N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Etude théorique d'un problème de contact entre deux corps électro-élasto-viscoplastiques.

Présenté par: BOUZIANE Zohra
CHIHI Sabrine

Soutenu devant le jury composé de

Tedjani H. AMMAR	MCB	Rapporteur	Univ. d'El Oued
Abdelouheb MANSOUR	MCB	Présidente	Univ. d'El Oued
Abdelaziz A. AHMED	MCB	Examinatrice	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2015 – 2016.

Remerciements

Nous remercions tout d'abord **Allah** le tout puissant qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.

Nous vifs remerciement vont également à notre encadreur **Dr.Hadj Ammar Tedjani** qui nous a guidé durant ce semestre et qui ses conseils et remarque étaient trés util pour réaliser ce mémoire.

Nous remercions encore, **Dr.Azeb Ahmed Abdel Aziz** et **Dr.Aissaoui Adel** qui ont accepté d'examiner ce travail.

Nous remerciement vont également à nous familles de leurs aides morals et materiels tout au long nous scolarité.

Table des matières

Notations générales

Notations diverses

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
$i.e$	C'est à dire,
$\partial_i \psi$	La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante x: $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application ψ : $\nabla \psi = (\partial_1 \psi, ..., \partial_d \psi)$,
$\mathrm{Div}\, \psi$	Divergence de l'application, ψ : $\mathrm{Div}\, \psi = \partial_1 \psi + ... + \partial_d \psi$,
$\partial \psi$	Sous-diérentiel de l'application ψ,
(x, y)	Paire d'un espace produit $X \times Y$,
$\mathbb{S}^d$	Espace des tenseurs symetriques du seconde ordre sur $\mathbb{R}^d$: $\mathbb{S}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$,
$.$	Produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$,
$\lvert . \rvert$	La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$,
$\lVert . \rVert_X$	La norme sur l'espace X,
$\langle ., . \rangle_X$	Le produit scalaire sur l'espace X,
$\langle ., . \rangle_{X' \times X}$	Le produit dual entre X' et X,
$p.p.$	Presque partout,
Ω^ℓ	Ouvert de $\mathbb{R}^d$, parfois domaine Lipchitzien,
$\overline{\Omega^\ell}$	L'adhérence de Ω^ℓ,
Γ^ℓ	La frontière de Ω^ℓ,
Γ_i^ℓ	Les parties de frontière Γ^ℓ, $(i = 1, 2, 3)$,
$\mathrm{mes}\left(\Gamma_i^\ell\right)$	Mesure de *Lebesgue* $(d-1)$ dimensionnelle de Γ_i^ℓ,

$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ,
η^ℓ	Normale extérieure unitaire à Γ^ℓ,
$\upsilon_\eta^\ell, \upsilon_\tau^\ell$	Les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel υ^ℓ défini sur $\overline{\Omega^\ell}$,
$C^1\left(\Omega^\ell\right)$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω^ℓ,
$D\left(\Omega^\ell\right)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
$D'\left(\Omega^\ell\right)$	Espace des distributions sur Ω^ℓ,
$L^2\left(\Omega^\ell\right)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} \left\|u^\ell\right\|^2 dx < +\infty$,
$\\|.\\|_{L^2\left(\Omega^\ell\right)}$	La norme de $L^2\left(\Omega^\ell\right)$ définie par $\left\\|u^\ell\right\\|_{L^2\left(\Omega^\ell\right)} = \left(\int_{\Omega^\ell} \left\|u^\ell\right\|^2 d\Omega^\ell\right)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty\left(\Omega^\ell\right)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\exists c > 0 : \left\|u^\ell\right\| < c, p.p.,$ sur Ω^ℓ,
H^ℓ	L'espace $\left\{u^\ell = \left(u_i^\ell\right)_{1\leq i\leq d}; u_i^\ell \in L^2\left(\Omega^\ell\right), \forall i = 1, ..., d\right\} = \left(L^2\left(\Omega^\ell\right)\right)^d$,
H	L'espace $H^1 \times H^2$,
H_1^ℓ	L'espace $\left\{u^\ell = \left(u_i^\ell\right)_{1\leq i\leq d}; u_i^\ell \in H^1\left(\Omega^\ell\right), \forall i = 1, ..., d\right\} = \left(H^1\left(\Omega^\ell\right)\right)^d$,
H_1	L'espace $H_1^1 \times H_1^2$,
$\mathcal{H}^\ell$	L'espace $\left\{\sigma^\ell = \left(\sigma_{ij}^\ell\right)_{1\leq i,j\leq d} / \sigma_{ji}^\ell = \sigma_{ij}^\ell \in L^2\left(\Omega^\ell\right), \forall i = 1, ..., d\right\} = \left(L^2\left(\Omega^\ell\right)\right)_s^{d\times d}$,
$\mathcal{H}$	L'espace $\mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2$,
$\mathcal{H}_1^\ell$	L'espace $\left\{\sigma^\ell = \left(\sigma_{ij}^\ell\right)_{1\leq i,j\leq d} / \sigma_{ji}^\ell = \sigma_{ij}^\ell \in H^1\left(\Omega^\ell\right), \forall i = 1, ..., d\right\} = \left(H^1\left(\Omega^\ell\right)\right)_s^{d\times d}$,
$\mathcal{H}_1$	L'espace $\mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2$,
$\overline{\mathcal{H}_1}$	L'espace $\left\{\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \mathcal{H}_1; \sigma_\eta^1 = \sigma_\eta^2 \text{ sur } \Gamma_3\right\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	l'espace de *Sobolev* d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ,
H_{Γ^ℓ}	L'espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^d$,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$.
$\langle .,. \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma^\ell}$	Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$\\|.\\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}$	La norme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ définie par $\\|\psi\\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} = \sup\limits_{\phi\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} \frac{\langle\psi,\phi\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma^\ell}}{\\|\phi\\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}}$,
H'_{Γ^ℓ}	Espace dual de H_{Γ^ℓ}, i.e, $H'_{\Gamma^\ell} = \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)\right)^d$,

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$, on note par

$C(0,T;H)$	L'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans H,
$C^1(0,T;H)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0,T]$ dans H,
$L^p(0,T;H)$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0,T]$ dans H,
$\|.\|_{L^p(0,T;H)}$	La norme de $L^p(0,T;H)$,
$W^{k,p}(0,T;H)$	L'espace de *Sobolev* de paramètres k et p,
$\|.\|_{W^{k,p}(0,T;H)}$	La norme de $W^{k,p}(0,T;H)$.

Notations en élasticité

Ω^1, Ω^2	Les domaines occupés par les corps déformables,
Γ^ℓ	La frontière de Ω^ℓ: $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$,
$\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3$	Les parties de Γ^ℓ: $\Gamma^\ell = \overline{\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3}$,
Γ_3	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2.
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ, on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ, on écrit σ_{ij}^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique,
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ,
β	Vecteurs d'adhésion sur la surface de contact Γ_3,
D^ℓ	Vecteurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Les dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon\left(u^\ell\right)$	Tenseur linéarisé des déformations: $\left(\varepsilon\left(u^\ell\right)\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell\right)$,
$\sigma^\ell.u^\ell$	Produit tensoriel (matriciel) de u^ℓ par σ^ℓ : $\left(\sigma^\ell.u^\ell\right)_i = \sigma_{ij}^\ell.u_j^\ell$,
σ_ν^ℓ	Composante normale des contraintes à la frontière du domaine: $\sigma_\nu^\ell = \left(\sigma^\ell\nu^\ell\right).\nu^\ell$ où ν^ℓ est la normale unitaire sortante sur le bord du domaine Ω^ℓ,
σ_τ^ℓ	Vecteur composante tangentielle des contraintes à la frontière du domaine,
u_ν^ℓ	Composante normale du déplacement u^ℓ sur le bord du domaine: $u_\nu^\ell = u^\ell.\nu^\ell$,
$u_\nu^\ell\nu^\ell$	Vecteur composante normale du déplacement u^ℓ : $\left(u_\nu^\ell\nu^\ell\right)_i = u_\nu^\ell\nu_i^\ell$,
u_τ^ℓ	Vecteur composante tangentielle du déplacement u^ℓ : $u_\tau^\ell = u^\ell - u_\nu^\ell\nu^\ell$.

Introduction générale

De puis la nuit des temps, l'homme s'est intéressé aux problèmes de contact entre deux corps. Ces problèmes de contact, avec ou sans frottement, entre deux corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation rigide, abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le simple contact du sabot de frein avec la roue, d'une roue de voiture avec la route, du piston avec la chemise, l'enfoncement progressif dans un pouf ou un fauteuil lors d'une posture assise, les multiples frottements entre plaques tectoniques ou encore l'écoulement de la lave lors d'une éruption volcanique, ne sont que quelques exemples qui font partie d'une liste non exhaustive de problèmes de contact. Vu l'importance du phénomène, des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables. Par conséquent, une théorie mathématique générale de la mécanique du contact (Mathematical Theory of Contact Mechanics: MTCM) a fait récemment un progrès impréssionant, voir par exemple [[18], [26]] et les références qui y sont incluses.

L'objectif de Cet mémoire est de proposer une certaine contribution à l'étude d'un problèmes aux limites en mécanique du contact. Nous considérons un loi de comportement pour des matériaux ayant des propriétés mécaniques ainsi que des propriétés électriques (matériaux piézoélectriques), prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau. L'adhésion entre les surfaces de contact, lorsqu'une colle est ajoutée pour éviter aux surfaces un mouvement relatif.

Le sujet de l'endommagement est extrêmement important dans les conceptions en ingénierie puisqu'il y influence directement sur la vie usuelle de la structure où la composante conçue. Il existe une littérature très riche sur ce sujet. Les modèles prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. L'analyse mathématique des problèmes unidimentionnels peut être trouvée dans [13]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [23] . Des modèles généraux récents dans [20] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous ces travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction d'endommagement, ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\alpha = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque $\alpha = 0$, le matériau est complètement endommagé et lorsque $0 < \alpha < 1$, il y a un endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes quasistatiques de contact avec endommagement ont été étudiés dans [26].

Les matériaux piézoélectriques sont extêmement utilisés comme interrupteurs et actuateurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Les matériaux piézoélectriques, pour lesquelles les propriétés mécaniques sont élastiques, sont appelés "matériaux électroélastiques" et ceux pour lesquelles les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés "matériaux électro-viscoélastiques". Des modèles généraux pour des matériaux élastiques ayant un effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [25] et plus récemment dans [2]. Des problèmes de contac statiques avec frottement pour des matériaux électroélastiques ont été étudiés dans [16], sous l'hypothèse que la fondation est isolante. Un problème de contact avec "Slip-dependant" pour les matériaux éléctro-élastiques a été étudié dans [16] et des problèmes pour les matériaux électro-viscoélastiques ont été considérés dans [24]. Actuellement, un intérrêt considérable est porté aux problèmes de contact avec frottement impliquant les matériaux piézoéléctriques (voir par exemple [22] et les références qui y sont incluses). Cependant, il n'existe virtuellement pas de résultats mathématiques à propos des problèmes de contact pour de tels matériaux et on a besoin de développer la théorie mathématique du contact mécanique (MTCT) pour inclure le couplage entre les propriétés mécaniques et électriques.

Les processus d'adhésion sont importants en industrie lorsque des parties, souvent non métaliques, sont collées ensemble. Pour cette raison, le contact adhésif entre les corps, lorsqu'une colle est ajoutée pour empêcher les surfaces d'un mouvement relatif, a récemment reçu, de plus en plus, une grande attention dans la littérature. Des modèles généraux avec adhésion peuvent être trouvés dans [[26], [20]]. Des résultats sur l'analyse mathématiques de plusieurs problèmes de contact avec adhésion peuvent être trouvés dans [[23], [25]]. Récemment, les matériaux composites ont atteint le sommet, puisqu'ils sont très solides et très légers, et par conséquent, une importance considérable en aviation et en industrie automobile. Cependant, les matériaux composites peuvent subir, sous des contraintes, une délamination dans laquelle plusieurs couches se décollent et se déplacent relativement les unes par rapport aux autres. Pour modéliser le processus lorsque le collage n'est pas permanant et un décollage peut avoir lieu, nous avons besoin de décrire l'adhésion et le contact ensemble. Un nombre de publications récentes traîte de tels modèles, voir par exemple [[17], [2], [19]] et les références comprises. L'idée est d'introduire une variable de surface interne, le champ d'adhésion $\beta \in [0, 1]$, qui décrit la densité fractionnelle des adhésifs actifs sur la surface de contact. En un point de la surface de contact adhésive, lorsque $\beta = 1$, l'adhésion est complète et tous les adhésifs sont actifs ; lorsque $\beta = 0$ tous les adhésifs sont inactifs, sévères et il n'y a pas d'adhésion. Lorsque $0 < \beta < 1$ l'adhésion est partielle et seulement une fraction β des adhésifs est active.

Ce mémoire comporte deux chapitres et est structurés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, le but est d'introduire les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite du problème traité. Nous commençons par décrir le cadre physique dans lesquels nous travaillons ainsi que le modèle mathématique correspondant, tout en donnant la loi de comportement et conditions aux limites qui apparaissent dans mémoire. Ensuite, nous aborderons le cadre fonctionnel permettant l'analyse mathématique des problèmes ainsi considérés. Nous terminerons ce chapitre en passant en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les inéquations variationnelles, équations et inéquations variationnelles d'évolution et enfin les lemmes de Gronwall.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons un problème de contact sans frottement, avec adhésion et endommagement pour des matériaux électro-élasto-viscoplastiques. Le contact est modélisé par une compliance normale. Nous établissons une formulation variationnelle du problème et démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel résultant. Les démonstrations sont basées sur les équations variationnelles dépendant du temps, un résultat classique d'existence et d'unicité pour les inéquations paraboliques, les équations différentielles et les arguments du point fixe de Banach.

Chapitre 1

Formulation mathématique de problème de contact et rappel d'analyse

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique, une loi de comportement d'un matériau électro-élasto-viscoplastique, les conditions aux limites ainsi que la formulation électro-mécanique de problème à étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, les lemmes de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstations.

1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact

1.1.1 Cadre physique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et une modèle mathématique de problème utilisés dans ce mémoire. Ensuite, nous indiquerons les formulations mathématiques pour le problème de contact avec adhésion et endommagement entre deux corps électro-élasto-viscoplastiques.

Nous considérons deux corps matériels déformables qui occupent des domaines bornèes $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$, $(\ell = 1, 2; d = 2, 3)$, avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ, correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ, correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que mes $\left(\Gamma_1^\ell\right) > 0$, mes $\left(\Gamma_a^\ell\right) > 0$. On note par ν^ℓ la normale unitaire sortante a Γ^ℓ. Le corps Ω^ℓ est encastre sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densite f_2^ℓ et agissent des forces volumiques de densite f_0^ℓ et des charges électriques de densité volumiques q_0. Nous supposons que f_2^ℓ et f_0^ℓ varient très lentement par rapport au temps. Les corps sont soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_3, et ils sont en contact avec adhésion sur Γ_3. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en contact avec une fondation sur la partie Γ_3. Les mathériaux peut être endommager durant le contact.

1.1.2 Modèle mathématique

Notons que le point au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, i.e.

