



**République Algérienne Démocratique et  
Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de  
la Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE**

**Mémoire de fin d'étude**

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

**Thème**

**Les équations intégrales  
et  
Transformation de Bessel**

Présenté par: Beggat Oum-elkhir

Meguerhi Souad

Soutenu devant le jury composé de

M. T. Meftah  
A. Rhouma  
B. Ben Ali

Pr  
MCB  
MCB

Président  
Examineur  
Rapporteur

Univ. de Ouargla  
Univ. d'El Oued  
Univ. d'El Oued

Année universitaire 2014 – 2015

# *Remerciements*

*Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.*

*Ce travail à été réalisé sous l'encadrement du professeur "**Ben Ali Brahim**" à l'université d'**El-Oued**, a qui nous voudrions exprimer notre profonde gratitude pour sa disponibilité, son aide et ses conseils pour réaliser ce travail, ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'**El-oued**.*

*Nous remercions vivement nos familles surtout nos parents pour l'aide et le soutien moral.*

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les équations intégrales</b>	<b>2</b>
1.1 Préliminaire . . . . .	2
1.1.1 Propriétés fondamentales des fonctions de $L^2$ . . . . .	3
1.1.2 L'espace $C^l([a, b])$ . . . . .	4
1.1.3 Construction de la fonction de Green . . . . .	4
1.2 Les équations intégrales . . . . .	6
1.2.1 Classification des équations intégrales . . . . .	6
1.2.2 Lien entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra . . . . .	9
1.2.3 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra . . . . .	10
1.2.4 Méthodes de résolution approchée des équations intégrales linéaires . . . . .	12
<b>2 TRANSFORMATION DE BESSEL</b>	<b>18</b>
2.1 Transformation de Fourier . . . . .	18
2.1.1 Transformées multiples de Fourier . . . . .	19
2.1.2 Fonction de Bessel . . . . .	19
2.1.3 Expression des fonctions de Bessel . . . . .	20
2.1.4 Intégrales de Bessel . . . . .	20
2.1.5 Propriétés . . . . .	20

2.2	Transformation de Bessel . . . . .	21
2.2.1	Transformation de Hankel . . . . .	22
2.2.2	Transformation de Meijer . . . . .	26
2.2.3	Transformation de Kontorovitch-Lébédév . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Application</b>	<b>31</b>
3.1	Problème d'un puits fini ( $-V_0$ sur un disque): . . . . .	31
	<b>Conclusion générale</b>	<b>38</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>38</b>

# Introduction générale

Fredholm (1866-1927) a étudié la méthode pour résoudre les équations intégrales du deuxième espèce. La théorie des équations intégrales intervient dans plusieurs domaines de mathématiques, beaucoup de problèmes dans le domaine des équations différentielles ordinaires et partielles, la physique mathématique, les problèmes de contacts et de l'astrophysique.

En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie des équations intégrales aux équations intégrales-différentielles et aux équations intégrales singulières.

Ainsi, la théorie des équations intégrales a été un domaine de recherche actif dans les mathématiques appliquées et la physique mathématique.

L'importance des équations intégrales dans toutes les branches de la science et l'ingénierie nous amène à étudier certaines de ces équations et les résoudre numériquement.

Notre travail, est décomposé aux trois chapitres

Dans le premier chapitre nous avons présenté des connaissances de base sur les espaces des fonctions ( $L^p, p = 1, 2; C^l, l \in \mathbb{N}$ ). Ainsi nous avons exposé la méthode de calcul de la fonction de Green pour la résolution de certains problèmes de physique mathématique et nous avons terminé ce chapitre par une partie importante sur la généralité des équations intégrales ( Fredholm, Volterra, espèces, type, lien avec E D O, existence, Alternative de Fredholm ).

En explicitant dans le deuxième chapitre nous présentons les transformations de Bessel, Hankel, Meijer et la transformation de Kontorovich-Lebedev, avec des définitions, propriétés et des théorèmes.

Dans le troisième chapitre nous allons présenter une application d'une transformation de Bessel pour résoudre un problème au limite très important dans la physique et la mécanique

des fluides. Ce problème consiste à trouver la solution d'une équation aux valeurs propres avec un potentiel défini sur un disque. Ceci veut dire que le problème que nous étudions est un problème à deux dimensions. L'équation aux valeurs propres est transformée en une équation intégrale dont la fonction cherchée est la fonction de Green du problème. enfin nous avons cloturé ce travail par une conclusion et des perspectives.

# Chapitre 1

## Généralités sur les équations intégrales

Les premières équations intégrales furent obtenues par Daniel Bernoulli vers 1730 dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Après l'introduction du noyau de Green, il fallut attendre les dernières années du 19<sup>ème</sup> siècle, avec les travaux de H. A. Schwarz, de H. Poincaré, de V. Volterra et surtout ceux de I. Fredholm, pour disposer de résultats généraux en liaison étroite avec les premiers développements de l'analyse fonctionnelle. Quelques années plus tard, l'étude des équations intégrales conduisit D. Hilbert à définir l'espace qui porte son nom et à poser les premières bases de la théorie spectrale, cadre dans lequel F. Riesz développa la théorie des opérateurs compacts (1918). Ainsi, les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

### 1.1 Préliminaire

**Définition 1.1.1** *on désigne par  $L^1[a, b]$  l'espace des fonctions intégrables sur  $[a, b]$ . On pose*

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)| dx.$$

l'espace  $L^2[a, b]$  : on dit qu'une fonction  $f(x)$  est de carré intégrable sur  $[a, b]$  si l'intégrale  $\int_a^b f^2(x) dx < +\infty$  (existe et finie). L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur  $[a, b]$  sera noté  $L^2[a, b]$ .

### 1.1.1 Propriétés fondamentales des fonctions de $L^2$

a) Le produit de deux fonctions de carré intégrable est une fonction intégrable.

En effet si:

$$\int_a^b f^2(x) dx < +\infty \text{ et } \int_a^b g^2(x) dx < +\infty,$$

alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx < \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

b) la somme de deux fonctions de carré intégrable est une fonction de carré intégrable

$$\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx < +\infty, \text{ on a } \int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx < +\infty.$$

c) le produit d'une fonction à carré intégrable par un scalaire est une fonction de carré intégrable

$$\int_a^b (\lambda f)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2.$$

**Définition 1.1.2** le produit scalaire de deux fonctions de  $L^2[a, b]$  est défini par

$$(f, g)_{L^2} = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx,$$

on appelle norme d'une fonction  $f \in L^2[a, b]$  le nombre positif

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{(f, f)} = \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour  $f(x)$  et  $g(x)$  de  $L^2$  on a l'inégalité triangulaire

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

soient  $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  des fonctions de carré intégrable sur  $[a, b]$  si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0.$$

On dit que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est convergente uniformément vers  $f(x)$  dans  $L^2[a, b]$  alors  $f(x) \in L^2[a, b]$ .

### 1.1.2 L'espace $C^l([a, b])$

**Définition 1.1.3** les éléments de cet espace  $C^l([a, b])$  sont les fonctions définies sur  $[a, b]$  et qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $l$  ( $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(l)}$  existe) ou  $f^{(0)} = f$ .

**Remarque 1.1.1** la norme d'un élément  $f(x) \in C^l([a, b])$  se définit par

$$\|f\|_{C^l([a, b])} = \sum_{k=0}^l \max_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|, \quad f^{(0)} = f.$$

**Exemple 1.1.1**  $f(x) = x^2, f \in C^\infty(\mathbb{R}),$  soit  $[a, b] = [0, 1]$ .

$$\|f\|_{C^\infty[0, 1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} f^{(0)}(x) + \max_{0 \leq x \leq 1} f^{(1)}(x) + \max_{0 \leq x \leq 1} f^{(2)}(x) = 1 + 2 + 2 = 5.$$

**Définition 1.1.4** (fonction analytique) une fonction  $f(z)$  est définie sur un domaine  $G \subset \mathbb{C}$ , on dit que  $f$  est analytique (régulière) sur  $G$  si elle admet des dérivées en tout point de  $G$ .

### 1.1.3 Construction de la fonction de Green

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de certaines équations différentielles. On considère ici le cas particulièrement important pour la physique, d'équations différentielles du second ordre et on commence par des équations différentielles aux dérivées ordinaires.

