

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE N° d'ordre :

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

THÈME

Fonction de Lyapunov et stabilité

Présenté par: Nadjat Hala

Nora Kerchou

Soutenu publiquement, le devant le jury composé de :

Nadjat DOUDI	MAA	Rapporteur.	Univ. d'El Oued
Bakhar Meneceur	MAA	Président.	Univ. d'El Oued
Gida Lamine	MAA	Examineur.	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2015-2016

Remerciements

Nous remercions dieu le tout puissant qui nous a donne l'effort physique et mental l'accomplir de ce travail.

Nous remercions les chers parents qui nous ont donné la volonté pour la réussite dans notre vie.

Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur "DOUDI NADJET ", à l'université d' El-Oued, a qui nous voudrons exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.

Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, pour leurs aides inestimables, qui nous ont donné les bases de la science. Ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'El-oued .

Nous tenons a remercier tous les étudiants de la promotion 2015/2016 de Math de l'université d'El-oued .

Notations générales

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réelles.
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réelles positifs.
$\mathbb{N}$	Les entiers naturels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexe
f	Application.
$C^n([a, b])$	Espace des fonctions continument dérivables d'ordre n sur $[a, b]$.
$E(x)$	La partie exacte.
$\int_a^b$	L'intégration de a à b .
$\text{Re}(x)$	La partie réelle de x .
$\dot{x}$	La dérivée par rapport à t .
H	espace de Hilbert.
$\ \cdot\ $	La norme.
x_e	Point d'équilibre.
$(\cdot, \cdot)$	Produit scalaire.
$C^1([0; +1[; H)$	Les fonction contuiment dérivable de $[0; +1[$ à H .
$\mathcal{L}(\cdot)$	les forme linéaires.
$x _J$	La restriction de x sur J .
A	La dérivée d'ordre n par rapport à x .
$(S(t))_{t \geq 0}$	Semi-groupe.
$D(A)$	Domaine de A .
$\partial\Omega$	La frontière de Ω .

Table des matières

Notations générales	ii
Introduction générale	1
1 Préliminaires	2
1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz	2
1.1.1 Théorèmes d'existence et d'unicité	2
1.2 Notions de base sur la stabilité	3
1.2.1 Point d'équilibre et stabilité	3
1.2.2 Fonctions définies positives	4
1.3 Le principe d'invariance de LaSalle	5
1.4 Semi-groupe associés à des opérateurs non bornés et théorème de Hille-Yosida	5
1.4.1 Semi-groupe fortement continue	5
1.4.2 Opérateur maximal monotone	6
1.4.3 Le théorème de Hille-Yosida	7
1.4.4 Cas d'un espace de Hilbert et d'un opérateur maximal monotone . . .	8
1.4.5 Théorème de lax-Milgram	8
1.5 Quelques inégalités utiles	9
1.5.1 Inégalité de Poincarée	9
1.5.2 Formule de Green	10
1.5.3 Inégalité de Young	10

2	Fonction de Lyapunov et stabilité	11
2.1	Fonctions de Lyapunov	11
2.1.1	Définition de la fonctions de Lyapunov	11
2.2	Théorème de stabilité locale	11
2.3	Théorème de stabilité globale	14
2.4	Stabilité exponentielle	19
2.5	Stabilité en temps fini	21
3	Etude de la Stabilité exponentielle pour un problème des ondes	23
3.1	Position du problème	23
3.2	Etude d'existence et d'unicité	24
3.3	Stabilité exponentielle	26
3.3.1	Estimation du terme d'énergie	26
3.4	Stabilité exponentielle	28
3.4.1	Preuve du théorème	30
3.5	Conclusion générale	31

Introduction générale

Aujourd'hui, la stabilité asymptotique et exponentielle des équations différentielles ordinaire (EDO) est bien maîtrisée. Au 19^{ème} siècle, le célèbre Alexander Mikhailovitch Lyapunov a été le premier qui a avoir formulé mathématiquement cette idée. Lyapunov a montré que l'existence de certaines fonctions, définie positive, prouvait la stabilité pour les EDO continues. Pour permettre d'étudier analytiquement le problème de stabilité d'un point d'équilibre, Lyapunov a généralisé la notion d'énergie en regardant l'évolution de cette dernière.

La méthode de Lyapunov, consiste à étudier la stabilité du système sans connaître la solution explicite du système étudié. En effet, la procédure de base est de générer une fonction "de type énergie" dite fonction de Lyapunov pour le système dynamique et d'en examiner sa dérivée temporelle le long de ces trajectoire. Ce qui traduit physiquement l'idée que si l'énergie totale du système est dissipée de manière continue alors le système devra rejoindre un point d'équilibre dans un temps infini (stabilité asymptotique) ou dans un temps fini (stabilité en temps fini). En d'autre termes, le système est stable si son énergie diminue et elle est minimale à l'équilibre. Plus tard en 1963 J. Kurzweil a démontré l'équivalence entre l'existence de ces fonctions, appelées fonctions de Lyapunov, et la stabilité pour les EDO continues.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les théorèmes d'existence et d'unicité liés aux systèmes différentiel comme théorème de Cauchy-Lipshitz et théorème de Hille-Yosida, avec quelques notions générales et outils mathématiques qui permettent de distinguer la stabilité au sens de Lyapunov dans le cas asymptotique et dans le cas temps fini.

En deuxième chapitre, nous avons introduire quelques résultats théoriques de stabilité associés aux systèmes différentiel en utilisant la fonction de Lyapunov. Nous introduisons aussi quelques exemples simples pour clarifier quelques résultats.

Le troisième chapitre contient un exemple d'application du théorème de Lyapunov pour démontrer la stabilité exponentielle d'un problème des ondes avec retard. L'existence et l'unicité de la solution est démontrer en utilisant le théorème de Hille-Yosida.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques notions de base sur la stabilité des points d'équilibres pour les systèmes différentiels, avec quelques théorèmes de l'existence et l'unicité des solutions comme Cauchy-Lipschitz, théorème de Hille-Yosida et théorème de Lax-Milgram.

1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

On considère le système différentiel suivant

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \tag{1.1.1}$$

E ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le problème de Cauchy est le suivant:

On se donne un intervalle I_0 de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I_0$ et $x_0 \in E$ et on cherche toutes les solutions $x : I_0 \rightarrow E$ de (1.1.1) telles que $x(t_0) = x_0$.

