1980
- [33] H. E. Zhang, Nonlocal boundary value problems of fractional order at resonance with integral conditions, Adv. Differ. Equ-NY, 2017 (2017), 326.

Abstract

In this memory, we have studied some boundary value problems associated with fractional differential equations in the sense of Caputo-Hadamard.

We began by examining a class of fractional differential equations of the Langevin type. In this context, we demonstrated certain results concerning the existence and uniqueness of solutions. Next, we focused on the fractional p -Laplacian boundary value problems, where we established the results on the existence and uniqueness of solutions. The existence and uniqueness of the solutions to the previous problems were demonstrated by applying fixed-point theorems (Banach, Schauder, Schaefer). Additionally, we have included two illustrative examples for each of the addressed problems to demonstrate the validity of the conditions and to justify the effectiveness of the obtained results.

Keywords : Fractional differential equations, existence of solutions, Caputo-Hadamard fractional derivative, fractional integral, fixed point.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques problèmes aux limites associés aux équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard.

Nous avons commencé par examiner une classe d'équations différentielles fractionnaires de type Langevin. Dans ce cadre, nous avons démontré certains résultats concernant l'existence et l'unicité des solutions. Ensuite, nous sommes penchés sur les problèmes aux limites différentielles fractionnaires p -Laplacien, où nous avons établi les résultats sur l'existence et l'unicité des solutions. L'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents ont été démontrées par l'application des théorèmes de point fixe (Banach, Schauder, Schaefer). De plus, nous avons inclus deux exemples illustratifs pour chacun des problèmes abordés afin de démontrer la validité des conditions et de justifier l'efficacité des résultats obtenus.

Mots-Clés : Équations différentielles fractionnaires, existence de solutions, dérivée fractionnaire de type Caputo-Hadamard, intégrale fractionnaire, point fixe.

الملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة بعض مسائل الحدية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية الكسرية بمعنى كابوتو-هامارد.

بدأنا بدراسة فئة من المعادلات التفاضلية الكسرية من نوع لانجفين. في هذا السياق، أثبتنا بعض النتائج المتعلقة بوجود و وحدانية الحلول. ثم تعمقنا في مشاكل الحدية للمعادلات التفاضلية الكسرية p -لابلاسيان، حيث قمنا بتأكيد نتائج حول وجود و وحدانية الحلول. كما تم إثبات وجود و وحدانية الحلول للمشاكل السابقة عن طريق تطبيق مبرهنات النقطة الثابتة (باناخ، شاور، شيفر). بالإضافة إلى ذلك، قمنا بتضمين مثالين توضيحيين لكل من المشاكل المناقشة لإثبات صحة الشروط وتبرير فعالية النتائج المحصل عليها.

الكلمات الرئيسية: معادلات تفاضلية كسرية، وجود الحلول، مشتق كسري من نوع كابوتو-هامارد، تكامل كسري، نقطة ثابتة.

استمارة مذكرة

كلية: العلوم الدقيقة اللقب و الاسم: خزان فاطمة / بنين مريم تاريخ المناقشة : 2024/06/06
المشرف: السعيد بلول
عنوان المذكرة: Résolution des quelques problèmes aux limites d'équations différentielles de type Caputo-Hadamard via la théorie de point fixe
طبيعة البحث: ماستر / دكتوراه تخصص: رياضيات أساسية وتطبيقية
الملخص: في هذه المذكرة، قمنا بدراسة بعض مسائل الحدية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية الكسرية بمعنى كابوتو هذا ماردا. بدأنا بدراسة فئة من المعادلات التفاضلية الكسرية من نوع لا تجفين في هذا السياق، أثبتنا بعض النتائج المتعلقة بوجود و وحدانية الحلول. ثم تعمقنا في مشاكل الحدية للمعادلات التفاضلية الكسرية (الابلاسيان، حيث قومنا بتأكيد نتائج حول وجود و وحدانية الحلول، كما تم إثبات وجود و وحدانية الحلول للمشاكل السابقة عن طريق تطبيق مبرهنات النقطة الثابتة (بالاخ، شودر، شيفر)، بالإضافة إلى ذلك، قمنا بتضمين مثالين توضيحيين لكل من المشاكل المناقشة لإثبات صحة الشروط وتبرير فعالية النتائج المحصل عليها.
Résumé: فرنسية أو انجليزية <u>In this memory, we have studied some boundary value problems associated with fractional differential equations in the sense of Caputo-Hadamard.</u> <u>We began by examining a class of fractional differential equations of the Langevin type.</u> <u>In this context, we demonstrated certain results concerning the existence and uniqueness of solutions. Next, we focused on the fractional p-Laplacian boundary value problems, where we established the results on the existence and uniqueness of solutions. The existence and uniqueness of the solutions to the previous problems were demonstrated by applying fixed-point theorems (Banach, Schauder, Schaefer). Additionally, we have included two illustrative examples for each of the addressed problems to demonstrate the</u>

validity of the conditions and to justify the effectiveness of the obtained results.

الكلمات المفتاحية:

عربية: عادات تفاضلية كسرية، وجود الحلول مشتق كسري من نوع كابوتو هادا مارد، تكامل كسري، نقطة ثابتة.

فرنسية او إنجليزية: Fractional differential equations, existence of solutions, Caputo-Hadamard

.fractional de rivative, fractional integral, fixed point

* ملاحظة: يجب على الطالب ملئ جميع الحقول