**La forme générale** Soit l'équation différentielle d'ordre  $m$

$$L(y) = p_0(x)y^{(m)} + p_1(x)y^{(m-1)} + \dots + p_{m-1}(x)y' + p_m(x)y = f(x), \quad (1.1.1)$$

où les fonctions  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$  sont continues sur  $[a, b]$ ,  $p_0(x) \neq 0$ , sur  $[a, b]$  avec les conditions aux limites

$$V_k(y) = \alpha y(a) + \alpha^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha^{(m-1)} y^{(m-1)}(a) + \beta y(b) + \beta^{(1)} y'(b) + \dots + \beta^{(m-1)} y^{(m-1)}(b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (1.1.2)$$

Les formes linéaires  $V_1, \dots, V_{m-1}$ , en fonction de  $y(a), y'(a), \dots, y^{(m-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(m-1)}(b)$  étant linéairement indépendantes et  $\alpha, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(m-1)}, \beta, \beta^{(1)}, \dots, \beta^{(m-1)}$  sont des constantes à déterminer. Supposons que le problème aux limites homogène (1.1.1) - (1.1.2) admet la seule solution triviale  $y(x) = 0$ .

**Définition 1.1.5** on appelle fonction de Green (ou fonction d'influence) du problème aux limites (1.1.1) - (1.1.2) la fonction  $G(x, \zeta)$  construite pour tout point  $\zeta$ ,  $a < \zeta < b$

**Les propriétés de la fonction de Green** Cette fonction jouit des quatre propriétés suivantes :

1/  $G(x, \zeta)$  est continue et possède des dérivées continues par rapport à  $x$  jusqu'à l'ordre  $(m - 2)$  inclu pour  $a \leq x \leq b$ .

2/ Sa  $(m - 1)$ -ième dérivée par rapport à  $x$  présente au point  $x = \zeta$  une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur  $\frac{1}{p_0(x)}$ , i.e

$$\frac{\partial^{m-1} G}{\partial x^{m-1}}(\zeta_+, \zeta) - \frac{\partial^{m-1} G}{\partial x^{m-1}}(\zeta_-, \zeta) = \frac{1}{p_0(\zeta)}.$$

3/ Dans chacun des intervalles  $[a, \zeta)$  et  $(\zeta, b]$ , la fonction  $G(x, \zeta)$  considérée comme une fonction de  $x$  est solution de l'équation (1.1.1)

$$L(G) = 0. \quad (1.1.3)$$

4/  $G(x, \zeta)$  vérifie les conditions aux limites (1.1.2)

$$V_k(G) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (1.1.4)$$

**Théorème 1.1.1** [7] si le problème aux limites (1.1.1) – (1.1.2), n'a pas de solution autre que la solution triviale  $y(x) \equiv 0$ , l'opérateur  $L$  a une fonction de Green  $G(x, \zeta)$  et une seule.

Si  $G(x, \zeta)$  est la fonction de Green du problème aux limites (1.1.1) – (1.1.2), la solution de ce problème est donnée par la formule

$$y(x) = \int_a^b G(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (1.1.5)$$

## 1.2 Les équations intégrales

**Définition 1.2.1** l'équation intégrale est une équation où l'inconnue est une fonction qui apparaît sous le signe intégrale.

**Exemple 1.2.1** soit  $a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$  les équations

$$g(x) = \int_a^b k(x, t) g(t) dt, \quad (1.2.1)$$

$$g(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t) g(t) dt, \quad (1.2.2)$$

$$g(x) = \int_a^b k(x, t) [g(t)]^2 dt, \quad (1.2.3)$$

sont des équations intégrales.

**Définition 1.2.2** la fonction  $k(x, t)$  est le noyau des équations intégrales, on suppose que le noyau  $k(x, t)$  est défini dans le carré  $\Omega = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$  du plan  $(x, t)$  et continu dans  $\Omega$  ou bien présente des discontinuités telles que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt < +\infty.$$

### 1.2.1 Classification des équations intégrales

#### Equations intégrales linéaires

**Définition 1.2.3** une équation intégrale est dite linéaire si la fonction inconnue se présente d'une manière linéaire.

**Exemple 1.2.2** les équations (1.2.1) et (1.2.2) sont linéaires par contre l'équation (1.2.3) ne l'est pas.

**Définition 1.2.4** (la forme générale des équations intégrales) la forme générale des équations intégrales linéaires est:

$$h(x) \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b(x)} k(x, t) \varphi(t) dt, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.2.4)$$

- 1) si  $f(x) = 0$ , l'équation (1.2.4) est dite homogène.
- 2) si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.2.4) est dite non homogène.
- 3) si  $b(x) = x$ , (1.2.4) est l'équation intégrale de Volterra.
- 4) si  $b(x) = b$ , (1.2.4) est l'équation intégrale de Fredholm.
- 5) si  $h(x) = 0$ , (1.2.4) est l'équation intégrale de première espèce.
- 6) Si  $h(x) \neq 0$ , (1.2.4) est l'équation intégrale de seconde espèce.

**Remarque 1.2.1** l'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm: il suffit de prendre le noyau  $K$  qui vérifie la condition

$$k(x, t) = 0, \quad \text{pour } x < t.$$

**Définition 1.2.5** (l'équation intégrale de Wiener-Hopf): on appelle équation intégrale de Wiener-Hopf une équation de la forme

$$h(x) \varphi(x) + \lambda \int_a^\infty k(x-t) \varphi(t) dt = f(x). \quad (1.2.5)$$

**Définition 1.2.6** (l'équation intégrale de Renwal): l'équation intégrale de la forme

$$h(x) \varphi(x) + \lambda \int_a^x k(x-t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (1.2.6)$$

est appelée équation intégrale de Renwal.

**Equations intégrales non linéaires**

**Définition 1.2.7** (équation intégrale de Fredholm): l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prend la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt = 0, \quad (1.2.7)$$

l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est de la forme

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt, \quad (1.2.8)$$

où  $u$  est une constante et l'équation intégrale de Fredholm de troisième espèce est de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.2.9)$$

(équation intégrale de Volterra): l'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prend la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt = 0, \quad (1.2.10)$$

$$u\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt, \quad (1.2.11)$$

l'équation (1.2.11) est appelée équation intégrale de Volterra de seconde espèce et l'équation intégrale de Volterra de troisième espèce est de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.2.12)$$

**Remarque 1.2.2** 1) si  $f(x) = 0$ , l'équation est dite homogène.

2) si  $f(x) \neq 0$ , l'équation est dite non homogène.

**Définition 1.2.8** (l'équation intégrale de Hammerstein-Volterra): on appelle équation intégrale de Hammerstein-Volterra une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)F(t, \varphi(t)) dt = f(x). \quad (1.2.13)$$

**Définition 1.2.9** (l'équation intégrale d'Abel): on appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} g(\varphi(t)) dt, \quad (1.2.14)$$

où  $0 < \alpha < 1$  et  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  tel que :  $g(0) = 0$ .

## 1.2.2 Lien entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

Réduction d'une équation différentielle à une équation intégrale: la résolution d'une équation différentielle linéaire peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de second espèce.

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x), \quad (1.2.15)$$

à coefficients continus  $a_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) avec les conditions initiales

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}. \quad (1.2.16)$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce. Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = F(x), \quad (1.2.17)$$

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1. \quad (1.2.18)$$

Posons:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x), \quad (1.2.19)$$

d'où, vu les conditions initiales (1.2.18)

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + C_1, \quad y = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + C_1 x + C_0, \quad (1.2.20)$$

et en utilisant la formule

$$\underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x}_{n} f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-z)^{n-1} f(z) dz,$$

et en substituant (1.2.19) et (1.2.20) dans (1.2.17)

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x) \varphi(t) dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x) (x-t) \varphi(t) dt + C_1 x a_1(x) + C_0 a_2(x) = F(x),$$

ou bien

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \varphi(t) dt = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x), \quad (1.2.21)$$

et en posant

$$K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)], \quad (1.2.22)$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x), \quad (1.2.23)$$

nous ramenons l'équation (1.2.21) à la forme suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1.2.24)$$

i.e. nous obtenons l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

### 1.2.3 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1.2.25)$$

où  $K(x, t)$  est une fonction continue pour  $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x$ , et  $f(x)$  est continue lorsque  $0 \leq x \leq a$ .

**Définition 1.2.10** (*résolvante d'une équation intégrale*): on appelle résolvante de l'équation intégrale, toute fonction  $R(x; t; \lambda)$  donnée par

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x, t),$$

où les  $K_n$  sont les noyaux itérés définis par la relation de récurrence suivante

$$k_1(x, t) = k(x, t), \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad k_n(x, t) = \int_t^x k(x, z) k_{n-1}(z, t) dz.$$

**Théorème 1.2.1** [7] Soit  $K(x, t)$  une fonction continue pour  $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x$ , et  $f(x)$  est continue pour  $x \in [0, a]$ . L'équation (1.2.25) admet une solution unique et continue par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t, \lambda) f(t) dt.$$

**Remarque 1.2.3** ce théorème est vrai pour les équations intégrales de Fredholm de seconde espèce.

**Théorème 1.2.2** [7] soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$\int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (1.2.26)$$

telles que  $f, K$  sont des fonctions continues, dérivables sur  $[a, b]$ ,

$$K(x, x) \neq 0, \text{ et } \int_a^b \int_a^b k(x, t) dx dt < \infty.$$

alors, il existe une solution unique et continue de l'équation (1.2.26).