Définition 1.1.1 *Une trajectoire du point mobile $(t, x(t))$ est l'ensemble des positions de ce point quand t parcourt tout l'intervalle des temps I_0 . Si $x(t)$ est une solution d'un système du type (1.1.1), alors sa trajectoire est, en chacun de ses points, tangente au champ de vecteurs associé.*

1.1.1 Théorèmes d'existence et d'unicité

Définition 1.1.2 *On dira que l'application $f : U \rightarrow E$ est localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $U \subset \mathbb{R} \times E$ si et seulement si, quelque soit $(t_0, z_0) \in U$, il existe un*

voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de (t_0, z_0) dans $\mathbb{R} \times E$, et une constante $C_0 > 0$ vérifiant

$$\forall (t, z), (t, x) \in U_0, \|f(t, z) - f(t, x)\| \leq C_0 \|z - x\|.$$

Théorème 1.1.1 Avec les notations du système différentiel (1.1.1), si f est continue sur U et localement lipschitzienne par rapport à la $\mathcal{E}^{\text{me}}$ variable sur U , quelque soit $(t_0, x_0) \in U$, il existe un intervalle ouvert I_0 contenant t_0 et une fonction $x : I_0 \subset E \rightarrow E$, telle que:

i) $x(t_0) = x_0$,

ii) x est une solution de (1.1.1),

alors, pour tout intervalle $J \subset I_0$ contenant t_0 , il n'existe qu'une seule solution de (1.1.1) passant par x_0 en t_0 . Il s'agit de $x|_J$.

1.2 Notions de base sur la stabilité

En générale on ne sait pas résoudre le système différentiel (1.1.1), alors on fait une étude qualitative de ses solutions. Cette étude commence par la recherche des points d'équilibre c'est-à-dire les points où la vitesse s'annule.

1.2.1 Point d'équilibre et stabilité

Définition 1.2.1 Le point x_e est dit point d'équilibre du système (1.1.1) si $f(x_e) = 0$ autrement dit x_e est une solution constante du système $\dot{x} = f(x(t))$.

Définition 1.2.2 L'équilibre x_e est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.1.1) on a

$$\|x(0) - x_e\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|x(t) - x_e\| < \varepsilon.$$

Stabilité asymptotique globale

Définition 1.2.3 Un point d'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable (GAS) si

a) Il est stable.

b) Toute solution $x(\cdot)$ converge vers x_e , i.e.:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$$

Stabilité asymptotique locale

Définition 1.2.4 *L'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable (LAS) si*

a) Il est stable.

b) Il existe $r > 0$ tel que: Si $\|x(0) - x_e\| < r$, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$$

Stabilité exponentielle globale

Définition 1.2.5 *L'équilibre x_e est globalement exponentiellement stable (GES) avec taux de convergence $\alpha > 0$, s'il existe $\beta > 0$ telle que toute solution $y(t)$ vérifie*

$$\|y(t) - x_e\| \leq \beta \|x(0) - x_e\| \exp(-\alpha t) \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

Stabilité exponentielle locale

Définition 1.2.6 *L'équilibre x_e est localement exponentiellement stable (LES) de taux de convergence $\alpha > 0$, s'il existe $r > 0$ et $\beta > 0$ tel que $\|x(0) - x_e\| < r$, nous avons*

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta \|x(0) - x_e\| \exp(-\alpha t) \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

1.2.2 Fonctions définies positives

Définition 1.2.7 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , V est dite définie positive si:*

i) $V(0) = 0$, et

ii) $V(u) > 0$ pour $u \in \Omega \setminus \{0\}$.

Définition 1.2.8 *V est dite définie négative, si $-V$ est définie positive.*

Définition 1.2.9 *V est dite semi-définie positive si:*

i) $V(0) = 0$, et

ii) $V(u) \geq 0$ pour tout $u \in \Omega$.

Définition 1.2.10 *V est dite semi-définie négative si $-V$ est semi-définie positive.*

1.3 Le principe d'invariance de LaSalle

Théorème 1.3.1 (*Principe d'invariance de LaSalle*) Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$; supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour le système (1.1.1) en x_0 . Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que:

1. $\dot{V} \leq 0$ sur Ω ;
2. Soient $E = \{x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0\}$ et L le plus grand ensemble invariant par f contenu dans E .

Alors, toute solution bornée commençant dans Ω tend vers l'ensemble L lorsque le temps tend vers l'infini [6].

1.4 Semi-groupe associés à des opérateurs non bornés et théorème de Hille-Yosida

Définition 1.4.1 Soit $D \subset X$ un sous espace vectoriel. Un opérateur linéaire dans X est un couple (A, D) , tel que $A : D \rightarrow X$ est une application linéaire. On dit que A est borné si $\|Au\|$ reste bornée lorsque

$$u \in \{x \in D, \|x\| \leq 1\}.$$

Dans le contraire, A est dit non borné.

1.4.1 Semi-groupe fortement continue

Définition 1.4.2 Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t \geq 0}$ de $L(X)$ est un semi-groupe fortement continue sur X lorsque les conditions suivantes sont réalisées:

- i) $\forall x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x$
- ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tout $t \geq 0$ et tout $s \geq 0$.
- iii) $S(0) = I$.

Définition 1.4.3 Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continue sur X . On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe l'opérateur non borné $(A, D(A))$ défini par

$$D(A) = \left\{ x \in X \setminus \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\}$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ pour tout } x \in X.$$

1.4.2 Opérateur maximal monotone

Définition 1.4.4 On appelle opérateur dissipatif un opérateur A dans E tel que

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0, |u - Au|_E \geq |u|_E.$$

Si, de plus, $R(I - \lambda A) = F$, c'est-à-dire

$$\forall f \in F, \exists u \in D(A) : u - \lambda Au = f$$

l'opérateur est dit m -dissipatif.

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $(., .)$. Notons $L(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H , muni de la norme

$$\|T\| = \sup \{|Tx|, x \in H \text{ et } |x| \leq 1\}$$

On a en particulier:

Proposition 1.4.1 L'opérateur $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est m -dissipatif si et seulement si

$$\forall v \in D(A), (Av, v) \leq 0.$$

Définition 1.4.5 Si $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire non-borné, A est monotone si $(-A)$ est dissipatif, c'est-à-dire

$$\forall v \in D(A), (Av, v) \geq 0.$$

A est dit maximal monotone si $(-A)$ est m -dissipatif.

Définition 1.4.6 On appelle opérateur m -accrétif un opérateur linéaire non-borné tel que:

1. $D(A) = E$,
2. L'opérateur $-A$ est m -dissipatif.

Le théorème de Hille-Yosida en propose une adaptation permettant de démontrer l'existence de solution à l'équation de la chaleur ou de l'équation des ondes.

1.4.3 Le théorème de Hille-Yosida

On s'intéresse à la résolution du problème d'évolution

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \quad \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où A est un opérateur défini sur un espace E .

Nous allons d'abord étudier le cas où l'espace $E = H$ est un espace de Hilbert et l'opérateur A un opérateur maximal monotone, puis nous allons étudier le cas où l'espace $E = X$ est un espace de Banach et l'opérateur A un opérateur non borné.