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt}, \ \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2}.$$

Les fonctions inconnues du problème sont les champs des déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \to \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \to \mathbb{S}^d$, $\ell = 1, 2$. Notons la densité de la masse $\rho^\ell : \Omega^\ell \to \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques $f_0^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, l'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de cauchy

$$\rho^\ell \ddot{u}^\ell = \operatorname{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \tag{1.1.1}$$

où $\ddot{u}^\ell$ représente l'accélération et $\dot{u}^\ell$ la vitesse du corps.

Les processus d'évolution modelés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier: par exemple dans le cas où $\dot{u}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{u}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{u}^\ell$ peut être négligè (processus quasistatiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient

$$\operatorname{Div} \sigma^{\ell} + f_0^{\ell} = 0 \quad \text{dans } \Omega^{\ell} \times (0, T). \tag{1.1.2}$$

L'équation équivaut à d relation scalaires, et mathématiquent cette équation ne suffit par à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes u_i^{ℓ} du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacement électrique les potentiels électriques $\varphi^{\ell} : \Omega^{\ell} \times (0, T) \to \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $D^{\ell} : \Omega^{\ell} \times (0, T) \to \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques.

$$\operatorname{div} D^{\ell} - q_0^{\ell} = 0 \quad \text{dans } \Omega^{\ell} \times (0, T), \tag{1.1.3}$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\operatorname{div} D^{\ell} = \left(D_{i,i}^{\ell}\right)$, et q_0^{ℓ} représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^{ℓ}.

1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique

Nous considérons deux corps piézoélectriques qui occupent des domaines bornés $\Omega^{\ell} \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière et de Lipschitz Γ^{ℓ} subdivisée en trois parties mesurables $\Gamma_1^{\ell}, \Gamma_2^{\ell}$ et Γ_3^{ℓ} d'une part et de deux parties mesurables Γ_a^{ℓ} et Γ_b^{ℓ}, telles que $\operatorname{mes}\left(\Gamma_1^{\ell}\right) > 0$, $\operatorname{mes}\left(\Gamma_a^{\ell}\right) > 0$ et $\Gamma_3^{\ell} \subset \Gamma_b^{\ell}$. Soit $T > 0$ nous étudions l'évolution du corps due à l'application de force de volume et de tractions de surfaces dans l'intervalle de temps $[0, T]$. Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega^{\ell} \cup \Gamma^{\ell}$ et $t \in [0, T]$.

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement.Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ, le tenseur des déformations infinitésimales ε^ℓ et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}^\ell$ et $\dot{\varepsilon}^\ell$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $D^\ell = (D_i^\ell)$ ainsi que le champ électrique $E^\ell = -\nabla\varphi^\ell$. Nous présentons par la suite les lois de comportement de matériau : matériaux électro-élasto-viscoplastique.

Loi de comportement d'un matériau électro-élasto-viscoplastique.

Une loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique peut être écrite sous la forme

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell\varepsilon(\dot{u}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell\varepsilon(u^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell\varepsilon(\dot{u}^\ell(s)), \varepsilon(u^\ell(s)), \alpha^\ell(s))ds, \qquad (1.1.4)$$

où les opérateurs $\mathcal{A}^\ell$ et $\mathcal{G}^\ell$ sont des tenseurs d'ordre quatre et non linéaires; leurs composantes a_{ijkl}^ℓ et g_{ijkl}^ℓ s'appellent coefficients de viscosité et élasticité respectivement et $\mathcal{F}^\ell$ représente une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau, et où α^ℓ est une variable interne d'état définie dans $\Omega^\ell \times [0,T]$, avec $0 \le \alpha \le 1$. L'évolution du champ d'endommagement α^ℓ utilisée au deuxiéme chapitre est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation

$$\dot{\alpha}^\ell - k^\ell\Delta\alpha^\ell + \partial\psi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni \phi^\ell\left(\sigma^\ell - \mathcal{A}^\ell\varepsilon(\dot{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\varphi^\ell, \varepsilon\left(u^\ell\right), \alpha^\ell\right),$$

où k^ℓ est une constante positive, ϕ^ℓ est la fonction source de l'endommagement, $\partial\psi_{K^\ell}$ est le sous-difféérentiel de la fonction indicatrice ψ_{K^ℓ} et $K^{\ \ell}$est l'ensemble des endommagements admissibles défini par

$$K^\ell = \left\{\alpha \in H^1\left(\Omega^\ell\right); 0 \le \alpha \le 1, \quad p.p \ \text{ dans } \Omega^\ell\right\}. \qquad (1.1.5)$$

Un matériau piézoélectrique dont les propriétés électro-mécaniques sont élasto-viscoplastique est appelé matériau électro-élasto-viscoplastique et pour la contrainte on $\sigma^\ell = \sigma^{\ell,evp} + \sigma^{\ell,el}$, où $\sigma^{\ell,evp}$ et $\sigma^{\ell,el}$ sont respectivement les parties élasto-viscoplastique et électrique de la contrainte, telles que $\sigma^{\ell,evp}$ définie par (1.1.4) et $\sigma^{\ell,el} = (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\varphi^\ell$. A partir de la loi (1.1.4), nous obtenons une loi de comportement électro-élasto-viscoplastique avec endommagemment comme suit

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell\varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell\varepsilon(u^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\varphi^\ell + \\ \int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell\varepsilon(\dot{u}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\varphi^\ell, \varepsilon(u^\ell(s)), \alpha^\ell(s))ds, \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell\varepsilon(u^\ell) - \mathcal{B}^\ell\nabla\varphi^\ell. \end{cases} \qquad (1.1.6)$$

Nous utiliserons la loi de comportement (1.1.6) dans le chapitre 2 de ce memoire.

Lorsque $\mathcal{F}^\ell = 0$, (1.1.6) se réduit à une loi de comportement de matériau électro-viscoélastique

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t),$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell.$$

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3, c'est l'objet des conditions de contact et loi sans frottement que nous décrivons dans la section suivante.

1.1.4 Conditions aux limites de contact

Définissions maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ.

La condition aux limites de déplacement. Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times (0,T)$, le champ des déplacements u^ℓ est par conséquent nul

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0,T).$$

La condition aux limites de traction. Une traction surfacique de densité f_2 agit sur $\Gamma_2^\ell \times (0,T)$, et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma^\ell \nu^\ell$ satisfait

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0,T).$$

Les conditions aux limites électriques. Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0,T),$$

$$D^\ell . \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0,T),$$

Conditions aux limites de contact de Signorini.

On définit le déplacement normal relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$, où ν^ℓ est la normale unitaire extérieure à Ω^ℓ.

La continuité des contraintes sur l'interfaces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3. \tag{1.1.7}$$

Condition de contact avec compliance normale et adhésion.

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times (0,T)$, on introduit une variable interne d'état β définie sur $\Gamma_3 \times (0,T)$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'ya pas d'adhésion; et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce section, on renvoit par exemple [8]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,, \tag{1.1.8}$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par

$$R_\nu\,(s) = \begin{cases} L & \text{si} \;\; s < -L, \\ -s & \text{si} \;\; -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si} \;\; s > 0. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

Ici $L > 0$ est longeur caractéristique des liens.

La condition (1.1.8) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion β à la tension de surface. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.1.8) a été déjà utilisée dans [[7], [12], [27]].

Quand le champ d'adhésion β est nul, (1.1.8) devient

$$-\sigma_\nu = p_\nu\,([u_\nu]) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,, \tag{1.1.10}$$

ce qui représente la condition de compliance normale sans adhésion. Des expressions générales de la forme (1.1.10) ont été utilisées dans [[1], [5], [3], [4]]. Comme exemple de fonction de compliance normale, nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0.r\}$.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\beta} = -\left(\beta(\gamma_\nu(R_\nu([u_\nu]))^2 + \gamma_\tau\,|R_\tau([u_\tau]|^2) - \varepsilon_a\right)_+, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,, \tag{1.1.11}$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad \text{sur } \Gamma_3, \tag{1.1.12}$$

où γ_ν, γ_τ et ε_a sont coeffcients d'adhérence positifs, et $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$ le déplacement tangent relatif de corps Ω^1 par rapport l'autre corps Ω^2 sur la zone de contact, et β_0 l'adhésion initiale, tel que

$$0 \le \beta_0 \le 1, \quad p.p \text{ sur } \Gamma_3, \tag{1.1.13}$$

et la fonction $R_\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncation donné par

$$R_\tau(\upsilon) = \begin{cases} \upsilon & \text{si} \quad \|\upsilon\| \le L, \\ L\frac{\upsilon}{\|\upsilon\|} & \text{si} \quad \|\upsilon\| > L. \end{cases} \tag{1.1.14}$$

Sous les conditions (1.1.11)-(1.1.13), on a la remarque suivante :

Remarque 1.1.1 *Nous remarquons que le champ d'adhésion vérifie la restriction* $0 \le \beta \le 1$. *En effet, puisque* $\dot{\beta} \le 0$ *donc* $\beta(x,t) \le \beta_0(x) \le 1$. *En outre, si* $\beta(x,t_0) = 0$ *quand* $t = t_0$ *donc* $\dot{\beta}(x,t) = 0$ *pour tout* $t \ge t_0$, *et d'où* $\beta(x,t) = 0$ *pour tout* $t \ge t_0$, *p.p.* $x \in \Gamma_3$. *Alors nous concluons que* $0 \le \beta(x,t) \le 1$ *pour tout* $t \in [0,T]$, *p.p.* $x \in \Gamma_3$.

Condition dans le plan tangent.

Aux points de Γ_3, la rigidité tangentielle générée par la colle est supposée dépendante de l'adhésion β et des déplacements tangentiels,

$$\sigma_\tau = -p_\tau(\beta)R_\tau([u_\tau]) \;\; \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{1.1.15}$$

où $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de contact tangentielle, R_τ est un opérateur de troncation défini par la relation (1.1.14). Alors, $p_\tau(\beta)$ agit comme une constante de ressort, qui croit avec β; la traction est en direction opposé au déplacement. Le module maximum de la traction tangentielle dans (1.1.15) est $p_\tau(1)L$. La traction de frottement tangentielle est supposée être beaucoup plus petite que l'adhesion et donc elle est omise. Quand elle n'est pas négligeable on doit ajouter la traction de frottement comme cela a été fait en [9].

1.2 Rappel d'analyse

1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(.,.)_H$: $H \times H \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|.\|_H$ l'application de $H \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|u\|_H = (u,u)_H^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2.1}$$

et on rappelle que $\|.\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$(u,v)_H \leq \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H. \tag{1.2.2}$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par(1.2.1). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{(\eta, v)_{H' \times H}}{\|v\|_H},$$

où $(.,.)_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H.

1.2.2 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les espaces de type *Sobolev* utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans l'espace de Hilbert. Toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans ce memoire sont introduits dans cette section. Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$; $(.,.)$ et $|.|$ représentent le produit scalaire et la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$, respectivement. Ainsi,

$$u^\ell.v^\ell = u_i^\ell.v_i^\ell, \;\; \left|v^\ell\right| = (v^\ell, v^\ell)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u^\ell, v^\ell \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma^\ell.\tau^\ell = \sigma^\ell_{ij}.\tau^\ell_{ij}, \quad \left|\tau^\ell\right| = (\tau^\ell, \tau^\ell)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in \mathbb{S}^d.$$

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques υ^ℓ et τ^ℓ;

$$H^\ell = \{\upsilon^\ell = (\upsilon^\ell_i); \upsilon^\ell_i \in L^2(\Omega^\ell)\}, \ H^\ell_1 = \{\upsilon^\ell = (\upsilon^\ell_i); \upsilon^\ell_i \in H^1(\Omega^\ell)\},$$

$$\mathcal{H}^\ell = \{\tau^\ell = (\tau^\ell_{ij}); \tau^\ell_{ij} = \tau^\ell_{ji} \in L^2(\Omega^\ell)\}, \ \mathcal{H}^\ell_1 = \{\tau^\ell = (\tau^\ell_{ij}) \in \mathcal{H}^\ell; \operatorname{div} \tau^\ell \in H^\ell\}.$$

Les espaces H^ℓ, H^ℓ_1, $\mathcal{H}^\ell$ et $\mathcal{H}^\ell_1$ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$(u^\ell, \upsilon^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u^\ell.\upsilon^\ell dx, (u^\ell, \upsilon^\ell)_{H^\ell_1} = \int_{\Omega^\ell} u^\ell.\upsilon^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \nabla u^\ell.\nabla \upsilon^\ell dx,$$

$$(\sigma^\ell.\tau^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell.\tau^\ell dx, (\sigma^\ell.\tau^\ell)_{\mathcal{H}^\ell_1} = \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell.\tau^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} \sigma^\ell. \operatorname{Div} \tau^\ell dx.$$

$\cdot\varepsilon$ et Div sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\nabla u^\ell = (u^\ell_{i,j}); \varepsilon(u^\ell) = (\varepsilon_{ij}(u^\ell)); \varepsilon_{ij}(u^\ell) = \frac{1}{2}(u^\ell_{i,j} + u^\ell_{j,i}), \forall u^\ell \in H^\ell_1;$$

$$\operatorname{Div} \sigma^\ell = (\sigma^\ell_{ij,j}), \forall \sigma^\ell \in \mathcal{H}^\ell_1.$$

Les normes sur les espaces H^ℓ, H^ℓ_1, $\mathcal{H}^\ell$ et $\mathcal{H}^\ell_1$ sont notées par $\|.\|_{H^\ell}$, $\|.\|_{H^\ell_1}$, $\|.\|_{\mathcal{H}^\ell}$ et $\|.\|_{\mathcal{H}^\ell_1}$, respectivement. Puisque la frontière Γ^ℓ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $\upsilon^\ell \in H^\ell_1$ nous utilisons la notation υ^ℓ pour désigner la trace de υ^ℓ sur Γ^ℓ et nous notons par υ^ℓ_ν et υ^ℓ_τ les composantes normales et tangentielles de υ^ℓ sur la frontière données par

$$\upsilon^\ell_\nu = \upsilon^\ell.\nu^\ell; \ \upsilon^\ell_\tau = \upsilon^\ell - \upsilon^\ell_\nu.\nu^\ell,$$

Soit H'_{Γ^ℓ} est un dual de $H_{\Gamma^\ell} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)^d$ et soit $(.,.)_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma^\ell}$ désigner l' appariement de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ}. Pour chaque élément $\sigma^\ell \in \mathcal{H}^\ell_1$, soit $\sigma^\ell\nu^\ell$ est un élément H'_{Γ^ℓ} donne par

$$(\sigma^\ell\nu^\ell, \upsilon^\ell)_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma^\ell} = (\sigma^\ell, \varepsilon(\upsilon^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{Div} \sigma^\ell, \upsilon^\ell)_{H^\ell}, \forall \upsilon^\ell \in H^\ell_1.$$