**Preuve.** On remarque d'abord qu'on a

$$f(a) = \int_a^a k(x, t) \varphi(t) dt = 0.$$

L'équation (1.2.26) peut être transformée en une équation de Volterra de deuxième espèce en utilisant la dérivée:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = k(x, x) \varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} k(x, t) \varphi(t) dt = f'(x)$$

comme  $K(x; x) \neq 0$ , alors

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{k(x, x)} - \int_a^x \frac{k'_x(x, t)}{k(x, x)} \varphi(t) dt$$

qui est une équation de Volterra de deuxième espèce, et par le théorème 1,2,1 on obtient l'existence et l'unicité de la solution  $\varphi$ . ■

### 1.2.4 Méthodes de résolution approchée des équations intégrales linéaires

#### Résolvante de l'équation intégrale de Volterra

**Résolution des équations intégrales à l'aide des résolvantes au noyau itéré** Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt, \quad (1.2.27)$$

où  $k(x,t)$  est une fonction continue pour  $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x$  et  $f(x)$  est continue pour  $x \in [0, a]$ .

Cherchons la solution de cette équation sous la forme d'une série entière illimitée suivant les puissances de  $\lambda$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots \quad (1.2.28)$$

Portons formellement cette série dans (1.2.27), il vient

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)[\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) \\ &+ \lambda^2\varphi_2(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots]dt, \end{aligned}$$

En procédant par identification nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x), \\ \varphi_1(x) &= \int_0^x k(x,t)\varphi_0(x)dt = \int_0^x k(x,t)f(t)dt, \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x k(x,t)\varphi_1(x)dt = \int_0^x k(x,t) \int_0^t k(t,t_1)f(t_1)dt_1dt, \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = & \int_0^x k(x, t) \int_0^t k(t, t_1) \int_0^{t_1} k(t_1, t_2) \dots \\ & \dots \int_0^{t_{n-3}} k(t_{n-3}, t_{n-2}) \int_0^{t_{n-2}} k(t_{n-2}, t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} dt_{n-2} \dots dt. \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

Moyennant les relations (1.2.29) on peut définir successivement les fonctions  $\varphi_n(x)$ . On montre que, sous les hypothèses faites sur  $f(x)$  et  $k(x, t)$ , la série (1.2.30) ainsi obtenue converge uniformément en  $x$  et  $\lambda$  et  $x \in [0, a]$  et que sa somme est la solution de l'équation (1.2.27).

Ensuite, (1.2.29) entraîne

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \int_0^x k(x, t) f(t) dt, \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x k(x, t) \left[ \int_0^x k(t, t_1) f(t_1) dt_1 \right] dt = \int_0^x f(t_1) dt_1 \int_0^x k(x, t) k(t, t_1) dt = \int_0^x k_2(x, t_1) f(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Où

$$k_2(x, t) = \int_0^x k(x, t) k(t, t_1) dt.$$

On établit de façon analogue qu'en général

$$\varphi_n(x) = \int_0^x k_n(x, t) f(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.2.31)$$

Les fonctions  $k_n(x, t)$  s'appellent noyaux itérés et sont bien définies, on le montre aisément, par les relations de récurrence, avec  $k_1(x, t) = k(x, t)$ ,

$$k_{n+1}(x, t) = \int_0^x k(x, z) k_n(z, t) dz \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.2.32)$$

Compte tenu de (1.2.31) et (1.2.32) l'égalité (1.2.30) peut s'écrire

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v \varphi_{v+1}(x) \\ \varphi(x) &= f(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v \int_0^x k_{v+1}(x, t) f(t) dt \\ \varphi(x) &= f(x) + \int_0^x \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v k_{v+1}(x, t) f(t) dt \\ \varphi(x) &= f(x) + \int_0^x \sum_{v=1}^{\infty} R(x, t, \lambda) f(t) dt\end{aligned}$$

Où

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v k_{v+1}(x, t). \quad (1.2.33)$$

est la résolvante (ou le noyau résolvant) de l'équation intégrale (1.2.27).

**Proposition 1.2.1** 1) Si le noyau  $k(x, t)$  est continu, la série (1.2.33) converge absolument et uniformément.

Les noyaux itérés et la résolvante sont indépendants de la limite inférieure de l'intégrale dans l'équation intégrale.

2) La résolvante  $R(x, t, \lambda)$  satisfait à l'équation fonctionnelle suivante

$$R(x, t, \lambda) = k(x, t) + \lambda \int_0^x k(s, t) R(s, t, \lambda) ds.$$

La solution de l'équation intégrale (1.2.27) en fonction de la résolvante s'écrit comme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t, \lambda) f(t) dt. \quad (1.2.34)$$

### Résolvante de l'équation intégrale de Fredholm

Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt + f(x), \quad (1.2.35)$$

où  $k \in C([a, b] \times [a, b])$  et  $f(x) \in C([a, b])$ . La solution de l'équation (1.2.35) est donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (1.2.36)$$

où la fonction  $R(x, t, \lambda)$  dite résolvante de Fredholm de l'équation (1.2.35) est définie par l'égalité

$$R(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)}, \quad (1.2.37)$$

sous la condition  $D(\lambda) \neq 0$ . Ici  $D(x, t, \lambda)$  et  $D(\lambda)$  sont des séries de puissances de  $\lambda$

$$D(x, t, \lambda) = k(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t) \lambda^n, \quad (1.2.38)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n, \quad (1.2.39)$$

avec les coefficients ainsi définis

$$B_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \left| \begin{array}{cccc} k(x, t) & k(x, t_1) & \dots & k(x, t_n) \\ k(t_1, t) & k(t_1, t_1) & \dots & k(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(t_n, t) & k(t_n, t_1) & \dots & k(t_n, t_n) \end{array} \right| dt_1 \dots dt_n. \quad (1.2.40)$$

Les fonctions  $D(\lambda)$  et  $D(x, t, \lambda)$  sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm, tels que  $B_0(x, t) = k(x, t)$  et

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \left| \begin{array}{cccc} k(t_1, t) & k(t_1, t_2) & \dots & k(t_1, t_n) \\ k(t_2, t_1) & k(t_2, t_2) & \dots & k(t_2, t_n) \\ k(t_3, t_1) & k(t_3, t_2) & \dots & k(t_3, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(t_n, t_1) & k(t_n, t_2) & \dots & k(t_n, t_n) \end{array} \right| dt_1 \dots dt_n. \quad (1.2.41)$$

**Remarque 1.2.4** si le noyau  $k(x, t)$  est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt < +\infty,$$

les séries (1.2.38) et (1.2.39) convergent quelque soit  $\lambda$  et sont donc des fonctions analytiques entières de  $\lambda$ . La résolvante  $R(x, t, \lambda)$  est une fonction analytique de  $\lambda$ , sauf les  $\lambda$  qui sont les Zéros de  $D(\lambda)$ . Ces derniers sont les pôles de la résolvante  $R(x, t, \lambda)$ .

### Alternative de fredholm

Pour les équation intégrales de Fredholm on a les théorèmes suivants :

**Théorème 1.2.3** [7](alternative de fredholm) : ou bien l'équation linéaire non homogène de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (1.2.42)$$

admet une solution unique quelle que soit  $f(x)$  (appartenant à une classe suffisamment vaste), ou bien l'équation homogène correspondante

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = 0, \quad (1.2.43)$$

a au moins une solution non triviale, i.e non identiquement nulle.

**Définition 1.2.11** on appelle équation transposée ou adjointe de l'équation de fredholm, l'équation

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\psi(t)dt. \quad (1.2.44)$$

Remarquons que  $f$  et  $\psi$  sont transposées l'une de l'autre.

**Théorème 1.2.4** [7]le premier cas de l'atervative a également lieu pour l'équation adjointe de (1.2.42)

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)\psi(t)dt = g(x), \quad (1.2.45)$$

et le nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation intégrale homogène (1.2.43) et de l'équation adjointe

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)\psi(t)dt = 0, \quad (1.2.46)$$

est fini et le même pour les deux équations.

**Remarque 1.2.5** si les fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  sont solutions de l'équation homogène (1.2.43), il en est également de leur combinaison linéaire

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x),$$

où  $c_k (k = 1, 2, \dots, n)$  sont des constantes arbitraires.

**Théorème 1.2.5** [7] dans le second cas de l'alternative, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation non homogène (1.2.42) admette une solution  $\varphi(x)$  est que le second membre de cette équation (la fonction  $f(x)$ ) soit orthogonale à toute solution  $\psi(x)$  de l'équation homogène (1.2.46) adjointe de (1.2.43) i.e

$$\int_a^b f(x)\psi(t)dt = 0. \quad (1.2.47)$$

**Remarque 1.2.6** dans la condition (1.2.47), l'équation (1.2.42) possède une infinité de solutions puisqu'elle vérifie toute fonction de la forme  $\varphi(x) + \varphi^*(x)$  avec  $\varphi(x)$  une solution de (1.2.42) et  $\varphi^*(x)$  toute solution de l'équation homogène correspondante (1.2.43).