Ensuite nous affaiblirons les hypothèses et nous essaierons de mettre en évidence les remèdes nous permettant de conclure.

Proposition 1.4.2 *Soit $S(t)$ un semi-groupe de contraction sur X , et A son générateur.*

Alors A est m -dissipatif et $D(A)$ est dense.

Théorème 1.4.1 *Pour tout $x \in X$; la suite de fonction $u_\lambda(t) = S(t)x$ converge uniformément sur tout intervalle borné $[0; T]$ vers une fonction $u \in C([0; \infty[; X)$, quand $\lambda \rightarrow 0$:
Si*

on pose $S(t)x = u(t)$; pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$; on a

$$\begin{cases} S(t) \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \|S(t)\| \leq 1; t \geq 0 \\ S(0) = I \\ S(t+s) = S(t)S(s), \forall s; t \geq 0 \end{cases}$$

De plus, pour tout $x \in D(A)$; $u(t) = S(t)x$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} u \in C([0; 1[; D(A)) \cap C^1([0; \infty[; X) \\ \dot{u} = Au \quad ; t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Enfin, pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$; on a

$$S(t)Ax = AS(t)x$$

Théorème 1.4.2 (*Hille yosida - philips*)

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur X si et seulement si A est m -dissipatif de domaine dense.

1.4.4 Cas d'un espace de Hilbert et d'un opérateur maximal monotone

Théorème de Hille-Yosida

Soient H un espace de Hilbert, $f \in C^1([0; +1[; H)$ et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non borné maximal monotone, $u_0 \in D(A)$.

Théorème 1.4.3 *Le problème suivant admet une unique solution:*

$$\begin{cases} u \in C^1([0; +1[; H) \cap C^0([0; +1[; D(A)) \text{ tel que} \\ \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \quad , \forall t \geq 0 \quad , \quad u(0) = u_0 \end{cases}$$

[3].

1.4.5 Théorème de lax-Milgram

Définition 1.4.7 $\mathcal{L}(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur H , c'est -à-dire que $\mathcal{L}(\cdot)$ est linéaire de H dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que

$$\|\mathcal{L}(v)\| \leq C \|v\|$$

pour tout $v \in H$.

Définition 1.4.8 $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur H , c'est -à-dire que

$$w \rightarrow a(w, v)$$

est une forme linéaire sur H pour tout $v \in H$

$$\text{et } v \rightarrow a(w, v)$$

est une forme linéaire sur H pour tout $w \in H$.

Définition 1.4.9 $a(\cdot, \cdot)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|a(w, v)| \leq M \|w\| \|v\|$$

pour tout $w, v \in H$, $a(\cdot, \cdot)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ telque

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$$

pour tout $v \in H$. Comme nous le verrons au cours de cette sous-section, toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre. En particulier, coercivité de $a(., .)$ est essentielle.

Théorème 1.4.4 (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert réel, $\mathcal{L}(\cdot)$ une forme linéaire continue sur H , $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue sur H . alors la formulation variationnelle

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = \mathcal{L}(v).$$

admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire $\mathcal{L}$ [7].

1.5 Quelques inégalités utiles

1.5.1 Inégalité de Poincarée

Théorème 1.5.1 On suppose que Ω est un domaine ouvert et borné dans $\mathbb{R}^d$ alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 \leq C_\Omega \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2$$

c'est à dire

$$\|u\|_{0,\Omega}^2 \leq C_\Omega \|\nabla u(x)\|_{0,\Omega}^2$$

dans le cas où Ω est un ouvert et borné dans $\mathbb{R}$, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que

$$\|u\|_{0,\Omega}^2 \leq C_\Omega \|u'\|_{0,\Omega}^2$$

Corollaire 1.5.1 Si Ω est un ouvert et borné alors la semi-norme

$$|u|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_{0,\Omega}$$

devient une norme équivalente à la norme de $\|u\|_{1,\Omega}$ dans l'espace H_0^1 [2].

1.5.2 Formule de Green

La formule de Green est une généralisation de l'intégration par partie dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.5.2 *Soit Ω un ouvert borné régulier. Si u, v sont des fonction de C^1 de Ω , elles vérifient*

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i ds.$$

où $n = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$ [4].

1.5.3 Inégalité de Young

La forme plus utilisée de l'inégalité de Young est la suivante:

Théorème 1.5.3 *(Inégalité de Young). Pour $a, b > 0$ et $p, q > 1$ telque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Chapitre 2

Fonction de Lyapunov et stabilité

2.1 Fonctions de Lyapunov

2.1.1 Définition de la fonctions de Lyapunov

Soit $x_e \in E$ un point d'équilibre de (1.1.1).

Définition 2.1.1 Soient $U = \text{Vois}(x_e) \subset E$ et $L : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. L est une fonction de Lyapunov en x_e si:

1. $L(x) > L(x_e)$ pour $x \neq x_e$ dans U ,
2. Pour toute solution $x(\cdot)$, $t \mapsto L(x(t))$ décroissante i.e.

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in I_0.$$

L une fonction de Lyapunov stricte en x_e . Si de plus:

3. Pour toute solution $x(\cdot)$, $t \mapsto L(x(t))$ est strictement décroissante i.e.

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) < 0 \quad \forall t \in I_0.$$

2.2 Théorème de stabilité locale

Théorème 2.2.1 (Théorème de Lyapunov)

Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système dynamique (1.1.1), et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine. S'il existe une fonction L de classe C^1 définie positive dans un voisinage $V \subset D$, alors:

- i) Si $\dot{L}(x) \leq 0 \ \forall x \in V - \{x_e\}$, alors le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable.
- ii) Si $\dot{L}(x) < 0 \ \forall x \in V - \{x_e\}$, alors le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable.

L s'appelle une fonction de Lyapunov du système (1.1.1).

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, choisissons $r \in (0, \varepsilon]$ tel que

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\} \subset D.$$

soit $\alpha = \min_{\|x\|=r} L(x)$. Alors $\alpha > 0$. Choisissons $\beta \in (0, \alpha)$ et soit

$$\Omega_\beta = \{x \in B(r), L(x) \leq \beta\}.$$

Alors Ω_β est dans l'intérieur de $B(r)$, car dans le cas contraire, il existerait $p \in \Omega_\beta$ qui soit au même temps sur la frontière de $B(r)$. En ce point p , on aurait,

$$L(p) \geq \alpha \geq \beta$$

or, pour tout $x \in \Omega_\beta$, $L(x) \leq \beta$, ce qui constitue une contradiction.