Désigne par υ^ℓ_ν et υ^ℓ_τ la trace normale et la trace tangential de $\sigma^\ell \in \mathcal{H}^\ell_1$, respectivement. Si σ^ℓ est continûment différentiable sur $\Omega^\ell \cup \Gamma^\ell$, tel que:

$$\sigma^\ell_\nu = (\sigma^\ell\nu^\ell).\nu^\ell, \sigma^\ell_\tau = \sigma^\ell\nu^\ell - \sigma^\ell_\nu\nu^\ell,$$

$$(\sigma^\ell \nu^\ell, \upsilon^\ell)_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . \upsilon^\ell da,$$

pour tous $\nu^\ell \in H_1^\ell$, où da est un élément de mesure de surface. Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (2.1.1)-(2.1.15), nous introduisons pour la domaine de lient de l' ensemble

$$\mathcal{Z} = \{\theta \in L^\infty(0,T; L^2(\Gamma_3)); 0 \leq \theta(t) \leq 1, \forall t \in [0,T], p.p., \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

l'espace des déplacements admissibles V^ℓ est un sous-espace fermé de H_1^ℓ défini par:

$$V^\ell = \{\upsilon^\ell \in H_1^\ell; \upsilon^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell\}.$$

Puisque $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ^ℓ telle que:

$$\left\|\varepsilon(\upsilon^\ell)\right\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \left\|\upsilon^\ell\right\|_{H_1^\ell}, \quad \forall \upsilon^\ell \in V^\ell. \tag{1.2.3}$$

Sur V^ℓ nous considérons le produit scalaire donné par:

$$\left(u^\ell, \upsilon^\ell\right)_{V^\ell} = \left(\varepsilon\left(u^\ell\right), \varepsilon\left(\upsilon^\ell\right)\right)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall u^\ell, \upsilon^\ell \in V^\ell, \tag{1.2.4}$$

et soit $\|.\|_{V^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\left\|\upsilon^\ell\right\|_{V^\ell} = \left\|\varepsilon\left(\upsilon^\ell\right)\right\|_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall \upsilon^\ell \in V^\ell.$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|.\|_{V^\ell}$ et $\|.\|_{\mathcal{H}^\ell}$ sont des normes équivalentes sur V^ℓ et ainsi $(V^\ell, \|.\|_{V^\ell})$ est un espace de Hilbert réel. En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $c_0 > 0$, dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell$ et Γ_3 telle que

$$\left\|\upsilon^\ell\right\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \left\|\upsilon^\ell\right\|_{V^\ell} \quad \forall \upsilon^\ell \in V^\ell. \tag{1.2.5}$$

Pour le potentiel électrique et le champ de déplacement électrique nous utilisons les espaces:

$$E_0^\ell = L^2\left(\Omega^\ell\right), \quad E_1^\ell = H^1\left(\Omega^\ell\right),$$

$$W^\ell = \left\{\psi^\ell \in H^1\left(\Omega^\ell\right);\ \psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\right\},$$

$$\mathcal{W}^\ell = \left\{D^\ell = \left(D_i^\ell\right);\ D_i^\ell \in L^2\left(\Omega^\ell\right), \quad \operatorname{div} D^\ell \in L^2\left(\Omega^\ell\right)\right\}.$$

respectivement. Puisque $mes(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré montre qu'il existe une constante $c_F^\ell > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\left\|\nabla\psi^\ell\right\|_{L^2\left(\Omega^\ell\right)^d} \geq c_F^\ell \left\|\psi^\ell\right\|_{H^\ell\left(\Omega^\ell\right)} \qquad \forall\psi^\ell \in W^\ell, \tag{1.2.6}$$

Sur l'espace W^ℓ nous considérons le produit scalaire donné par

$$\left(\varphi^\ell, \psi^\ell\right)_{W^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \nabla\varphi^\ell.\nabla\psi^\ell dx,$$

et soit $\|.\|_{W^\ell}$ la norme associée. En utilisant (1.2.6) on peut vérifier que $\|.\|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\|.\|_{\mathcal{W}^\ell}$ sont deux normes équivalentes sur W^ℓ. Il en résulte que $(W^\ell, \|.\|_{W^\ell})$ est un espace de Hilbert réel. En outre, par le *Sobolev* trace théorème, il existe une constante c_0, ne dépendant que de Ω^ℓ, Γ_a^ℓ et Γ_3, tel que

$$\left\|\xi^\ell\right\|_{L^2\left(\Omega^\ell\right)} \leq c_0 \left\|\xi^\ell\right\|_{W^\ell} \qquad \forall\xi^\ell \in W^\ell. \tag{1.2.7}$$

L'espace $\mathcal{W}^\ell$ est un espace de Hilbert réel avec le produit scalaire

$$\left(D^\ell, E^\ell\right)_{\mathcal{W}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} D^\ell.E^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell. \operatorname{div} E^\ell dx,$$

où $\operatorname{div} D^\ell = \left(D_{i,i}^\ell\right)$, et la norme associée $\|.\|_{\mathcal{W}^\ell}$.

Afin de simplifier les notations , nous définissons les espaces produits

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \\ \mathcal{H}_1 &= \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \quad E_0 = E_0^1 \times E_0^2, \quad E_1 = E_1^1 \times E_1^2, \quad W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2. \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

les espaces $\mathbf{V}$, E_1, W et $\mathcal{W}$ sont des espaces de Hilbert réel dotés des produits scalaires canoniques notée $(.,.)_{\mathbf{V}}$, $(.,.)_{E_1}$, $(.,.)_W$, et $(.,.)_{\mathcal{W}}$. Les normes associés seront désignés par $\|.\|_{\mathbf{V}}$, $\|.\|_{E_1}$, $\|.\|_W$ et $\|.\|_{\mathcal{W}}$, respectivement.

On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Nous notons par $C([0,T];X)$ et $C^1([0,T];X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0,T]$ avec valeur sur X, respectivement, avec les normes

$$\|f\|_{C(0,T;X)} = \max_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X \, ,$$

$$\|f\|_{C^1(0,T;X)} = \max_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_X + \max_{t\in[0,T]} \left\|\dot{f}(t)\right\|_X .$$

Nous notons par $C_c(0;T;X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0,T)$ à valeurs dans X.

Définition 1.2.1 *Une fonction $f : [0,T] \to X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0,T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0,T;X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \to 0$ quand $n \to +\infty$, pour tout $t \in [0,T] \diagdown E$.*

1.2.3 Eléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Opérateurs fortements monotones

Définition 1.2.2 *Soient $A : H \to H$ un opérateur non linéaire. On dit que l'opérateur A est:*

1. *monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_H \geq 0 \quad \forall u, v \in H,$$

2. *fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que*

$$(Au - v, u - v)_H \geq m \|u - v\|_H^2 \quad \forall u, v \in H,$$

3. *Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que*

$$\|Au - Av\|_H \leq L \|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H,$$

4. *hémicontinu si*

$$\forall u, v \in H, \text{ l'application } t \mapsto A(u + tv) : \mathbb{R} \to H' \text{ est continue.}$$

Théorème 1.2.1 ***(Théorème du point fixe de Banach):*** *Soit K une partie non vide et fermé de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \to K$ une contractante, i.e, $\exists k \in]0,1[$ tel que*

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq k \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors il exists un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, Λ possède un point fixe unique dans K.

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus.

Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur Λ sont définies récursivement par $\Lambda^n = \Lambda\left(\Lambda^{n-1}\right)$ pour $n \geq 2$.

Théorème 1.2.2 . *Sous les mêmes conditions du Théorème 1.2.1, on suppose que Λ^n est une contractante pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K.*

Définition 1.2.3 *Une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$\|a(u, v)\| \leq M \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

Définition 1.2.4 *Une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$a(u, u) \geq m \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Théorème 1.2.3 ***(Théorème du Lax-Milgram)***: *Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit $l : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.Alors, il existe une solution unique $u \in X$ qui satisfait:*

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in X. \tag{1.2.9}$$

De plus, si $a(.,.)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle u, u\rangle_H \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle v, v\rangle_H \quad \forall v \in H. \tag{1.2.10}$$

Sous diéffrentiabilité

Nous considérons dans tout cette section que X est un espace de Hilbert et K un sous-ensemble de l'espace X.

Définition 1.2.5 *On appelle fonction indicatrice de K, la fonction Ψ_K définie par*

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & si \;\; u \in K, \\ +\infty & si \;\; u \notin K. \end{cases} \tag{1.2.11}$$

Définition 1.2.6 *Soit une fonction $j : X \to \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u, noté $\partial j\,(u)$ est l'ensemble défini par*

$$\partial j\,(u) = \{u' \in X' |\ \ j\,(\upsilon) \geq j\,(u) + (u', \upsilon - u) \quad \forall \upsilon \in X\}. \tag{1.2.12}$$

Le crochet $(.,.)$ désignant la dualité entre X' et X.

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j\,(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u. La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq 0$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X.

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial \Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial \Psi_K\,(u) = \{u' \in X' |\ \ (u', \upsilon - u) \leq 0 \ \ \forall \upsilon \in K\}. \tag{1.2.13}$$

Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.2.4 ***(Théorème de Cauchy- Lipschitz):*** *Soit $(X, \|.\|_X)$ est un véritable espace de Banach et soit $F\,(t,.) : X \to X$ un opérateur défini p.p. sur $(0,T)$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

(i) il existe $L_F > 0$ tel que $\|F(t,x) - F(t,y)\|_X \leq L_F \|x-y\|_X$, $\forall x, y \in X$, p.p. $t \in (0,T)$,

(ii) il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que $F(.,x) \in L^p(0,T;X)$, $\forall x \in X$.

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique, $x \in W^{1,p}(0,T;X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad p.p.\ t \in (0,T)\,,$$

$$x(0) = x_0.$$

Définition 1.2.7 *S'il est l'inclusion de $(\mathbf{V}, \|.\|_{\mathbf{V}})$ dans $(H, \|.\|_H)$ est continue et $\mathbf{V}$ est dense dans H, le triplet*

$$\mathbf{V} \subset H \subset \mathbf{V}'$$

s'appele le triplet de Gelfand, où $\mathbf{V}'$ l'espace dual de $\mathbf{V}$.

Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème 1.2.5 . *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \to V'$ un opérateur hemicontinu et monotone satisfaisant :*

$$(Av, v)_{V' \times V} \geq w \|v\|_V^2 + \lambda \quad \forall v \in V, \tag{1.2.14}$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C (\|v\|_V + 1) \quad \forall v \in V, \tag{1.2.15}$$

pour des constantes $w > 0$, $C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donné $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une fonction unique u qui satisfait.

$$u \in L^2(0,T;V) \cap C^1(0,T;H), \qquad \dot{u} \in L^2(0,T;V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \qquad p.p.\ t \in (0,T),$$

$$u(0) = u_0.$$

Théorème 1.2.6 *Soit $u^\ell \in H_1^\ell$. Alors $\epsilon(u^\ell) = 0$ si seulement si $u^\ell \in \mathcal{R}^\ell$, i.e*

$$\mathcal{R}^\ell = \left\{u^\ell \in H_1^\ell / \epsilon(u^\ell) = 0\right\}. \tag{1.2.16}$$

Théorème 1.2.7 ***(inégalité de Korn)****: Soit $\mathcal{V}^\ell$ un sous-espace fermé de H_1^ℓ tel que :*

$$\mathcal{V}^\ell \cap \mathcal{R}^\ell = \{0\}. \tag{1.2.17}$$

Alors l'inégalité de Korn est vérifiée sur $\mathcal{V}^\ell$, c'est à dire existe $C > 0$ ne dépendant que Ω^ℓ et $\mathcal{V}^\ell$ tel que

$$\left\|\epsilon(u^\ell)\right\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq C \left\|u^\ell\right\|_{H_1^\ell} \quad \forall u^\ell \in \mathcal{V}^\ell. \tag{1.2.18}$$

Inéquation variationnelle d'évolution

Théorème 1.2.8 *.Soit $V \subset H \subset V'$ est un triplet de Gelfand, K est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V, et soit $a : V \times V \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique et continue qui satisfait*

$$\textit{il existe } c_1 > 0 \textit{ et } c_0 \textit{ tel que } a(v,v) + c_0 \|v\|_H^2 \geq c_1 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ *et* $f \in L^2(0,T;H)$*, il existe une unique fonction* u *qui satisfait*

$$u \in H^1(0,T;H) \cap L^2(0,T;V),$$

$$u(t) \in K \quad \forall t \in [0,T],$$

$$\begin{aligned} & (\dot{u}(t), \upsilon - u(t))_{V' \times V} + a(u(t), \upsilon - u(t)) \\ \geq \ & (f(t), \upsilon - u(t))_H \quad \forall \upsilon \in K, p.p.t \in (0,T), \end{aligned}$$

$$u(0) = u_0.$$

1.2.4 Lemmes de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.2.1 *Soient* $m, n \in C([0,T];\mathbb{R})$ *telles que* $m(t) \geq 0$ *et* $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0,T]$*,* $a \geq 0$ *uneconstante, et* $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$*:*

1. Si
$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$
alors
$$\varphi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0,T].$$

2. Si
$$\varphi(t) \leq m(t) + a\int_0^t \varphi(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$
alors
$$\int_0^t \varphi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

Pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient

Corollaire 1.2.1 *Soit* $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ *telle que* $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et soit* $a \geq 0$. *Si* $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$ *est une fonction telle que*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\varphi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0,T].$$

Lemme 1.2.2 *Soient* m, $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ *telles que* $m(t) \geq 0$ *et* $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et soit* $a \geq 0$. *Si* $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$ *est une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\varphi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\varphi(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi^2(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$|\varphi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0,T].$$

Chapitre 2

Etude variationnelle d'un problème électro-élasto-viscoplastique avec adhésion et endommagement

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique dans un processus dynamique d'un problème de contact avec compliance normale, adhésion et endommagement entre deux corps électro-élasto-viscoplastiques.

Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appellée champ d'adhésion. L'endommagement causé par les déformations plastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appellée champ d'endommagement.

Le problème est formulé comme un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion, les équations sont de mouvement pour le champ de contrainte, les équations d'équilibre pour le champ de déplacement électrique et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est divisé en deux sections. Dans la première section, nous présentons le problème électro-mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème. Enfin, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème.

Les techniques employées sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivie d'une version du théorème de Cauchy-Lipschitz et des arguments du point fixe.