# Chapitre 2

## TRANSFORMATION DE BESSEL

Les méthodes qui se rattachent aux transformations intégrales trouvent un vaste champ d'application en analyse mathématique ces derniers temps.

Elles ont été utilisées avec succès dans la résolution d'équations différentielles et intégrales, dans l'étude des fonctions spéciales et le calcul d'intégrales. L'avantage de ces méthodes est dans le fait qu'elles permettent de construire les tables des transformations directes et inverses des diverses fonctions que l'on rencontre dans les applications.

### 2.1 Transformation de Fourier

**Définition 2.1.1** la transformée de Fourier de  $f(x)$  est désignée par  $\mathcal{F}[f(x)] = f^*(u)$  et définie par l'intégrale

$$\mathcal{F}[f(x)] = f^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut} dt, \quad (2.1.1)$$

la transformée inverse de Fourier est définie par les propriétés fondamentales

$$\mathcal{F}^{-1}[f^*(r)] = f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{iut} dt, \quad (2.1.2)$$

où l'intégrale du second membre est prise dans sa valeur principale. i.e. comme la limite

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l f^*(u)e^{itu} du$$

La fonction  $f^*(u)$  porte le nom de transformée de Fourier de  $f(t)$ . Si la fonction  $f(t)$  est intégrable sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , la fonction  $f^*(u)$  existe pour tous les  $t$ .

### 2.1.1 Transformées multiples de Fourier

On a par définition

$$F(\omega, \lambda) = \mathcal{F}[f(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\omega x + \lambda y)} dx dy, \quad (2.1.3)$$

la fonction  $F(\omega, \lambda)$  s'appelle la transformée de Fourier de la fonction de deux variables  $f(x, y)$ . Si les fonctions  $f(x, y)$  et  $F(\omega, \lambda)$  appartiennent à  $L^2$ , on a la formule d'inversion suivante

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega, \lambda)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \lambda) e^{i(\omega x + \lambda y)} d\omega d\lambda. \quad (2.1.4)$$

### 2.1.2 Fonction de Bessel

**Définition 2.1.2** (*fonction de Bessel*): ces fonctions sont les solutions canoniques  $y(x)$  de l'équation différentielle de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2) y = 0,$$

pour tout nombre réel ou complexe  $\alpha$ . Le plus souvent,  $\alpha$  est un entier naturel (on dit alors que c'est l'ordre de la fonction), ou un demi-entier.

Il existe deux sortes de fonctions de Bessel :

- i) les fonctions de Bessel de première espèce  $J_n$ , solutions de l'équation différentielle ci-dessus qui sont définies en 0 ,
- ii) les fonctions de Bessel de seconde espèce  $Y_n$ , solutions qui ne sont pas définies en 0 (mais qui ont une limite infinie en 0).

### 2.1.3 Expression des fonctions de Bessel

Pour les valeurs entières de  $\alpha = n$ , les fonctions de Bessel de première espèce sont définies par la série entière (de rayon de convergence infini) suivante

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n},$$

Plus généralement, pour  $\alpha$  non entier, on a le développement analogue

$$J_\alpha(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(p+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\alpha},$$

où  $\Gamma(z)$  est la fonction gamma, généralisant la fonction factorielle à des valeurs non entières.

Les fonctions de Bessel de deuxième espèce ou fonctions de Neumann sont définies par :

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{J_\lambda(x) \cos(\lambda\pi) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda\pi)}.$$

### 2.1.4 Intégrales de Bessel

Pour les valeurs entières de  $\alpha = n$ , les fonctions de Bessel peuvent être représentées par les intégrales

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(n\tau - x \sin(\tau)) d\tau,$$

ou encore par

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\tau - x \sin(\tau))} d\tau.$$

### 2.1.5 Propriétés

Relations de récurrence

$$\begin{aligned} J_{n+1}(x) &= \frac{nJ_n(x)}{x} - J'_n(x), \\ J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) &= \frac{2n}{x}J_n(x), \\ J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) &= -2J'_n(x), \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} J_1(x) &= J'_0(x), \\ \frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) &= x^n J_{n-1}(x). \end{aligned}$$

## 2.2 Transformation de Bessel

**Définition 2.2.1** on appelle transformation de Bessel une transformation intégrale de la forme

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)K_\nu(\lambda t)t dt, \quad (2.2.1)$$

où  $K_\nu(z)$  est une fonction de Bessel modifiée.

**Définition 2.2.2** les transformations de Hankel, Meijer, Kontorovitch-Lébédev, ...etc. sont des transformations de Bessel.

Parmi ces développements, mentionnons le développement suivant des fonctions cylindriques, connu sous le nom d'intégrale de Fourier-Bessel

$$f(x) = \int_0^{\infty} J_\nu(xu)udu \int_0^{\infty} f(t)J_\nu(ut)t dt \quad (0 < x < +\infty), \quad (2.2.2)$$

où  $J_\nu(x)$  est une fonction de Bessel, et  $\nu > -\frac{1}{2}$ .

**Théorème 2.2.1** [8]soit  $f(x)$  une fonction bornée sur l'intervalle fini  $]0, R[$  et

$$\int_0^{\infty} |f(x)| x^{\frac{1}{2}} dx < \infty.$$

si  $v > -\frac{1}{2}$ , on a

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} = \int_0^{\infty} J_v(xu) u du \int_0^{\infty} f(t) J_v(ut) t dt. \quad (2.2.3)$$

Aux points de continuité, on a la formule (2.2.2).

### 2.2.1 Transformation de Hankel

#### définition

soit  $f(t)$  une fonction définie pour  $t \geq 0$ , on appelle transformation de Hankel d'ordre  $n$  de la fonction  $f$ , l'intégrale

$$f_n^*(u) = \mathfrak{H}_n[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) J_n(ut) t dt. \quad (2.2.4)$$

Le développement (2.2.2) entraîne la formule d'inversion

$$f(t) = \mathfrak{H}_v^{-1}[f_v^*(u)] = \int_0^{\infty} f_v^*(u) J_v(ut) u du. \quad (2.2.5)$$

Remarquons que si la fonction  $f(t)$  est telle que  $f(t) = \theta(t^\alpha)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , pour  $\alpha + v + 2 > 0$  et  $f(t) = \theta(t^\beta)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , pour  $\beta + \frac{3}{2} < 0$ , alors l'intégrale (2.2.4) est convergente.

#### Relation entre la transformation de Hankel et la transformation de Fourier

Citons le lien existant entre la transformation de Hankel et les transformations multiples de Fourier.

Soient

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} f^*(\lambda, l) d\lambda dl. \quad (2.2.6)$$

$$f^*(\lambda, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikr} f(x, y) dx dy. \quad (2.2.7)$$

avec  $r = (x, y)$  et  $k = (\lambda, l)$ .

En passant aux coordonnées polaires moyennant les formules  $(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$  et  $(\lambda, l) = k(\cos \phi, \sin \phi)$ ,  $kr = \lambda r \cos(\theta - \phi)$  on trouve et on établit que les fonctions  $f(x, y)$  et  $f^*(r, \phi)$  sont liées entre elles par la relation

$$f^*(\lambda, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} e^{-i\lambda r \cos(\theta-\phi)} f(r, \theta) d\theta. \quad (2.2.8)$$

En supposant que

$$f(r, \theta) = e^{in\theta} f(r).$$

et en posant  $\theta - \phi = \alpha - \frac{\pi}{2}$  alors (2.2.8) sera de la forme

$$f^*(\lambda, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^\infty r f(r) dr \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} e^{-in(\phi-\frac{\pi}{2})+i(n\alpha-\lambda r \sin \alpha)} d\alpha, \quad (2.2.9)$$

avec  $\phi_0 = (\frac{\pi}{2} - \phi)$ ,

et comme

$$J_n(\lambda r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\alpha-\lambda r \sin \alpha)} d\alpha, \quad (2.2.10)$$

on aura

$$f^*(\lambda, \phi) = e^{in(\phi-\frac{\pi}{2})} \int_0^\infty r J_n(\lambda r) f(r) dr. \quad (2.2.11)$$

$$= e^{in(\phi-\frac{\pi}{2})} \tilde{f}_n(\lambda), \quad (2.2.12)$$

avec  $\tilde{f}_n(\lambda) = \mathfrak{S}\ell_n[f(r)]$

De même, en termes de variables polaires avec l'hypothèse  $f(x, y) = f(r, \theta) = e^{in\theta} f(r)$  avec (2.2.12), l'inverse de la transformation de Fourier (2.2.6) devient

$$e^{in\theta} f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \int_0^{2\pi} e^{i\lambda r \cos(\theta-\phi)} f^*(r, \phi) d\phi \quad (2.2.13)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda \tilde{f}_n(\lambda) d\lambda \int_0^{2\pi} e^{in(\phi-\frac{\pi}{2})+i\lambda r \cos(\theta-\phi)} d\phi \quad (2.2.14)$$