L'ensemble Ω_β a la propriété suivante: n'importe quelle trajectoire dans Ω_β , issue de $t = 0$ reste dans Ω_β pour tout $t \geq 0$. En effet, par la deuxième hypothèse du théorème nous avons

$$\dot{L}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow L(x(t)) \leq L(x(0)) \leq \beta, \quad \forall t \geq 0.$$

Par la compacité de l'ensemble Ω_β , on conclut que le système (1.1.1) a une unique solution pour tout $t \geq 0$ dès que $x(0) \in \Omega_\beta$, comme L est continue et vérifie $L(0) = 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow L(x) \leq \beta.$$

Par suite

$$B(\delta) \subset \Omega_\beta \subset B(r)$$

et les implications suivantes sont vérifiées

$$x(0) \in B(\delta) \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B(r).$$

Par conséquent

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Ce qui signifie que le point d'équilibre $x = 0$ est stable.

Reste donc à montrer la stabilité asymptotique. Pour se faire, supposons donc

$$\dot{L}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad x \in D \tag{2.2.1}$$

et montrons que $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, c'est à dire: Pour tout $a > 0$, il existe $T = T(a) > 0$ tel que $\|x(t)\| \leq a$, pour tout $t \geq T$. Par les mêmes arguments que précédemment, on sait que pour tout $a > 0$ on peut choisir $b > 0$ tel que $\Omega_\beta \subset B(a)$.

Il suffit alors de montrer que

$$L(x(t)) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Comme $L(x(t))$ est décroissante et minorée par zéro, il vient que

$$L(x(t)) \rightarrow c \geq 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Pour montrer que $c = 0$, on supposera le contraire ($c > 0$). Par la continuité de $L(x)$, il existe $d > 0$ tel que $B(d) \subset \Omega_c$. La limite $L(x(t)) \rightarrow c > 0$ implique que la trajectoire $x(t)$ reste à l'extérieur de la boule $B(d)$ pour tout $t \geq 0$. Posons

$$-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{L}(x)$$

(γ existe car $\dot{L}$ est continue sur le compact $\{d \leq \|x\| \leq r\}$). Par l'hypothèse (2.2.1), nous avons $-\gamma < 0$. Il vient donc

$$L(x(t)) = L(x(0)) + \int_0^t \dot{L}(x(s)) ds \leq L(x(0)) - \gamma t \rightarrow -\infty, \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Cette dernière inégalité contredit l'hypothèse $c > 0$. ■

Exemple 2.2.1 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4(x_1 + x_2) - h(x_1 + x_2) \end{cases} \quad (2.2.2)$$

où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne vérifiant

$$h(0) = 0, \quad xh(x) \geq 0, \quad \forall |x| \leq 1.$$

Considérons la forme quadratique

$$L(x) = x^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

comme fonction candidate de Lyapunov. La dérivée $\dot{L}(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{L}(x) &= (4x_1 + 2x_2) \dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2) \dot{x}_2 \\ &= -2x_1^2 - 6(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)h(x_1 + x_2) \\ &\leq -2x_1^2 - 6(x_1 + x_2)^2, \quad \forall |x_1 + x_2| \leq 1 \\ &= -x^T \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} x, \quad \forall |x_1 + x_2| \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\dot{L}(x)$ est définie négative dans l'ensemble $G = \{x \in \mathbb{R}^2, |x_1 + x_2| \leq 1\}$.

La fonction L est bien une fonction de Lyapunov pour le système (2.2.2), on conclut, grâce au théorème précédent, que l'origine est localement asymptotiquement stable.

Remarque 2.2.1 *Si $\dot{L}(x) > 0 \forall x \in V - \{x_0\}$, alors le point d'équilibre $x_e = 0$ est instable.*

2.3 Théorème de stabilité globale

Nous avons vu que la stabilité locale signifie la stabilité pour toute condition initiale x_0 dans un voisinage V du point d'équilibre, et la stabilité globale celle pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La question est de savoir s'il suffit de remplacer V par $\mathbb{R}^n$ et de vérifier les hypothèses du théorème de Lyapunov afin de conclure sur la stabilité globale du système. La réponse est

non, par conséquent il faut une condition supplémentaire: Pour que l'on puisse garantir que le théorème de Lyapunov conclut sur la stabilité globale d'un système, il faut d'une part que toutes les hypothèses de ce théorème soient satisfaites, et d'autre part il faut également que la condition de bornitude radiale existe, c'est-à-dire Théorèmes de stabilité globale

Définition 2.3.1 *L'équilibre $x = 0$ est attractive si, pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe $\mu(t_0) > 0$ tel que*

$$\|x_0\| < \mu(t_0) \Rightarrow x(t_0 + t, t_0, x_0) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

L'équilibre $x = 0$ est uniformément intéressante s'il existe certain nombre $\mu > 0$ tel que

$$\|x_0\| < \mu, t_0 > 0 \Rightarrow x(t_0 + t, t_0, x_0) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Interprétation: L'attractivité signifie simplement que, à chaque temps initial $t_0 \in \mathbb{R}_+$, toute trajectoire de solution en commençant suffisamment proche de 0 approche réellement 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

Définition 2.3.2 *L'équilibre $x = 0$ est asymptotiquement stable s'il est stable et attractive.*

$x = 0$ uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et uniformément attractive.

Les lemmes suivants est la base de théorèmes de Lyapunov.

Théorème 2.3.1 *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.1.1) est stable, s'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ de classe C^1 définie positive est un constant $r > 0$ tels que*

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in B_r. \quad (2.3.1)$$

où $\dot{V}$ est évaluée du long de trajectoires de (1.1.1)

Preuve. Comme V est une fonction localement définie positive, il existe une fonction de classe K et une constante $s > 0$ tel que

$$\alpha(\|x\|) \leq V(t, x); \forall t \geq 0; \forall x \in B_s$$

pour montrer que $x = 0$ est stable, il faut montrer que pour chaque $\epsilon > 0$ et tout $t_0 \geq 0$, on peut trouver $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ telque

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|x(t; t_0; x_0)\| < \epsilon.$$

En conséquence, donnons ϵ and t_0 , soit $\epsilon_1 = \min \{\epsilon, r, s\}$ et choisir $\delta > 0$ telque

$$\sup_{\|x\| \leq \delta} V(t_0, x) =: \beta(t_0, \delta) < \alpha(\epsilon_1)$$

telque δ peut etre trouver toujours car $\alpha(\epsilon_1) > 0$ et $\beta(t_0, \delta) \rightarrow 0$ lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Maintenant, supposons que $\|x_0\| < \delta$. Alors

$$V(t_0; x_0) \leq \beta(t_0, \delta) < \alpha(\epsilon_1).$$

Mais, comme $\dot{V}(t, x) \leq 0$ pour tout $\|x\| < \delta$ (noté que $\delta \leq \epsilon_1 \leq r$)

$$V(t; x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0; x_0) < \alpha(\epsilon_1) \quad \forall t \geq t_0.$$