2.1 Formulation du problème

Les deux corps sont supposés électro-élasto-viscoplastiques, le contact est modélisé par les conditions de compliance normale couplées avec l'adhésion et l'endommagement. Sous ces considérations, le modèle électro-mécanique que l'on étudie peut se formuler de la manière suivante :

Problème P. Pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \to \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \to \mathbb{S}^d$, les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \to \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times (0, T) \to \mathbb{R}$, les champs d'endommagements $\alpha^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \to \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \to \mathbb{R}^d$ tels que:

$$\begin{aligned} \sigma^\ell \; = \; & \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \\ & + \int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(s), \varepsilon(u^\ell(s)), \alpha^\ell(s)) ds \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \tag{2.1.2}$$

$$\dot{\alpha}^\ell - k^\ell \Delta \alpha^\ell + \partial \psi_{K^\ell}(\alpha^\ell) \ni \phi^\ell \left(\sigma^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \varepsilon\left(u^\ell\right), \alpha^\ell \right) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \tag{2.1.3}$$

$$\rho^\ell \ddot{u}^\ell = \operatorname{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \tag{2.1.4}$$

$$\operatorname{div} D^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \tag{2.1.5}$$

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \tag{2.1.6}$$

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \tag{2.1.7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \tag{2.1.8}$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \sigma_\tau = -p_\tau(\beta) R_\tau([u_\tau]) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{2.1.9}$$

$$\dot{\beta} = -\left(\beta(\gamma_\nu(R_\nu([u_\nu]))^2 + \gamma_\tau \left|R_\tau([u_\tau]\right|^2) - \varepsilon_a\right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{2.1.10}$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0,T), \tag{2.1.11}$$

$$D^\ell.\nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0,T), \tag{2.1.12}$$

$$\frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0,T), \tag{2.1.13}$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell,\ \dot{u}^\ell(0) = \upsilon_0^\ell,\ \alpha^\ell(0) = \alpha_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell, \tag{2.1.14}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \tag{2.1.15}$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites (2.1.1)-(2.1.15) et renvoyons à [[10], [11]] pour plus de détails sur les conditions (2.1.8)-(2.1.10) qui décrivent le contact sans frottement avec adhésion. Les équations (2.1.1) et (2.1.2) représentent la loi constitutive électro-élasto-viscoplastique dans laquelle $\varepsilon(u^\ell)$ représente le tenseur linéarisé de contrainte, $E(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$ est le champ électrique, $\mathcal{A}^\ell$ et $\mathcal{G}^\ell$ sont respectivement les opérateurs de viscosité et d'élasticité non linéaire, respectivement, $\mathcal{F}^\ell$ représente le tenseur de viscoplasticité, $\mathcal{E}^\ell$ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est son transposé et $\mathcal{B}^\ell$ représente le tenseur de permittivité électrique. L'évolution du champ d'endommagement est modelisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (2.1.3) où ϕ^ℓ est la fonction source de l'endommagement. Ensuite, les équations (2.1.4) et (2.1.5) sont les équations de mouvement pour le champ de contrainte et les équations d'équilibre pour le champ de déplacement électrique, respectivement. Les conditions (2.1.6) et (2.1.7) sont les conditions aux limites classiques de déplacement-traction tandis que (2.1.11) et (2.1.12) représentent les conditions aux limites pour les variables électriques, la relation (2.1.13) représente la condition de Newmann, où $\frac{\partial \alpha^\ell}{\partial \nu^\ell}$ représente la dérivé normale de α^ℓ. L'équation (2.1.8) représente la condition de compliance normale avec adhésion sur la surface de contact Γ_3, dans laquelle γ_ν est le coeffcient d'adhésion.

Pour l'étude du problème P, on considére les hypothèses suivantes.

L'opérateur de *viscosité* $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait:

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\
\left|\mathcal{A}^\ell(x,\xi_1) - \mathcal{A}^\ell(x,\xi_2)\right| \leq L_{\mathcal{A}^\ell}|\xi_1 - \xi_2| \\
\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.\ x \in \Omega^\ell. \\
\text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\
(\mathcal{A}^\ell(x,\xi_1) - \mathcal{A}^\ell(x,\xi_2)).(\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell}|\xi_1 - \xi_2|^2 \\
\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, p.p,\ x \in \Omega^\ell. \\
\text{(c) l'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x,\xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \text{ pour toute } \xi \in \mathbb{S}^d. \\
\text{(d) l'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x,\mathbf{0}) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, p.p,\ x \in \Omega^\ell.
\end{array}\right. \tag{2.1.16}$$

L'opérateur *d'élasticite* $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\
\left|\mathcal{G}^\ell(x,\xi_1) - \mathcal{G}^\ell(x,\xi_2)\right| \leq L_{\mathcal{G}^\ell}|\xi_1 - \xi_2| \\
\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, p.p, x \in \Omega^\ell. \\
\text{(b) L'application } x \mapsto \mathcal{G}^\ell(x,\xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \text{ pour toute } \xi \in \mathbb{S}^d. \\
\text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{G}^\ell(x,\mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{H}^\ell.
\end{array}\right. \tag{2.1.17}$$

L'opérateur *viscoplastique* $\mathcal{F}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d$ satisfait:

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}^\ell} > 0 \text{ telle que} \\
\left|\mathcal{F}^\ell(x,\eta_1,\xi_1) - \mathcal{F}^\ell(x,\eta_2,\xi_2)\right| \leq L_{\mathcal{F}^\ell}(|\eta_1 - \eta_2| + |\xi_1 - \xi_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\
\forall \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, p.p, x \in \Omega^\ell, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \\
\text{(b) L'application } x \longmapsto \mathcal{F}^\ell(x,\eta,\xi,\alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \text{pour tout } \eta, \xi \in \mathbb{S}^d, \\
\alpha \in \mathbb{R}. \\
\text{(c) L'application } x \longmapsto \mathcal{F}^\ell(x,\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) \text{ appartient } \mathcal{H}^\ell.
\end{array}\right. \tag{2.1.18}$$

La fonction source d'endommagement $\phi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } L_{\phi^\ell} > 0 \text{ telle que} \\ \left|\phi^\ell(x,\eta_1,\xi_1,\alpha_1) - \phi^\ell(x,\eta_2,\xi_2,\alpha_2)\right| \leq L_{\phi^\ell}(|\eta_1-\eta_2| + |\xi_1-\xi_2| + |\alpha_1-\alpha_2|) \\ \forall \eta_1,\eta_2,\xi_1,\xi_2 \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}, p.p, x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) L'application } x \longmapsto \phi^\ell(x,\eta,\xi,\alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \text{pour tout } \eta,\xi \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } x \longmapsto \phi^\ell(x,\mathbf{0},\mathbf{0},0) \text{ appartient } L^2\left(\Omega^\ell\right). \\ \text{(d)}\phi^\ell(x,\eta,\xi,\alpha) \text{ est bornée pour tout } \eta,\ \xi \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R},\ p.p,\ x \in \Omega^\ell. \end{cases} \tag{2.1.19}$$

Le tenseur *piézoélectrique* $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait:

$$\begin{cases} \text{(a) } \mathcal{E}^\ell(x,\tau) = (e^\ell_{ijk}(x)\tau_{jk}), \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) } e^\ell_{ijk} = e^\ell_{ikj} \in L^\infty(\Omega^\ell), 1 \leq i,j,k \leq d. \end{cases} \tag{2.1.20}$$

Rappelons aussi que le tenseur transposé $\mathcal{E}$ est donné par $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e^{\ell,*}_{ijk})$ où $e^{\ell,*}_{ijk} = e^\ell_{kij}$ et l'égalité suivante est satisfaite:

$$\mathcal{E}^\ell\sigma.\upsilon = \sigma.(\mathcal{E}^\ell)^*\upsilon, \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, \quad \forall \upsilon \in \mathbb{R}^d.$$

Le tenseur de permittivité éléctrique $\mathcal{B}^\ell$=$(b^\ell_{ij}) : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \text{(a) } \mathcal{B}^\ell(x,\mathbf{E}) = (b^\ell_{ij}(x)E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) } b^\ell_{ij} = b^\ell_{ji}, \quad b^\ell_{ij} \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i,j \leq d. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ telle que } \mathcal{B}^\ell\mathbf{E}.\mathbf{E} \geq m_{\mathcal{B}^\ell}\left|\mathbf{E}\right|^2 \\ \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \end{cases} \tag{2.1.21}$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisfait:

$$\begin{cases} \text{(a) } \exists L_\nu > 0 \text{ telle que } \left|p_\nu(x,r_1) - p_\nu(x,r_2)\right| \leq L_\nu\left|r_1 - r_2\right|, \\ \forall r_1,r_2 \in \mathbb{R}, \quad p.p.x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } x \longmapsto p_\nu(x,r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p_\nu(x,r) = 0, \text{ pour tout } r \leq 0, \quad p.p.x \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{2.1.22}$$

La fonction de compliance tangentielle $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisfait:

$$\begin{cases} \text{(a) } \exists L_\tau > 0 \text{ telle que } |p_\tau(x,d_1) - p_\tau(x,d_2)| \leq L_\tau\, |d_1 - d_2| \\ \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \quad p.p. x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } \exists M_\tau > 0 \text{ telle que } |p_\tau(x,d)| \leq M_\tau \quad \forall d \in \mathbb{R}, p.p. \quad x \in \Gamma \\ \text{(c) L'application } x \longmapsto p_\tau(x,d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall d \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) L'application } x \longmapsto p_\tau(x,0) \in L^2(\Gamma_3). \end{cases} \tag{2.1.23}$$

Nous supposons que la masse volumique ρ^ℓ satisfait :

$$\rho^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell) \text{ et } \exists \rho_0 > 0 \ \text{ telle que } \rho^\ell(x) \geq \rho_0, p.p. \ \ x \in \Omega^\ell, \ell = 1,2. \tag{2.1.24}$$

Dans ce paragraphe, nous supposons que les forces volumiques f_0^ℓ, les tractions f_2^ℓ, et les charges électriques volumiques q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ ont les régularités

$$f_0^\ell \ \in \ L^2(0,T;L^2(\Omega^\ell)^d), \qquad f_2^\ell \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \tag{2.1.25}$$

$$q_0^\ell \ \in \ C(0,T;L^2(\Omega^\ell)), \qquad q_2^\ell \in C(0,T;L^2(\Gamma_b^\ell)).$$

$$q_2^\ell(t) = 0 \ \text{ sur } \Gamma_3, \forall t \in [0,T]. \tag{2.1.26}$$

Les coeffcients d'adhesion γ_ν, γ_τ et la borne limite ε_a satisfont les conditions

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau, \varepsilon_a \geq 0, \ p.p. \text{ sur } \Gamma_3, \tag{2.1.27}$$

La diffusion de la microfissure de confficients est vérifie

$$k^\ell > 0. \tag{2.1.28}$$

Finalement, les conditions initiales satisfont

$$u_0^\ell \in \mathbf{V}^\ell, \alpha_0^\ell \in K^\ell \quad v_0 \in H, \quad \beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1, \ p.p. \text{ sur } \Gamma_3. \tag{2.1.29}$$

Où K^ℓ est l'ensemble des fonctions de dommages admissibles définis dans (1.1.5).

On considère sur H le produit scalaire $((,))_H$ défini par

$$((u,v))_H = \sum_{\ell=1}^{2} \left(\rho^\ell u^\ell, v^\ell\right)_{H^\ell}, \quad \forall u, v \in H, \tag{2.1.30}$$

Soit $|||.|||_H$ une norme associée, i.e.

$$|||v|||_H = ((u,v))_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H.$$

En utilisant l'hypothese (2.1.24) il vient que $|||.|||_H$ et $\|.\|_H$ sont des normes equivalentes sur H. De plus l'inclusion de la trace de $(\mathbf{V}, \|.\|_{\mathbf{V}})$ dans $(H, \|.\|_H)$ est continue et dense. Nous notons par $\mathbf{V}'$ l'espace dual de $\mathbf{V}$. En identifient H avec son propre dual nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$\mathbf{V} \subset H \subset \mathbf{V}'.$$

Nous utilisons la notation $(.,.)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}}$ pour la dualite entre $\mathbf{V}'$ et $\mathbf{V}$. On a

$$(u,v)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} = ((u,v))_H, \qquad \forall u \in H,\ \forall v \in \mathbf{V}. \tag{2.1.31}$$

On note egalement par $\|.\|_{\mathbf{V}'}$ la norme du dual sur l'espace $\mathbf{V}'$. Le théorème de représentation de Riesz entraîne l'existence de deux fonctions $\mathbf{f}$:$[0,T] \to \mathbf{V}'$ et $q : [0,T] \to W$ telles que:

$$(\mathbf{f}(t), v)_{\mathbf{V}\times\mathbf{V}} = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}_0^\ell(t).v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2^\ell(t).v^\ell da \ \forall v \in \mathbf{V}, \tag{2.1.32}$$

$$(q(t), \zeta)_W = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t)\, \zeta^\ell dx - \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t)\, \zeta^\ell da \quad \forall \zeta \in W. \tag{2.1.33}$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}$

$$a(\phi,\xi) = \sum_{\ell=1}^{2} k^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\phi.\nabla\xi \ dx, \tag{2.1.34}$$

Nous définissons la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} \left(-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])[v_\nu] + p_\tau(\beta) R_\tau([u_\tau])[v_\tau] \right) da. \tag{2.1.35}$$

et, la fonctionnelle de compliance normale $j_{\nu c} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$j_{\nu c}(u,v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu])[v_\nu]\, da. \tag{2.1.36}$$

Compte tenu de l'hypoyhese (2.1.22)-(2.1.23) et les definitions des operateurs R_ν et R_τ, il resulte que les integrales figurant dans (2.1.35) et (2.1.36) sont bien definies. On remarque que les conditions (2.1.25) impliquent que

$$\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{V}'), \ q \in C(0,T;W). \tag{2.1.37}$$

2.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green on voit directement que si u, σ et β sont des fonctions su samment régulières qui satisfont (2.1.4), (2.1.6), (2.1.8) et (2.1.9) avec (2.1.35), (2.1.36) pour tout $t \in (0,T)$ on déduit que

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{Div}\sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell.$$

On a

$$\int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell)\ dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{Div}\sigma^\ell . v^\ell\ dx = \int_{\Gamma_1^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da + \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da + \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da \ \ \forall v^\ell \in V^\ell.$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} \sigma^1 \varepsilon(v^1)\ dx + \int_{\Omega^1} \operatorname{Div}\sigma^1 . v^1\ dx = \int_{\Gamma_1^1} \sigma^1 \nu^1 . v^1 da + \int_{\Gamma_2^1} \sigma^1 \nu^1 . v^1 da + \int_{\Gamma_3^1} \sigma^1 \nu^1 . v^1 da \ \ \forall v^1 \in V^1. \tag{2.2.1}$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} \sigma^2 \varepsilon(v^2)\ dx + \int_{\Omega^2} \operatorname{Div}\sigma^2 . v^2\ dx = \int_{\Gamma_1^2} \sigma^2 \nu^2 . v^2 da + \int_{\Gamma_2^2} \sigma^2 \nu^2 . v^2 da + \int_{\Gamma_3^2} \sigma^2 \nu^2 . v^2 da \ \ \forall v^2 \in V^2, \tag{2.2.2}$$

à addition (2.2.1) et (2.2.2)

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell)\ dx + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} \operatorname{Div}\sigma^\ell . v^\ell\ dx \\ = \ & \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_1^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da \ \ \forall v^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'aprés (2.1.4), et (2.1.6)-(2.1.9) on a:

$$\sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell)\ dx + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} (\rho^\ell \ddot{u}^\ell - f_0^\ell) . v^\ell\ dx = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell . v^\ell da + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da \ \ \forall v^\ell \in V^\ell.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^{2} \left(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell)\right)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{u}^\ell . v^\ell dx - \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell . v^\ell\ dx \\ = \ & \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell . v^\ell da + \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell . v^\ell da \ \ \forall v^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^{2}\left(\sigma^{\ell},\varepsilon(\upsilon^{\ell})\right)_{\mathcal{H}^{\ell}}+\sum_{\ell=1}^{2}\left(\rho^{\ell}\ddot{u}^{\ell},\upsilon^{\ell}\right)_{H^{\ell}}-\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^{\ell}}f_{0}^{\ell}.\upsilon^{\ell}\ dx \\ = &\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_{2}^{\ell}}f_{2}^{\ell}.\upsilon^{\ell}da+\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_{3}^{\ell}}\sigma^{\ell}\nu^{\ell}.\upsilon^{\ell}da\ \ \forall\upsilon^{\ell}\in V^{\ell}, \end{aligned}$$

d'aprés les définition de produit scalaire on a:

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left(\rho^{\ell}\ddot{u}^{\ell},\upsilon^{\ell}\right)_{H^{\ell}}=((\ddot{u},\upsilon))_{H}=(\ddot{u},\upsilon)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}}\,,\quad\forall\ddot{u}\in H,\forall\upsilon\in\mathbf{V}.$$

Donc

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left(\sigma^{\ell},\varepsilon(\upsilon^{\ell})\right)_{\mathcal{H}^{\ell}}+(\ddot{u},\upsilon)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}}=\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^{\ell}}f_{0}^{\ell}.\upsilon^{\ell}dx+\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_{2}^{\ell}}f_{2}^{\ell}.\upsilon^{\ell}da+\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_{3}^{\ell}}\sigma^{\ell}\nu^{\ell}.\upsilon^{\ell}da\ \ \forall\upsilon^{\ell}\in V^{\ell},$$

d'aprés (2.1.32)

$$\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^{\ell}}f_{0}^{\ell}.\upsilon^{\ell}dx+\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_{2}^{\ell}}f_{2}^{\ell}.\upsilon^{\ell}da=\left(f\left(t\right),\upsilon\right)_{V'\times V}.$$

En suite:

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left(\sigma^{\ell},\varepsilon(\upsilon^{\ell})\right)_{\mathcal{H}^{\ell}}+(\ddot{u},\upsilon)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}}=\left(f\left(t\right),\upsilon\right)_{V'\times V}+\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_{3}}\sigma^{\ell}\nu^{\ell}.\upsilon^{\ell}da\ \ \forall\upsilon^{\ell}\in V^{\ell}.$$

On calcule: $\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_{3}}\sigma^{\ell}\nu^{\ell}.\upsilon^{\ell}da=?$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_{3}}\sigma^{\ell}\nu^{\ell}.\upsilon^{\ell}da &=\int_{\Gamma_{3}}\sigma^{1}\nu^{1}.\upsilon^{1}da+\int_{\Gamma_{3}}\sigma^{2}\nu^{2}.\upsilon^{2}da \\ &=\int_{\Gamma_{3}}\sigma_{\tau}\left(\upsilon_{\tau}^{1}-\upsilon_{\tau}^{2}\right)da+\int_{\Gamma_{3}}\sigma_{\nu}\left(\upsilon_{\nu}^{1}-\upsilon_{\nu}^{2}\right)da \\ &=\int_{\Gamma_{3}}\sigma_{\tau}\left[\upsilon_{\tau}\right]da+\int_{\Gamma_{3}}\sigma_{\nu}\left[\upsilon_{\nu}\right]da \\ &=-\int_{\Gamma_{3}}p_{\tau}\left(\beta\right)R_{\tau}\left(\left[u_{\tau}\right]\right)\left[\upsilon_{\tau}\right]da+\int_{\Gamma_{3}}\left(-p_{\nu}\left(\left[u_{\nu}\right]\right)+\gamma_{\nu}\beta^{2}R_{\nu}\left(\left[u_{\nu}\right]\right)\right)\left[\upsilon_{\nu}\right]da. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left(\sigma^{\ell},\varepsilon(\upsilon^{\ell})\right)_{\mathcal{H}^{\ell}}+(\ddot{u},\upsilon)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}}+j_{ad}\left(\beta\left(t\right),u\left(t\right),\upsilon\right)+j_{vc}\left(u\left(t\right),\upsilon\right)=\left(f\left(t\right),\upsilon\right)_{V'\times V}\quad\forall\upsilon\in V. \tag{2.2.3}$$

En utilise la formule de Green pour les inconnues électrique du problème ainsi que les conditions (2.1.5), (2.1.12) et la définition (2.1.33) on a

$$\begin{aligned}\left(D^\ell, \nabla\phi^\ell\right)_{\mathcal{H}^\ell} + \left(\operatorname{div} D^\ell, \phi^\ell\right)_{H^\ell} &= \int_{\Gamma^\ell} D^\ell v^\ell.\phi^\ell da \\ &= \int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell v^\ell.\phi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell v^\ell.\phi^\ell da, \quad \forall\phi^\ell \in H_1^\ell.\end{aligned}$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} D^1.\nabla\phi^1 dx + \int_{\Omega^1} \operatorname{div} D^1.\phi^1 dx = \int_{\Gamma_a^1} D^1 v^1.\phi^1 da + \int_{\Gamma_b^1} D^1 v^1.\phi^1 da. \tag{2.2.4}$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} D^2.\nabla\phi^2 dx + \int_{\Omega^2} \operatorname{div} D^2.\phi^2 dx = \int_{\Gamma_a^2} D^2 v^2.\phi^2 da + \int_{\Gamma_b^2} D^2 v^2.\phi^2 da. \tag{2.2.5}$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'aprés (2.1.11)

$$\int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell v^\ell.\phi^\ell da = 0,$$

à addition (2.2.4) et (2.2.5) on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} D^\ell.\nabla\phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell.\phi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell v^\ell.\phi^\ell da,$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} D^\ell.\nabla\phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^2.\phi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell.\phi^\ell da,$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, \nabla\phi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^2.\phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell.\phi^\ell da = 0.$$

On a d'aprés (2.1.11),

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^2.\phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell.\phi^\ell da = (q(t), \phi)_W .$$

Donc

$$\sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, \nabla\phi^\ell)_{H^\ell} + (q(t), \phi)_W = 0,$$

D'aprés (2.1.2) on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{E}^\ell \varepsilon\left(u^\ell(t)\right) - \mathcal{B}^\ell \nabla\varphi^\ell(t), \nabla\phi^\ell\right)_{H^\ell} = -(q(t), \phi)_W ,$$

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left(\mathcal{E}^{\ell}\varepsilon\left(u^{\ell}\left(t\right)\right),\nabla\phi^{\ell}\right)_{H^{\ell}}-\sum_{\ell=1}^{2}\left(\mathcal{B}^{\ell}\nabla\varphi^{\ell}\left(t\right),\nabla\phi^{\ell}\right)_{H^{\ell}}=-\left(q(t),\phi\right)_{W},$$

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{2}\left(\mathcal{B}^{\ell}\nabla\varphi^{\ell}\left(t\right),\nabla\phi^{\ell}\right)_{H^{\ell}}-\sum_{\ell=1}^{2}\left(\mathcal{E}^{\ell}\varepsilon\left(u^{\ell}\left(t\right)\right),\nabla\phi^{\ell}\right)_{H^{\ell}} &= \left(q(t),\phi\right)_{W}, \\ \forall\phi &\in W, t\in(0,T).\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Enfin, soit $\alpha^{\ell}(t)\in K^{\ell}$ et pour tout $t\in[0,T]$. De la définition (1.2.3) de $\partial\Psi_{K^{\ell}}\left(\alpha^{\ell}\right)$ et de (2.1.3), on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\alpha}^{\ell}\left(t\right),\xi^{\ell}-\alpha^{\ell}\left(t\right)\right)_{L^{2}\left(\Omega^{\ell}\right)}+k^{\ell}(\Delta\alpha^{\ell}\left(t\right),\xi^{\ell}-\alpha^{\ell}\left(t\right))_{L^{2}\left(\Omega^{\ell}\right)} \\ \geq\ & \left(\phi^{\ell}\left(\sigma^{\ell}\left(t\right)-\mathcal{A}^{\ell}\varepsilon(\dot{u}^{\ell}\left(t\right))-(\mathcal{E}^{\ell})^{*}\nabla\varphi^{\ell}(t),\varepsilon\left(u^{\ell}\left(t\right)\right),\alpha^{\ell}\left(t\right)\right),\xi^{\ell}-\alpha^{\ell}\left(t\right)\right)_{L^{2}\left(\Omega^{\ell}\right)}, \\ \forall\xi^{\ell}\ \in\ & K^{\ell}.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green avec (2.1.13) et (2.1.34), on trouve

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^{2}\left(\dot{\alpha}^{\ell}\left(t\right),\xi^{\ell}-\alpha^{\ell}\left(t\right)\right)_{L^{2}\left(\Omega^{\ell}\right)}+a(\alpha\left(t\right),\xi-\alpha\left(t\right)) \\ \geq\ & \sum_{\ell=1}^{2}\left(\phi^{\ell}\left(\sigma^{\ell}\left(t\right)-\mathcal{A}^{\ell}\varepsilon(\dot{u}^{\ell}\left(t\right))-(\mathcal{E}^{\ell})^{*}\nabla\varphi^{\ell}(t),\varepsilon\left(u^{\ell}\left(t\right)\right),\alpha^{\ell}\left(t\right)\right),\xi^{\ell}-\alpha^{\ell}\left(t\right)\right)_{L^{2}\left(\Omega^{\ell}\right)}, \\ \forall\xi^{\ell}\ \in\ & K^{\ell}.\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

De (2.1.1), (2.1.2),(2.2.7), (2.2.3) et (2.2.6), nous obtenons la formulation variationnelle du problème électro-élastique **P**.

Problème PV. Trouver les champs des déplacements $u=(u^{1},u^{2}):[0,T]\rightarrow V$, les champs des contraintes $\sigma^{\ell}=(\sigma^{1},\sigma^{2}):[0,T]\rightarrow\mathcal{H}$, les potentiels électriques $\varphi^{\ell}=(\varphi^{1},\varphi^{2}):[0,T]\rightarrow W$, les champs d'endommagements $\alpha^{\ell}=(\alpha^{1},\alpha^{2}):[0,T]\rightarrow H^{1}(\Omega^{\ell})$ un champ d'adhésion $\beta:[0,T]\rightarrow L^{\infty}(\Gamma_{3})$ et les champs des déplacements électriques $D^{\ell}=(D^{1},D^{2}):[0,T]\rightarrow\mathcal{W}$ tels que:

$$\begin{aligned}\sigma^{\ell} &= \mathcal{A}^{\ell}\varepsilon(\dot{u}^{\ell})+\mathcal{G}^{\ell}\varepsilon(u^{\ell})+(\mathcal{E}^{\ell})^{*}\nabla\varphi^{\ell} \\ &+\int_{0}^{t}\mathcal{F}^{\ell}(\sigma^{\ell}(s)-\mathcal{A}^{\ell}\varepsilon(\dot{u}^{\ell}(s))-(\mathcal{E}^{\ell})^{*}\nabla\varphi^{\ell},\varepsilon(u^{\ell}(s)),\alpha^{\ell}(s))ds \quad \text{dans } \Omega^{\ell}\times(0,T),\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

$$D^{\ell}=\mathcal{E}^{\ell}\varepsilon(u^{\ell})-\mathcal{B}^{\ell}\nabla\varphi^{\ell} \quad \text{dans } \Omega^{\ell}\times(0,T), \tag{2.2.9}$$

$$
\begin{aligned}
& (\ddot{u},\upsilon)_{V'\times V}+\sum_{\ell=1}^{2}\left(\sigma^{\ell},\varepsilon\left(\upsilon^{\ell}\right)\right)_{\mathcal{H}^{\ell}}+j_{ad}(\beta\left(t\right),u\left(t\right),\upsilon)+j_{\nu c}\left(u\left(t\right),\upsilon\right) \qquad (2.2.10)\\
= \;& \left(\mathbf{f}\left(t\right),\upsilon\right)_{V'\times V} \quad \forall\upsilon\in V,\; t\in(0,T),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\ell=1}^{2}\left(\dot{\alpha}^{\ell}\left(t\right),\xi^{\ell}-\alpha^{\ell}\left(t\right)\right)_{L^{2}\left(\Omega^{\ell}\right)}+a(\alpha\left(t\right),\xi-\alpha\left(t\right)) \qquad (2.2.11)\\
\geq \;& \sum_{\ell=1}^{2}\left(\phi^{\ell}\left(\sigma^{\ell}\left(t\right)-\mathcal{A}^{\ell}\varepsilon(\dot{u}^{\ell}\left(t\right))-(\mathcal{E}^{\ell})^{*}\nabla\varphi^{\ell}(t),\varepsilon\left(u^{\ell}\left(t\right)\right),\alpha^{\ell}\left(t\right)\right),\xi^{\ell}-\alpha^{\ell}\left(t\right)\right)_{L^{2}\left(\Omega^{\ell}\right)},\\
\forall\xi^{\ell} \in \;& K^{\ell}, p.p.t\in(0,T),
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{\ell=1}^{2}\left(\mathcal{B}^{\ell}\nabla\varphi^{\ell}(t),\nabla\phi^{\ell}\right)_{H^{\ell}}-\sum_{\ell=1}^{2}\left(\mathcal{E}^{\ell}\varepsilon(u^{\ell}(t)),\nabla\phi^{\ell}\right)_{H^{\ell}}=(q(t),\phi)_{W} \qquad \forall\phi\in W,t\in(0,T), \qquad (2.2.12)
$$

$$
\dot{\beta}=-\left(\beta(t)(\gamma_{\nu}(R_{\nu}([u_{\nu}(t)]))^{2}+\gamma_{\tau}\left|R_{\tau}([u_{\tau}(t)])\right|^{2})-\varepsilon_{a}\right)_{+} \quad p.p. \text{ dans } (0,T), \qquad (2.2.13)
$$

$$
u\left(0\right)=u_{0}, \quad \dot{u}\left(0\right)=\upsilon_{0}, \alpha\left(0\right)=\alpha_{0}, \quad \beta(0)=\beta_{0}. \qquad (2.2.14)
$$

Nous remarquons que le problème variationnel **PV** est formulée en termes de champ de déplacement , un champ de contrainte , un champ potentiel électrique, un champ d'endommagement, un champ d'àdhésion et un champ de déplacement électrique. L'existence de la solution unique à un problème **PV** est dit et prouvé dans la section suivante.

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} et $j_{\nu c}$ qui seront utilisées dans les sections suivantes. Ci-dessous dans cette section β, β_1, β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tels que $0\leq\beta,\beta_1,\beta_2\leq 1$, $p.p.$ $x\in\Gamma_3$, u_1, u_2 et υ représentent des éléments de $\mathbf{V}$ et $C>0$ est une constante positive générique qui peut dépendre de Ω^ℓ, Γ_3, p_ν, p_τ, γ_ν, γ_τ et L, dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x\in\Omega^1\cup\Omega^2\cup\Gamma_3$.