En utilisant le changement de variables  $\theta - \phi = -(\alpha + \frac{\pi}{2})$  et  $\phi_0 = -(\frac{\pi}{2} + \phi)$ ,

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda \tilde{f}_n(\lambda) d\lambda \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} e^{in(\theta+\alpha)-i\lambda r \sin(\alpha)} d\alpha \quad (2.2.15)$$

$$= e^{in\theta} \int_0^{\infty} \lambda J_n(\lambda r) \tilde{f}_n(\lambda) d\lambda, \quad \text{par (2.2.10)} \quad (2.2.16)$$

alors la transformée de Hankel inverse est définie par

$$\mathfrak{H}_n^{-1}[\tilde{f}_n(\lambda)] = f(r) = \int_0^{\infty} \lambda J_n(\lambda r) \tilde{f}_n(\lambda) d\lambda. \quad (2.2.17)$$

### Propriétés de la transformation de Hankel

**Théorème 2.2.2** [11] si  $\mathfrak{H}_v[f(t)] = f^*(u)$  alors

$$\mathfrak{H}_v[f(at)] = \frac{1}{a^2} f^*\left(\frac{u}{a}\right).$$

**Preuve.** on a par définition

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_v[f(at)] &= \int_0^{\infty} f(at) J_v(ut) t dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} s f(s) J_v\left(\frac{u}{a}s\right) ds = \frac{1}{a^2} f^*\left(\frac{u}{a}\right). \end{aligned}$$

■

**Théorème 2.2.3** [11] soit  $f(r)$  arbitraire avec la propriété que  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0$ , alors

$$\mathfrak{S}\ell_v \left[ \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{df}{dt} - \frac{v^2}{t^2} f \right] = -u^2 \mathfrak{S}\ell_v [f(t)].$$

**Preuve.** Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\ell_v \left[ \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{df}{dt} - \frac{v^2}{t^2} f \right] &= \int_0^\infty \left[ \frac{d}{dt} \left( t \frac{df}{dt} \right) - \frac{v^2}{t^2} f(t) \right] J_v(ut) t dt \\ &= \int_0^\infty \left[ u^2 J_v''(ut) + \frac{u}{t} J_v'(ut) - \frac{v^2}{t^2} J_v(ut) \right] f(t) t dt \\ &= -u^2 \int_0^\infty f(t) J_v(ut) t dt \\ &= -u^2 \mathfrak{S}\ell_v [f(t)]. \end{aligned}$$

■

**Théorème 2.2.4** [11] (égalité de Parseval): soit

$$\mathfrak{S}\ell_v [f(t)] = f_v^*(u), \quad \mathfrak{S}\ell_v [g(t)] = g_v^*(u).$$

alors

$$\int_0^\infty u f_v^*(u) g_v^*(u) du = \int_0^\infty t f(t) g(t) dt, \quad (v > -\frac{1}{2}).$$

**Preuve.** nous procédons formellement pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u f_v^*(u) g_v^*(u) du &= \int_0^\infty u f_v^*(u) du \int_0^\infty t J_v(ut) g(t) dt \\ &= \int_0^\infty t g(t) dt \int_0^\infty u J_v(ut) f_v^*(u) du \\ &= \int_0^\infty t f(t) g(t) dt. \end{aligned}$$

■

## 2.2.2 Transformation de Meijer

### Fonction de Mac-Donald

Fonctions  $I_s$  ( fonction de Bessel modifiée)

1) On définit, si  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $z \in \mathbb{C}$

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2r}}{r!(n+r)!}.$$

Si  $s$  non entier, et si  $z \in \mathbb{C}$  on définit

$$I_s(z) = i^{-s} J_s(iz) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{s+2r}}{r! \Gamma(s+r+1)}.$$

Ces fonctions satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 I_s(z)}{dz^2} + \frac{d I_s(z)}{dz} - \left(1 + \frac{s^2}{z^2}\right) I_s(z) = 0.$$

2) elles vérifient les relations de récurrence

$$\begin{aligned} I_{s-1}(z) - I_{s+1}(z) &= \frac{2s}{z} I_s(z), \\ \frac{d}{dz} \{z^s I_s(z)\} &= z^s I_{s-1}(z), \quad \frac{d}{dz} \{z^{-s} I_s(z)\} = z^{-s} I_{s+1}(z). \end{aligned}$$

3) si  $s$  non entier, on définit la fonction de Mac-Donald  $K_s$  ( fonction de Bessel modifiée)

$$K_s(z) = \frac{\pi}{2 \sin \pi s} (I_{-s}(z) - I_s(z)).$$

### Définition de la transformée de Meijer

**Définition 2.2.3** la transformation intégrale de Meijer joue un rôle important dans la résolution des équations différentielles de type Bessel. Elle est définie par la formule

$$\tilde{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} K_\nu(st) (st)^{\frac{1}{2}} f(t) dt, \quad (2.2.18)$$

où  $K_\nu(t)$  est une fonction de Mac-Donald.

La formule d'inversion s'écrit

$$f(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} I_\nu(ts) (ts)^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(s) ds. \quad (2.2.19)$$

Les égalités (2.2.18), (2.2.19) découlent immédiatement du développement correspondant d'une fonction arbitraire en intégrale de Fourier généralisée.

**Théorème 2.2.5** [5] soit  $f(t)$  une fonction de la variable réelle  $t$ ,  $0 \leq t < +\infty$ , intégrable sur tout intervalle fini  $0 < T_1 \leq t \leq T_2$  et à variation bornée au voisinage du point  $t = x$ ; supposons par ailleurs que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} |f(t)| dt. \quad \beta > \alpha \geq 0,$$

est convergente. Sous ces conditions, on a le développement

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} I_\nu(xs) (xs)^{\frac{1}{2}} ds \int_0^\infty K_\nu(st) (st)^{\frac{1}{2}} f(t) dt. \quad (2.2.20)$$

La fonction  $K_\nu(z)$  est une fonction paire de  $\nu$ , donc la formule (2.2.20) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} \{I_\nu(xs) + I_{-\nu}(xs)\} (xs)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\quad \times \int_0^\infty K_\nu(st) (st)^{\frac{1}{2}} f(t) dt. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

En particulier, puisque

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} z, \quad I_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} z,$$

$$K_{\pm\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z},$$

il s'ensuit que lorsque  $\nu = \pm \frac{1}{2}$  la formule (2.2.21) s'écrit

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} e^{xs} ds \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.2.22)$$

**Théorème 2.2.6** [5] supposons qu'une fonction  $f(s)$ , analytique dans le demi-plan  $Re(s) > \alpha \geq 0$ , vérifie les conditions

1) Pour tous les  $t \geq 0$  et  $\beta > \alpha$  existe

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} I_{\nu}(tz) (tz)^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(z) dz,$$

où  $-\frac{1}{2} \leq Re(\nu) \leq \frac{1}{2}$ , la convergence étant uniforme en  $t$  ( $0 \leq t \leq b$ ).

2) l'intégrale

$$\int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} \frac{|\tilde{f}(s)|}{|z|} |d(z)|,$$

est convergente.

3) la fonction  $\tilde{f}(s)$  est bornée dans le demi-plan  $Re(s) \geq \beta$ , i.e.,

$$|\tilde{f}(s)| < A,$$

où  $A$  est une constante positive ne dépendant pas de  $s$ .

4) existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x + iy) = 0,$$

où la convergence est uniforme en toutes les valeurs réelles de  $y$ . Sous ces conditions, lorsque  $Re(s) > \beta$ , on a l'égalité (2.2.18), où la fonction  $f(t)$  est définie par (2.2.19).

**Théorème 2.2.7** [5] soit une fonction  $\tilde{g}(s)$  telle que

$$\tilde{g}(s) = \tilde{f}(s) + \sum_{i=1}^n c_i s^i,$$

où  $\tilde{f}(s)$  remplit les conditions du théorème précédent,  $Re(i) < 0$ . Alors on a

$$\tilde{g}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} K_{\nu}(st) (ts)^{\frac{1}{2}} g(t) dt, \quad Res > \beta,$$

où

$$g(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda} I_\nu(ts) (ts)^{\frac{1}{2}} \tilde{g}(s) ds.$$

La convolution et le calcul opérationnel ont été construits pour la transformation de Meijer d'après le schéma de Mikusinski.