Maintenant, comme

$$V(t; x(t, t_0, x_0)) \geq \alpha(\|x(t, t_0, x_0)\|)$$

Alors

$$\alpha(\|x(t, t_0, x_0)\|) < \alpha(\epsilon_1) \quad \forall t \geq t_0.$$

comme α est strictement décroissante, on a

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \epsilon_1 < \epsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

■

Théorème 2.3.2 *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.1.1) est uniformément stable, s'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ de classe C^1 décroissante, définie positive et un constant $r > 0$ tels que*

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in B_r.$$

Preuve. Comme V est décroissante, la fonction

$$\beta(\delta) = \sup_{\|x\| \leq \delta} \sup_{t \geq 0} V(t, x)$$

est finit pour δ suffisamment petit et non décroissante pour δ . Maintenant soit $\epsilon_1 = \min \{\epsilon, r, s\}$ et choisir $\delta > 0$ telque

$$\beta(\delta) < \alpha(\epsilon_1)$$

Maintenant, complétons de même manière du théorème précédent. ■

Théorème 2.3.3 *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (1.1.1) est uniformément asymptotiquement stable, s'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ de classe C^1 décroissante, définie positive tels que $-\dot{V}$ est une fonction de Lyapunov définie positive.*

Preuve. Si $-\dot{V}$ est une fonction de localement définie positive, alors clairement $-\dot{V}$ satisfait les hypothèses du théorème (2.3.2), alors l'équilibre $x = 0$ est uniformément stable. Alors, selon la Définition (2.3.2), il suffit de prouver que $x = 0$ est uniformément attractive. Plus précisément, il est nécessaire de montrer l'existence de $\delta_1 > 0$ telque, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une $T(\epsilon) < \infty$ telque

$$\|x_0\| < \delta_1, t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \epsilon, \forall t \geq T(\epsilon) \quad (2.3.2)$$

Les hypothèses sur V and $\dot{V}$ implique qu'il existe des fonctions $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$ et $\gamma(\cdot)$ de classe K et une constante $r > 0$ telque

$$\alpha(\|x\|) \leq V(t; x) \leq \beta(\|x\|), \forall t \geq t_0; \forall x \in B_r \quad (2.3.3)$$

$$\dot{V}(t; x) \leq -\gamma(\|x\|), \forall t \geq t_0; \forall x \in B_r \quad (2.3.4)$$

Maintenant, soit $\epsilon > 0$ donner, définissons les constantes positives δ_1, δ_2 , et T par

$$\delta_1 < \beta^{-1}[\alpha(r)], \delta_2 < \min \{\beta^{-1}[\alpha(\epsilon)], \delta_1\}, T = \frac{\beta(\delta_1)}{\gamma(\delta_2)}$$

On montre que ces valeurs sont constantes. Soit

$$\|x_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|x(t_1; t_0; x_0)\| < \delta_2; \text{ pour chaque } t_1 \in [t_0; t_0 + T] \quad (2.3.5)$$

Pour prouver ces estimations, supposons par contradiction que ces estimations sont faus, c'est-à-dire

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \geq \delta_2, \forall t \in [t_0, t_0 + T] \quad (2.3.6)$$

Donc, par l'énégalité (2.3.3)

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha(\delta_2) \leq V(t_0 + T, x(t_0 + T, t_0, x_0)) \\ &= V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{V}[\tau, x(\tau, t_0, x_0)] d\tau \\ &\leq \beta(\delta_1) - T\gamma(\delta_2) = 0 \text{ en utilisant (2.3.3), (2.3.4), (2.3.6)} \end{aligned}$$

Pour compléter la preuve, supposons $t \geq t_0 + T$. Alors, avec t_1 défini dans (2.3.5), on a

$$\alpha[\|x(t, t_0, x_0)\|] \leq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_1, x(t_1, t_0, x_0)) \text{ par 12} \quad (2.3.7)$$

par la non positivité de $\dot{V}$. Finalement

$$V(t_1, x(t_1, t_0, x_0)) \leq \beta[\|x(t_1, t_0, x_0)\|] \leq \beta(\delta_2) \text{ par (14)} \quad (2.3.8)$$

Maintenant (16) et (17) impliquent que

$$\alpha[\|x(t, t_0, x_0)\|] \leq \beta(\delta_2) \quad (2.3.9)$$

L'énégalité (2.3.9) montre (2.3.2). ■

Exemple 2.3.1 Soit le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2.y^2 \\ \dot{y} = 2.x.y - y^3 \end{cases}$$

$(0, 0)$ un est point d'équilibre.

Soit $L(x, y) = x^2 + y^2$ définie positive.

$$\begin{aligned} \dot{L} &= 2.x.\dot{x} + 2.y.\dot{y} = 2.x.(-x - 2.y^2) + 2.y.(2xy - y^3) \\ &= -2.x^2 - 4.x.y^2 + 4.x.y^2 - 2.y^4 = -2.(x^2 + y^4) \end{aligned}$$

$\dot{L} < 0$ pour toute valeur de x et y dans $\mathbb{R}^2$ et ne s'annule qu'en $(0, 0)$. C'est donc une fonction de Lyapunov stricte, on en conclut que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Exemple 2.3.2 On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 - x_2^3 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0, posons

$$L(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2$$

On a $L(0) = 0$ et V est définie positive. La dérivée de L pour le système (2.3.10) vaut

$$\dot{L}(y_1, y_2) = y_1(-y_1^3 - y_2^2) + y_2(y_1y_2 - y_2^3) = -(y_1^4 + y_2^4)$$

$\dot{L}$ est clairement définie négative. Alors, 0 est asymptotiquement stable.

2.4 Stabilité exponentielle

Maintenant, nous tournons notre attention vers la décroissance exponentielle des solutions du système (1.1.1).

Rappelons d'abord la définition de la stabilité exponentielle:

Définition 2.4.1 Le point d'équilibre x_e est **exponentiellement stable** s'il existe $\alpha, \lambda > 0$ telle que

$$\|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(0) - x_e\| \exp(-\lambda t) \quad \forall t$$

Définition 2.4.2 Le point d'équilibre x_e est **exponentiellement globalement stable** s'il la condition est satisfait $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.4.1 Stable exponentielle $\Rightarrow$ stable asymptotique $\Rightarrow$ stabilité

Théorème 2.4.1 Soit $L(x)$ une fonction définie positive de classe C^1 sur un domaine

$D \subset \mathbb{R}^n$ si

1) $\dot{L}$ est définies négative.

2) $\exists k_1, k_2, k_3, p$ telle que

$$k_1 \|x(t)\|^p \leq L(x) \leq k_2 \|x(t)\|^p \text{ et } \dot{L}(x) \leq -k_3 \|x(t)\|^p$$

· Alors, $x_e = 0$ est exponentiellement stable.