D'abord, nous faisons remarquer que les fonctionnelles j_{ad} et $j_{\nu c}$, sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$
\begin{aligned}
j_{ad}(\beta,u,-\upsilon) &= -j_{ad}(\beta,u,\upsilon), \qquad (2.2.15)\\
j_{\nu c}(u,-\upsilon) &= -j_{\nu c}(u,\upsilon).
\end{aligned}
$$

Ensuite, en utilisant (2.1.35), les propriétés des opérateurs R_ν et R_τ et les hypothèse (2.1.23) des fonctions p_τ, nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq C \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \, \|u_1 - u_2\|_V \, da.$$

D'après le théorème de trâce et quelques manipulations algébriques, nous obtenons

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq C \, |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Gamma_3)} \, \|u_1 - u_2\|_V \, . \qquad (2.2.16)$$

Des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzialité des opérateurs R_ν, R_τ et p_τ montrent que :

$$|j_{ad}(\beta_1, u_1, v) + j_{ad}(\beta_2, u_2, v)| \leq C \, \|u_1 - u_2\|_V \, \|v\|_V \, . \qquad (2.2.17)$$

En choisissant $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (2.2.16), nous trouvons

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \qquad (2.2.18)$$

Aussi, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (2.2.17) pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0. \qquad (2.2.19)$$

Maintenant, nous utilisons (2.1.36) pour voir que

$$j_{\nu c}(u_1, v) + j_{\nu c}(u_2, v) \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| \, |[v_\nu]| \, da,$$

ensuite (2.1.22)(b) et (1.2.5) impliquent

$$|j_{\nu c}(u_1, v) + j_{\nu c}(u_2, v)| \leq C \, \|u_1 - u_2\|_V \, \|v\|_V \, . \qquad (2.2.20)$$

Nous utilisons encore une fois (2.1.36), pour obtenir

$$j_{\nu c}(u_1, u_2 - u_1) + j_{\nu c}(u_2, u_1 - u_2) = -\int_{\Gamma_3} |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| \, |[u_{1\nu} - u_{2\nu}]| \, da,$$

et alors, (2.1.22)(c) implique

$$j_{\nu c}(u_1, u_2 - u_1) + j_{\nu c}(u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \qquad (2.2.21)$$

Aussi, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans l'inégalité (2.1.22)(e) et (2.2.21) pour obtenir

$$j_{\nu c}(v, v) \geq 0. \qquad (2.2.22)$$

Nous énonçons maintenant notre résultat principal concernant l'unique solvabilité du Problème **PV** dont la démonstration sera détaillée dans la section suivante.

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Notre intêret principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel **PV**.

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (2.1.16)–(2.1.29). le problème variationnel* ***PV*** *admet une solution unique* $\{u, \sigma, \varphi, \alpha, \beta, D\}$ *ayant la régularité suivante :*

$$u \in H^1(0,T;V) \cap C^1(0,T;H), \qquad \ddot{u} \in L^2(0,T;V'), \tag{2.3.1}$$

$$\varphi \in C(0,T;W), \tag{2.3.2}$$

$$\alpha \in H^1(0,T;E_0) \cap L^2(0,T;E_1), \tag{2.3.3}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \tag{2.3.4}$$

Un jeu des fonctions $(u, \varphi, \alpha, \beta, \sigma, D)$*qui satisfait (2.2.8)-(2.2.14) est appelé solution faible du Problème P. Sous les hypothèses (2.1.16)-(2.1.29), le problème (2.1.1)-(2.1.15) a une unique solution faible. Pour préciser la régularité de la solution faible nous notons que les relations constitutives (2.1.1) et (2.1.2), les hypothèses (2.1.16)-(2.1.21) et les régularités (2.3.1)-(2.3.4), montrent que*

$$\sigma \in L^2(0,T;\mathcal{H}), \quad D \in C(0,T;W).$$

Il s'ensuit maintenant des régularités (2.1.25) et (2.3.1) que $\rho^\ell \ddot{u}^\ell = \operatorname{Div} \sigma^\ell(t) + f_0^\ell(t)$, $\operatorname{div} D^\ell(t) - q_0^\ell(t) = 0$, $\forall t \in [0;T]$, *ce qui montre que:*

$$\sigma \in L^2(0,T;\mathcal{H}), \tag{2.3.5}$$

$$D \in C(0,T;W). \tag{2.3.6}$$

Nous concluons que la solution faible $\{u, \varphi, \alpha, \beta, \sigma, D\}$ *du problème piézoélectrique de contact avec adhésion* ***P*** *possède la régularité (2.3.1)-(2.3.6).*

2.3.1 Démonstration du Théorème 2.3.1

Nous nous occupons maintenant de la preuve du Théorème 2.3.1 qui est basée sur des résultats classiques d'équations non linéaires avec opérateurs monotones et équations différentielles ordinaires, combinées avec un argument de point fixe. Cela est réalisé en plusieurs étapes. Nous supposons dans la suite que les hypothèses (2.1.16)-(2.1.29) sont vérifiées. En outre, partout dans cette section, C représentera une constante strictement positive générique qui peut dépendre de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \gamma_\nu, \gamma_\tau$ et L, dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

Dans la première étape nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ de déplacement, dans lequel $\eta \in L^2(0,T;V')$ est donne.

Problème $\mathbf{PV}_\eta^u$. Trouver les champs des déplacements $u_\eta = \left(u_\eta^1, u_\eta^2\right) : [0;T] \to V$ tels que :

$$\begin{aligned} & \left(\ddot{u}_\eta\left(t\right), v\right)_{V'\times V} + \sum_{\ell=1}^{2}\left(\mathcal{A}^\ell\varepsilon\left(\dot{u}^\ell\left(t\right)\right), \varepsilon\left(v^\ell\right)\right)_{\mathcal{H}^\ell} + \left(\eta\left(t\right), v\right)_{V'\times V} \\ = \; & \left(f\left(t\right), v\right)_{V'\times V} \quad \forall v \in V,\ p.p.\ t \in (0,T), \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

$$u_\eta^\ell\left(0\right) = u_0^\ell, \quad \dot{u}_\eta^\ell\left(0\right) = v_0^\ell \quad \text{sur } \Omega^\ell, \tag{2.3.8}$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemme 2.3.1 *Il existe une solution unique du problème $\mathbf{PV}_\eta^u$ qui satisfait (2.3.1).*

Preuve. On definit l'operateur $A : V \to V'$ par

$$(Au, v)_{V'\times V} = \sum_{\ell=1}^{2}\left(\mathcal{A}^\ell\varepsilon\left(u^\ell\right), \varepsilon\left(v^\ell\right)\right)_{\mathcal{H}^\ell} \qquad \forall u, v \in V. \tag{2.3.9}$$

En utilisant maintenant (2.3.9) et (2.1.16)(a), il s'ensuit que

$$\left\|Au - Av\right\|_{V'}^2 \le \sum_{\ell=1}^{2}\left\|\mathcal{A}^\ell\varepsilon\left(u^\ell\right) - \mathcal{A}^\ell\varepsilon\left(v^\ell\right)\right\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \le C\left\|u - v\right\|_V \tag{2.3.10}$$

ce qui implique que $A : V \to V'$ est continu. Maintenant, par (2.3.9) et (2.1.16)(b), on obtient

$$(Au - Av, u - v)_{V'\times V} \ge m\left\|u - v\right\|_V^2 \qquad \forall u, v \in V, \tag{2.3.11}$$

où $m = \min\{m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}\}$, i.e. $A : V \to V'$est un operateur monotone. On prend $v = 0$ dans (2.3.11) et on obtient

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V'\times V} & \ge m\left\|u\right\|_V^2 - \left\|Ao\right\|_{V'}^2\left\|u\right\|_V \\ & \ge \frac{1}{2}m\left\|u\right\|_V^2 - \frac{1}{2m}\left\|Ao\right\|_{V'}^2, \qquad \forall u \in V, \end{aligned}$$

Ainsi A satisfait la condition (1.2.14) avec $\omega = \frac{m}{2}$ et $\lambda = -\frac{1}{2m} \|Ao\|_{V'}^2$. De plus à l'aide de (2.3.10) nous déduisons que

$$\|Au\|_{V'} \leq C^1 \|u\|_V + C^2 \quad \forall u \in V.$$

Cette inégalité implique que l'opérateur A satisfait la condition (1.2.15). Finalement, nous rappelons que par (2.1.25) et (2.1.29) nous avons $f-\eta \in L^2(0,T;V')$ et $\upsilon_0 \in H$. Il vient du Théorème 1.2.5 qu'il existe une unique fonction υ_η qui satisfait

$$\upsilon_\eta \in L^2(0,T;\mathbf{V}) \cap C(0,T;H), \qquad \dot{\upsilon}_\eta \in L^2(0,T;V'), \tag{2.3.12}$$

$$\dot{\upsilon}_\eta(t) + A\upsilon_\eta(t) + \eta(t) = f(t), \quad p.p.\ t \in [0,T] \tag{2.3.13}$$

$$\upsilon_\eta(0) = \upsilon_0. \tag{2.3.14}$$

Soit $u_\eta : [0,T] \to \mathbf{V}$ est une fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t \upsilon_\eta(s)\, ds + u_0 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.3.15}$$

On déduit de (2.3.9) et (2.3.12)-(2.3.15) que u_η est la solution unique du problème $\mathbf{PV}_\eta^u$ tel que (2.3.1) est vérifiée. Ceci conclut la partie d'existence du Lemme 2.3.1. La partie unicité découle de l'unicité de la solution du problème (2.3.12)-(2.3.14), guarantie par le Théorème 1.2.5. ■

Dans la deuxième étape nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans le Lemme 2.3.1 pour construire le problème de Cauchy associé au champ du tenseur des contraintes suivant.

Problème $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$.Trouver le champ de contrainte $\sigma_\eta = \left(\sigma_\eta^1, \sigma_\eta^2\right) : [0,T] \to \mathcal{H}$ tels que

$$\sigma_\eta^\ell(t) = \mathcal{G}^\ell \varepsilon\left(u_\eta^\ell(t)\right) + \int_0^t \mathcal{F}^\ell\left(\sigma_\eta^\ell(s), \varepsilon\left(u_\eta^\ell(s)\right)\right) ds, \quad \ell = 1,2, \quad t \in [0,T]. \tag{2.3.16}$$

Pour résoudre le Problème $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.2 *Il existe une solution unique du Problème* $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$ *qui satisfait*

$$\sigma_\eta \in W^{1,2}(0,T;\mathcal{H}).$$

De plus, si σ_i *et* u_i *représentent les solutions des problèmes* $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$ *et* $\mathbf{PV}_\eta^u$*, respectivement, pour* $\eta_i \in L^2(0,T;V'), i = 1,2,$*alors, il existe* $c > 0$ *telle que*

$$\|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq c\left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V\, ds\right) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.3.17}$$

Preuve. Soit $\Lambda_\eta = (\Lambda_\eta^1, \Lambda_\eta^2) : L^2(0,T;\mathcal{H}) \to L^2(0,T;\mathcal{H})$ est un opérateur définie par

$$\Lambda_\eta^\ell \sigma(t) = \mathcal{G}^\ell \varepsilon\left(u_\eta^\ell(t)\right) + \int_0^t \mathcal{F}^\ell\left(\sigma^\ell(s), \varepsilon\left(u_\eta^\ell(s)\right)\right) ds, \quad \ell = 1,2 \tag{2.3.18}$$

pour toute $\sigma^1, \sigma^2 \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ en utilisant (2.3.18) et (2.1.18), nous obtenons

$$\|\Lambda_\eta \sigma_1(t) - \Lambda_\eta \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \max\left(L_{\mathcal{F}^1}, L_{\mathcal{F}^2}\right) \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}\, ds$$

Il résulte de cette inégalité que pour p assez grand, l'opérateur Λ_η^p est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0,T;\mathbf{V})$ et, par conséquent, il existe un élément unique $\sigma_\eta \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ tel que $\Lambda_\eta \sigma_\eta = \sigma_\eta$. Aussi, σ_η est l'unique solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$, et en utilisant (2.3.16), la régularité de u_η et les propriétés des opérateurs $\mathcal{G}^\ell$ et $\mathcal{F}^\ell$, nous obtenons $\sigma_\eta \in W^{1,2}(0,T;\mathcal{H})$. Nous considérons $\eta_{1,}\eta_2 \in L^2(0,T;\mathbf{V}')$, pour $i = 1,2$, et notons par $u_{\eta_i} = u_i, \sigma_{\eta_i} = \sigma_i$. Nous avons

$$\sigma_i^\ell(t) = \mathcal{G}^\ell \varepsilon\left(u_i^\ell(t)\right) + \int_0^t \mathcal{F}^\ell\left(\sigma_i^\ell(s), \varepsilon\left(u_i^\ell(s)\right)\right) ds, \;\; \ell = 1,2 \;\; t \in [0,T],$$

et, en utilisant les propriétés (2.1.17) et (2.1.18) de $\mathcal{G}^\ell$ et $\mathcal{F}^\ell$, nous trouvons

$$\|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq c(\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathbf{V}} + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}\, ds$$

$$+ \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V\, ds) \quad \forall t \in [0,T].$$

Nous utilisons le lemme de *Gronwall*, nous trouvons (2.3.17), ce qui achève la preuve du lemme. ■

Dans la troisième étape, nous utilisons aussi le champ de déplacement u_η obtenu dans le lemme 2.3.1 pour construire le problème variationnel suivant :

Problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$. Trouver le potentiel électrique $\varphi_\eta : [0,T] \to W$ tel que

$$\sum_{\ell=1}^{2} \left(\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_\eta^\ell(t), \nabla \phi^\ell\right)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^{2} \left(\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell\right)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0,T). \tag{2.3.19}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.3 *Le problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$ possède une solution unique qui satisfait la régularité (2.3.2).*

Preuve. Soit $b(.,.) : W \times W \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par

$$b(\varphi, \phi) = \sum_{\ell=1}^{2} \left(\mathcal{B}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell\right)_{H^\ell} \qquad \forall \varphi, \phi \in W. \tag{2.3.20}$$

Nous utilisons (2.3.20), (1.2.6) et (2.1.21) pour déduire que $b(.,.)$ est continue, symétrique et coercive. En outre, nous appliquons le théorème de représentation de *Riesz* pour définir la fonction $q_\eta : [0,T] \to W$ tel que

$$(q_\eta(t), \phi)_W = \sum_{\ell=1}^{2} \left(q_\eta^\ell(t), \phi^\ell\right)_{W^\ell} + \sum_{\ell=1}^{2} \left(\mathcal{E}^\ell \varepsilon\left(u_\eta^\ell(t)\right), \nabla \phi^\ell\right)_{H^\ell} \qquad \forall \phi \in W, t \in (0,T).$$

En appliquant le théorème de *Lax-Milgram* on obtient l'existence et l'unicité $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$b\left(\varphi_\eta(t), \phi\right) = (q_\eta(t), \phi)_W \qquad \forall \phi \in W. \tag{2.3.21}$$

Nous concluons que $\varphi_\eta(t)$ est une solution du Problème PV_η^φ. Pour $t_1, t_2 \in [0,T]$,en utilisant des arguments basés sur (2.3.19) nous trouvons

$$\left\|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\right\|_W \leq C\left(\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W\right), \tag{2.3.22}$$

Comme $u_\eta \in C^1(0,T;H)$ et $q \in C(0,T;W)$ nous déduisons de l'inégalité (2.3.22) que $\varphi_\eta \in C(0,T;W)$. ■

Dans la quatrième étape, soit $\theta \in C(0,T;E_0)$. On considère alors pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant.

Problème $\mathbf{PV}_\theta^\alpha$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\theta = (\alpha_\theta^1, \alpha_\theta^2) : [0,T] \to E_0$ tel que

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^{2} \left(\dot{\alpha}_\theta^\ell (t), \xi^\ell - \alpha_\theta^\ell (t)\right)_{L^2\left(\Omega^\ell\right)} + a(\alpha_\theta (t), \xi - \alpha_\theta (t)) \\ \geq & \sum_{\ell=1}^{2} \left(\theta^\ell (t), \xi^\ell - \alpha_\theta^\ell (t)\right)_{L^2\left(\Omega^\ell\right)}, \\ \forall \xi \in & K, p.p.t \in (0,T), \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

$$\alpha_\theta (0) = \alpha_0.$$

Où $K = K^1 \times K^2$.

On a le résultat suivant.

Lemme 2.3.4 *Le problème* $\mathbf{PV}_\theta^\alpha$ *admet une solution unique* α_θ *telle que*

$$\alpha_\theta \in H^1 (0,T; E_0) \cap L^2 (0,T; E_1).$$

Preuve. L'application d'inclusion de $\left(E_1, \|.\|_{E_1}\right)$ dans $\left(E_0, \|.\|_{E_0}\right)$ est continue et à image dense. Notant par E_1' l'espace dual de E_1 et identifiant le dual de E_0 avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$E_1 \subset E_0 = E_0' \subset E_1'.$$

Nous utilisons la notation $(.,.)_{E_1' \times E_1}$ pour désigner le produit de dualité entre E_1' et E_1, nous avons

$$(\alpha, \xi)_{E_1' \times E_1} = (\alpha, \xi)_{E_0} \quad \forall \alpha \in E_0,\ \xi \in E_1.$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans E_1. Ainsi, le champ d'endommagement initial $\alpha_0 \in K$. Maintenant, en utilisant la définition (2.1.34) de la forme bilinéaire a, pour tout ϕ, $\xi \in E_1$, on a

$$a(\phi, \xi) = a(\xi, \phi),$$

et

$$\begin{aligned} \|a(\phi,\xi)\| &\leq 3k\|\nabla\phi\|_H\|\nabla\xi\|_H \\ &\leq c\|\phi\|_{H^1}\|\xi\|_{H^1}, \end{aligned}$$

donc, a est continue et symétrique. Ainsi, pour tout $\phi \in E_1$, nous avons

$$a(\phi,\phi) = k\|\nabla\varphi\|_H^2,$$

alors

$$a(\phi,\phi) + (k+1)\|\phi\|_{E_0}^2 \geq k\left(\|\nabla\phi\|_H^2 + \|\phi\|_{E_0}^2\right),$$

et d'où

$$a(\phi,\phi) + c_0\|\phi\|_{E_0}^2 \geq c_1\|\phi\|_{E_1}^2 \quad \text{avec } c_0 = k+1 \text{ et } c_1 = k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème 1.2.8 sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du lemme 2.3.4. ■

Dans la prochaine étape, nous utilisons encore la solution u_η obtenue dans le Lemme 2.3.1, notons par $u_{\eta\nu}$ et $u_{\eta\tau}$ ses composantes normales et tangentielles, respectivement, et construisons le problème de Cauchy suivant pour le champ d'adhésion.

Problème $\mathbf{PV}_\eta^\beta$.Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta : [0,T] \to L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = -\left(\beta_\eta(t)\left(\gamma_v\left(R_v\left([u_{\eta v}(t)]\right)\right)^2 + \gamma_\tau\left|R_\tau\left([u_{\eta\tau}(t)]\right)\right|^2\right) - \varepsilon_a\right)_+, \quad p.p. t \in (0,T), \tag{2.3.24}$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \tag{2.3.25}$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemme 2.3.5 *Il existe une solution unique du Problème* $\mathbf{PV}_\eta^\beta$ *et cela satisfait*

$$\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)\cap\mathcal{Z}).$$

Preuve. Pour la simplicité, nous supprimons la dépendance de diverses fonctions sur Γ_3, et notée que les égalités et inégalités ci-dessous sont valables *p.p.* sur Γ_3. Considérer l'application $F_\eta : [0,T] \times L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_3)$ défini par

$$F_\eta(t,\beta) = -\left(\beta\left(\gamma_v\left(R_v\left([u_{\eta v}(t)]\right)\right)^2 + \gamma_\tau\left|R_\tau\left([u_{\eta\tau}(t)]\right)\right|^2\right) - \varepsilon_a\right)_+, \tag{2.3.26}$$

pour tout $t \in [0,T]$ et $\beta \in L^2(\Gamma_3)$. Il résulte des propriétés de l'opérateur de troncature R_v et R_τ que F_η Lipschitz est continue par rapport à la seconde variable, de manière uniforme dans le temps. En outre, pour tous $\beta \in L^2(\Gamma_3)$,l'application $t \mapsto F_\eta(t,\beta)$ appartient à $L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_3))$. Ainsi, en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz donné dans le théorème 1.2.4 on en déduit qu'il existe une fonction unique $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$ solution au problème $\mathbf{PV}_\eta^\beta$. Aussi, les arguments utilisés dans la remarque 1.1.1 montrent que $0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,T]$, *p.p.* sur Γ_3. Par conséquent, à partir de la définition de l'ensemble $\mathcal{Z}$ nous trouvons que $\beta_\eta(t) \in \mathcal{Z}$, qui conclut la preuve du lemme. ■

Maintenant, pour chaque $(\eta,\theta) \in L^2(0,T;V' \times E_0)$, nous notons par u_η la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^u$ fournie dans le Lemme 2.3.1, par σ_η la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^\sigma$ fournie dans le Lemme 2.3.2, par φ_η la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$ fournie dans le Lemme 2.3.3 et, par α_θ la solution du problème $\mathbf{PV}_\theta^\alpha$ fournie dans le Lemme 2.3.4, par β_n la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^\beta$ fournie dans le Lemme 2.3.5. En outre, nous appliquons le théorème de représentation de *Riesz* pour définir la fonction $\Lambda : L^2(0,T;V' \times E_0) \to L^2(0,T;V' \times E_0)$ par

$$\Lambda(\eta,\theta)(t) = \big(\Lambda^1(\eta,\theta)(t), \Lambda^2(\eta,\theta)(t)\big) \in V' \times E_0, \tag{2.3.27}$$

avec

$$\big(\Lambda^1(\eta,\theta)(t), v\big)_{V'\times V} = \sum_{\ell=1}^{2} \big(\mathcal{G}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell)\big)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^{2} \Big(\big(\mathcal{E}^\ell\big)^* \nabla\varphi_\eta^\ell \varepsilon(v^\ell)\Big)_{\mathcal{H}^\ell} \tag{2.3.28}$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{2} \left(\int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma_\eta^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_\eta^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla\varphi_\eta^\ell(s), \varepsilon(u_\eta^\ell(s)), \alpha_\theta^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}$$

$$+ j_{ad}\big(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v\big) + j_{\nu c}(u_\eta(t), v), \quad \forall v \in V.$$

$$\big(\Lambda^2(\eta,\theta)(t), v\big)_{V'\times V} = (\phi^1(\sigma_\eta^1(t) - \mathcal{A}^1 \varepsilon(\dot{u}_\eta^1(t)) - (\mathcal{E}^1)^* \nabla\varphi_\eta^1(t), \varepsilon\big(u_\eta^1(t)\big), \alpha_\theta^1(t))$$

$$, \phi^2(\sigma_\eta^2(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_\eta^2(t)) - (\mathcal{E}^2)^* \nabla\varphi_\eta^2(t), \varepsilon\big(u_\eta^2(t)\big), \alpha_\theta^2(t))). \tag{2.3.29}$$

Pour tout $(\eta,\theta) \in L^2(0,T;V' \times E_0)$, $u_\eta, \sigma_\eta, \varphi_\eta, \alpha_\theta$ et β_η représentent le champ de diplacement, le champ du tenseur des contraintes,le champ le potentiel électrique, le champ d'endommagement etle champ d'adhésion obtenus les lemmes 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 et 2.3.5 respectivement. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.6 *L'opérateur Λ a un unique point fixe $(\eta^*, \theta^*) \in C(0,T;V' \times E_0)$ tel que*

$$\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*).$$

Preuve. Nous montrons que pour un nombre entier positif m, la puissance m ième de l'opérateur Λ, notée Λ^m est une contraction de $C(0,T;V' \times E_0)$. Soient (η_1, θ_1) et $(\eta_2, \theta_2) \in C(0,T;V' \times E_0)$ et par simplicité, nous utilisons les notations $u_{\eta_i} = u_i$, $\dot{u}_{\eta_i} = \upsilon_i$, $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$, $\alpha_{\theta_i} = \alpha_i$ et $\beta_{\eta_i} = \beta_i$ pour $i = 1.2$.

En utilisant (2.1.17), (2.1.20), (2.1.22), (2.1.23) et (2.1.18), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|\Lambda^1(\eta_1,\theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2,\theta_2)(t)\right\|_{V'}^2 \leq \sum_{\ell=1}^{2} \left\|\mathcal{G}^\ell\varepsilon(u_1^\ell(t)) - \mathcal{G}^\ell\varepsilon(u_2^\ell(t))\right\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \qquad (2.3.30)\\
+\sum_{\ell=1}^{2}\int_0^t ||\mathcal{F}^\ell(\sigma_1^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell\varepsilon(\dot{u}_1^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\varphi_1^\ell(s), \varepsilon(u_1^\ell(s)), \alpha_1^\ell(s))\\
-\mathcal{F}^\ell(\sigma_2^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell\varepsilon(\dot{u}_2^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\varphi_2^\ell(s), \varepsilon(u_2^\ell(s)), \alpha_2^\ell(s))||_{\mathcal{H}^\ell}^2 ds\\
+\sum_{\ell=1}^{2}\left\|\left(\mathcal{E}^\ell\right)^*\nabla\varphi_1^\ell(t) - \left(\mathcal{E}^\ell\right)^*\nabla\varphi_2^\ell(t)\right\|_{\mathcal{H}^\ell}^2\\
+C\left\|p_\nu([u_{1\nu}(t)]) - p_\nu([u_{2\nu}(t)])\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2\\
+C\left\|\beta_1^2(t)R_\nu([u_{1\nu}(t)]) - \beta_2^2(t)R_\nu([u_{2\nu}(t)])\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2\\
+C\left\|p_\tau(\beta_1(t))R_\tau([u_{1\tau}(t)]) - p_\tau(\beta_2(t))R_\tau([u_{2\tau}(t)])\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2.
\end{aligned}$$

et en utilisant la définition de R_ν et R_τ, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\Lambda^1(\eta_1,\theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2,\theta_2)(t)\right\|_{V'}^2 \leq\ & C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \qquad (2.3.31)\\
& + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2\\
& + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2).
\end{aligned}$$

Nous rappelons que $u_{\eta\nu}^\ell$ et $u_{\eta\tau}^\ell$ représentent les composantes normale et tangentielle de la fonction u_η^ℓ respectivement. Maintenant, de (2.3.29) et (2.1.19), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\Lambda^2(\eta_1,\theta_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2,\theta_2)(t)\right\|_{E_0}^2 \leq\ & C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \qquad (2.3.32)\\
& + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{E_0}^2 + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{E_0}^2 ds\\
& + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2),
\end{aligned}$$

Alors, depuis (2.3.30) et (2.3.32), on a

$$\begin{aligned}\|\Lambda(\eta_1,\theta_1)(t)-\Lambda(\eta_2,\theta_2)(t)\|^2_{V\times E_0'} \leq\ & C(\|u_1(t)-u_2(t)\|^2_V+\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|^2_V\,ds \\ & +\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|^2_W+\|\alpha_1(t)-\alpha_2(t)\|^2_{E_0} \\ & +\int_0^t\|\alpha_1(s)-\alpha_2(s)\|^2_{E_0}\,ds+\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma_3)}).\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

D'autre part, de (2.3.7), nous trouvons

$$(\dot{\upsilon}_1-\dot{\upsilon}_2,\upsilon_1-\upsilon_2)_{V'\times V}+\sum_{\ell=1}^{2}\left(\mathcal{A}^\ell\varepsilon\left(\upsilon_1^\ell\right)-\mathcal{A}^\ell\varepsilon\left(\upsilon_2^\ell\right),\varepsilon\left(\upsilon_1^\ell-\upsilon_2^\ell\right)\right)_{\mathcal{H}^\ell}$$

$$+(\eta_1-\eta_2,\upsilon_1-\upsilon_2)_{V'\times V}=0.$$

Nous intégrons l'égalité précédente par rapport au temps cette relation et, en utilisant les conditions initiales, $\upsilon_1(0)=\upsilon_2(0)=\upsilon_0$ et de (2.1.16), nous trouvons

$$m\int_0^t\|\upsilon_1(s)-\upsilon_2(s)\|^2_V\,ds\leq-\int_0^t(\eta_1(s)-\eta_2(s),\upsilon_1(s)-\upsilon_2(s))_{V'\times V}\,ds.$$

En utilisant l'inégalité $2ab\leq\frac{a^2}{m}+mb^2$, pour tout $t\in[0,T]$, on a

$$\int_0^t\|\upsilon_1(s)-\upsilon_2(s)\|^2_V\,ds\leq C\int_0^t\|\eta_1(s)-\eta_2(s)\|^2_{V'}\,ds\quad\forall t\in[0,T]. \tag{2.3.34}$$

Nous intégrons maintenant (2.3.24) avec l'état initial (2.3.25) pour obtenir

$$\beta_i(t)=\beta_0-\int_0^t\left(\beta_i(s)\left(\gamma_\nu\left(R_\nu\left([u_{i\nu}(s)]\right)\right)^2+\gamma_\tau\left|R_\tau\left([u_{i\tau}(s)]\right)\right|^2\right)-\varepsilon_a\right)_+ds.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\leq\ & C\int_0^t\left\|\beta_1(s)R_\nu([u_{1\nu}(s)])^2-\beta_2(s)R_\nu([u_{2\nu}(s)])^2\right\|_{L^2(\Gamma_3)}ds \\ & +C\int_0^t\left\|\beta_1(s)\left|R_\tau([u_{1\tau}(s)])\right|^2-\beta_2(s)\left|R_\tau([u_{2\tau}(s)])\right|^2\right\|_{L^2(\Gamma_3)}ds.\end{aligned}$$

En utilisant la définition des opérateurs de troncation R_v et R_τ et en écrivant que $\beta_1=\beta_1-\beta_2+\beta_2$, après quelques calculs élémentaires nous trouvons

$$\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\leq C\left(\int_0^t\|\beta_1(s)-\beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\,ds+\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d}\,ds\right). \tag{2.3.35}$$

Il s'ensuit maintenant d'un argument de type Gronwall que

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \, ds.$$

et, en utilisant (1.2.5), nous obtenons

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|^2_V \, ds. \tag{2.3.36}$$

En utilisant maintenant (2.3.19), (1.2.6), (2.1.20) et (2.1.21), il en découle

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|^2_W \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|^2_V . \tag{2.3.37}$$

En substituant (2.3.36) et (2.3.37) dans (2.3.33) il vient

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|^2_{V' \times E_0} &\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|^2_V + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|^2_V \, ds \\ &\quad + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|^2_{E_0}) \\ &\leq C\left(\int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|^2_V \, ds + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|^2_{E_0}\right). \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

Nous combinons les inégalités (2.3.34) et (2.3.38) pour obtenir

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|^2_{V' \times E_0} \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|^2_{V' \times E_0} \, ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité on obtient

$$\|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V}' \times E_0)} \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V}' \times E_0)} . \tag{2.3.39}$$

Comme $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{C^m T^m}{m!} = 0$; cela implique pour m assez grand, l'opérateur Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; V' \times E_0)$. Il existe donc un unique $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times E_0)$. tel que $\Lambda^m(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$ et (η^*, θ^*) est aussi l'unique point fixe de Λ.