### 2.2.3 Transformation de Kontorovitch-Lébédév

Les transformations intégrales dans lesquelles l'intégration s'effectue sur l'ordre des fonctions de Bessel jouent un rôle très important dans la résolution de certains problèmes de physique mathématique. Cette forme de transformations intégrales a été étudiée pour la première fois par Kontorovitch et Lébédév en 1938. Elle porte aujourd'hui le nom de transformation de Kontorovitch-Lébédév. Elle a été appliquée avec succès à la résolution de nombreux problèmes intéressants. Dans les transformations de Kontorovitch-Lébédév, le développement de type intégrale de Fourier

$$xf(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty K_{i\tau}(x) \tau \operatorname{sh} \pi\tau d\tau \int_0^\infty K_{is}(\xi) f(\xi) d\xi, \quad (2.2.23)$$

où  $K_\mu(x)$  est une fonction de Macdonald,  $x > 0$ ,  $f(x)$  une fonction arbitraire continue avec sa dérivée et telle que  $x^2 f(x), xf(x) \in L]0, +\infty[$  joue un rôle fondamental. Le développement (2.2.23) est valable pour des fonctions appartenant à une classe plus large. Soit

$$F(\tau) = \int_0^\infty f(x) K_{i\tau}(x) dx. \quad (2.2.24)$$

L'intégrale (2.2.24) définit la transformation de Kontorovitch-Lébédév. De (2.2.23) il vient immédiatement la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^\infty K_{i\tau}(x) \tau \operatorname{sh} \pi\tau F(\tau) d\tau \quad (x > 0). \quad (2.2.25)$$

Sous une forme plus symétrique, (2.2.24) et (2.2.25) s'écrivent

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} f(x) \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} dx, \quad (0 \leq \tau < +\infty), \quad (2.2.26)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(\tau) \frac{2\tau \operatorname{sh} \pi\tau}{\pi^2} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau, \quad (0 < x < +\infty). \quad (2.2.27)$$

Parfois (2.2.24) et (2.2.25) se rencontrent sous la forme suivante

$$F(\tau) = \frac{2}{\pi^2} \tau \operatorname{sh} \pi\tau \int_0^{\infty} f(x) \frac{K_{i\tau}(x)}{x} dx, \quad (2.2.28)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(\tau) K_{i\tau}(x) d\tau. \quad (2.2.29)$$

Les formules analogues aux formules de Parseval de la théorie des séries et des intégrales de Fourier sont très utiles au calcul de certains types d'intégrales définies.

**Théorème 2.2.8** [5] soit  $g(x)$  une fonction réelle arbitraire telle que

1)  $g(x)x^{-\frac{3}{4}} \in L]0, +\infty[$ , 2)  $g(x) \in L_2]0, +\infty[$ ,

$$G(\tau) = \int_0^{\infty} g(x) \frac{\sqrt{2\tau \operatorname{sh} \pi\tau}}{\pi} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} dx, \quad (2.2.30)$$

alors

$$\int_0^{\infty} [G(\tau)]^2 d\tau = \int_0^{\infty} [g(x)]^2 dx. \quad (2.2.31)$$

**Théorème 2.2.9** [5] soient  $g_1(x)$  et  $g_2(x)$  des fonctions réelles arbitraires, vérifiant les conditions 1) et 2) du théorème précédent,  $G_1(\tau)$  et  $G_2(\tau)$  les images respectivement de  $g_1$  et  $g_2$  par la transformation (2.2.30).

$$\int_0^{\infty} G_1(\tau) G_2(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g_1(x) g_2(x) dx. \quad (2.2.32)$$

D'autres transformations intégrales dans lesquelles l'intégration s'effectue sur l'ordre des fonctions cylindriques.

# Chapitre 3

## Application

Dans ce chapitre nous allons présenter une application d'une transformation de Bessel pour résoudre un problème au limite très important dans la physique et la mécanique des fluides. Ce problème consiste à trouver la solution d'une équation aux valeurs propres avec un potentiel défini sur un disque. Ceci veut dire que le problème que nous étudions est un problème à deux dimensions. L'équation aux valeurs propres est transformée en une équation intégrale dont la fonction cherchée est la fonction de Green du problème. Appliquée à cette équation intégrale, la transformation de Bessel permet de trouver la solution au problème.

### 3.1 Problème d'un puits fini ( $-V_0$ sur un disque):

L'éq. de Schrödinger relative au potentiel  $-V_0$  ( $V_0 > 0$ ) à l'intérieur et nul en dehors disque i,e

$$\left(-\frac{\Delta}{2m} + V(r) - E\right) g(r, r') = \delta(r - r'), \quad (3.1.1)$$

$$\left(-\frac{\Delta}{2m} - E\right) g(r, r') = \delta(r - r') - V(r)g(r, r') \equiv \delta(r - r') + q(r, r') \quad (3.1.2)$$

$g(r, r')$  est continue en  $r = a$ ,

$g'_r(r, r')$  est continue en  $r = r' = a$ ,

$$V(r, \theta) = \begin{cases} -V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Soit l'équation

$$\left(-\frac{\Delta_r}{2m} - E\right) g_0(r, r') = \delta(r - r'),$$

sa solution  $g_0(r, r')$  permet de trouver la solution de (3.1.2) comme :

$$g(r, r') = g_0(r, r') + \int g_0(r, r'') q(r'', r') dr'', \quad (3.1.3)$$

En effet appliquons aux deux membres de cette dernière équation l'opérateur  $\left(-\frac{\Delta_r}{2m} - E\right)$  :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\Delta_r}{2m} - E\right) g(r, r') &= \left(-\frac{\Delta_r}{2m} - E\right) g_0(r, r') + \int \left(-\frac{\Delta_r}{2m} - E\right) g_0(r, r'') q(r'', r') dr'' \\ &= \delta(r - r') + \int \delta(r - r'') q(r'', r') dr'' = \delta(r - r') + q(r, r'), \\ \left(-\frac{\Delta_r}{2m} - E\right) g(r, r') &= -V(r)g(r, r') + \delta(r - r'), \\ \left(-\frac{\Delta_r}{2m} - E + V(r)\right) g(r, r') &= \delta(r - r'), \end{aligned}$$

ceci montre que l'équation différentielle (3.1.1) est équivalente à l'équation intégrale suivante

$$g(r, r') = g_0(r, r') + \int g_0(r, r'') q(r'', r') dr'' = g_0(r, r') - \int g_0(r, r'') V(r'') g(r'', r') dr''.$$

Dans notre cas de potentiel, nous avons alors à résoudre l'équation intégral suivante:

$$g_l(r, r') = g_0(r, r') + V_0 \int_0^a \zeta g_0(r, \zeta) g_l(\zeta, r') d\zeta, \quad (3.1.4)$$

pour résoudre on a la considération suivante

$$g^+(r; r') = \begin{cases} g(r, r'), & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}, \quad g^-(r; r') = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ -g(r; r'), & r > a \end{cases} \quad (3.1.5)$$

d'après ces considérations l'équation (3.1.4) s'écrit

$$g_l^+ (r, r') - g_l^- (r, r') = g_0 (r, r') + V_0 \int_0^\infty \zeta g_0 (r, \zeta) g_l^+ (\zeta, r') d\zeta, \quad (3.1.6)$$

on définit la transformation de Bessel d'une fonction  $g_l$  comme

$$\hat{G}_l (p, r') = \int_0^\infty r J_l (pr) g_l (r, r') dr, \quad (3.1.7)$$

la transformation de Bessel de l'équation (3.1.6) est définie par

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty r J_l (pr) g_l^+ (r, r') dr - \int_0^\infty r J_l (pr) g_l^- (r, r') dr \\ &= \int_0^\infty r J_l (pr) g_0 (r, r') dr + V_0 \int_0^\infty r J_l (pr) dr \int_0^\infty \zeta g_0 (r, \zeta) g_l^+ (\zeta, r') d\zeta. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