· Si la condition est vérifiée globalement, alors $x_e = 0$ est globalement exponentiellement stable.

Preuve. De l'hypothèse, on a

$$k_1 \|x(t)\|^p \leq L(x) \leq k_2 \|x(t)\|^p$$

■

Donc

$$-L(x) \geq -k_2 \|x(t)\|^p \Rightarrow -\|x(t)\|^p \leq -\frac{1}{k_2} L(x) \quad (2.4.1)$$

Nous avons aussi de l'hypothèse que

$$\dot{L}(x) \leq -k_3 \|x(t)\|^p$$

C'est-à-dire

$$\dot{L}(x) \leq -k_3 \|x(t)\|^p$$

De (2.4.1)

$$\dot{L}(x) \leq -\frac{k_3}{k_2} L(x)$$

Par intégration, on obtient

$$L(x) \leq L(x_0) \exp\left(-\frac{k_3}{k_2} t\right)$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} k_1 \|x(t)\|^p &\leq L(x_0) \exp\left(-\frac{k_3}{k_2} t\right) \\ &\leq k_2 \|x(0)\|^p \exp\left(-\frac{k_3}{k_2} t\right) \end{aligned}$$

Alors

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{1}{p}} \|x(0)\| \exp\left(-\frac{k_3}{pk_2} t\right)$$

D'où le résultat.

Exemple 2.4.1 Soit le système

$$\dot{x} = -x$$

Ce système est globalement **exponentiellement stable**.

On effect. Soit la fonctions de Lypunov

$$L(x) = \frac{x^2}{2},$$

pour $p = 2$, $k_1, k_2 = 1$, On a

$$-\frac{x^2}{2} \leq L(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

Comme

$$\dot{L}(x) = -x^2 = -2\left(\frac{x^2}{2}\right) < 0, \forall x \neq 0,$$

pour $k_3 = 2$, alors

$$\|L(x)\| \leq \|L(0)\| \exp(-t) \Rightarrow \|x(t)\| \leq \|x(0)\| \exp(-t).$$

2.5 Stabilité en temps fini

Dans un second temps, nous rappelons la notion de stabilité en temps fini. Cette stabilité, qui n'est qu'une extension de la stabilité asymptotique, est cependant très importante du point de vue pratique et industriel, car elle permet d'estimer au bout de combien de temps le système atteint la stabilité.

Rappelons à présent la dynamique d'un système autonome, soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\dot{x} = f(x)$.

Définition 2.5.1 L'origine du système (1.1.1) est dit stable en temps fini s'il existe un voisinage V de l'origine et une fonction $T : V \setminus \{0\} \rightarrow [0, +\infty[$ appelée fonction temps d'établissement, telles que

- i) L'origine est stable au sens de Lyapunov.
- ii) Les solutions convergent en temps fini, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow T(x)} x(t, t_0, x_0) = 0$$

Si de plus, $V = \mathbb{R}^n$ alors l'origine est globalement stable en temps fini.

Rappelons un résultat élémentaire sur la stabilité en temps fini des systèmes de la forme

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.5.1}$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas particulier, il existe une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini.

Théorème 2.5.1 *Supposons que l'origine soit un point d'équilibre du système (2.5.1) où f est continue. Alors, l'origine est stable en temps fini pour le système (2.5.1) si et seulement s'il existe un voisinage Ω de l'origine tel que pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$,*

1. $xf(x) < 0$ et
2. $\int_x^0 \frac{dz}{f(z)} < +\infty$.

Chapitre 3

Etude de la Stabilité exponentielle pour un problème des ondes

On s'intéresse à la résolution du problème d'évolution

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ sur } [0; +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.0.1)$$

Où A est un opérateur défini sur un espace E .

Nous allons d'abord étudier le cas où l'espace E est un espace de Hilbert et l'opérateur A un opérateur maximal monotone, puis nous affaiblirons les hypothèses et nous essaierons de mettre en évidence les remèdes nous permettant de conclure.

3.1 Position du problème

On va étudier ici le problème de l'équation des ondes avec une rétroaction interne. En particulier, on considère le système

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + \alpha_1 u_t(x, t) + \alpha_2 u_t(x, t - \tau) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, & \text{dans } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & t \in (0, \tau), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

3.2 Etude d'existence et d'unicité

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (3.1.1), en utilisant la théorie des semi-groupe, à cet effet, on introduit la nouvelle variable

$$z(\rho, x, t) = u_t(x, t - \tau\rho), \quad \rho \in (0, 1), x \in \Omega, t > 0.$$

Par conséquent, nous avons

$$\tau z_t(\rho, x, t) + z_\rho(\rho, x, t) = 0, \quad \rho \in (0, 1), x \in \Omega, t > 0.$$

Alors, le problème (3.1.1) prend la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + \alpha_1 u_t(x, t) + \alpha_2 z(1, x, t) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ \tau z_t(\rho, x, t) + z_\rho(\rho, x, t) = 0, \quad \text{dans } (0, 1) \times \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = z(\rho, x, t) = 0, \quad \text{dans } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), t \in (0, \tau), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

nous considérons l'espace de Hilbert suivant

$$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2((0, 1) \times \Omega)$$

équipée avec le produit scalaire

$$\left(\phi, \tilde{\phi} \right)_H = \int_{\Omega} \left(\nabla u \cdot \nabla \tilde{u} + v \tilde{v} \right) dx + |\tau \alpha_2| \int_0^1 \int_{\Omega} z \cdot \tilde{z} dx d\rho.$$

Pour $\phi = (u, v, z)^T$, $\tilde{\phi} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z}) \in H$. puis posons $v = u_t$ du système (3.2.1) peut être réécrire

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - v = 0 \\ v_t(x, t) - \Delta u(x, t) + \alpha_1 v(x, t) + \alpha_2 z(1, x, t) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ \tau z_t(\rho, x, t) + z_\rho(\rho, x, t) = 0, \quad \text{dans } (0, 1) \times \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = z(\rho, x, t) = 0, \quad \text{dans } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), t \in (0, \tau), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

ou

$$\phi' + A\phi = 0.$$

Telque; $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est l'opérateur défini dans le domaine

$$D(A) = \{ \phi \in H / v \in H_0^1(\Omega), u \in H^2(\Omega), z_\rho \in L^2((0,1) \times \Omega), z(0, \cdot) = v \},$$

par

$$A\phi = \begin{bmatrix} -v \\ -\Delta u + \alpha_1 v + \alpha_2 z(1, \cdot) \\ \frac{1}{\tau} z_\rho \end{bmatrix}$$

Nous avons le résultat de l'existence et d'unicité suivant:

Théorème 3.2.1 *Supposons que $|\alpha_2| \leq \alpha_1$. Alors pour toute $(u_0, u_1, f_0) \in D(A)$. Le problème (3.2.2) a une solution unique (u, v, z) satisfaisant*

$$\phi \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], H).$$

Preuve. IL suffit de montrer que A est maximale montone (surjective), en utilisant le théorème de Hille-Yosida.