■

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour prouver le Théorème 2.3.1.

Démonstration du Théorème 2.3.1.

Existence. Soit $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T; \mathbf{V}' \times E_0)$ est un point fixe de Λ, et soit $u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*}$, α_{θ^*} et β_{η^*} les solutions des problèmes $\mathbf{PV}^u_{\eta^*}, \mathbf{PV}^\sigma_{\eta^*}, \mathbf{PV}^\varphi_{\eta^*}, \mathbf{PV}^\alpha_{\theta^*}$ et $\mathbf{PV}^\beta_{\eta^*}$, respectivement.

Nous utilisons les notations suivantes :

$$u_* = u_{\eta^*}, \quad \varphi_* = \varphi_{\eta^*}, \quad \alpha_* = \alpha_{\theta^*} , \quad \beta_* = \beta_{\eta^*}, \tag{2.3.40}$$

$$\sigma_*^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell + \sigma_{\eta^*}^\ell \quad \forall t \in [0,T]\,, \tag{2.3.41}$$

$$D_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \varphi_*^\ell, \quad \forall t \in [0,T]\,. \tag{2.3.42}$$

En utilisant (2.3.7) pour $\eta = \eta^*$, ainsi que (2.3.40), on obtient

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_*(t), \upsilon)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^{2} (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)), \varepsilon(\upsilon^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\eta^*(t), \upsilon)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} \\ = \ & (f(t), \upsilon)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} \quad \forall \upsilon \in \mathbf{V}, t \in [0,T]\,. \end{aligned} \tag{2.3.43}$$

En outre, nous écrivons (2.3.23) pour $\theta = \theta^*$ et en utilisant (2.3.40), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^{2} \left(\dot{\alpha}_*^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_*^\ell(t)\right)_{E_0} + a\left(\alpha_*(t), \xi - \alpha_*(t)\right) \\ \geq \ & \sum_{\ell=1}^{2} \left(\phi^\ell(\sigma_*^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon\left(u_*^\ell(t)\right), \alpha_*^\ell(t), \xi^\ell - \alpha_*^\ell(t)\right)_{E_0}, \\ & \forall \xi \in K, p.p.t \in (0,T)\,. \end{aligned} \tag{2.3.44}$$

Par ailleurs, comme $\Lambda_1(\eta^*, \theta^*) = \eta^*$, et $\Lambda_2(\eta^*, \theta^*) = \theta^*$ on a

$$\begin{aligned} (\eta^*(t), \upsilon)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} &= \sum_{\ell=1}^{2} (\mathcal{G}^\ell \varepsilon\left(u_*^\ell(t)\right), \varepsilon(\upsilon^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^{2} ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell, \varepsilon(\upsilon^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + \sum_{\ell=1}^{2} \left(\int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma_*^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(s)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \varepsilon\left(u_*^\ell(s), \alpha_*^\ell(s)\right)\right) ds, \varepsilon(\upsilon^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_{ad}(\beta_*(t), u_*(t), \upsilon) + j_{\nu c}(u_*(t), \upsilon), \quad \forall \upsilon \in \mathbf{V}. \end{aligned} \tag{2.3.45}$$

$$\theta_*^\ell(t) = \phi^\ell\left(\sigma_*^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon\left(u_*^\ell(t)\right), \alpha_*^\ell(t)\right), \quad p.p.t \in (0,T), \ell = 1,2. \tag{2.3.46}$$

En utilisant (2.3.45) dans (2.3.43), on déduit

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_*(t), \upsilon)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} + \sum_{\ell=1}^{2} (\mathcal{A}^\ell \varepsilon\left(\dot{u}_*^\ell(t)\right), \varepsilon(\upsilon^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + \sum_{\ell=1}^{2} (\mathcal{G}^\ell \varepsilon\left(u_*^\ell(t)\right), \varepsilon(\upsilon^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^{2} ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell, \varepsilon(\upsilon^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + \sum_{\ell=1}^{2} \left(\int_0^t \mathcal{F}^\ell(\sigma_*^\ell(s) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(s)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell, \varepsilon\left(u_*^\ell(s)\right)\right) ds, \varepsilon(\upsilon^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \end{aligned}$$

$$+j_{ad}(\beta_*(t), u_*(t), v) + j_{vc}(u_*(t), v) = (\mathbf{f}(t), v)_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} \quad \forall v \in \mathbf{V}. \tag{2.3.47}$$

Ainsi, de (2.3.46) et (2.3.44), on a

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^{2} \left(\dot{\alpha}_*^\ell\,(t)\,, \xi^\ell - \alpha_*^\ell\,(t)\right)_{E_0} + a\left(\alpha_*\,(t)\,, \xi - \alpha_*\,(t)\right) \\ \geq\ &\sum_{\ell=1}^{2} \left(\phi^\ell(\sigma_*^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell\varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)) - (\mathcal{E}^\ell)^*\nabla\varphi^\ell\,(t)\,, \varepsilon\left(u_*^\ell\,(t)\right), \alpha_*^\ell\,(t)\,, \xi^\ell - \alpha_*^\ell\,(t)\right)_{E_0}, \end{aligned}$$

$$\forall \xi \in K, p.p.t \in (0,T)\,.$$

Nous écrivons (2.3.19) pour $\eta = \eta^*$ et en employant (2.3.40), on obtient

$$\sum_{\ell=1}^{2} \left(\mathcal{B}^\ell\nabla\varphi_*^\ell(t), \nabla\phi^\ell\right)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^{2} \left(\mathcal{E}^\ell\varepsilon(u_*^\ell(t)), \nabla\phi^\ell\right)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in [0,T]\,. \tag{2.3.48}$$

Aussi, nous écrivons (2.3.24) pour $\eta = \eta^*$ et en utilisant (2.3.40), on obtient

$$\dot{\beta}_*(t) = -\left(\beta_*(t)\left(\gamma_\nu\left(R_\nu([u_{*\nu}(t)])\right)^2 + \gamma_\tau\left|R_\tau([u_{*\tau}(t)])\right|^2 - \varepsilon_a\right)_+, \quad p.p.t \in [0,T]\,. \tag{2.3.49}$$

Maintenant, de (2.3.47)-(2.3.49) avec les conditions initiales (2.2.14) et d'après les lemmes 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5 et 2.3.6, nous trouvons que $(u_*, \sigma_*, \varphi_*, \alpha_*, \beta_*, D_*)$ satisfait (2.2.10)-(2.2.14) et la régularité (2.3.1)-(2.3.6). Puisque (u_*, φ) satisfait (2.3.1)-(2.3.2) et de (2.3.41), on a

$$\sigma_* \in L^2(0,T;\mathcal{H}). \tag{2.3.50}$$

Pour tout $v^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$, on pose $v = (v^1, v^2)$ avec $v^{3-\ell} = 0$ dans (2.3.47), ainsi que (2.3.40) et (2.1.32), on obtient

$$\rho^\ell \ddot{u}_*^\ell = \operatorname{Div}\sigma_*^\ell + f_0^\ell, \quad p.p.t \in [0,T]\,, \quad \ell = 1, 2.$$

En utilisant maintenant (2.1.24), (2.1.25) et (2.3.50), on a alors

$$(\operatorname{Div}\sigma_*^1, \operatorname{Div}\sigma_*^2) \in L^2(0,T;\mathbf{V}').$$

pour $t_1, t_2 \in [0,T]$, et de (2.1.20), (2.1.21), (1.2.6) et (2.3.42), on obtient

$$\|D_*(t_1) - D_*(t_2)\|_H \leq C(\|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)\|_W + \|u_*(t_1) - u_*(t_2)\|_V).$$

En rappelant les régularités pour u_* et φ_* dans (2.3.1) et (2.3.2), on a

$$D_* \in C(0,T;\mathcal{H}). \tag{2.3.51}$$

En prenant $\phi = \left(\phi^1, \phi^2\right)$ où $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $\phi^{3-\ell} = 0$ dans (2.3.48) et de (2.1.33) il vient

$$\operatorname{div} D_*^\ell(t) = q_0^\ell(t) \quad \forall t \in [0,T], \quad \ell = 1,2.$$

Et de (2.1.25), (2.3.51), on a

$$D_* \in C(0,T;\mathcal{W}).$$

Nous concluons que la solution faible $(u_*, \sigma_*, \varphi_*, \alpha_*, \beta_*, D_*)$ a un problème **PV** de la régularité (2.3.1)-(2.3.6), en ce qui termine la preuve de la partie d'existence du théorème (2.3.1).

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ donné par (2.3.27)-(2.3.29).

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de contact avec compliance normale et adhésion entre deux corps électro-élasto-viscoplastiques en piézoélectricité et avec l'endommagement.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Comme la frontière des corps et le donnée de problème ont de bonne régularitée. Donc, la solution du problème électro-mécanique et du problème variationnelle est la même.

On amontré l'existence et l'unicité de la solution de problème précédent par l'utilisation des arguments suivants: équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, inéquation variationnelle d'évolution du type parabolique, équation différentielle et point fixe.

Bibliographie

[1] A. Klarbring, A. Mikelic and M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, Int.J. Eng. Sci. 26(1988), 811–832.

[2] B. Tengiz and G. Tengiz, Some dynamic problems of the theory of electroelasticity, Mem. Differential Equations Math. Phys. 10 (1997), 1-53.

[3] J.A.C. Martins and T.J. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, Nonlinear Analysis 11 (1987), 407–428.

[4] J.T. Oden and J.A.C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 52 (1985), 527–634.

[5] K.L. Kuttler and M. Shillor, Set-valued pseudomonotone maps and degenerate evolution inclusions, Comm. Contemp. Math. 1 (1999),87–123.

[6] M. Fremond, Adhérence des solides, J. Mécanique et application, 6(3) (1987), 323-335.

[7] M. Frémond, Adhérence des solides, J. Mécanique Théorique et Appliquée, 6 (1987), 383–407.

[8] M. Frémond. Contact with adhesion. Dans Topics in nonsmooth mechanics (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G. Strang), Birkhauser Verlag, Basel (1988), 177–221.

[9] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu, A consistentmodel coupling adhesion, friction, and unilateral contact, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 177 (1999), no. 3-4, 383–399.

[10] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact, Lect. Notes Phys. 655, Springer, Berlin Heidelberg, 2004.

[11] M. Sofonea and El H. Essoufi, A Piezoelectric Contact Problem with Slip Dependent Coefficient of Friction, Mathematical Modelling and Analysis 9 (2004), 229–242.

[12] M. Sofonea,W. Han, M. Shillor, Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhésion or Damage, Pure and Applied Mathematics 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York 2006.

[13] M. Frémond, K. L. Kuttler, B. Nedjar and M. Shillor, One-dimensional models of damage, Adv. Math. Sci. Appl. 8 (2), 541-570. (1998).

[14] M. Fremond, Equilibre des structures qui adhérent à leur support, C.R. Acad. Sci. Paris, 295, Série (1982), 913-916.

[15] M. Fremond, Adhérence des solides, J. Mécanique et application, 6(3) (1987), 323-335.

[16] M. Sofonea and El H Essoufi, A piezoelectric contat problem with slipdependent coefficient of friction, MathematicalModelling and Analysis 9 (2004), 229-242.

[17] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, Dynamic frictionless contact with adhesion, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 55 (2004), 32-47.

[18] T. Hadj ammar, S. Drabla and B. Benabderrahmane, Analysis and approximation of frictionless contact problems between two piezoelectric bodies with adhesion, Georgian Math. J, 44 (2014), 1–15.

[19] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, A dynamic contact problem between elastoviscoplastic piezoelectric bodies, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 49 (2014), 01–21.

[20] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, Frictional contact problem for electroviscoelastic materials with long-term memory, damage, and adhesion, Electronic Journal of Differential Equations, 222 (2014), 01–21.

[21] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, Mixed finite element approximation for a contact problem in electro-elasticity, Kuwait J. Sci., 42 (2015), 31–54.

[22] T. Hadj ammar and B. Benabderrahmane, Mixed Formulation for a Signorini Problem, Journal of Mathematics and Statistics 8 (2012), 216–220.

[23] T. Hadj ammar and B. Benabderrahmane, Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies, Stud. Univ. Babe,s–Bolyai Math. 57 (2012), No. 3, 427–444.

[24] T. Hadj ammar, Etude théorique et numérique d'un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables, Mémoire de Magister, Univ. Ouargla., (2006).

[25] T. Hadj ammar, Etude Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, (2015).

[26] W. Han and M. Sofonea, Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity, Studies in Advanced Mathematics 30, Americal Mathematical Society and International Press, 2002.

[27] Z. Zellagui, Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact en Mécanique des Solides Déformables, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, Sétif, 2012.

Résumé:

Cette mémoire contient une étude théoriquement du contact sans frottement enter deux corps électro-élasto-viscoplastiques. Cette étude se compose en deux chapitres, Le premier chapitre considère la formulation mathématique de problème de contact et rappel d'analyse. Le deuxième chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section considère la forme mathématique cet problème noté par **P**, par l'utilisation de la forme de Green on obtient aussi une forme variationnelle **PV** dans le deuxième section,. Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème.

Mots-Clés:

électro-élasto-viscoplastiques, compliance normale, adhésion, inéquation d'évolution, point fixe, l'endommagement , existence, unicité.

Abstract:

This memory contains a study theoretically frictionless contact enter two electro- elastic-viscoplastic body. This study consists of two chapters, The first chapter considers the mathematical formulation of contact problem and return analysis. The second chapter is divided into three sections. The first section considers the mathematical form this problem noted by **P**, by using the form of Green is also obtained a variational form **PV** in the second section ,. Finally, in the third section , we study the existence and uniqueness of a weak solution of the problem.

Key-words:

electro- elastic- viscoplastic, normal compliance, adhesion, evolutionary inequality, fixed point, damage, existence, uniqueness.

ملخص:

هدف هذه **المذكرة** هو **الدراسة** النظرية لحركة جسمين كهروفيسكومطاطية . **المذكرة مكونة من** فصلين، **تطرقنا في الفصل الاول الى** بعض الوسائل الرياضية اللازمة في هذه المذكرة، اما في الفصل الثاني مكون من ثلاث اجزاء. الجزء الاول نعتبر فيه الشكل الرياضي لهذه الدراسة و يرمز له بالرمز P . ثم باستعمال شكل قرين في الجزء الثاني نحصل على **شكل مختلط للمسألة** P و يرمز له بالرمز PV . و في الجزء الثالث و الاخير قمنا بدراسة وجود و وحدانية الحل الضعيف للمسألة المطروحة.

الكلمات المفتاحية:

كهروفيسكومطاطية، تطور متباينة، **التشوه، الوجود،** الوحدانية، إالامتثال القياسية، **التصاق، النقطة الثابتة** .