On définit  $g_0 (r, r')$  par

$$g_0 (r, r') = \int_0^\infty \exp \left[ -2\alpha\epsilon \left( \frac{r^2 + r'^2}{u} \right) + \frac{u}{2} \right] I_l \left( 4\alpha\epsilon \frac{rr'}{u} \right) \frac{du}{u} \quad (3.1.9)$$

la substitution de (3.1.9) à (3.1.8) d'après certain calcul et d'après la formule 6.633.4 [6] on obtient

$$\hat{G}_l^+ (p, r') - \hat{G}_l^- (p, r') = \frac{2J_l (pr')}{p^2 - k^2} + \frac{2V_0}{p^2 - k^2} \hat{G}_l^+ (p, r'), \quad (3.1.10)$$

$$\hat{G}_l^+ (p, r') \left[ \frac{p^2 - \mu_1^2}{p^2 - k^2} \right] - \hat{G}_l^- (p, r') = \frac{2J_l (pr')}{p^2 - k^2} \equiv B(p), \text{ ou } \mu_1^2 = k^2 + 2V_0, \quad (3.1.11)$$

et la décomposition de

$$\frac{p^2 - \mu_1^2}{p^2 - k^2} \text{ qui est } F^+ (p) = \frac{p - \mu_1}{p - k}, \quad \text{et } F^- (p) = \frac{p + k}{p + \mu_1}, \quad (3.1.12)$$

d'après le théorème [13] les fonctions  $\hat{G}_l^+$  et  $\hat{G}_l^-$  sont déterminées par

pour  $r' \leq a$

$$\hat{G}_l^+ (p, r') = \frac{F^- (p)}{2\pi i} \int_L \frac{B(\tau) d\tau}{F^+ (\tau) (\tau - p)}, \quad \text{où } L \text{ est un contour fermé,} \quad (3.1.13)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{p+k}{2\pi i(p+\mu_1)} \int_L \frac{2J_l(\tau r') d\tau}{(\tau^2 - k^2) \left(\frac{\tau - \mu_1}{\tau - k}\right) (\tau - p)} \\
 &= \frac{p+k}{2\pi i(p+\mu_1)} \int_L \frac{2J_l(\tau r') d\tau}{(\tau + k)(\tau - \mu_1)(\tau - p)}, \tag{3.1.14}
 \end{aligned}$$

en appliquant le théorème des résidus aux points ( $\tau = \mu_1$  et  $\tau = p$  sont à l'intérieur du contour) on obtient

$$\hat{G}_l^+(p, r') = \frac{2\beta(\mu_1, k, a)(p-k) J_l(\mu_1 r')}{(\mu_1 + k)(p^2 - \mu_1^2)} + \frac{2J_l(pr')}{p^2 - \mu_1^2}, \tag{3.1.15}$$

la réciproque pour  $r \leq r' \leq a$

$$g^{+,+}(r, r') = \frac{2\beta(\mu_1, k, a) J_l(\mu_1 r')}{\mu_1 + k} \int_0^{+\infty} \frac{p(p-k) J_l(pr) dp}{(p^2 - \mu_1^2)} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{p J_l(pr') J_l(pr) dp}{(p^2 - \mu_1^2)},$$

pour le premier intégrale en appliquant le théorème des résidus au point ( $\tau = \mu_1$ ), pour la deuxième intégrale d'après la formule 6.633.4 [6] on obtient

$$= \frac{2\beta(k, \mu, a) J_l(\mu_1 r') J_l(\mu_1 r)}{(\mu_1 + k)} - \pi J_l(\mu_1 r') Y_l(\mu_1 r), \tag{3.1.16}$$

de même manière pour  $r' > a$

$$\hat{G}_l^-(p, r') = \frac{F^+(p)}{2\pi i} \int_L \frac{B(\tau) d\tau}{F^+(\tau)(\tau - p)}, \quad \text{où } L \text{ est un contour fermé} \tag{3.1.17}$$

$$= \frac{p - \mu_1}{2\pi i(p - k)} \int_L \frac{2J_l(\tau r') d\tau}{(\tau + k)(\tau - \mu_1)(\tau - p)}, \tag{3.1.18}$$

en appliquant le théorème des résidus aux points ( $\tau = -k$  et  $\tau = p$  sont à l'intérieur au contour) on obtient

$$\hat{G}_l^-(p, r') = \frac{2\alpha(\mu_1, k, a)(p - \mu_1) J_l(kr')}{(\mu_1 + k)(p^2 - k^2)} + \frac{2J_l(pr')}{p^2 - k^2}, \tag{3.1.19}$$

la réciproque pour  $r > r' > a$

$$g^{-,-}(r, r') = \frac{2\alpha(\mu_1, k, a) J_l(kr')}{\mu_1 + k} \int_0^{+\infty} \frac{p(p - \mu_1) J_l(pr) dp}{(p^2 - k^2)} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{p J_l(pr') J_l(pr) dp}{(p^2 - k^2)} \tag{3.1.20}$$

$$= \frac{2\alpha(\mu_1, k, a) J_l(kr') J_l(kr)}{(\mu_1 + k)} - \pi J_l(kr') Y_l(kr), \quad (3.1.21)$$

d'après la symétrie de la fonction de Green on prend  $\alpha, \beta$  en fonction de  $a$ , donc on a le système au point  $r = r' = a$

$$\begin{cases} g_l^{+,+}(a, a) = g_l^{-,-}(a, a) \\ \left[ \frac{dg_l^{+,+}(r, a)}{dr} \right]_{r=a} = \left[ \frac{dg_l^{-,-}(r, a)}{dr} \right]_{r=a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi(\mu_1 + k) J_l(ka) Y_l(ka) + 2\alpha(k, \mu_1, a) J_l(ka) J_l(ka) \\ = 2\beta(k, \mu_1, a) J_l(\mu_1 a) J_l(\mu_1 a) - \pi(\mu_1 + k) J_l(\mu_1 a) Y_l(\mu_1 a) \\ -\pi k(\mu_1 + k) Y_l'(ka) J_l(ka) + 2k\alpha(k, \mu_1, a) J_l'(ka) J_l(ka) \\ = 2\mu_1 \beta(k, \mu_1, a) J_l(\mu_1 a) J_l'(\mu_1 a) - \mu_1 \pi(\mu_1 + k) Y_l'(\mu_1 a) J_l(\mu_1 a) \end{cases} \quad (3.1.22)$$

d'après un certain calcul on trouve

$$\beta(k, \mu_1, a) = (\mu_1 + k) \frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu_1 a) (kJ_l'(ka) Y_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) Y_l'(\mu_1 a))}{2a J_l(\mu_1 a) (\mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a) - k J_l'(ka) J_l(\mu_1 a))} \quad (3.1.23)$$

et

$$\alpha(k, \mu_1, a) = (\mu_1 + k) \frac{-2J_l(\mu_1 a) + \pi a J_l(ka) (\mu_1 J_l'(\mu_1 a) Y_l(ka) - k J_l(\mu_1 a) Y_l'(ka))}{2a J_l(ka) (kJ_l'(ka) J_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a))}, \quad (3.1.24)$$

donc

$$g^{+,+}(r, r') = -\pi \left[ \frac{Y_l(\mu_1 r) J_l(\mu_1 r') - \frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu_1 a) (kJ_l'(ka) Y_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) Y_l'(\mu_1 a))}{\pi a J_l(\mu_1 a) (\mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a) - k J_l'(ka) J_l(\mu_1 a))} J_l(\mu_1 r) J_l(\mu_1 r')}{\pi a J_l(\mu_1 a) (\mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a) - k J_l'(ka) J_l(\mu_1 a))} \right] \quad (3.1.25)$$

et

$$g^{-,-}(r, r') = -\pi \left[ \frac{Y_l(kr) J_l(kr') - \frac{-2J_l(\mu_1 a) + \pi a J_l(ka) (\mu_1 J_l'(\mu_1 a) Y_l(ka) - k J_l(\mu_1 a) Y_l'(ka))}{\pi a J_l(ka) (kJ_l'(ka) J_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a))} J_l(kr) J_l(kr')}{\pi a J_l(ka) (kJ_l'(ka) J_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a))} \right] \quad (3.1.26)$$

**Les cas mixtes:**

**le cas  $r' < a < r$  :**

d'après l'égalité (3.1.18) on prend le pole  $\tau = \mu_1$  on a

$$\begin{aligned} \hat{G}_l^-(p, r') &= J_l(\mu_1 r') \left[ \frac{2C(k, \mu_1, a)}{p - k} f(p) + \frac{h(p)}{(\mu_1 + k)(p - k)} \right], \quad (3.1.27) \\ \text{ou } f(p) &= \frac{(p - \mu_1)(\mu_1 + k)}{p + k} \quad \text{et} \quad h(p) = \frac{(-p)^l (\mu_1 + k)}{k^l (p + k)} \end{aligned}$$

la réciproque est donnée par

$$g_l^{-,+}(r, r') = J_l(\mu_1 r') \left[ 2C(k, \mu_1, a) \int_0^{+\infty} \frac{p(p - \mu_1) J_l(pr) dp}{p^2 - k^2} + \frac{2}{(-k)^l} \int_0^{+\infty} \frac{p^{l+1} J_l(pr) dp}{p^2 - k^2} \right] \quad (3.1.28)$$