D'abord pour $\phi \in D(A)$, nous avons

$$\begin{aligned} (A\phi, \phi) &= \begin{bmatrix} -v \\ -\Delta u + \alpha_1 v + \alpha_2 z(1, \cdot) \\ \frac{1}{\tau} z_\rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix} \\ &= - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx + \int_{\Omega} v [-\Delta u + \alpha_1 v + \alpha_2 z(1, \cdot)] dx + |\alpha_2| \int_0^1 \int_{\Omega} z z_\rho dx d\rho \\ &= \alpha_1 \int_{\Omega} |v|^2 dx + \alpha_2 \int_{\Omega} v z(1, \cdot) + \frac{\alpha_2}{2} \int_{\Omega} |z(1, \cdot)|^2 dx - \frac{|\alpha_1|}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx \end{aligned}$$

Inégalité de Young avec $\varepsilon = 1$ donne

$$\alpha_2 \int_{\Omega} v z(1, \cdot) \leq \frac{\alpha_2}{2} \int_{\Omega} |z(1, \cdot)|^2 + \frac{\alpha_2}{2} \int_{\Omega} |v|^2$$

alors

$$(A\phi, \phi)_H \geq (\alpha_1 - |\alpha_2|) \int_{\Omega} |v|^2 dx \geq 0$$

alors A est monotone.

Ensuite, nous allons montrer que A est maximal. Pour $F = (f, g, h)^T \in H$; nous devons trouver, $\phi + A\phi = F$ de telle sorte que

$$\begin{cases} u - v = f \\ v - \Delta u + \alpha_1 v + \alpha_2 z(1, \cdot) = g \\ \tau z + z_\rho = \tau h. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

La résolution de la dernière équation de (3.2.3) par la méthode de variation de constante pour les EDO donne

$$z(\rho, \cdot) = (u - f) \exp(-\rho\tau) + \tau \exp(-\rho\tau) \int_0^\rho h(\gamma, \cdot) \exp(\gamma\tau) d\gamma$$

évidemment, nous avons $z(0, \cdot) = u - f = v$, alors

$$z(1, \cdot) = (u - f) \exp(-\tau) + \int_0^1 h(\gamma, x) \exp(\gamma\tau) d\gamma.$$

Substituons $z(1, \cdot)$ et v dans la deuxième équation de (3.2.3), on obtient

$$u - k\Delta u = G, \quad (3.2.4)$$

telque

$$\begin{cases} k = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 \exp(-\tau) > 0 \\ G = g + f + \alpha_1 f + \alpha_2 (\exp(-\tau)) f + \tau \alpha_2 (\exp(-\tau)) \int_0^1 h(\gamma, \cdot) \exp(\gamma\tau) d\gamma \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram l'équation (3.2.4) admet une solution unique. ■

3.3 Stabilité exponentielle

3.3.1 Estimation du terme d'énergie

Dans cette section nous prouvons notre résultat de décroissance. Commençons par le lemme suivant:

Lemme 3.3.1 *Supposons que $|\alpha_2| \leq \alpha_1$. Soit (u, v, z) solution de (3.2.1). Alors la fonctionnelle D' énergie définie par*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx + \frac{\tau |\alpha_2|}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} |z(\rho, x, t)|^2 dx d\rho,$$

satisfait

$$E' \leq -(\alpha_1 - |\alpha_2|) \int_{\Omega} |u_t|^2 \leq 0.$$

Preuve. Multiplions la première équation du système (3.2.1) par u_t et intégrons sur Ω

$$u_t u_{tt}(x, t) - u_t \Delta u(x, t) + \alpha_1 u_t u_t(x, t) + \alpha_2 u_t z(1, x, t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) \right] + \alpha_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 + \alpha_2 \int_{\Omega} u_t z(1, x, t) = 0$$

Multiplions la deuxième équation du système (3.2.1) par $|\alpha_2| z$ et intégrons sur $(0, 1) \times \Omega$. on obtien

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\tau |\alpha_2|}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} |z(\rho, x, t)|^2 dx d\rho \right] + \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{d\rho} |z(\rho, x, t)|^2 d\rho dx = 0$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\tau |\alpha_2|}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} |z(\rho, x, t)|^2 dx d\rho \right] = -\frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 dx + \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2$$

alors

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) \right] + \frac{d}{dt} \frac{\tau |\alpha_2|}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} |z(\rho, x, t)|^2 dx d\rho \\ &= -\alpha_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 - \alpha_2 \int_{\Omega} u_t z(1, x, t) \\ & \quad - \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 dx + \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 \end{aligned}$$

et

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx + \frac{\tau |\alpha_2|}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} |z(\rho, x, t)|^2 dx d\rho$$

Aors

$$E'(t) = -\left(\alpha_1 - \frac{|\alpha_2|}{2}\right) \int_{\Omega} |u_t|^2 - \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 dx - \alpha_2 \int_{\Omega} u_t z(1, x, t).$$

En utilisant l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= -\alpha_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 - \alpha_2 \int_{\Omega} |z(1, x, t)| u_t + \frac{\alpha_2}{2} \int_{\Omega} |u_t(x, t)|^2 dx \\
 &\quad - \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 dx \\
 &\leq -\alpha_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 + \frac{|\alpha_2|}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 + \frac{|\alpha_2| \varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 \\
 &\quad + \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |u_t(x, t)|^2 dx - \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 dx \quad (\varepsilon = 1) \\
 &\leq -\alpha_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 + \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 + \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 \\
 &\quad + \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{|\alpha_2|}{2} \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 dx \\
 &\leq -\alpha_1 + |\alpha_2| \int_{\Omega} |u_t|^2 \\
 &\leq -(\alpha_1 - |\alpha_2|) \int_{\Omega} |u_t|^2 \leq 0 \quad \text{if } \alpha_1 \geq |\alpha_2| \\
 \text{alors } E'(t) &\leq 0
 \end{aligned}$$

■

3.4 Stabilité exponentielle

Théorème 3.4.1 *Soit (u, v, z) solution de (3.2.1). Alors, il existe deux constantes positives ζ et ω indépendants de t , tels que*

$$E'(t) \leq \zeta \exp(-\omega t), \forall t \geq 0. \quad (3.4.1)$$

La preuve du théorème sera établi à travers plusieurs lemmes .