$$= \pi J_l(\mu_1 r') [-Y_l(kr) + C(k, \mu_1, a) J_l(kr)] \quad (3.1.29)$$

D'après la continuité de la fonction de Green au point  $r = a$  on a

$$g_l^{-,+}(a, a) = g_l^{-,-}(a, a) \Leftrightarrow$$

$$J_l(\mu_1 a) [-Y_l(ka) + C(k, \mu_1, a) J_l(ka)] = \left[ \frac{-Y_l(ka) + \frac{-2J_l(\mu_1 a) + \pi a J_l(ka) (\mu_1 J_l'(\mu_1 a) Y_l(ka) - k J_l(\mu_1 a) Y_l'(ka))}{\pi a J_l(ka) (kJ_l'(ka) J_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a))}}{J_l(ka)} \right] J_l(ka) \quad (3.1.30)$$

$$C(k, \mu, a) = \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} - \frac{Y_l(ka)}{J_l(\mu_1 a)} + \frac{-2J_l(\mu_1 a) + \pi a J_l(ka) (\mu_1 J_l'(\mu_1 a) Y_l(ka) - k J_l(\mu_1 a) Y_l'(ka))}{\pi a J_l(\mu_1 a) (kJ_l'(ka) J_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a))}$$

$$C(k, \mu, a) = \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} - \frac{4}{\pi a [\mu J_l(ka) J_l'(\mu a) - k J_l'(ka) J_l(\mu a)]} \quad (3.1.31)$$

enfin

$$g_l^{-,+}(r, r') = -\pi \left[ \frac{Y_l(kr) J_l(\mu_1 r')}{\left[ \frac{Y_l(ka)}{J_l(ka)} - \frac{4}{\pi a [\mu_1 J_l(ka) J_l'(\mu_1 a) - k J_l'(ka) J_l(\mu_1 a)]} \right] J_l(kr) J_l(\mu_1 r')} \right] \quad (3.1.32)$$

**le cas**  $r < a < r'$  :

d'après la formule (3.1.14) on prend le pole au point  $\tau = -k$

$$\hat{G}_l^+(p, r') = -J_l(kr') \left[ \frac{2D(k, \mu_1, a)}{(\mu_1 + k)(p + \mu_1)} T(p) + \frac{n(p)}{(\mu_1 + k)(p + \mu_1)} \right] \quad (3.1.33)$$

$$\text{où } T(p) = \frac{(k-p)(\mu_1 + k)}{(p - \mu_1)}, \text{ et } n(p) = \frac{(-p)^{l-1}(\mu_1 + k)}{k^l(p - \mu_1)}$$

la réciproque est donnée par

$$g_l^{+,-}(r, r') = J_l(kr') \left[ 2D(k, \mu_1, a) \int_0^{+\infty} \frac{p(p - k) J_l(pr) dp}{p^2 - \mu_1^2} + \frac{2}{(-k)^l} \int_0^{+\infty} \frac{p^{l+1} J_l(pr) dp}{p^2 - \mu_1^2} \right] \quad (3.1.34)$$

$$= \pi J_l(kr') [-Y_l(\mu_1 r) + D(k, \mu_1, a) J_l(\mu_1 r)] \quad (3.1.35)$$

D'après la continuité de la fonction de Green au point  $r = a$  on a

$$\begin{aligned}
 g_l^{+,-}(a, a) &= g_l^{+,+}(a, a) \Leftrightarrow \\
 J_l(ka) [-Y_l(\mu_1 a) + D(k, \mu, a) J_l(\mu_1 a)] &= J_l(\mu a) Y_l(\mu a) - \\
 \frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu_1 a) (kJ'_l(ka) Y_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) Y'_l(\mu_1 a))}{\pi a (\mu_1 J_l(ka) J'_l(\mu_1 a) - kJ'_l(ka) J_l(\mu_1 a))} J_l(\mu a) \\
 D(k, \mu, a) &= \frac{Y_l(\mu a)}{J_l(\mu a)} - \frac{Y_l(\mu a)}{J_l(ka)} + \\
 \frac{-2J_l(ka) + \pi a J_l(\mu_1 a) (kJ'_l(ka) Y_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) Y'_l(\mu_1 a))}{\pi a J_l(ka) (\mu_1 J_l(ka) J'_l(\mu_1 a) - kJ'_l(ka) J_l(\mu_1 a))} \\
 D(k, \mu, a) &= \frac{Y_l(\mu a)}{J_l(\mu a)} - \frac{4}{\pi a [kJ'_l(ka) J_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) J'_l(\mu_1 a)]} \tag{3.1.36}
 \end{aligned}$$

d'où

$$g_l^{+,-}(r, r') = -\pi \left[ \begin{array}{c} J_l(kr') Y_l(\mu_1 r) \\ - \left[ \frac{Y_l(\mu_1 a)}{J_l(\mu_1 a)} - \frac{4}{\pi a [kJ'_l(ka) J_l(\mu_1 a) - \mu_1 J_l(ka) J'_l(\mu_1 a)]} \right] J_l(kr') J_l(\mu_1 r) \end{array} \right] \tag{3.1.37}$$

### CONCLUSION GENERALE

Dans notre travail, nous nous sommes intéressées aux équations intégrales et les transformations de Bessel: Transformation de Hankel, Transformations de Meijer et la transformation de Kontorovich-Lebedev. Pour chacune de ces transformations, nous avons présenté les propriétés fondamentales. Nous avons également exposé la méthode de calcul de la fonction de Green pour la résolution de certains problèmes de physique mathématique. Enfin nous avons appliqué les transformations de Bessel sur les équations intégrales pour calculer la fonction de Green d'un potentiel défini sur un disque. Comme perspective, nous allons aussi prolonger cette méthode à l'étude des autres problèmes des potentiels.

# Bibliographie

- [1] K.V.Bhagwat and S.V.Lawande, Physic Letters A, Volume 141, number 7, 1989.
- [2] M. Barbi, Introduction à l'analyse spectrale, université pierre et marie curie 4place.
- [3] P. J. Collins, Differential and intégral equation, Oxford University Press, 2006.
- [4] L. Debnath, D. Bhatta, Integral Transforms and their application, Sccond Edition, Taylor et Francis Group, 2007.
- [5] V. Ditkine et A . Proudnikov, Transformations intégrales et calcul opérationnel, Traduction français Edition Mir 1978.
- [6] V. Gradchayn, Table of Integrals, Series, and Products ,1996.
- [7] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, Equations intégrales; Edition Mir (1976).
- [8] M. Krech, Bessel fonction ,Penn State\_ Gottingen Summer school.
- [9] L.D.Landau and L.M.Lifshitz, Quantum mechanics, Oxford, 1958.
- [10] D.Peak and A. Inomata, J. Math. Phys, 1969.
- [11] A. D. Poularikas, The transforms and applications handbook, The university of alabama in Huntsville, 2000.
- [12] V.Schechtm, Introduction aux fonction spéciales, Notes de cours Automne, 2006.
- [13] V.Smirnov, Cours de Mathématique Supérieures, Vol.IV Part.1Edition, Mir Moscou, 1975.

في هذه المذكرة قدمنا لمحة حول دالة فريين والمعادلات التكاملية، وقد أبرزنا أهم أنواعها، ومن ثم عرفنا تحويل بيسل بأنواعه (Meijer, Hankel), وكذلك أوضحنا علاقة تحويل Hankel بتحويل Fourier (Kontorovitch-Lébedev).

وفي الأخير عالجتنا مسألة فيزيائية وذلك بحساب دالة فريين من خلال تحويل المسألة الحدية إلى معادلة تكاملية وحلها باستخدام تحويل بيسل.

## الكلمات المفتاحية:

المعادلة التكاملية- دالة فريين- معادلة فريدهولم- معادلة فولتيرا- تحويل فورييه - دالة بيسل- تحويل بيسل- دالة ماكدونالد.

## Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté un rappel sur la fonction de Green, les équations intégrales, et nous avons montré les types les plus importants des équations intégrales, aussi nous avons défini la transforme de Bessel et leurs types (Hankel, Meijer, Kontorovitch-Lébedev), ainsi nous avons montré la relation entre transformée de Hankel et transformée de Fourier. Enfin, Nous avons abordé un problème physique en calculant la fonction de Green à partir de la transformation du problème aux limite en équation intégrale et nous avons utilisé transformation de Bessel pour résoudre cette équation.

### Les mots clés:

équation intégrale - Fonction de Green - équation de Fredholm - équation de Volterra - Transformation de Fourier - Fonction de Bessel - Transformation de Bessel-Fonction de Mac Donald.

## Summary

In this paper, we have presented a reminder of the Green's function, integral equations, and we showed the most important types of integral equations, as we have defined the Bessel transforms and their types (Hankel, Meijer, Kontorovitch-Lebedev), and we have shown the relationship between the Hankel transform and Fourier transform. In the end, we approached a physical problem by calculating the Green function from the transformation of the problem limited to integral equation and we use Bessel transforms to solve this equation.

### Keywords:

Integral equation - function of Green - equation of Fredholm - equation of Volterra - transformation of Fourier - Function of Bessel - Transformation of Bessel - Function of Mac Donald.