Lemme 3.4.1 *Soit (u, v, z) solution de (3.2.1). Alors la fonctionnelle*

$$F_1(t) = \int_{\Omega} uu_t dx. \quad (3.4.2)$$

Satisfait l'estimation

$$F_1'(t) \leq \int_{\Omega} u_t^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha_1^2 \int_{\Omega} |u_t|^2 + \alpha_2^2 \int_{\Omega} |z(1, \dots)|^2 dx$$

Preuve. Une différenciation des F_1 donne

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 + \int_{\Omega} u(\Delta u + \alpha_1 u_t + \alpha_2 z) dx \\ &= \int_{\Omega} u_t^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \alpha_1 \int_{\Omega} \nabla u u_t + \alpha_2 \int_{\Omega} \nabla u z(1, \cdot) dx \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtien

$$\begin{aligned} F_1'(t) &\leq \int_{\Omega} u_t^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha_1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \\ &\quad + \frac{|\alpha_2|}{2\varepsilon'} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{|\alpha_2| \varepsilon'}{2} \int_{\Omega} |z(1, \cdot)|^2 dx \end{aligned}$$

prenons ($\varepsilon = 2\alpha_1, \varepsilon' = 2|\alpha_2|$), on obtient

$$F_1'(t) \leq \int_{\Omega} u_t^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha_1^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \alpha_2^2 \int_{\Omega} |z(1, \cdot)|^2.$$

■

Lemme 3.4.2 Soit (u, v, z) solution de (3.2.1). Alors la fonctionnelle

$$F_2(t) = \tau \int_0^1 \int_{\Omega} \exp(-\rho\tau) |z|^2 dx d\rho \quad (3.4.3)$$

Satisfait l'estimation

$$F_2'(t) \leq -\exp(-\tau) \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 - \tau \exp(-\tau) \int_0^1 \int_{\Omega} |z(\rho, x, t)| dx d\rho + \int_{\Omega} |u_t|^2 \quad (3.4.4)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= - \int_0^1 2 \int_{\Omega} \exp(-\rho\tau) z z_{\rho} dx d\rho \\ &= - \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{d}{d\rho} (\exp(-\rho\tau) |z|^2) dx d\rho - \tau \int_0^1 \int_{\Omega} (\exp(-\rho\tau) |z|^2) \\ &= - \left[\int_{\Omega} \exp(-\tau) |(z(1, x, t)|^2 dx - \int_{\Omega} |(z(0, x, t)|^2 dx \right] \\ &\quad - \tau \int_0^1 \int_{\Omega} (\exp(-\rho\tau) |z|^2) dx d\rho \\ &\leq \int_{\Omega} |u_t|^2 - \int_{\Omega} \exp(-\tau) |z(1, \dots)|^2 - \tau \int_0^1 \int_{\Omega} \exp(-\rho\tau) |z|^2 d\rho dx \end{aligned}$$

nous avons $\rho < 1 \Rightarrow \exp(-\rho\tau) > \exp(-\tau) \Rightarrow -\exp(-\rho\tau) < -\exp(-\tau)$, alors

$$F_2'(t) \leq -\exp(-\tau) \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 - \tau \exp(-\tau) \int_0^1 \int_{\Omega} |z(\rho, x, t)|^2 d\rho dx + \int_{\Omega} |u_t|^2$$

■

3.4.1 Preuve du théorème

Pour faire la démonstration du théorème, nous définissons la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + F_1(t) + F_2(t)$$

N est une constante positive à être déterminée correctement. En branchant les estimations ci-dessus pour l'expression de $\mathcal{L}'(t)$, nous arrive au

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & -M(\alpha_1 - |\alpha_2|) \int_{\Omega} |u_t|^2 + \varepsilon \left[\int_{\Omega} |u_t|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 - \alpha_1 \int_{\Omega} |uu_t|^2 - \alpha_2 \int_{\Omega} uz(1, x) \right] \\ & + \int_{\Omega} |u_t|^2 - \exp(-\tau) \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 - \tau \exp(-\tau) \int_0^1 \int_{\Omega} |z|^2 \end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré donne

$$\int_{\Omega} u_t^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2,$$

ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & -(M(\alpha_1 - |\alpha_2|) - 1 - \varepsilon \alpha_1^2 c_{\rho}^2 - c \varepsilon c_{\rho}^2) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ & - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 - (\exp(-\tau) - \varepsilon \alpha_2^2) \int_{\Omega} |z(1, x, t)|^2 dx - \varepsilon \\ & - \tau \exp(-\tau) \int_{\Omega} \int_0^1 |z(\rho, x, t)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 - \varepsilon \tau \exp(-\tau) \int_0^1 \int_{\Omega} |z|^2 \end{aligned}$$

à ce stade, nous devons choisir notre constante pour que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\lambda \left[\int_{\Omega} |u_t|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 + \int_0^1 \int_{\Omega} |z|^2 \right],$$

Consecontly, $\exists \omega \geq 0$, tel que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\omega E(t)$$

Une simple intégration sur t en utilisant le fait $\mathcal{L} \sim E$, on obtien

$$\mathcal{L}(t) \leq \zeta \exp(-\omega) \quad \forall t > 0,$$

pour une constante ζ positive. (3.4.1) résulte ensuite, à partir de la dernière inégalité en vertu de $\mathcal{L} \sim E$ [7].

3.5 Conclusion générale

Dans ce travail nous avons étudié la stabilité exponentielle d'un problème d'évolution présent par une équation des ondes à retard. Pour cela, nous avons donné premièrement quelques notions générales sur les points d'équilibres et ses différents types de stabilité comme la stabilité locale et la stabilité globale et en particulier la stabilité exponentielle.

Dans deuxième chapitre, nous avons donné la notion de la fonction de Lyapunov et quelques théorèmes de stabilité qui permettent de montrer comment peut utiliser cette fonction pour prouver les types de stabilité: Locale, globale et exponentielle.

Dernièrement, nous avons donné une application du théorème de la stabilité exponentielle de Lyapunov sur l'équation des ondes à retard en utilisant des fonctionnelles vérifiantes les conditions de Lyapunov. L'existence et l'unicité de la solution sont étudiés en utilisant le théorème de Hille-Yosida que nous l'indiquons en premier chapitre.

Bibliographie

- [1] Cherifa. Bnnani; Stabilisation et Estimation de l'état des Systèmes Dynamiques non Linéaires et Applications; 12/10/2011.
- [2] Erigitte. Lucquin; Equation aux derivées parielles et leurs approximations; ellipes 2004.
- [3] Fanny Dardalhon, Federico Verga; Le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires; 2006.
- [4] Grégoire Allaire; Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Les éditions de l'école polytechnique; France; Mai 2006.
- [5] H. Brizis; Analyse fonctionnel; Springer, 2000.
- [6] J. P. LaSalle, The stability of dynamical systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976. With an appendix : "Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations" by Z. Artstein, Regional Conference Series in Applied Mathematics.
- [7] SERGE. Nicaise; Stabilization of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks.