

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR, EL OUED



FACULTE DE LA TECHNOLOGIE

Département d'hydraulique et Génie civil

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de:

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie civil

Spécialité : Matériaux en génie civil

THEME

Modélisation des coques par des éléments finis
triangulaires sans degré de liberté de rotation.

Présentation par:

BIA Taha

GAID Elmotaz Billah

KEMERCHOU Yakoub

BEY Aymen

Soutenu publiquement le:

Devant le Jury composé de :

Président

Université d'El Oued

Examineur

Université d'El Oued

LABIODH Bachir

Encadreur

Université d'El Oued

Année universitaire : 2021-2022

Remerciements

pour le bénir

Nous remercions Dieu Tout-Puissant pour sa bonté, sa miséricorde et sa miséricorde qui nous ont fait l'honneur d'être parmi les êtres qui ont été alphabétisés et de donner le résultat de cette humble mémoire.

Nous tenons à exprimer nos remerciements au superviseur, Dr. Lapid Bashir pour ces conseils, cette disponibilité et cette aide utile.

Nous vous remercions pour tout ce que vous nous avez appris au cours des deux dernières années, ainsi que pour votre disponibilité, votre soutien et votre confiance.

Nous remercions également les professeurs de tout mon parcours qui nous ont transmis les valeurs de la science.

Enfin, à toutes les personnes qui nous encouragent, nous aident et nous guident tout au long de nos années scolaires

De l'école primaire jusqu'à maintenant, nous vous adressons nos sincères remerciements.

Résumé

La modélisation des structures de type coque (ou plaque) se fait en général par des éléments plaques-coques classiques, cependant ces dernières années de nombreux travaux de recherche ont été effectués dans le domaine des éléments finis sans degré de liberté en rotation. Dans cette étude nous allons présenter un élément fini triangulaire sans degré de liberté en rotation destiné à l'analyse des structures de type coque, la mise en œuvre numérique sera effectuée sur le logiciel Matlab, les applications numériques dans le domaine de calcul des structures seront nécessaires pour tester la fiabilité et la performance de cet élément.

Mots clés : modélisation, structures type coques, degré de liberté rotationnelle, élément finis triangulaire, Matlab.

Abstract

The modeling of structures of the shell (or plate) type is generally done by conventional plate-shell elements, however in recent years many research works have been carried out in the field of finite elements without degree of freedom in rotation. In this study we will present a triangular finite element without degree of freedom in rotation intended for the analysis of the shell type structures, the numerical implementation will be carried out on the Matlab software, the numerical applications in the field of calculation of the structures will be necessary to test the reliability and performance of this element.

Keywords: modelling, shell type structures, rotational degree of freedom, triangular finite element, Matlab

ملخص

يتم إجراء نمذجة هياكل قشرية (أو الصفيحة) بشكل عام بواسطة عناصر غلاف الصفيحة التقليدية، ولكن في السنوات الأخيرة تم إجراء العديد من الأعمال البحثية في مجال العناصر المحدودة دون درجة من الحرية في الدوران. في هذه الدراسة سوف نقدم عنصرًا محدودًا مثلثًا بدون درجة من الحرية في الدوران المخصص لتحليل الهياكل الصدفية، وسيتم إجراء التنفيذ العددي على برنامج Matlab ، وستقوم التطبيقات العددية في مجال حساب الهياكل تكون ضرورية لاختبار موثوقية وأداء هذا العنصر.

الكلمات المفتاحية: النمذجة، هياكل قشرية، درجة الحرية الدورانية، العنصر المحدود

المثلث، ماتلاب

Sommaire

Remercîments	
Résumé.....	
Abstract	
Sommaire.....	
Liste des Figures	
Liste des tableaux	
Introduction générale	1

Chapitre I: Théorie des coques / Recherche bibliographique

I-1. Théorie des coques et leurs classifications	3
I-1.1. Caractéristique et géométrie des coques	3
I-1.2. Classifications (surfaces géométriques).....	4
I-1.3. Théorie des coques.....	7
I.2. ASPECT CINEMATIQUE :	8
I.2.1. DESCRIPTIONS DU MOUVEMENT	8
I.2.2. Choix de description :	9
I.2.3. LA DESCRIPTIO LAGRANGIENNE	9
I.2.4. Différentes configurations d'un corps en mouvement :	10
I.2.5. Description Lagrangienne Corotationnelle (D.L.C) :	12
I.2.6. Les Grandes Rotations :	13
I.3. ASPECT GEOMETRIQUE :	15
I.3.1. NOTION ET MESURE DES DEFORMATIONS.....	15
I.3.2. PROPRIETES DES TENSEURS DE DEFORMATION	18
I.3.3. VARIATION DE DEFORMATION	19
I.4. ASPECT MECANIQUE :	19
I.4.1. NOTION ET MESURE DES CONTRAINTES	19
I.4.1.1. Tenseur de Cauchy :	20
I.4.1.2. Tenseur de Piola-Kirchhoff :	20
I.5. L'APPROCHE INCREMENTALE :	20
I.6. Expression Incrementale Du Principe Des Deplacements Virtuels :	21
I.6.1. EXPRESSION INCREMENTALE DU (P. D. V) EN (D. L. T)	22
I.6.2. EXPRESSION INCREMENTALE DU (P. D. V) EN (D. L. A)	23

Chapitre II : Présentation d'un élément fini triangulaire sans degré de liberté en rotation

II.1. Formulation de l'élément DKT18RF.....	25
II.1.1. Variables cinématiques.....	27
II.1.2. Déformation de membrane.....	28
II.1.3. Déformation de flexion.....	28
II.1.4. Forme discrétisée de W_{int}^e	29
II.1.5. Matrice de rigidité dans le repère global.....	30

Chapitre III : Mise en œuvre numérique de l'élément DKT18RF

III.1. Qu'est-ce que MATLAB ?	33
III.2. Une session MATLAB	33
III.2.1 Lancer, quitter MATLAB.....	34
III.2.2 Fonctions et commandes.....	34
III.2.3 Historique	34
III.2.4 Aide en ligne - help-lookfor	35
III.3. Présentation des programmes DKT18RF	35
III.3.1 Présentation du programme élément fini DKT18RF.....	37
III.3.2 Description du programme	37

Chapitre IV : Applications et validation numérique

IV.1. Poutre console de Macneal.....	41
IV.2. Cylindre pincé avec diaphragme	43
IV.3. Cylindre pincé à bord libre	45
Conclusion générale.....	49
Références bibliographiques.....	51
Annexes.....	53

Liste des Figures

Figure I.1 : Surface et ses lignes de coordonnées.....	3
Figure I.2 : Courbe v , de courbure normale $1/rn$ au point A, section normale de la surface Σ par le plan P.	4
Figure I.3 : Surfaces de la translation.....	5
Figure I.4 : Surfaces réglées	6
Figure (I-5). Cinématique d'une plaque mince en théorie de Kirchhoff.....	7
Figure (II-1). Solide élastique en mouvement	10
Figure (II-2). Configurations d'un solide en mouvement.....	10
Figure (II-3). Cinématique de la Description Corotationnelle	13
Figure (II-4). Déformation d'un solide en mouvement.....	16
Figure (II-5). Contrainte et force élémentaire	19
Figure IV.1 Poutre console sollicitée à son extrémité par : (1) un effort de cisaillement (2) moment de flexion.....	41
Figure IV.2. Courbe de convergence de déplacement.....	42
Figure IV.3. Courbe de convergence de déplacement.....	42
Figure IV.4. Cylindre pincé avec diaphragmes rigides	43
Figure IV.5. Déformée du cylindre pincé avec diaphragmes (maillage 5x5).....	45
Figure IV.6. Cylindre pincé à bord libre	46
Figure IV.7. Déformée du cylindre à bord libre (maillage 3X6).....	47

Liste des tableaux

Tableau IV.2. Poutre console de Macneal DKT18RF cas (01)	41
Tableau IV.3. Poutre console de Macneal DKT18RF cas (02)	42
Tableau IV.1. Cylindre pincé avec diaphragme DKT18RF (Vd) $V_d = -E h V_d / p$	43
Tableau IV.2. Cylindre pincé avec diaphragme DKT18RF (Wc) $W_C = -E h W_c / p$	44
Tableau IV.3. Cylindre pincé à bord libre DKT18RF (Wc) 1 ^{er} cas : $F_1=100$; $h_1=0,094$	46
Tableau IV.3. Cylindre pincé à bord libre DKT18RF (Wc) 2 ^{ème} cas : $F_2=0,1$; $h_2=0,01548$..	47

Introduction générale

Aux cours des dernières décennies de nombreux travaux de recherche ont été effectués dans le domaine des éléments finis sans degré de liberté de rotation. Ces éléments constituant une alternative séduisante aux éléments plaques-coques classiques. Ces éléments présente plusieurs avantages qu'on peut citer parmi eux : le nombre de degrés de liberté est deux fois moindre d'où un gain en temps de calcul, pas de phénomène de blocage en cisaillement-flexion et un conditionnement de la raideur qui s'améliore à mesure d'épaisseur réduit, une cohérence des degrés de liberté entre éléments coques et solides, une gestion du contact en général plus simple, une description des transformations finies simples. Les éléments finis sans degré de liberté de rotation sont ainsi utilisés avec succès pour la simulation de la mise en forme par emboutissage. Cependant la principale limitation de ce type d'éléments finis est leur sensibilité à la distorsion du maillage.

Dans ce travail nous allons présenter La formulation d'un élément fini triangulaire sans degré de liberté en rotation développé à partir de l'élément triangulaire de type facette plane DKT18 (présenter par Batoz et Dhett en 1992), ce dernier est obtenu par superposition de l'élément triangulaire de membrane CST qui contient deux degrés de liberté par nœud et l'élément de flexion des plaques DKT qui possède trois degré de liberté par nœud, soit un degré de translation verticale (w) plus deux rotations. L'idée principale dans la formulation de cet élément est de modifier l'opérateur matriciel B_f relatif aux déformations de flexion de l'élément DKT pour avoir uniquement que des termes qui correspondent à la composante de déplacement w , la superposition de l'élément DKT modifié et l'élément de membrane CST nous donne l'élément fini triangulaire nommé DKT18RF avec uniquement trois translations par nœud, des applications numérique dans le domaine de calcul des structures seront réalisées afin de test la précision des résultats obtenus en utilisant cet élément.

Ce mémoire sera présenté en quatre chapitres comme suit :

Le premier chapitre fait l'objet d'une recherche bibliographique sur les différentes méthodes de développement des éléments finis de type coques réalisées par des recherches durant ces dernières années, ainsi que la présentation de la théorie des coques.

Dans le deuxième chapitre, on présente la formulation théorique détaillée de l'élément triangulaire sans degrés de liberté de rotation DKT18RF.

Le troisième chapitre est consacré à la Mise en œuvre numérique de l'élément DKT18RF.

Le dernier chapitre contient des Applications et validation numérique de l'élément DKT18RF.

Pour finir, les principales conclusions et recommandations concernant ce travail sont présentées dans la partie conclusion générale.

***Chapitre I: Théorie des
coques / Recherche
bibliographique***

I-1. Théorie des coques et leurs classifications

I-1.1. Caractéristique et géométrie des coques

I-1.1.1. Géométrie de la surface moyenne :

Dans un système d'axes cartésien droit (X, Y, Z), les équations paramétriques

$$X = X(\alpha, \beta) \quad Y = Y(\alpha, \beta) \quad Z = Z(\alpha, \beta) \quad (I.1)$$

Définissent une surface s . a toute valeur constante β du paramètre $C\beta$ correspond une ligne sur la surface, dite ligne de coordonnée α ; de même, $\alpha = C\alpha$ définit une ligne de coordonnée β .

L'ensemble forme les lignes de coordonnées et (α, β) sont les coordonnées curvilignes de la surface (fig. 1.1) Si les paramètres α et β peuvent être éliminés des équations (I.1), on obtient la forme explicite

$$Z = Z(X, Y) \quad (I.2)$$

La surface peut, semblablement, être définie (de façon vectorielle et paramétrique) par le vecteur

$$OA = x(\alpha, \beta) = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3 \quad (I.3)$$

Où e_1, e_2 et e_3 sont les vecteurs unités dans (X, Y, Z)

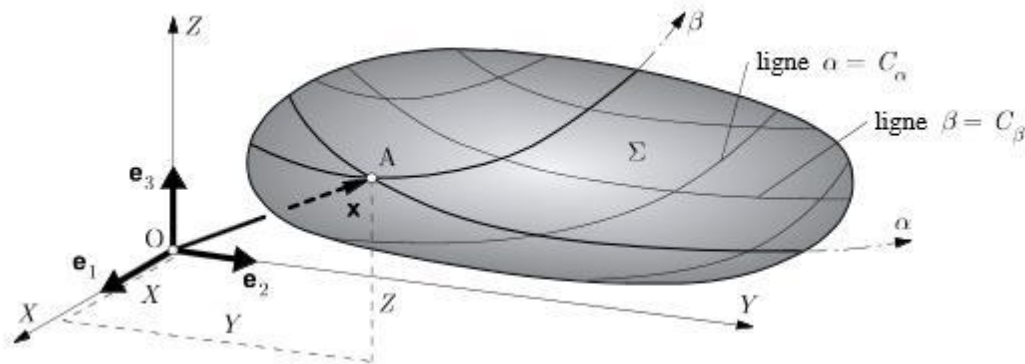


Figure I.1 : Surface et ses lignes de coordonnées

I-1.1.2. Courbure normale

Soit n la normale élevée au point A d'une surface Σ . On dit qu'un plan P contenant n réalise une section normale de la surface ; cette section se traduit par une courbe plane v tracée sur Σ .

Au point A de cette courbe, on désigne par r_n le rayon de courbure ; son inverse $1/r_n$ est la courbure normale.

Lorsque le plan P tourne autour de n , rn et $1/rn$ varient entre deux valeurs extrêmes appelées rayons de courbure principaux $R1$ et $R2$ et courbures principales $K1= 1/R1$ et $K2= 1/R2$; les plans P correspondants sont perpendiculaires.

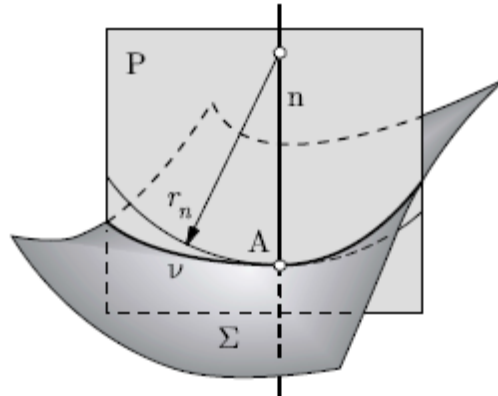


Figure I.2 : Courbe ν , de courbure normale $1/rn$ au point A , section normale de la surface Σ par le plan P .

I-1.2. Classifications (surfaces géométriques)

Nous définissons ici quelques-unes des surfaces qui sont couramment utilisés pour les structures en coque en la pratique d'ingénierie. Il existe plusieurs classifications possibles de ces surfaces. Une cette classification, associée à la courbure gaussienne ;

I-1.2.1. Classification basée sur la forme géométrique

I-1.2.1.1. Surfaces de révolution

Les surfaces de révolution sont générées en faisant tourner un plan courbe, appelé le méridien, autour d'un axe qui n'est pas nécessairement la jonction de méridien. Cylindres, cônes circulaires, des dômes sphériques ou elliptiques, de hyperboloïdes révolution et tores (voir Fig. 3.1) quelques exemples de surfaces de révolution. Il peut être vu que pour le cylindre et le cône circulaire (Fig. 3.1a et b), le méridien est une ligne droite, et, par conséquent, $k1 = 0$, ce qui donne $\Gamma = 0$. Ce sont des coques de zéro Courbure gaussienne. Pour ellipsoïde et paraboloïde de révolution et de sphères (Fig. 3.1c, d, et e) les deux courbures principales sont dans la même direction et, Ainsi, ces surfaces ont une courbure gaussienne positive ($\Gamma > 0$). Ils sont anticlastique surfaces. Pour l'hyperboloïde de révolution (Fig. 3.1f), les courbures de la méridien et la deuxième ligne de courbure sont dans des directions opposées (ce est à dire, le principal rayons $R1$ et $R2$ se situer sur des côtés opposés de la surface pour tous les points de la surface). Pour le tore (Fig. 3.1 g), la courbure gaussienne passe de positive à négative que nous nous déplaçons le long de la surface.

I-1.2.1.2. Surfaces de la translation

Une surface de translation est définie comme la surface en le mettant généré une courbe plane parallèle à son plan initial que nous avançons le long une autre courbe plane. Les deux plans contenant les deux courbes sont à angle droit par rapport à l'autre. Un paraboloïde elliptique ...etc.

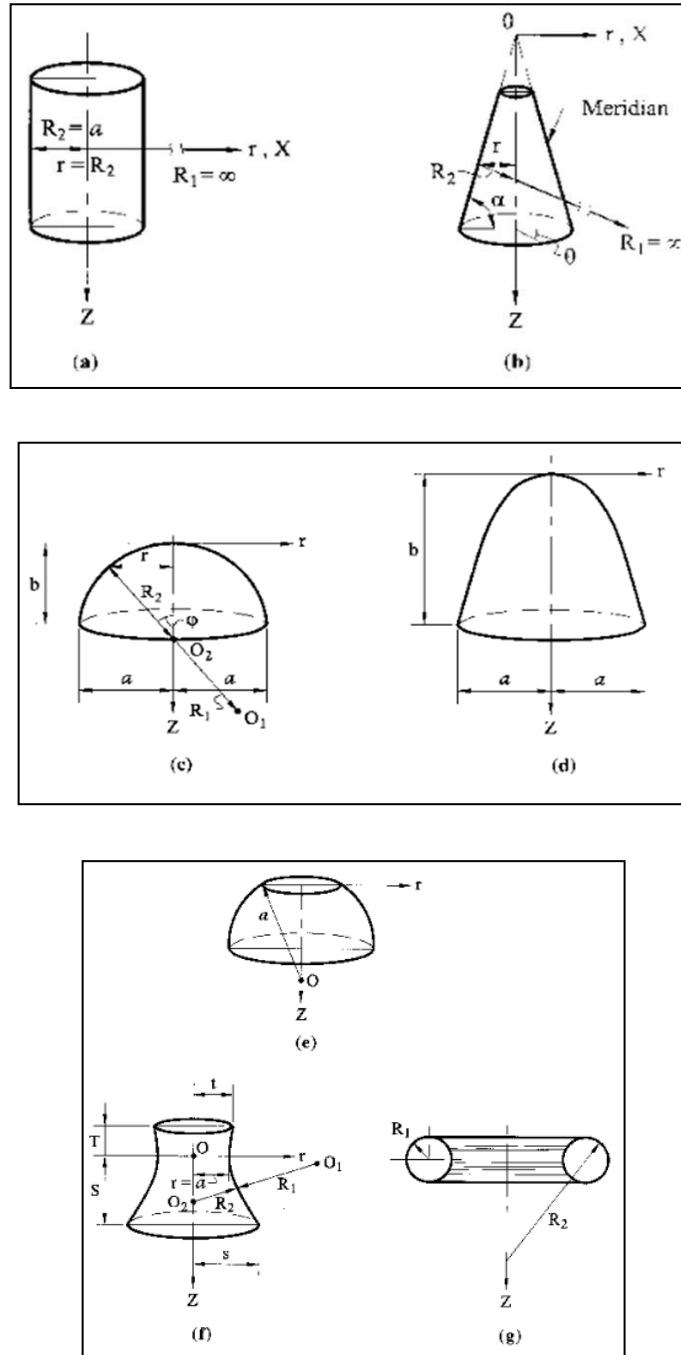


Figure I.3 : Surfaces de la translation

I-1.2.1.3. Surfaces réglées

Surfaces réglées sont obtenus par la traduction de lignes droites sur deux courbes terminales (Fig. 3.2). Les lignes droites ne sont pas nécessairement à angle droit par rapport aux plans contenant les courbes d'extrémité. Le tronc de cône peut donc être considéré comme une surface réglée, car elle peut être produite par traduction d'une ligne droite (la génération Tor) plus de deux courbes à ses extrémités. Il est également, bien sûr, une enveloppe de révolution. L'hyperboloïde de révolution à une nappe, représenté sur la (Fig. 3.2a), représente un autre exemple de surfaces réglées. Il peut être généré aussi par la traduction d'un droit linéaire sur deux cercles à ses extrémités. (Fig 3.2b) présente une surface engendrée par une traduction d'une ligne droite sur une courbe circulaire à une extrémité et sur une ligne droite à l'autre extrémité. De telles surfaces sont appelées conoïdes. Les deux surfaces représentées sur (Fig. 3,2) ont courbure gaussienne négative.

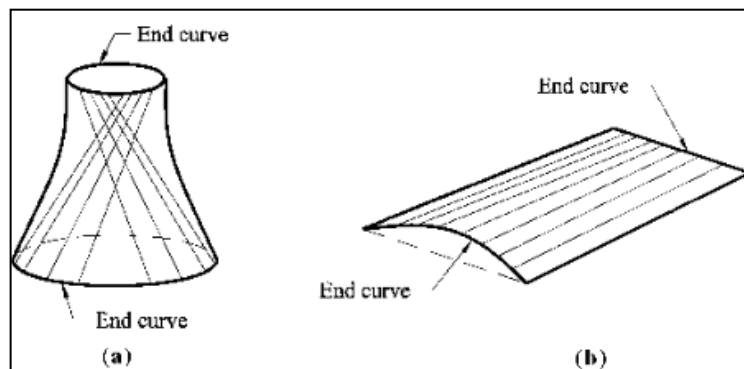


Figure I.4 : Surfaces réglées

I-1.2.2. Classification basée sur la courbure

I-1.2.2.1. Coques à une seule courbure

Ces coquilles ont une courbure gaussienne zéro. Certaines coques de révolution (circulaires cylindres, cônes), coques de la traduction, ou gouvernés surfaces (circulaire et non circulaire cylindres et cônes) sont des exemples de coques seules courbes.

I-1.2.2.2. Réservoirs doublement incurvés de courbure gaussienne positive

Certaines coques de révolution (dômes circulaires, ellipsoïdes et paraboloides de révolution) et les coquilles de la traduction et de surfaces réglées (paraboloides elliptiques, paraboloides de révolution) peut être affectée à cette catégorie de surfaces.

I-1.2.2.3. Coques doublement incurvées de courbure gaussienne négative

Cette catégorie de surfaces se compose de quelques coques de révolution (hyperboloïdes de révolution d'une feuille) et coquilles de traduction ou de surfaces réglées (paraboloïdes, conoïdes, hyperboloïdes de révolution d'une feuille). On voit sur cette classification que le même type d'enveloppe peut apparaître en plus d'une catégorie.

I-1.2.3. Classification basée sur la capacité de développement géométrique

I-1.2.3.1. Surfaces développables

Surfaces développables sont définis comme des surfaces qui peuvent être " développés " dans un plan forme sans couper et / ou étirement leur surface moyenne. Toute surface incurvée seu visages sont des exemples de surfaces développables.

I-1.2.3.2. Surfaces non-développables

Une surface non développable une surface qui doit être coupé et / ou étiré de manière à être développé en une forme plane. Surfaces à double courbure sont généralement non-développable. La classification des surfaces de coque en développable et non développable a une certaine sen mécanique.

I-1.3. Théorie des coques

I-1.3.1. Equations générales de la plaque mince en Théorie de Kirchhoff :

I-1.3.1.1. Relations Cinématiques :

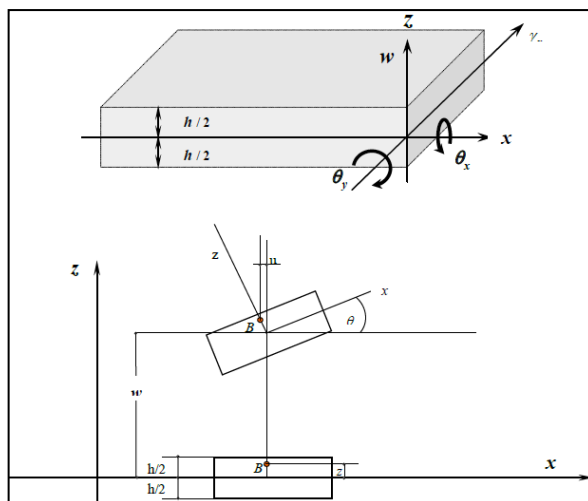


Figure (I-5). Cinématique d'une plaque mince en théorie de Kirchhoff

Le Déplacement du point B dans le sens x est

$$u = -z \tan \theta \quad (I-4)$$

Le déplacement étant petit

$$\tan \theta = \theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (I-5)$$

$$\text{Ainsi} \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (I-6)$$

$$\text{et dans la direction y} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (I-7)$$

Donc le champ des déplacements est défini uniquement par une variable

I.2. ASPECT CINEMATIQUE :

La différence entre l'analyse linéaire et non linéaire géométrique réside dans la cinématique, où il n'est plus possible en grandes déplacements de confondre la configuration déformée et la configuration initiale non déformée. Les grands déplacements nécessitent alors la mise au point de nouveaux schémas numériques pour l'analyse précise de l'histoire des contraintes et des déformations au cours de l'évolution de la structure considérée. En particulier, les positions d'une particule du solide doivent être clairement définies par rapport à une configuration fixée a priori, la configuration initiale, la configuration courante ou finale ou tout autre type de configuration. L'importance du choix du repérage et du paramétrage des particules s'avère donc un élément essentiel. Ces aspects ont été largement développés dans [FOREST & al 2006].

I.2.1. DESCRIPTIONS DU MOUVEMENT

La représentation des variables cinématiques et mécaniques d'un ensemble de particules matérielles du corps, est appelé description. On note que la description du mouvement est complètement définie par la connaissance de l'état initial et de l'état final du point matériel. Afin de suivre le mouvement d'un point matériel du solide, il existe de manière générale deux principales approches classiques proposées au 19^{ème} siècle dans le contexte de la mécanique classique et en astronomie. Elles sont reformulées ensuite et utilisées pour la description du mouvement dans le cadre de la mécanique des milieux continus déformables. Elles peuvent être Eulérienne (une représentation liée à un point géométrique); ou Lagrangienne (représentation liée à un point matériel).

I.2.1.1. Description Lagrangienne (Matérielle) :

A un instant t quelconque, le milieu occupe un domaine, noté Ω_t , dont une particule initialement en $\vec{x}_0$ se situe maintenant au point géométrique M de coordonnées $\vec{x}$.

La *description lagrangienne* consiste alors à identifier chaque particule de la configuration par sa position dans la configuration de référence. Toute grandeur physique peut alors être exprimée en fonction de la particule à laquelle elle est rattachée et du temps. On peut donc définir une fonction vectorielle $\vec{\psi}(x_0, t)$ qui décrit la correspondance spatiale entre les configurations initiale et actuelle. On aura donc $\vec{x} = \vec{\psi}(x_0, t)$.

I.2.1.2. Description Eulérienne (spatiale) :

Par opposition à la description lagrangienne, la description Eulérienne ne cherche pas à repérer les particules au cours du temps relativement à une configuration initiale, mais consiste au contraire à définir à chaque instant t et en $\vec{x}$, tout point $\vec{x}$ de la configuration actuelle, la vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$ de la particule située à l'instant t au point de coordonnées $\vec{x}$. Ceci revient à prendre, à chaque instant, la configuration actuelle comme configuration de référence. Il convient également de prendre en compte la conservation de la matière, ce qui est le cas en mécanique des fluides et en aéro-acoustique pour lesquels la description eulérienne est souvent mieux adaptée.

I.2.2. Choix de description :

Les deux descriptions présentent chacune son utilité suivant les types de milieux continus qu'on envisage. Pour les solides déformables, on préfère souvent la description de Lagrange, car la configuration de référence est facilement identifiable. On s'intéresse plutôt à la position finale après un certain temps lorsque l'application des efforts est achevée. Cette description consiste à suivre le mouvement d'une même particule du milieu au cours du temps. Pour les fluides, on préfère souvent la description d'Euler. En effet, on s'intéresse peu à la position individuelle des particules, du point de vue expérimental, cette description dite "eulérienne" correspond à une mesure locale de la vitesse du fluide, répétée en un très grand nombre de points de l'écoulement. Dans cette description, on observe différentes particules de fluide qui se succèdent en un même point de l'espace, comme lorsqu'on regarde l'eau défilier sous un pont (dans ce cas l'espace est discrétisé et le corps se déplace à travers l'espace). Il y a des problèmes particuliers dont le choix n'est pas clair (interaction fluide structure, procédés de formage, ...) dans ces cas la combinaison des deux descriptions est plus avantageuse.

I.2.3. LA DESCRIPTIO LAGRANGIENNE

Contrairement à la mécanique des fluides, on ne s'intéressera pas ici à la description du mouvement du solide pendant la déformation, mais seulement à l'état final du corps, lorsque l'application du chargement est terminée et que le solide a atteint son état d'équilibre.

Parmi les formulations permettant le passage entre deux configurations voisines à $t + \Delta t$, les formulations dites lagrangiennes sont les plus courantes. Elles consistent à exprimer le principe des puissances virtuelles à l'instant $t + \Delta t$ à partir d'une configuration de référence $C(r)$ qui peut, mais pas nécessairement, coïncider avec la configuration initiale à $C(0)$ à $t = 0$.

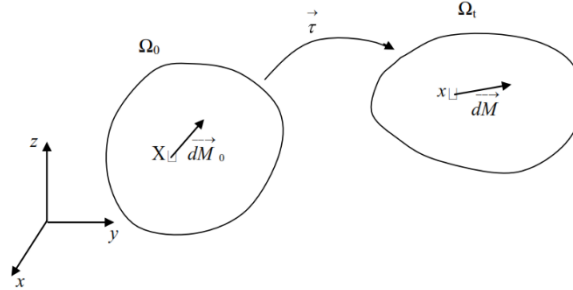


Figure (II-1). Solide élastique en mouvement

I.2.4. Différentes configurations d'un corps en mouvement :

Considérons un corps solide continu A constitué d'un ensemble de particules matérielles occupant à l'instant t un volume V de l'espace euclidien, borné par une frontière S . L'état, dans lequel se trouve le solide à cet instant, définit ce qu'on appelle la configuration actuelle du solide. Cette configuration notée $C(t)$ est caractérisée par un ensemble de variables cinématiques et mécaniques, telles que les positions géométriques des particules matérielles ; les contraintes et les déformations internes aux points matériels. Généralement quand on parle de configuration connue, on sous-entend que toutes les quantités cinématiques et mécaniques caractérisant la configuration sont connues.

Souvent, l'analyste introduit une *configuration de référence* qui est une configuration particulière connue de la structure à un instant t_0 et fait la description au cours du temps des transformations géométriques que subit la structure quand elle se déplace de cette référence.

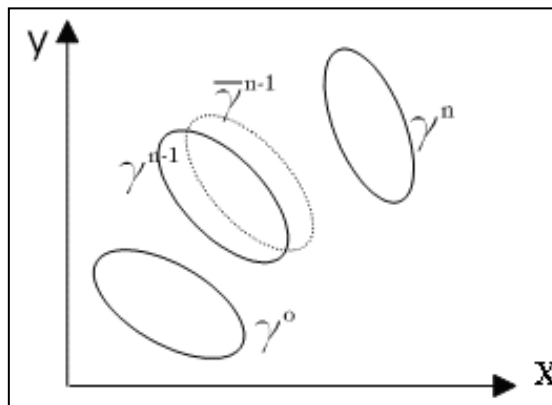


Figure (II-2). Configurations d'un solide en mouvement

Nous pouvons définir 4 configurations d'équilibre du corps *figure (II-2)*:

- La configuration initiale de l'élément, elle correspond à l'état au repos du corps, (non déformé, et non ni déplacé). Elle sera notée γ^0 . Elle correspond à $t = 0$. Les coordonnées d'un point matériel dans cette configuration seront notées 0x_i ;
- La configuration courante, inconnue a priori. Elle sera notée γ^n . Les coordonnées du même point; matériel dans cette configuration seront notées tx_i ;
- La configuration antérieure à la configuration courante, elle peut être :
 - Configuration voisine de γ^n . Elle sera notée γ^{n-1} .
 - Configuration très voisine de γ^{n-1} . Elle sera notée $\overrightarrow{\gamma^{n-1}}$ et généralement non déformée.

Afin d'éviter tout confusion entre les différents variables dans les différentes configurations, la notation du variable est munie de deux indices additionnels comme suit:

${}_{t1}^{t2}v$

$t1$: c'est la date de la position de référence;

$t2$: c'est la date à la quelle le variable est considéré.

On définit les déplacements de la façon suivante :

$${}^tu_i = {}^tx_i - {}^0x_i$$

$${}^{i+\Delta t}u_i = {}^{t+\Delta t}x_i - {}^0x_i$$

Et l'incrément de déplacement entre et s'écrit γ^n et γ^{n-1}

$$\delta_t u = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^tu_i$$

Il faut préciser que pour les quatre descriptions lagrangiennes, le système d'axes de référence utilisé est fixe et commun aux trois. Ainsi, les coordonnées d'une même particule sont notés dans le même système d'axes.

Ainsi La description (ou Formulation) Lagrangienne est appelée :

- Totale (D.L.T) : si on effectue le calcul par rapport à la référence γ^0 .
- Actualisée (D.L.A) : si on effectue le calcul par rapport à la référence γ^{n-1} .
- Actualisée Approchée (D.L.A.A) : si on effectue le calcul par rapport à la référence $\overrightarrow{\gamma^{n-1}}$, dans ce dernier cas la configuration actuelle inconnue γ^{n-1} est remplacée par la configuration $\overrightarrow{\gamma^{n-1}}$ qui est beaucoup plus simple à manipuler car elle est connue et non déformée.

Les Descriptions lagrangiennes traditionnelles, qui sont la description lagrangienne totale "D.L.T" et la description lagrangienne actualisée "D.L.A", ont été intensivement employées pour dériver la matrice de rigidité en analyse non linéaire. La "D.L.T" utilise la

configuration initiale comme référence de déformation tandis que la "D.L.A" utilise une configuration déformée. Récemment, (en 1988 par Kanok-Nukulchai et Wong), une nouvelle variante de la description lagrangienne a été utilisée et elle est désignée sous le nom de "Element-Based Lagrangian Formulation" E.L.F [LEE & NUKULCHAI 1998], [HANA & all 2008] dans laquelle l'élément naturel sert de référence de déformation. Il signifie que toutes les équations gouvernants un corps déformé peuvent être exprimées dans le système des coordonnées naturels et en termes des coordonnées naturelles. Ainsi il apparaît sous une forme plus simple que ceux des deux descriptions lagrangiennes traditionnelles, et offre une grande efficacité sur le plan informatique.

I.2.5. Description Lagrangienne Corotationnelle (D.L.C) :

Pour les descriptions Lagrangienne classiques définies précédemment, le système d'axes de référence est gardé fixe. Si on fait bouger le système d'axes de référence avec le mouvement du corps de manière à éliminer le mouvement de corps rigide induit par le grand déplacement, une autre description Lagrangienne d'une manipulation relativement simple peut être définie. Cette description est appelée description Lagrangienne Corotationnelle (D.L.C.). Il s'agit ensuite de définir la position de ce système d'axes, ceci peut être résolu en le prenant comme le système d'axes obtenu après avoir fait subir au système d'axes initial un mouvement de corps rigide afin de le positionner le plus proche possible de la configuration actuelle déformée *figure (II-3)*. En effet ceci permettrait d'absorber les grandes rotations et translations de corps rigide par l'actualisation des coordonnées sur le nouveau système d'axes, et les rotations et déplacements restantes peuvent être considérées petites ou modérées. De cette façon la D.L.C surmonte ainsi un des problèmes des descriptions Lagrangienne classique, qui est le traitement des grandes rotations. Le fait en plus de constater que dans la majorité des cas la non linéarité géométrique peut être décomposée en un large mouvement de corps rigide accompagné d'une déformation local, peut donner à la description Corotationnelle un avantage certain.

Comme pour la description Lagrangienne classique, on définit pour la description Lagrangienne Corotationnelle, deux descriptions particulières se différenciant par le choix de la configuration de référence adaptée.

La description Lagrangienne Corotationnelle est appelée :

- Totale (D.L.C.T) : si on effectue le calcul par rapport à la référence γ^0 .
- Actualisée (D.L.C.A) : si on effectue le calcul par rapport à la référence γ^{n-1} .

La description Lagrangienne Corotationnelle est l'approche la plus récente parmi les descriptions citées précédemment. Elle a connu un développement rapide depuis son apparition vers les années 1980. Elle a ensuite été très utilisée et l'important nombres de travaux l'atteste : [LIU & TO 1995-a], [ZHU & ZACHARIA 1996], [MEEK & RISTIC 1997], [PACOSTE 1998], [KIM & al 1998], [KIM & VOYIADJIS 1999], [KOLAHİ & CRISFIELD 2001], [TABIEI & TANOV 2002], [YAQUN & al 2003], [TAYLOR & al 2003], [BRUNET & SABOURIN 2006], [KIM & LOMBOY 2006], [BATTINI & PACOSTE 2006], [KIM & al 2007-a], [KIM & al 2007-b], [KHOSRAVI & al 2008].

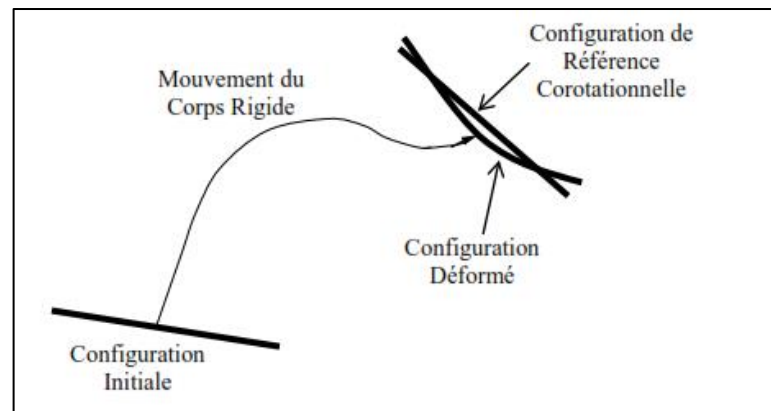


Figure (II-3). Cinématique de la Description Corotationnelle

Avant d'adopter la Description Corotationnelle comme la description choisie pour notre travail, il faut discuter les avantages et les inconvénients de la D.L.C par rapport aux autres descriptions du mouvement et particulièrement sa concurrente directe, la D.L.T :

- Traitement effectif des grandes rotations (avec petites déformations);
- Découplage de la non linéarité matérielle (en petits déplacements) et la non linéarité géométrique ;
- La réorientation automatique du matériau par élimination du mouvement du corps rigide, permet d'éviter la complexité des invariants des contraintes de la MMC;
- Compatible et adaptable facilement avec les éléments qui ont des *ddl* de rotation (poutre, plaque, coque...)
- Et enfin elle a l'avantage d'exploiter la librairie des programmes en petits déplacements.

I.2.6. Les Grandes Rotations :

L'analyse non linéaire comportant de grandes rotations attire beaucoup l'attention dans les dernières années [LIU & TO 1995-a], [BOISSE & al 1996], [MASSIN & AL MIKADAD 1996], [HONG & al 2001], [WISNIEWSKI & TURSKA 2006]. On peut à l'heure actuelle, concernant le traitement des rotations finies distinguer les quatre approches suivantes :

- La première approche [BOISSE & al 1996], [PACOSTE 1998], [KIM et al 1998], [KIM & VOYIADJIS 1999], [KIM & al 2007-a], [KHOSRAVI & al 2008] est comme nous l'avons vue dans (*II-1-2-b*), basée sur l'observation que le mouvement d'un élément se compose d'un mouvement de corps rigide et d'une déformation locale. Par conséquent, si on peut éliminer le mouvement de corps rigide du déplacement total, la partie restante (la déformation) du mouvement est toujours une petite quantité. Quand ceci est fait, les éléments finis développés pour l'analyse linéaire en petits déplacements, en conjonction avec la formulation lagrangienne actualisée ou la formulation lagrangienne corotationnelle, peuvent être appliqués à l'analyse non linéaire dans lesquelles les grands déplacements et rotations sont impliqués.
- La deuxième approche [HONG & al 2001], [WISNIEWSKI & TURSKA 2006] tient compte des termes non linéaires de rotation dans la fonction d'interpolation de déplacement, qui sont principalement des sinus et des cosinus des rotations nodales. Par conséquence cette approche complique la dérivation des matrices élémentaires, mais elle enlève la restriction de petites rotations nodales entre deux incréments successifs de charge.
- La troisième approche [WISNIEWSKI & TURSKA 2006], [KIM & all 2007-b] a été proposée par (Bathe and Bolourchi 1979). Par référence à la formulation lagrangienne actualisée, Bathe et Bolourchi propose d'écrire la matrice de transformation entre le repère locale courant (déformé) et le repère global initial (indéformé) comme le produit de deux matrices, une pour la transformation entre le repère local courant et le repère local initial, l'autre pour la transformation entre le repère local initial et le repère global initial.
- La quatrième approche [LIU & TO 1995-a], [BETSCH & al 1998], [HONG & TENG 2002], [LI & CHEN 2003], [KAPANIA & LI 2003], est basée sur l'idée que la configuration spatiale d'une coque peut être définie par le champ de vecteurs position pour des points sur la mi-surface de la coque, et aussi par le champ de vecteur directeur qui donne les orientations de l'épaisseur. La description du champ de vecteurs de position est simple. Ce n'est pas le cas pour le champ du vecteur directeur des orientations, étant donné que des rotations finies dans l'espace ne peuvent pas être traitées comme vecteurs (les rotations ne sont pas commutatives). Par conséquent, la quatrième approche se concentre sur la définition d'une matrice de transformation pour n'importe quelle importance de l'incrément de rotation.

I.3. ASPECT GEOMETRIQUE :

Notre problème mécanique peut être résumé comme suit : Un domaine initial Ω_0 , soumis à des forces et des déplacements imposés au cours du temps, est déformé en un domaine Ω_t . C'est le champ de déplacements $U(M, t)$ qui permet de passer de Ω_0 à Ω_t . Le problème est de déterminer $U(M, t)$. Pour cela nous considérons l'évolution d'un point matériel qui occupe la position à l'instant initial et à l'instant t . Si l'on se place dans la configuration $C_{(0)}$, le déplacement subi par le point au cours de la déformation est : $U_{(M)} = M_{(t)} - M_{(0)}$.

On définit la position du point sur la configuration courante $C_{(t)}$ par les coordonnées ${}^t x_i$ tel que :

$${}^t x_i = {}^0 x_i + {}^0 u_i \quad (\text{I-8})$$

II-2-1. VARIATION DU DEPLACEMENT

La variation virtuelle du déplacement du point M , correspond à la variation de la coordonnée M de autour de la position à l'instant t , elle est donnée par :

$$\delta({}^t u_i) = \delta({}^t x_i - {}^0 x_i) = \delta({}^t x_i) \quad (\text{I-9})$$

La variation du déplacement autour de la position à l'instant t peut s'écrire :

$$\delta({}^t u_i) = \delta_t u_i$$

La dérivation par rapport aux coordonnées à l'état initial s'écrit :

$$\frac{\partial(\delta_t u_i)}{\partial {}^0 x_j} = \delta_0^t u_{i,j} \quad (\text{I-10})$$

La dérivation par rapport l'état courant s'écrit :

$$\frac{\partial(\delta_t u_i)}{\partial {}^t x_j} = \delta_t u_{i,j} \quad (\text{I-11})$$

La relation entre ces deux quantités est donnée par :

$$\delta_0^t u_{i,j} = \frac{\partial(\delta_t u_i)}{\partial {}^t x_k} \cdot \frac{\partial {}^t x_k}{\partial {}^0 x_j} = \delta_t u_{i,k} \cdot {}^t x_{k,j} \quad (\text{I-12})$$

I.3.1. NOTION ET MESURE DES DEFORMATIONS

La notion de déformation entre un instant passé t_p (correspondant à la configuration $C_{(t_p)}$) et le temps présent t correspondant à la configuration $C_{(t)}$ nécessite la comparaison des vecteurs élémentaires et $dM(t)$ et $dM(t_p)$.

Nous décrivons ici deux façons de présenter la déformation que subit un matériau. Le tenseur de Cauchy et le tenseur de Green-Lagrange. Le premier étant une version simplifiée du deuxième. Les deux modèles ont leurs intérêts et leurs inconvénients.

I.3.1.1. tenseur linéaire de Cauchy :

Les déformations d'un objet sont mesurées à partir de la position initiale de repos. On utilise la première dérivée spatiale du champ vectoriel déplacement $\vec{u}$ qui est, pour chaque point M, le vecteur qui reliant sa position au repos à sa position actuelle déformé

$$\varepsilon_{\text{cauchy}} = \text{sym} (\nabla \vec{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) \quad (\text{I-13})$$

Les termes du tenseur peuvent s'écrire :

$$(\varepsilon_{\text{cauchy}})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I-14})$$

$\varepsilon_{\text{cauchy}}$ Est un tenseur symétrique qui s'appelle partie symétrique du tenseur gradient de déplacement.

I.3.1.2. tenseur quadratique de Green-Lagrange :

Considérons un solide déformable dans une configuration de référence $C_{(0)}$ à l'instant t_0 et dans une configuration actuelle $C_{(t)}$ à l'instant t figure (II-4). Un point matériel de ce solide a pour coordonnées X à l'instant t_0 et x à l'instant t dans le repère cartésien (X_1, X_2, X_3) .

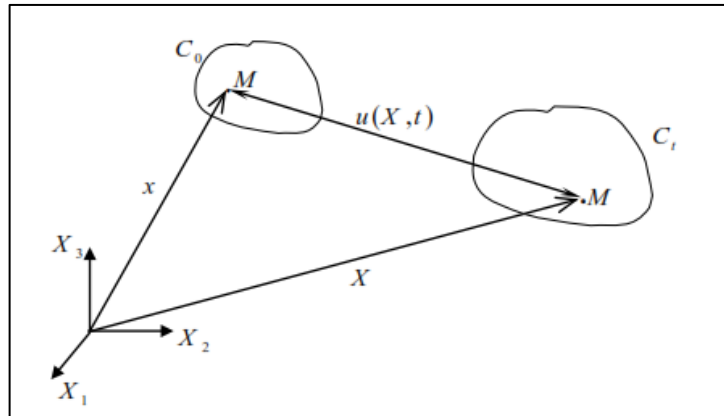


Figure (II-4). Déformation d'un solide en mouvement

Le mouvement du point matériel M est décrit par :

$$x = u(X, t) + X \quad (\text{I-15})$$

Avec $u(X, t)$: est le vecteur déplacement.

La mesure des déformations d'un solide déformable revient à définir ses changements de forme. Soit un vecteur infinitésimal dX autour du point M_0 , ce vecteur se transforme par F en un vecteur dx au tour du point M .

L'état de déformation est complètement défini par le tenseur gradient de la déformation défini tel F défini tel que :

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (\text{I-16})$$

La mécanique des milieux continus met en évidence plusieurs tenseurs du second ordre pour analyser les déformations locales d'un corps (Biot, Almansi, Green-Lagrange, Hill, Hencky) qui permettent d'aborder de façon efficace les problèmes de grands déplacements, tous ces tenseurs s'expriment les uns en fonction des autres. Voir [FOREST & al 2006]. Les deux mesures de déformations de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi possèdent les mêmes composantes mais s'expriment dans deux configurations différentes. Le tenseur de déformation d'Almansi est associé à une variation relative à la configuration $C_{(t)}$ (déformation exprimée à t) alors que le tenseur de déformation de Green-Lagrange ε se réfère à la configuration $C_{(tp)}$.

Généralement en analyse non linéaire, pour mesurer les déformations subies par le solide entre les configurations $C_{(0)}$ et $C_{(t)}$, le tenseur des déformations de Green-Lagrange définit sur $C_{(0)}$ et introduit :

On considère le produit vectoriel

$$\begin{aligned} d\vec{x}^T \cdot d\vec{x} - d\vec{X}^T \cdot d\vec{X} &= (\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{x})^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{x} - d\vec{X}^T \cdot d\vec{X} \\ d\vec{x}^T \cdot d\vec{x} - d\vec{X}^T \cdot d\vec{X} &= 2d\vec{X}^T \underline{\underline{e}} d\vec{X} \end{aligned} \quad (\text{I-17})$$

Tenseur de déformation de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{e}}(X, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{F}}(X, t)^T \underline{\underline{F}}(X, t) - \underline{\underline{I}} \right) \quad (\text{I-18})$$

Exprimé en coordonnées cartésiennes orthonormées

$$e_{ij}(X, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k(X, t)}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial x_k(X, t)}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \quad (\text{I-19})$$

Où $\delta_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j}$ est le symbole de Kronecker

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange est donc directement dérivable à partir du gradient de déformation sans avoir recours au calcul des valeurs et directions principales. Il apparaît donc que la facilité du calcul de la déformation de Green-Lagrange le rend plus attrayant. Le tenseur de Green-Lagrange est largement utilisé dans la pratique pour quantifier

l'intensité et la direction de la déformation, on peut aussi exprimer la déformation en fonction des variables de configuration actuelle. Le tenseur des déformations de d'Euler-Almansi s'appelle aussi tenseur des déformations de d'Almansi-Hamel est défini sur C_t par :

$$\begin{aligned} d\vec{x}^T \cdot d\vec{x} - d\vec{X}^T \cdot d\vec{X} &= d\vec{x}^T \cdot d\vec{x} - (F^{-1}d\vec{X})^T (F^{-1}d\vec{X}) \\ d\vec{x}^T \cdot d\vec{x} - d\vec{X}^T \cdot d\vec{X} &= 2d\vec{x}^T \underline{\underline{\varepsilon}} d\vec{x} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \right] \end{aligned} \quad (I-20)$$

Le tenseur d'Euler-Almansi est Eulérien puisqu'il est relatif à la configuration actuelle. L'utilisation du tenseur d'Almansi est bien évidemment tout aussi légitime selon le point de vue adopté (lagrangien ou eulérien)

Par substitution de l'équation [II-8] dans [II-12] la déformation de Green-Lagrange s'écrit en fonction du déplacement et non plus de la position :

$$\begin{aligned} {}^t e_{ij} &= \frac{1}{2} \left[{}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + \sum_1^3 ({}^t u_{k,i} \cdot {}^t u_{k,j}) \right] \\ \text{c-à-d } {}^0 e_{ij} &= \frac{1}{2} \left[{}^0 u_{i,j} + {}^0 u_{j,i} + ({}^0 u_{1,i} \cdot {}^0 u_{1,j} + {}^0 u_{2,i} \cdot {}^0 u_{2,j} + {}^0 u_{3,i} \cdot {}^0 u_{3,j}) \right] \end{aligned} \quad (I-21)$$

On définit le tenseur de déformations de Green-Lagrange par :

$$\begin{cases} \underline{\underline{e}}(\vec{U}, \vec{U}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{U} + \nabla^T \vec{U}) + \frac{1}{2} (\nabla^T \vec{U} \cdot \nabla \vec{U}) \\ \underline{\underline{e}}(\vec{U}, \vec{U}) = \underline{\underline{\varepsilon}}_j(\vec{U}) + \underline{\underline{\varepsilon}}_q(\vec{U}, \vec{U}) \end{cases} \quad (I-22)$$

Cette définition du tenseur provient de l'étude de la variation du carré de la distance entre deux points voisins, avant et après déformation. Les termes quadratiques que l'on retrouve dans cette expression met en évidence la non linéarité de la relation entre le champ de déplacement et le champ de déformation de Green-Lagrange. On constate que cette expression n'est pas linéaire en fonction du champ de déplacement $u(X,t)$ ou de son gradient en raison du dernier terme.

Ceci signifie que, dans le cas général, on ne peut pas ajouter deux tenseurs de déformation pour représenter la déformation issue de deux champs de déplacement successifs. En fait, cette addition ne peut être réalisée que dans l'hypothèse des petites perturbations.

1.3.2. PROPRIETES DES TENSEURS DE DEFORMATION

La différence entre ces deux tenseurs est que celui de "Green-Lagrange dérive dans le repère lié au matériau (lagrangien), alors que Cauchy dérive par rapport au repère du monde (eulérien)". D'un autre côté, le tenseur de Cauchy peut être vu comme une approximation du premier ordre de celui de Green-Lagrange. La propriété la plus intéressante de ces deux tenseurs, c'est qu'ils sont insensibles aux translations rigides du corps, parce que lorsqu'on

ajoute une constante au champ de déplacement, celui-ci va disparaître dans la dérivée. Cependant, Ils ne seront modifiés par des rotations globales que lorsqu'ils sont dans la position de repos. Ce comportement est irréaliste, mais il s'avère suffisant lorsqu'on se limite à des faibles déplacements et le corps reste donc proche de sa position d'équilibre.

I.3.3. VARIATION DE DEFORMATION

La variation du tenseur de déformation de Green-Lagrange décrite par rapport à l'état initial s'écrit :

$$\delta_0^t e_{ij} = \frac{1}{2} [\delta_0^t U_{i,j} + \delta_0^t U_{j,i} + \sum \delta_0^t U_{k,j} \cdot {}^t_0 U_{k,i}] \quad (I-23)$$

La variation du tenseur de déformation de Green-Lagrange décrite par rapport à l'état actuel s'écrit :

$$\delta^{t+\Delta t} e_{ij} = \frac{1}{2} [\delta_t^{t+\Delta t} U_{i,j} + \delta_t^{t+\Delta t} U_{j,i} + \sum \delta^{t+\Delta t} (U_{k,j} \cdot {}^{t+\Delta t}_t U_{k,i})] \quad (I-24)$$

I.4. ASPECT MECANIQUE :

I.4.1. NOTION ET MESURE DES CONTRAINTES

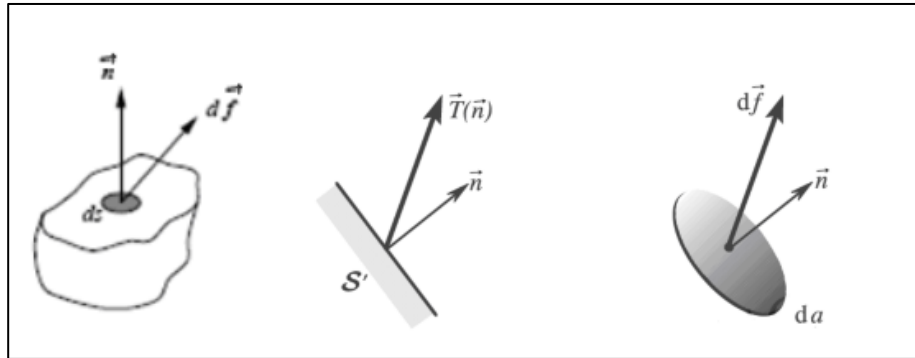


Figure (II-5). Contrainte et force élémentaire

Dans la coupe présentée par la *figure (II-5)*, sur chaque élément de surface ds , de normale unitaire $\vec{n}$, au point P , un élément de force $\vec{df}$ s'exerce dans la configuration $C(t)$. Cet élément de force rend compte des efforts locaux permettant de respecter la continuité du matériau (forces de cohésion).

Le vecteur contrainte $\vec{T}$ au point P est alors défini par :

$$\vec{T}(p, \vec{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\vec{f}}{ds} \quad (I-25)$$

Un vecteur contraint n'est donc pas forcément porté par la normale $\vec{n}$ à la surface sur laquelle il s'applique. Pour plus de détails sur les contraintes voir [FOREST & al 2006], [CHEVALIER 1996].

I.4.1.1. Tenseur de Cauchy :

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ est défini par :

$$d\vec{f} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} \cdot ds \text{ Le tenseur } \underline{\underline{\sigma}} \text{ est Eulérien}$$

La formule essentielle liant le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ au vecteur contraintes $\vec{T}(p, \vec{n})$ sur la facette de normale sortante $\vec{n}$: $\vec{T}(p, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}$

Dans la base orthonormée il s'écrit :

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad (\text{I-26})$$

Ce tenseur est fonction du point P sur lequel on se place, mais pas de la facette élémentaire considérée en ce point.

I.4.1.2. Tenseur de Piola-Kirchhoff :

En exprimant $d\vec{f}$ sur la configuration initiale C_0 , le premier tenseur de Piola-Kirchhoff appelé aussi de Boussinesq est défini par :

$$d\vec{f} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}_0 \cdot ds_0 \text{ avec } \underline{\underline{T}} = \det \underline{\underline{F}} =^{-T} \quad (\text{I-27})$$

Il n'est pas symétrique, et il est évalué dans la configuration actuelle, mais nécessite une dérivation sur la configuration de référence (tenseur mixte).

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff S est obtenu en transportant $d\vec{f}$ dans la configuration initiale C_0 , avec

$$d\vec{f}_0 = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d\vec{f} : \\ d\vec{f}_0 = \underline{\underline{S}} \cdot \vec{n}_0 \cdot d\vec{s}_0 \text{ avec } \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\sigma}} \times \underline{\underline{SF}} = \det \underline{\underline{F}} \times \underline{\underline{F}}^{-1} \times \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{-T} \quad (\text{I-28})$$

Il est symétrique et purement lagrangien.

I.5. L'APPROCHE INCREMENTALE :

En 1960, Turner propose pour la première fois l'application de la méthode des éléments finis à l'analyse non linéaire des structures. L'auteur présente une approche "incrémentale" permettant d'analyser les problèmes géométriquement non linéaires par éléments finis. La réponse non linéaire de la structure est obtenue "incrémentalement", c'est à dire pas à pas, par augmentation progressive de la sollicitation. Pour chaque état déformé, on calcule une

matrice de rigidité incrémentale comprenant un terme supplémentaire, dit "matrice géométrique", qui résulte de la prise en compte des termes quadratiques du champ de déplacements. En effet on suit les différentes configurations au cours de déplacement que subit la structure sous l'effet du système des forces appliquées en cherchant l'équilibre à chaque incrément.

La configuration au temps t est connue et l'état $t+\Delta t$ est inconnu et recherché, par application du principe des travaux virtuels sous forme incrémentales entre les deux configurations (précédentes de référence, et actuelle cherchée). Nous évaluons la matrice de rigidité (tangente, ou sécante), ensuite par prédiction linéaire en évaluant les déplacements proportionnellement à l'incrément des actions extérieures, puis on fait la correction de l'équilibre entre les actions externes et les forces internes qui sont évaluées de manière non linéaire.

La description Lagrangienne, qui suit l'évolution temporelle de chacun des points matériels de la structure est utilisée pour la formulation mathématique.

La résolution de l'équilibre mécanique à $t+\Delta t$ doit alors utiliser une configuration antérieure afin d'effectuer l'intégration sur un volume connu. Il diffère selon les formalismes. Ainsi, la formulation de type lagrangienne totale utilise l'instant t_0 . Pour sa part, la formulation lagrangienne réactualisée considère le temps t comme état de référence envisageables découlent des expressions différentes des équations d'équilibre, dans la mesure où les tenseurs employés pour caractériser les états mécaniques et cinématiques diffèrent également.

L'algorithme incrémental est souvent accompagné par un processus itératif, l'équation d'équilibre doit être satisfaite pour toute l'histoire de chargement.

I.6. Expression Incrementale Du Principe Des Déplacements Virtuels :

Soient γ^n la configuration déformée d'un corps élastique. Le principe des travaux virtuels s'exprime dans un système de coordonnées cartésiennes orthonormées par :

$$\int_{t_v} {}^tT_{ij} \cdot \delta_t \varepsilon_{ij} \cdot d^t v = {}^tW_{\text{ext}} \quad (\text{I-29})$$

Où : v^t c'est le volume défini à la date (t) correspond à la configuration γ^n :

${}^tT_{ij}$: le tenseur de contraintes de Cauchy défini sur γ^n .

$\delta_t \varepsilon_{ij}$: la variation du tenseur de déformation à la date (t) .

${}^tW_{\text{ext}}$: travail des forces extérieures par rapport à la configuration γ^n à la date (t) .

L'expression incrémentale du principe des déplacements virtuels est obtenue par différenciation de l'expression du principe des déplacements virtuels à la date $\tau = t + \Delta t$.

I.6.1. EXPRESSION INCREMENTALE DU (P. D. V) EN (D. L. T)

La configuration de référence dans ce cas est la configuration γ^n .

Nous écrivons maintenant l'expression du P.D.V. en utilisant la méthode décrite précédemment qui fournit directement l'expression incrémentale à discrétiser. A l'instant $t+\Delta t$, l'expression du P.D.V. écrite par rapport à la configuration de référence γ^0 est :

$$\int_{0_v} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} \cdot d {}^0v = {}^{t+\Delta t}W_{ext} \quad (I-30)$$

${}^{t+\Delta t}W_{ext}$: représente le travail virtuel des forces extérieures à la date $t+\Delta t$.

Les contraintes et les déformations à la date $t+\Delta t$ peuvent être décomposées comme suit:

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} = {}^t_0\sigma_{ij} + {}_0\sigma_{ij} \\ {}^{t+\Delta t}e_{ij} = {}^t_0e_{ij} + {}_0e_{ij} \end{cases} \quad (I-31)$$

Les accroissements ${}_0\sigma_{ij}$ et ${}_0\varepsilon_{ij}$ sont inconnus, la variation $\delta {}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij}$ se réduit à $\delta {}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij} = \delta e_{ij}$ En nous servant de l'expression [II-15] et en posant que : ${}^{t+\Delta t}U_i = {}^t_0U_i + {}_0U_i$

Alors :

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}{}_0e_{ij} &= \frac{1}{2} [({}^t_0U_{i,j} + {}_0U_{i,j}) + ({}^t_0U_{j,i} + {}_0U_{j,i}) + ({}^t_0U_{k,i} + {}_0U_{k,i})({}^t_0U_{k,j} + {}_0U_{k,j})] \\ {}_0e_{ij} &= \frac{1}{2} [{}_0U_{i,j} + {}_0U_{j,i} + {}^t_0U_{k,i} \cdot {}_0U_{k,j} + {}^t_0U_{k,j} \cdot {}_0U_{k,i} + {}_0U_{k,i} \cdot {}_0U_{k,j}] \end{aligned}$$

L'accroissement ${}_0e_{ij}$ peut être décomposé comme suit :

$${}_0e_{ij} = {}_0\varepsilon_{ij} + {}_0\varepsilon_{ij}^{NL} \quad (I-32)$$

$$\begin{cases} {}_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0U_{i,j} + {}_0U_{j,i} + {}^t_0U_{k,i} \cdot {}_0U_{k,j} + {}^t_0U_{k,j} \cdot {}_0U_{k,i}) \\ {}_0\varepsilon_{ij}^{NL} = \frac{1}{2} {}_0U_{k,i} \cdot {}_0U_{k,j} \end{cases} \quad (I-33)$$

En injectant [II-25], [II-26] dans [II-24] on obtient :

$$\int_0 ({}^t_0\sigma_{ij} + {}_0\sigma_{ij})(\delta {}_0\varepsilon_{ij} + \delta {}_0\varepsilon_{ij}^{NL}) d {}^0v = {}^{t+\Delta t}W_{ext}$$

En négligent le terme infiniment petit ${}_0\sigma_{ij} \cdot \delta {}_0\varepsilon_{ij}^{NL}$

On obtient finalement :

$$\int_{0_v} ({}^t_0\sigma_{ij} \cdot \delta {}_0\varepsilon_{ij}^{NL} + C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot \delta {}_0\varepsilon_{ij}) d {}^0v = {}^{t+\Delta t}W_{ext} - \int_0 {}^t_0\sigma_{ij} \cdot \delta {}_0\varepsilon_{ij} \cdot d {}^0v \quad (I-34)$$

La relation exprime donc l'équilibre réel du corps élastique

I.6.2. EXPRESSION INCREMENTALE DU (P. D. V) EN (D. L. A)

La configuration de référence dans ce cas est la configuration actuelle γ^n .

À l'instant $\tau = t + \Delta$, l'expression du P.D.V. écrite par rapport à la configuration de référence γ^n .

Est :

$$\int_{t_v} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} \cdot d^t v = {}^{t+\Delta t}W_{ext} \quad (I-35)$$

Les grandeurs exprimées à la date $t + \Delta t$ sont réécrites comme :

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} = {}^tT_{ij} + {}^t\sigma_{ij} \\ {}^t\sigma_{ij} = {}^tT_{ij} \\ {}^{t+\Delta t}e_{ij} = {}^te_{ij} \end{cases} \quad (I-36)$$

L'accroissement de déformation entre t et s'écrit : $t + \Delta t$

$$\begin{cases} {}^te_{ij} = {}^t\varepsilon_{ij} + {}^t\varepsilon_{ij}^{NL} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}^tU_{i,j} + {}^tU_{j,i}) \\ {}^t\varepsilon_{ij}^{NL} = \frac{1}{2}({}^tU_{k,i} \cdot {}^tU_{k,j}) \end{cases} \quad (I-37)$$

L'équation [II-29] devient en utilisant [II-31] :

$$\int_{t_v} ({}^tT_{ij} + {}^t\sigma_{ij})(\delta {}^te_{ij} + \delta {}^t\varepsilon_{ij}^{NL})d^t v = {}^{t+\Delta t}W_{ext} \quad (I-38)$$

***Chapitre II : Présentation
d'un élément fini triangulaire
sans degré de liberté en
rotation***

II.1. Formulation de l'élément DKT18RF

En se basant sur l'élément triangulaire de type facette plane DKT18, qui est obtenu par superposition de l'élément membranaire CST (déformations constantes) qui comporte comme variables nodales les deux composantes de membrane (u,v), et l'élément DKT de type Kirchhoff discret ayant trois variables nodales (w, θ_x, θ_y), en lui rajoutant une rotation fictive θ_z , les variables nodales après assemblage sont les déplacements (U, V, W) des trois nœuds et les rotations ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) autour des axes globaux X, Y et Z . Nous allons formuler l'élément triangulaire DKT18RF, en suivant le même principe, c'est à dire la partie membrane est représentée par l'élément linéaire CST qui comporte les variables nodales (u,v) et la partie flexion par l'élément DKT comportant une seule variable nodale (w), les déformations de cisaillements transverses sont considérées nulles pour les éléments de type DKT. Ces étapes sont illustrées dans la Figure III.1. Pour cet élément, seule l'analyse en statique est présentée.

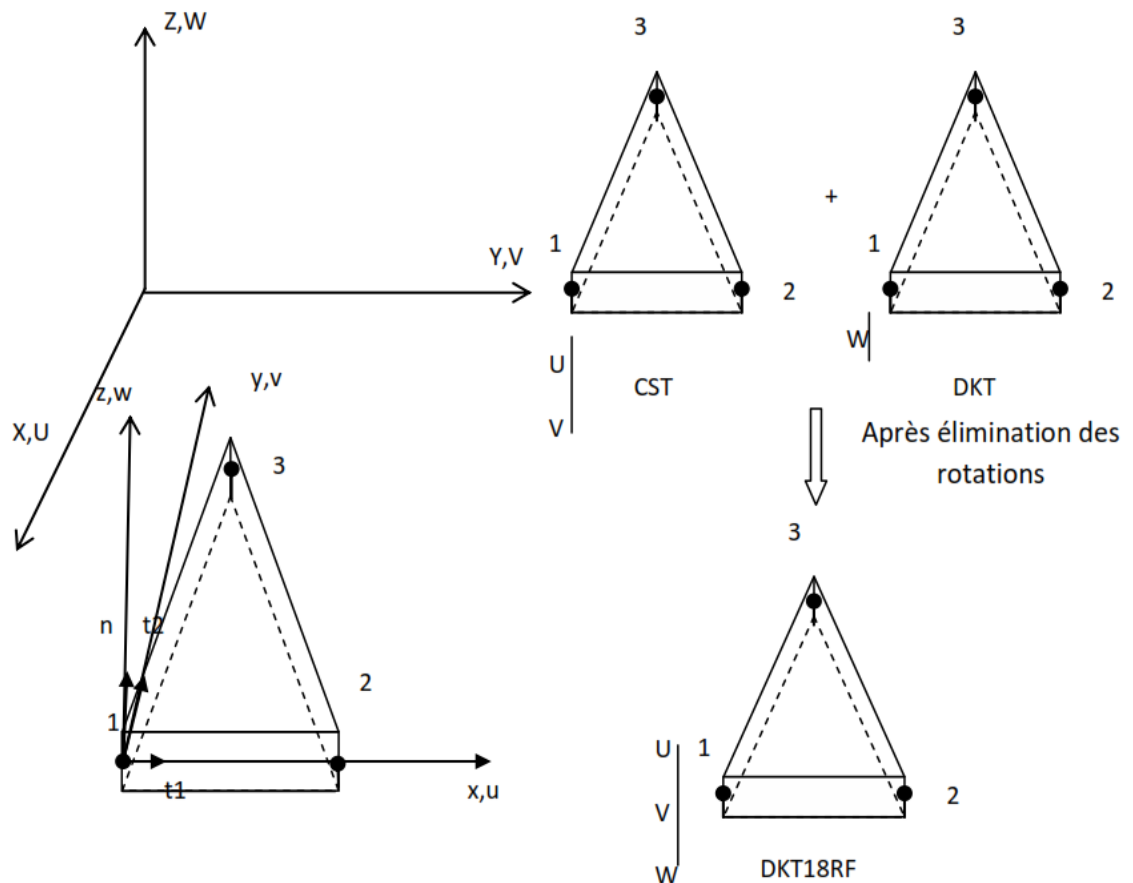


Figure III.1. Construction de l'élément DKT18RF

3.2.1. Définition du repère local

La surface de référence de l'élément est définie par :

$$\{x_p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} \quad (III - 1)$$

Les fonctions d'interpolation N_i :

$$N_1 = \lambda = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta \quad (III - 2)$$

Avec : ξ et η coordonnées paramétriques de l'élément de référence.

Les vecteurs de base a_1 et a_2 sont :

$$\{a_1\} = \{x_{p,\xi}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix}, \quad \{a_2\} = \{x_{p,\eta}\} = \begin{Bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \end{Bmatrix} \quad (III - 3)$$

On peut définir un repère local :

$$[Q] = [t_1 : t_2 : n] \quad (III - 4)$$

$$n = \frac{a_1 \wedge a_2}{|a_1 \wedge a_2|}, \quad t_1 = \frac{a_1}{L_{21}}, \quad t_2 = n \wedge t_1 \quad (III - 5)$$

$$L_{21} = (X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (III - 6)$$

Où

$$\begin{aligned} X_{21} &= X_2 - X_1, Y_{21} = Y_2 - Y_1, Z_{21} = Z_2 - Z_1 \\ \{n\} &= \begin{Bmatrix} n_X \\ n_Y \\ n_Z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21} \\ Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21} \\ X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (III - 7)$$

La surface de l'élément A :

$$2A = ((Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21})^2 + (Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21})^2 + (X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21})^2)^{\frac{1}{2}} \quad (III - 8)$$

t_1 et t_2 peuvent être calculés aussi par :

$$\langle t_1 \rangle = \left\langle n_Z + \frac{n_Y^2}{a} - \frac{n_X n_Y}{a} - n_X \right\rangle \quad (III - 9)$$

$$\langle t_2 \rangle = \left\langle \frac{-n_X n_Y}{a} n_Z + \frac{n_X^2}{a} - n_Y \right\rangle \quad (III - 10)$$

Avec :

$$a = 1 + n_Z$$

Un point q dans l'épaisseur est défini par :

$$\{x_q\} = \{x_p\} + Z\{n\} \quad (III - 11)$$

Les coordonnées des nœuds 1,2, 3 dans le repère local d'origine 1 sont :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = [t_1 \quad t_2]^T \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} = [t_1 \quad t_2]^T \begin{Bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \end{Bmatrix} \quad (III - 12)$$

Les coordonnées d'un point p de la surface moyenne sont :

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=3}^n N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (III - 13)$$

Expression du travail virtuel interne W^e dû à la membrane et à la flexion dans le repère local :

$$W_{int}^e = W_{int}^m + W_{int}^f = \int \langle e^* \rangle N dA + \int \langle \chi^* \rangle M dA \quad (III - 14)$$

II.1.1. Variables cinématiques

Le champ de déplacement d'un point q est défini par :

$$u_q^* = u_p^* + z\beta^*, \quad \frac{-h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (III - 15)$$

Avec h épaisseur de la coque et β la rotation

$$\begin{Bmatrix} u_q^* \\ v_q^* \\ w_q^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (III - 16)$$

Déplacements de membrane obtenus par l'élément CST :

$$u^* = \langle N_u \rangle \{u_n^*\}, \quad v^* = \langle N_v \rangle \{u_n^*\} \quad (III - 17)$$

$\{u_n^*\}$ vecteur des variables nodales de l'élément :

$$\{u_n^*\} = \langle (u_i^* v_i^* w_i^*) \dots i \text{ varie de } 1 \text{ à } 3 \rangle \quad (III - 18)$$

Les rotations β_x et β_y relatives à l'élément DKT sont :

$$\beta_x = \langle N_x \rangle \{u_n^*\}, \quad \beta_y = \langle N_y \rangle \{u_n^*\} \quad (III - 19)$$

II.1.2. Déformation de membrane

Les déformations virtuelles de membrane en fonction des déplacements nodaux sont données par :

$$\{e^*\} = [B_m]\{u_n^*\} \quad (III - 20)$$

$$\{e^*\} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^* \\ v_y^* \\ u_{,y}^* + v_x^* \end{Bmatrix} \quad (III - 21)$$

Avec :

$$[B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{u,\xi} \rangle - y_2 \langle N_{u,\eta} \rangle \\ -x_3 \langle N_{v,\xi} \rangle + x_2 \langle N_{v,\eta} \rangle \\ -x_3 \langle N_{u,\xi} \rangle + x_2 \langle N_{u,\eta} \rangle + y_3 \langle N_{v,\xi} \rangle - y_2 \langle N_{v,\eta} \rangle \end{bmatrix} \quad (III-22)$$

$$N_u = \langle \dots N_i \quad 0 \quad 0 \dots \text{ivarie de } 1 \text{ à } 3 \rangle \quad (III - 23)$$

$$N_v = \langle \dots 0 \quad N_i \quad 0 \dots \text{ivarie de } 1 \text{ à } 3 \rangle \quad (III - 24)$$

$$[B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_3 + y_2 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & -y_3 + y_2 & 0 & -x_3 & y_3 & 0 & x_2 & -y_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (III - 25)$$

II.1.3. Déformation de flexion

Les courbures virtuelles

$$\{\chi^*\} = [B_f]\{u_n^*\} \quad (III - 26)$$

$$\{\chi^*\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x}^* \\ \beta_{y,y}^* \\ \beta_{x,y}^* + \beta_{y,x}^* \end{Bmatrix}, [B_f] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^x \rangle + x_2 \langle N_{,\eta}^x \rangle + y_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle - y_2 \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \quad (III - 27)$$

Dans les vecteurs N seuls les termes qui correspondent au déplacement vertical w sont considérés :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^x \rangle \quad (III - 28)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^y \rangle \quad (III - 29)$$

$N_{11}^x \quad N_{21}^x \quad N_{31}^x$ et $N_{11}^y \quad N_{21}^y \quad N_{31}^y$ Sont donnés par :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m, N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (III - 30)$$

Les indices k et m sont relatifs aux deux côtés ayant le sommet i point commun (voir Tableau III.1), les fonctions P_k et P_m sont définies par le Tableau III.2.

Tableau III.1. Indices k et m

	Nœud sommet i	Côté k (i-j)	Côté m (i-j)
	1	4 (1-2)	6 (3-1)
	2	5 (2-3)	4 (1-2)
	3	6 (3-1)	5 (2-3)

Tableau III.2. Valeurs de P_K et P_m

	P_k
	(k= 4 à 6)
	$P_4=4 \xi \lambda$
	$P_5=4 \xi \eta$
	$P_6= 4 \lambda \eta$

$$C_k = \frac{x_{ij}}{L_k}, S_k = \frac{y_{ij}}{L_k}, L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (III - 31)$$

Les détails de calcul de la matrice B_f sont exposés dans l'Annexe A.

II.1.4. Forme discrétisée de W_{int}^e

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [K] \{u_n\} \quad (III - 32)$$

La matrice de rigidité élémentaire :

$$[K] = [K_m] + [K_f] \quad (III - 33)$$

La rigidité de membrane relative à l'élément CST est constante sur l'élément :

$$[K_m] = A[B_m]^T [H_m] [B_m] \quad (III - 34)$$

La rigidité de flexion relative à l'élément DKT est obtenue par intégration numérique en utilisant 3 points de Hammer (voir Tableau III.3) :

$$[K_f] = \int_A [B_f]^T [H_f] [B_f] dA \quad (III - 35)$$

$$[K_f] = \int_{A_{rif}} ([B_f]^T [H_f] [B_f]) \det J d\xi d\eta \quad (III - 36)$$

$$[K_f] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_i \omega_j ([B_f]^T [H_f] [B_f] \det J) \quad (III - 37)$$

A_{ref} : surface de l'élément de référence.

m : représente le nombre de points d'intégration (PI) dans les directions ξ , η

Tableau III.3. Intégration numérique (3 points de Hammer)

PI	ξ	η	Ω
1	0.5	0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0	0.5	1/6

Avec H_m et H_f : matrice de comportement homogénéisé de membrane et de flexion.

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \quad (III - 38)$$

$$[H_m] = \frac{Eh}{(1-v^2)} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \quad (III - 39)$$

E et v sont respectivement le module de Young et le coefficient de poisson. Les efforts résultants (effort normal et moment de flexion):

$$[N] = [H_m]\{e\}, [M] = [H_f]\{\chi\} \quad (III - 40)$$

II.1.5. Matrice de rigidité dans le repère global

Les déplacements dans le repère global U, V, W sont reliés aux quantités locales par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (III - 41)$$

$$[Q]^T = \begin{Bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{2Y} & t_{2Z} \\ n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \quad (III - 42)$$

Les composantes de $[Q]^T$ sont données explicitement par (3.7), (3.9) et (3.10).

Soient $\langle U_n^* \rangle$ et $\langle U_n \rangle_{glob}$ les variables nodales de l'élément dans le repère global :

$$\langle u_n \rangle_{glob} = \langle \cdots : U_i V_i W_i : i = 1, 2, 3 \cdots \rangle \quad (III - 43)$$

Nous avons, en utilisant (3.18), (3.42) et (3.43) :

$$\{u_n\} = [T]\{u_n\}_{glob} ; \{u_n^*\} = [T]\{u_n^*\}_{glob} \quad (III - 44)$$

Avec :

$$[T]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q]^T \end{bmatrix} \quad (III - 45)$$

Les relations (3.32) et (3.44) permettent de définir la matrice de rigidité dans le repère global :

$$[K]_{glob} = [T]^T [K] [T] \quad (III - 46)$$

***Chapitre III : Mise en œuvre
numérique de l'élément
DKT18RF***

III.1. Qu'est-ce que MATLAB ?

MATLAB pour Matrix Laboratoire, est une application qui a été conçue afin de fournir un environnement de calcul matriciel simple, efficace, interactif et portable, permettant la mise en œuvre des algorithmes développés dans le cadre des projets *linpack* et *eispack*.

MATLAB est constitué d'un noyau relativement réduit, capable d'interpréter puis d'évaluer les expressions numériques matricielles qui lui sont adressées :

- Soit directement au clavier depuis une fenêtre de commande ;
- Soit sous forme de séquences d'expressions ou scripts enregistrées dans des fichiers-texte appelés *m-files* (ou fichiers .m) et exécutées depuis la fenêtre de commande ;
- Soit plus rarement sous forme de fichiers binaires appelés *mex-files* (ou fichiers .mex) générés à partir d'un compilateur C ou fortran.

Ce noyau est complété par une bibliothèque de fonctions prédéfinies, très souvent sous forme de fichiers *m-files*, et regroupés en paquetages ou *toolboxes*. A côté des *toolboxes* requises *local* et *matlab*, il est possible d'ajouter des *toolboxes* spécifiques à tel ou tel problème mathématique, *Optimization Toolbox*, *Signal Processing Toolbox* par exemple, ou encore des *toolboxes* créés par l'utilisateur lui-même. Un système de chemin d'accès ou *path* permet de préciser la liste des répertoires dans lesquels MATLAB trouvera les différents fichiers *m-files* utilisés.

III.2. Une session MATLAB

L'interface-utilisateur de MATLAB varie légèrement en fonction de la version de MATLAB et du type de machine utilisée. Elle est constituée d'une fenêtre de commande qui peut être complétée par une barre de menu et pour les versions les plus récentes de plusieurs fenêtres, affichant l'historique de la session, la structure des répertoires accessibles par MATLAB. . . Avant la première utilisation de MATLAB, il est vivement recommandé (c'est même indispensable dans le cas d'une installation en réseau) que chaque utilisateur crée un répertoire de travail, TP Matlab par exemple, où il pourra enregistrer ses fichiers. Lors de la première session, le chemin d'accès à ce répertoire sera ajouté aux chemins d'accès connus de MATLAB (MATLABPATH), soit en utilisant l'item Set Path du menu File, soit en tapant la commande `addpath` suivie du chemin d'accès au répertoire de travail.

III.2.1 Lancer, quitter MATLAB

Dans l'environnement Unix, pour lancer MATLAB on tape la commande **Matlab** sur la ligne de commande active ; dans les environnements Windows ou MacOS, il suffit de cliquer sur l'icône de l'application. La fenêtre de commande de MATLAB s'ouvre alors et on tape les commandes ou les expressions à évaluer à droite du prompt ». Le processus d'évaluation est déclenché par la frappe de la touche *<enter>*.

A chaque début session, l'utilisateur indiquera à MATLAB que le répertoire my Matlab défini précédemment est le répertoire de travail de la session en tapant la commande `cd` suivie du chemin d'accès au répertoire my Matlab.

On quitte MATLAB en tapant `quit` dans la fenêtre de commande ou en sélectionnant `quit` dans le menu File de la barre de menu pour les versions Windows ou MacOS.

III.2.2 Fonctions et commandes

Certaines fonctions de MATLAB ne calculent pas de valeur numérique ou vectorielle, mais effectuent une action sur l'environnement de la session en cours. Ces fonctions sont alors appelées **commandes**. Elles sont caractérisées par le fait que leurs arguments (lorsqu'ils existent) ne sont pas placés entre parenthèses. Les autres fonctions se comportent de façon assez semblable aux fonctions mathématiques et la valeur qu'elles calculent peut-être affectée à une variable.

Dans de nombreux cas, fonctions ou commandes peuvent être appelées avec des arguments qui diffèrent soit par leur nombre, soit par leur nature (nombre, vecteur, matrice, . . .). Le traitement effectué dépend alors du nombre et de la nature des arguments. Par exemple, nous verrons plus loin que la fonction `diag` appelée avec une matrice pour argument retourne le vecteur constitué par sa diagonale principale ou **vecteur diagonal**. Lorsque cette même fonction est appelée avec un vecteur pour argument, elle retourne la matrice diagonale dont le vecteur-diagonal est le vecteur donné. Aussi une fonction ou une commande n'est pas caractérisée par son seul nom, mais par sa **signature** c'est à dire l'ensemble constitué de son nom et de la liste des types de ses paramètres.

III.2.3 Historique

MATLAB conserve l'historique des commandes. Il est donc possible à l'aide des flèches du clavier de remonter dans la liste des instructions déjà entrées pour retrouver une instruction particulière pour la réutiliser et éventuellement la modifier avant de l'utiliser à nouveau.

III.2.4 Aide en ligne - help-lookfor

MATLAB comporte un très grand nombre d'opérateurs, de commandes et de fonctions. Tous ne seront pas décrits dans ce document d'autant qu'une aide en ligne efficace peut être utilisée. On peut taper les commandes suivantes :

- Help permet d'obtenir l'aide de l'aide et donne une liste thématique ;
- Help nom de fonction donne la définition de la fonction désignée et des exemples d'utilisation ;
- Lookfor sujet donne une liste des rubriques de l'aide en ligne en relation avec le sujet indiqué.

III.3. Présentation des programmes DKT18RF

Tous programmes basés sur la méthode des éléments finis incluent quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (module d'élasticité...etc), les sollicitations et conditions aux limites.
- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations.
- Résolution du système d'équation après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats après calcul éventuel de variables additionnelles (contrainte, réactions...etc).

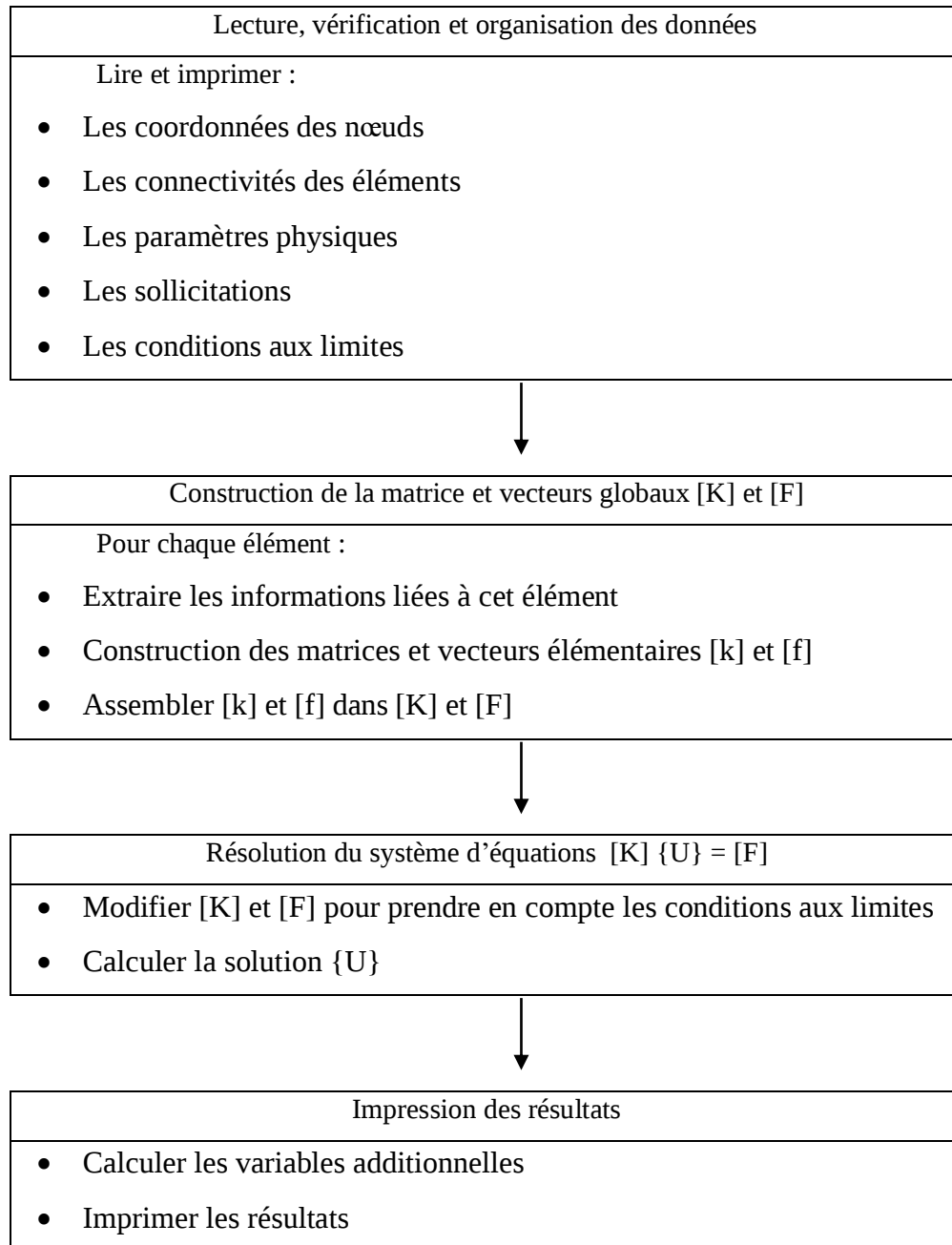


Figure III.2. Blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme éléments finis [DHA81]

Les programmes éléments finis qu'on a élaborés dans le cadre de cette thèse sont relatifs à l'élément fini DKT18RF, et aux éléments SB6-18 en linéaire et SB6-18 en non linéaire qui seront présentés dans les chapitres 4 et 5 respectivement. Ces programmes sont écrits sous le langage MATLAB, chaque programme est constitué d'une fonction (fonction) principale qui représente le programme principal et un ensemble des fonctions (fonctions) secondaires (qui jouent le même rôle des sous-routines).

III.3.1 Présentation du programme élément fini DKT18RF

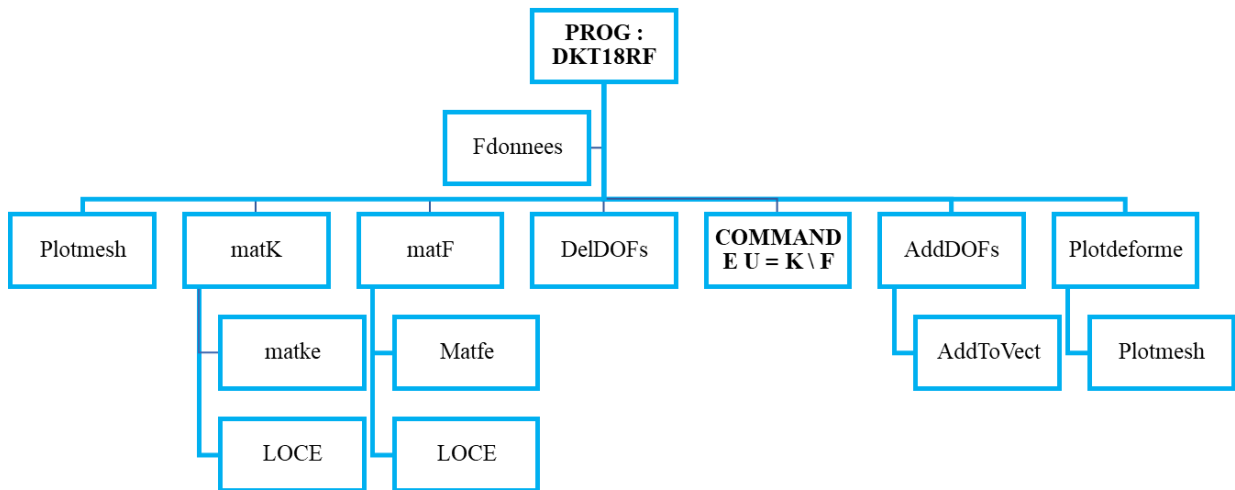


Figure III.3. Description du programme élément fini DKT18RF

III.3.2 Description du programme

❖ Programme principal DKT18RF

Il fait appel aux différentes fonctions secondaires nécessaires aux calculs d'une structure en utilisant la formulation décrite dans ce chapitre.

❖ Fonction donnée :

C'est un fichier fonction qui permet d'introduire toutes les données relatives au problème:

Tableau des coordonnées des nœuds

- Tableau de connectivité des éléments
- Épaisseur des éléments
- Module d'élasticité
- Coefficient de poisson
- Conditions aux limites (numéros des degrés de liberté bloqués)
- Vecteurs sollicitations

La commande Matlab : [les données] = feval (str2func (Nom du fichier des données)); ouvre le fichier des données et permet aux différentes fonctions existant dans le programme principal de lire les données.

• Fonction plotmesh :

Cette fonction nous donne un affichage graphique du maillage, les coordonnées et la numérotation des nœuds, ce qui permet, avec le tracer la structure saisie, une vérification visuelle des données (tableaux des coordonnées et connectivité).

- **Fonction matK :**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires K_e fournit par la fonction `matke`, la boucle se fait sur les éléments en utilisant la fonction `LOCE` qui nous donne les degrés de liberté de chaque élément qui sont nécessaires pour le stockage des termes de la matrice élémentaire dans la matrice de rigidité globale.

- **Fonction LOCE :**

A partir de la table de connectivité des éléments existant dans le fichier des données, cette fonction Fournit la table de localisation (numéros) des degrés de liberté pour chaque élément.

- **Fonction matke :**

Permet le calcul de la matrice de rigidité pour chaque élément.

- **Fonction matF :**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des vecteurs des sollicitations élémentaires f_e fournit par la fonction `matfe`, la boucle se fait sur les éléments en utilisant la fonction `LOCE` qui nous donne les degrés de liberté de chaque élément qui sont nécessaires pour le stockage des termes des vecteurs de forces élémentaire dans le vecteur global.

- **Fonction matfe :**

Permet d'introduire le vecteur des forces pour chaque élément.

- **Fonction DelDOFs :**

Les conditions aux limites sont l'ensemble des déplacements nuls aux niveaux des appuis, un vecteur e dans le fichier de données est utilisé pour spécifier les degrés de liberté à bloquer. Pour appliquer cette condition on élimine les lignes et les colonnes correspondantes au vecteur e de la matrice K et du vecteur des sollicitations F (puisque le chargement est saisi pour tous les noeuds y compris ceux d'appuis).

- **Commande $U = K \backslash F$:**

Une fois les conditions aux limites sont appliquées, il nous reste qu'à résoudre le système discret, La solution en déplacement (aux nœuds) s'obtient avec la commande MATLAB $U = K \backslash F$, qui remplace les méthodes classiques pour résoudre les systèmes d'équations linéaires (méthode de factorisation de cholesky Pour une matrice symétrique définie positive).

- **Fonction AddDOFs :**

Avec cette fonction on ajoute au vecteur déplacement les degrés de liberté des nœuds bloqués qui ont été supprimés par la fonction DelDOFs, la boucle se fait sur les numéros des degrés de liberté à ajouter en utilisant la fonction AddToVect.

- **Fonction AddToVect :**

Permet d'obtenir le vecteur de déplacement résultant pour chaque degré de liberté ajouté.

- **Fonction plotdeforme :**

Cette fonction dessine la structure déformée, elle trace les solutions obtenues sur le schéma déjà obtenu par la fonction plotmesh.

Chapitre IV : Applications et validation numérique

IV.1. Poutre console de Macneal

Une poutre console est encastree à une extrémité et chargée à l'autre extrémité libre comme le montre la Figure IV.1, les valeurs de la charge, le module de young, le coefficient de poisson et l'épaisseur sont mentionnées sur la même figure, Ce cas test est un problème standard pour tester la fiabilité des éléments finis (Macneal et Harder [MAC85]).

On considère deux cas de chargement : un effort de cisaillement $P = 1$ et un moment de flexion $M = 10$.

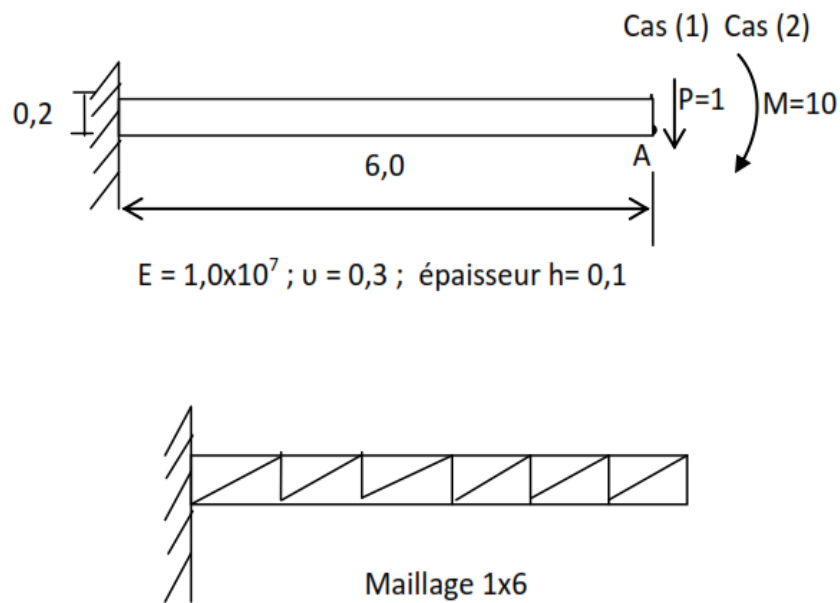


Figure IV.1 Poutre console sollicitée à son extrémité par : (1) un effort de cisaillement (2) moment de flexion

Tableau IV.2. Poutre console de Macneal DKT18RF cas (01)

Q4	0.002	0.015	0.02	0.039	
Q4SBE1	0.102	0.106	0.107	0.1075	
SBRIE	0.088	0.095	0.099	0.0995	
SBRIE2	0.07	0.078	0.079	0.08	
DKT18RF	0.001964	0.007387	0.015941	0.0425	0.104232
Référence	0.1081	0.1081	0.1081	0.1081	0.1081
	1x3	1x6	1x9	2*3	2*5

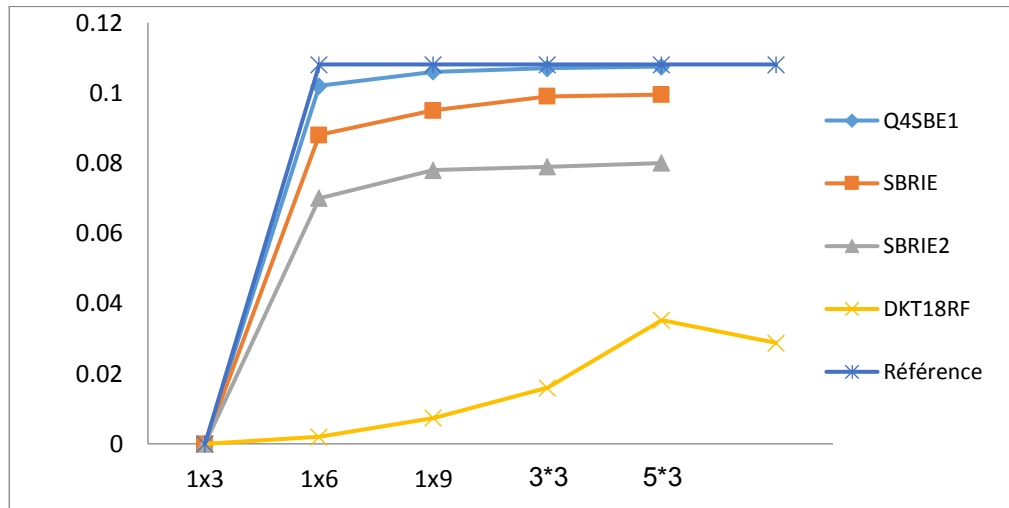
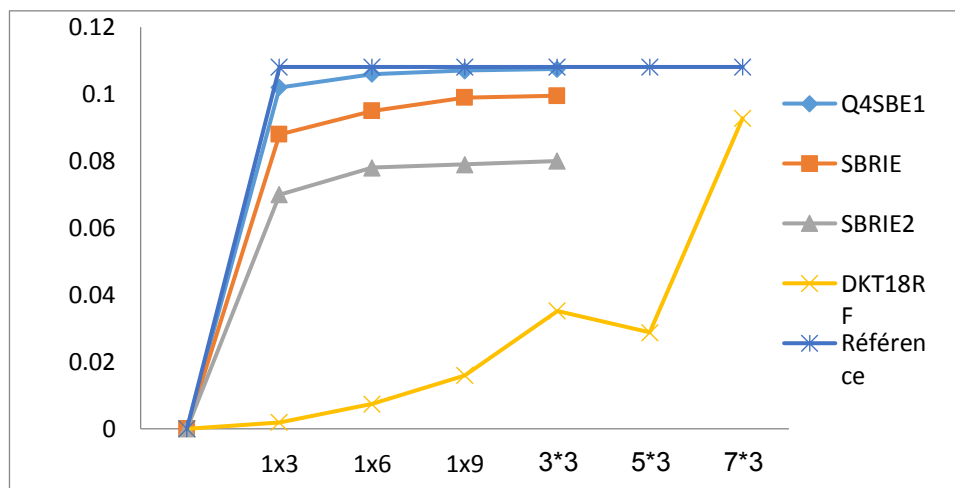


Figure IV.2. Courbe de convergence de déplacement

Tableau IV.3. Poutre console de Macneal DKT18RF cas (02)

Q4	0.002	0.015	0.02	0.039		
Q4SBE1	0.102	0.106	0.107	0.1075		
SBRIE	0.088	0.095	0.099	0.0995+		
SBRIE2	0.07	0.078	0.079	0.08		
DKT18RF	0.001964	0.007387	0.015941	0.035241	0.028762	0.09276
Référence	0.1081	0.1081	0.1081	0.1081	0.1081	0.1081
	1x3	1x6	1x9	3*3	3*5	3*7

**Figure IV.3.** Courbe de convergence de déplacement

Les courbes des figures IV.2 et IV.3 représentent les déplacements du point A du problème sous forme graphique. Nous remarquons que l'élément DKT18RF converge vers la solution de référence mieux que les éléments Q4 et SBRIE2.

IV.2. Cylindre pincé avec diaphragme

Un cylindre, soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées, est supporté par deux diaphragmes rigides à ses extrémités. Le détail de la géométrie, le chargement, le matériau et les conditions aux limites et de symétrie sont donnés dans la Figure IV.4. Ce cas test classique est fréquemment utilisé pour évaluer le comportement de l'élément fini de coque à simuler des états de membranes complexes avec une part importante de la flexion sans extension de la surface moyenne, un huitième de la coque est modélisé par l'élément fini DKT18RF en utilisant un maillage régulier avec $N = 3, 5, 6, 7, 4 \times 8, 8 \times 4$. Les résultats des déplacements W_c et V aux points C et D (voir tableaux IV.1 et IV.2) sont comparés avec la solution de référence donnée par Lindberg et al [LIN69]. Ces résultats sont également comparés à ceux des éléments DKT12 et DKT18.

La Figure IV.5 montre la déformée du cylindre sous chargement

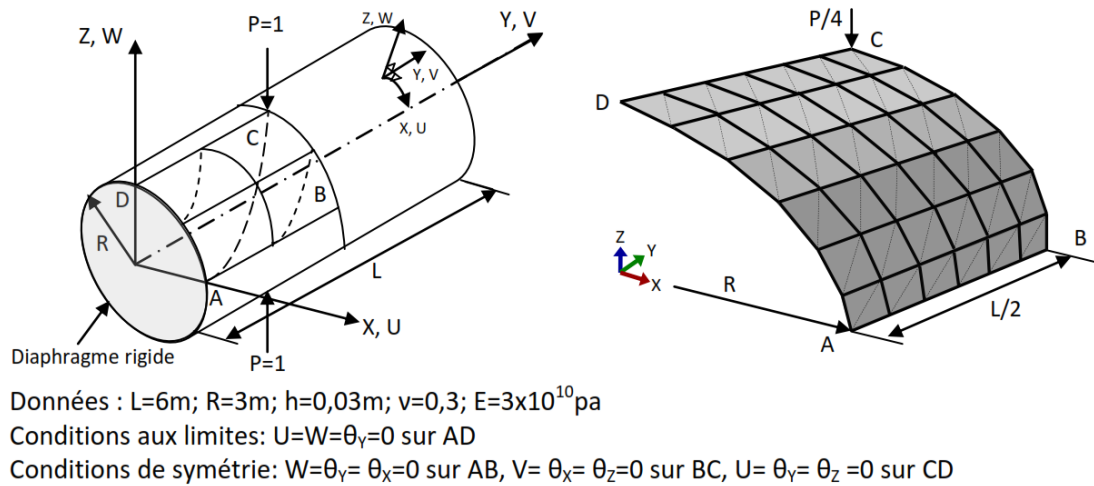


Figure IV.4. Cylindre pincé avec diaphragmes rigides

Tableau IV.1. Cylindre pincé avec diaphragme DKT18RF (V_d) $V_d = -E h V_d / p$

Maillage	3x3	5x5	6x6	7x7	8x4	4x8
Solution DKT18RF	3.0208	5.4109	4.3700	33.1380	18.2586	23.1154
Solution de référence				4.11		

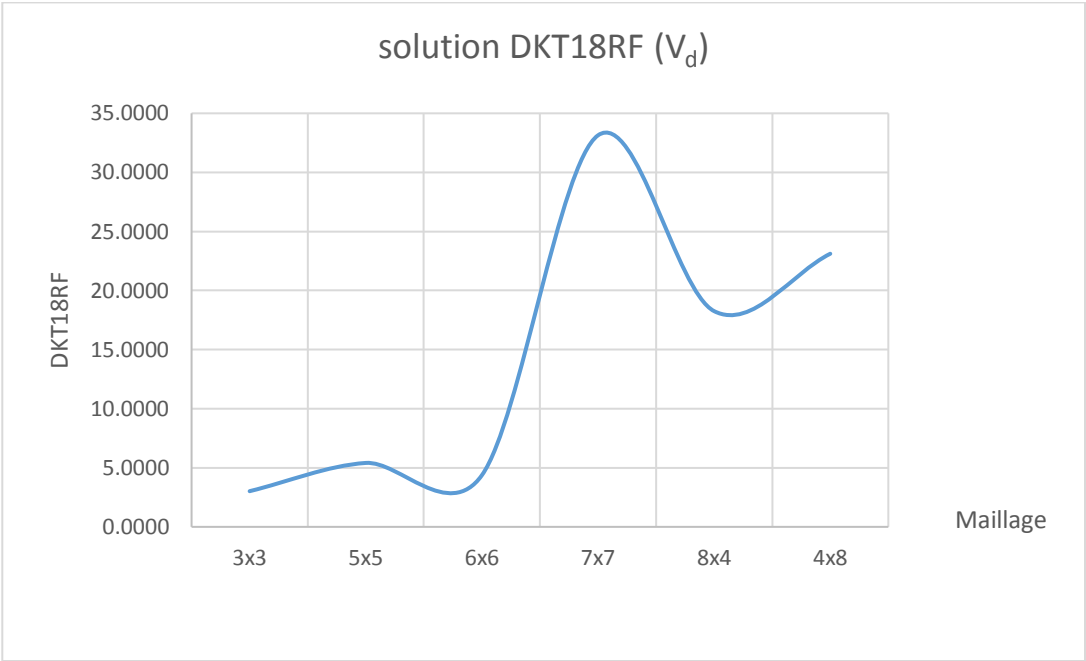
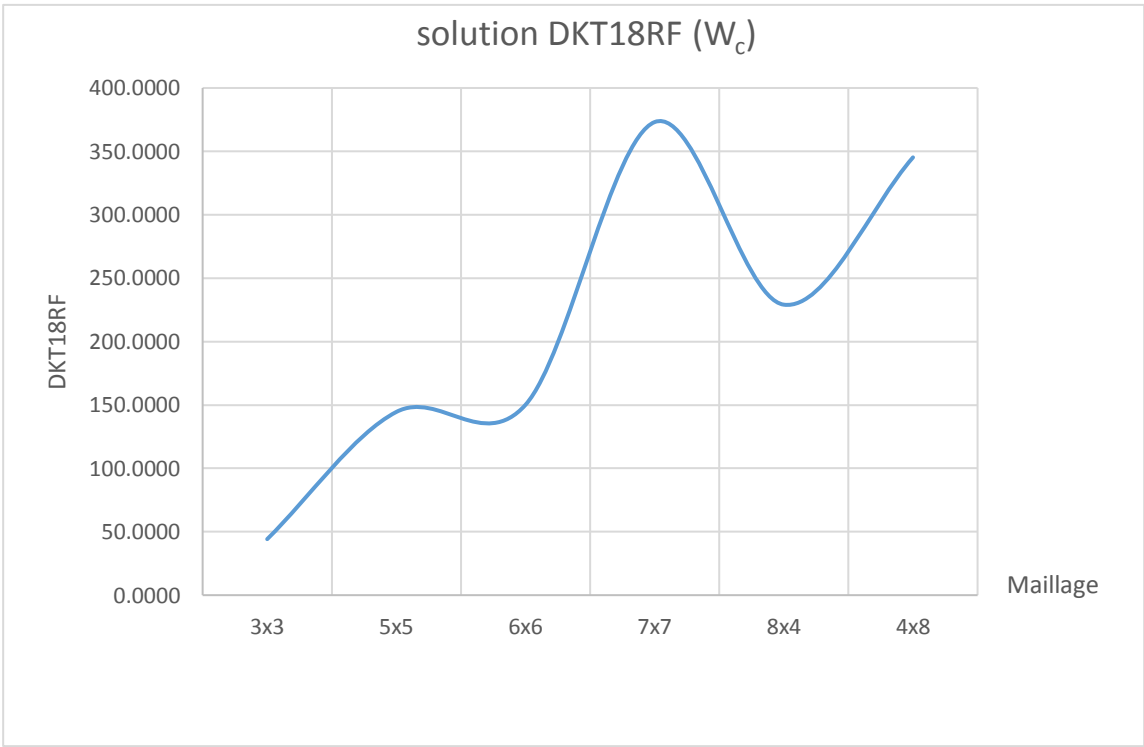


Tableau IV.2. Cylindre pincé avec diaphragme DKT18RF (W_c) $W_c=-E h W_c/p$

Maillage	3x3	5x5	6x6	7x7	8x4	4x8
solution DKT18RF	44.1933	144.5243	150.14	373.1160	229.1060	345.2554
Solution de référence				164.24		



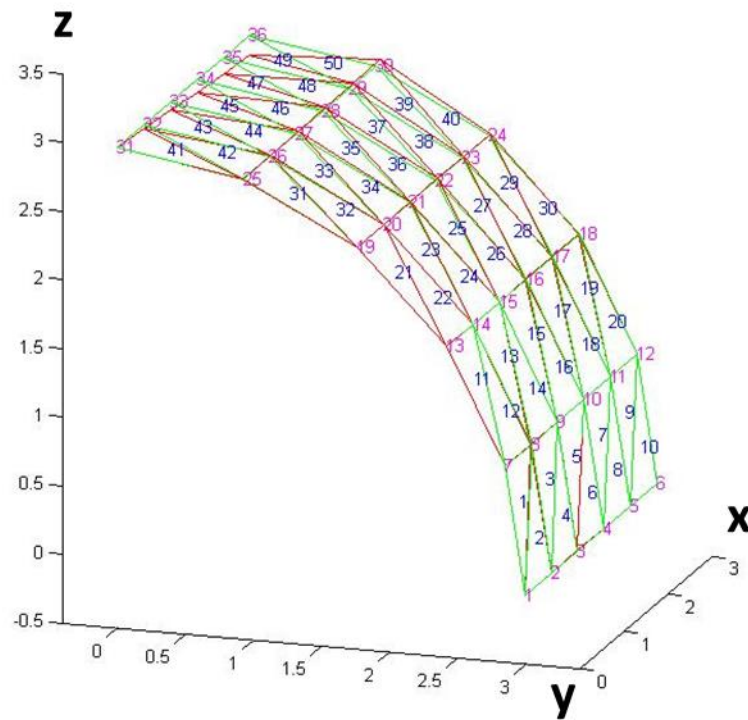


Figure IV.5. Déformée du cylindre pincé avec diaphragmes (maillage 5x5)

Pour ce cas test on à réaliser plusieurs maillages, les résultats obtenus sont on bon accord avec la sollusion de référance pour un maillage (6x6)

IV.3. Cylindre pincé à bord libre

Un autre cas test très utilisé pour étudier les éléments finis de coque, est celui du cylindre pincé à bord libre, ce cas test permet d'évaluer les bonnes propriétés de convergence et la représentation du mode de corps rigide.

Un huitième de la coque est étudié par l'élément DKT18RF avec différents types de maillage. La géométrie, les caractéristiques du matériau ainsi que les conditions aux limites et de symétrie sont exposés dans la Figure IV.6. Deux cas de chargement et d'épaisseur différents seront étudiés.

Les résultats du déplacement vertical W au point C, présentés dans les tableaux IV.3 et IV.4 sont comparés avec la solution de référence donnée par Macneal et Harder [MAC85] ainsi que les résultats obtenus par d'autres éléments finis Hamadi et al. [HAM16], Belarbi [BEL00], Cantin et Clough [CAN68], Bogner et al [BOG67], Ashwell et Sabir [ASH72], Sabir et Lock [SAB72]).

La Figure IV.7 montre la déformée du cylindre

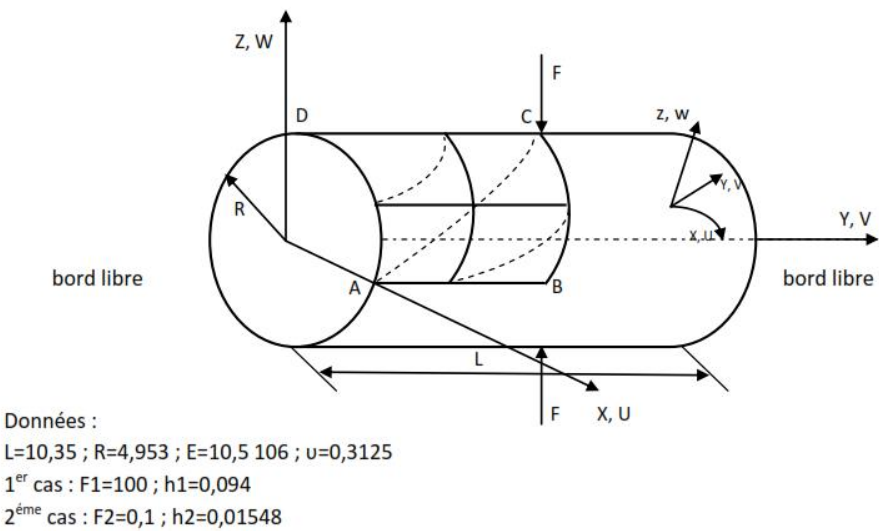


Figure IV.6. Cylindre pincé à bord libre

Tableau IV.3. Cylindre pincé à bord libre DKT18RF (W_c) 1^{er} cas : $F_1=100$; $h_1=0,094$

Maillage	2x10	2x11	2x12	3x6	3x7	3x8
solution DKT18RF	0.1008	0.0810	0.0541	0.1823	0.1544	0.1353
Solution de référence				0,1139		

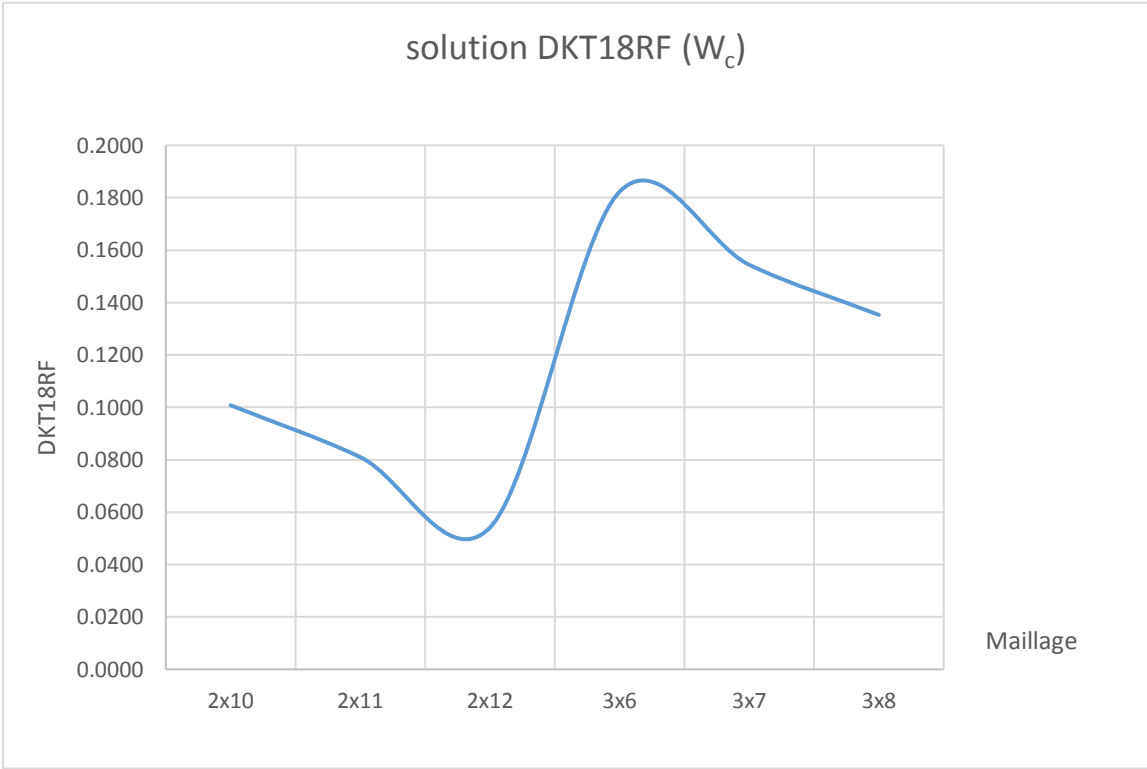


Tableau IV.3. Cylindre pincé à bord libre DKT18RF (W_c) 2^{ème} cas : $F2=0,1$; $h2=0,01548$

Maillage	2x10	2x11	2x12	3x6	3x7	3x8
solution DKT18RF	0.0581	0.0891	0.1201	0.0564	0.0254	0.0386
Solution de référence				0.02439		

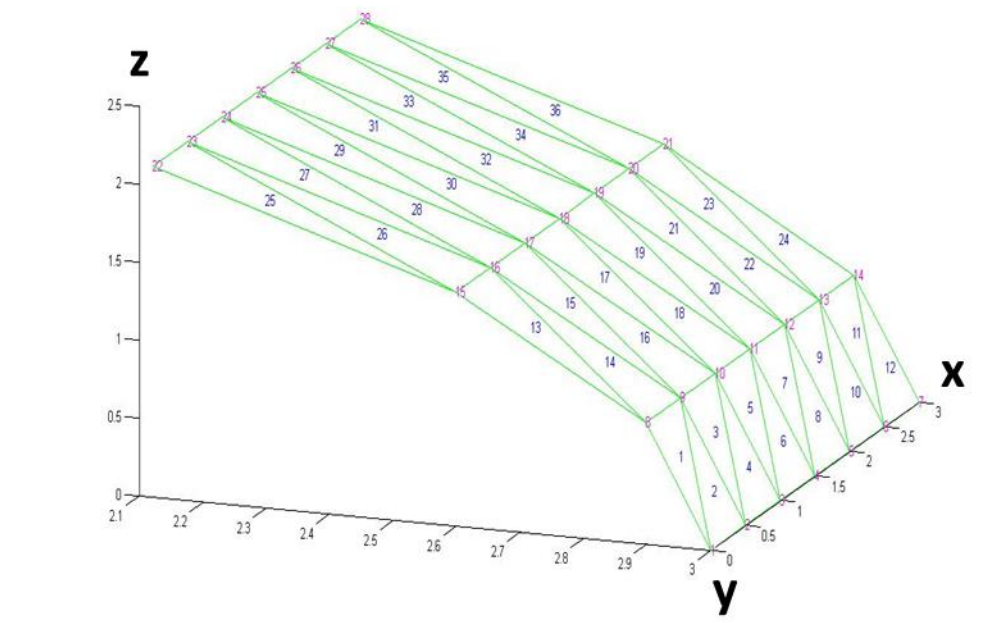
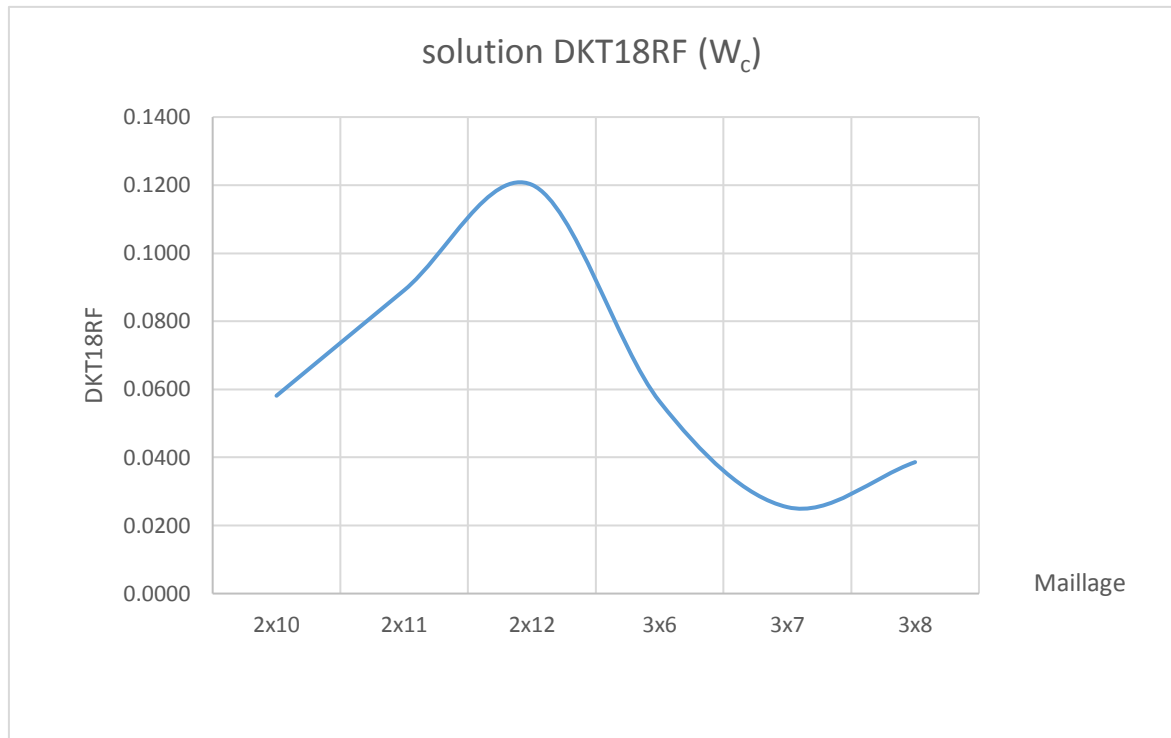


Figure IV.7. Déformée du cylindre à bord libre (maillage 3X6)

Les résultats obtenus par l'élément DKT18RF pour ce cas test peuvent être considérés comme satisfaisants dans les deux cas, vu que la convergence de l'élément vers la solution de référence est garantie si le maillage est raffiné.

Pour ce cas test on à réaliser plusieurs maillages, les résultats obtenus sont on bon accord avec la solution de référence pour un maillage (3x8) pour le cas (1) et un maillage (3x7) pour le cas (2)

Conclusion générale

Ce travail rentre dans le cadre de la contribution à la modélisation des structures de type coques par des éléments finis sans degrés de liberté de rotation, pour cela on a utilisé un élément fini coque triangulaire sans degrés de liberté de rotation construit à partir de l'élément coque triangulaire de type facette plane DKT18, ce dernier est obtenu par superposition de l'élément triangulaire de membrane CST ayant deux degrés de liberté par nœud (u et v) et l'élément de flexion des plaques DKT qui possède trois degrés de liberté par nœud, un degré de translation vertical (w) plus deux rotations (θ_x et θ_y). L'idée principale dans la formulation de cet élément est de modifier l'opérateur matriciel B_f relatif aux déformations de flexion de l'élément DKT pour avoir uniquement des termes qui correspondent aux composantes de déplacement w , la superposition de l'élément DKT modifié et l'élément de membrane CST nous donne un nouvel élément fini triangulaire nommé DKT18RF avec seulement trois translations par nœud.

A partir des résultats obtenus, on peut dire que l'élément étudié présente une bonne performance, cet élément peut être utilisé pour résoudre le problème de raccordement dans la zone de jonction entre les structures minces et épaisses. Et en se basant sur cet élément on peut construire un élément fini prismatique de type solide-coque.

Sachant qu'il existe dans la littérature d'autres éléments finis à facette plane comme l'élément DKT18, on peut citer par exemple l'élément à facette plane DKT12, ces éléments peuvent être utilisés pour construire d'autres éléments finis sans degré de liberté de rotations en suivant les mêmes techniques qui ont été utilisés pour développer l'élément DKT18RF.

Références bibliographiques

- [SAB95] Sabir AB, Sfindji A. Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements. Thin-walled Structures 21.pp 225-232, 1995.
- [DHA81] Dhatt G, Touzot G. Une présentation de la méthode des éléments finis: Maloine Québec: Presses de l'Université Laval; 1981.
- [MAC85] Macneal H, Harder L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. Finite elements in Analysis and Design, 1:3-20, 1985.
- [HAM16] Hamadi D, Ashref A, Ounis A. A new flat shell finite element for the linear analysis of thin shell structures, European Journal of Computational Mechanics, 2016.
- [BEL00] Belarbi MT. Développement de nouveaux éléments finis basés sur le modèle en déformation. Application linéaire et non linéaire [Development of new finite elements based on the strain model: application to linear and nonlinear problems] (Thèse de Doctorat d'état). Université de Constantine, Algérie, 2000.
- [CAN68] Cantin G, Clough RW. A curved, cylindrical-shell, finite element. AIAA Journal, 6, 1057–1062, 1968.
- [BOG67] Bogner FK, Fox RL, Schmit LA. A cylindrical shell discrete element. AIAA Journal, 5, 745–750, 1967.
- [ASH72] Ashwell DG, Sabir AB. A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions. International Journal of Mechanical Sciences, 14, 171–183, 1972.
- [SAB72] Sabir, AB, Lock AC. A curved cylindrical shell finite element. IJMS, 14, 125–135, 1972.

Annexes

Fdonnees.m pouter consol (N°=2x3)

```
function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [1    4    5    %%% Conectivité de l'élément 1
     5    2    1
     2    5    6
     6    3    2
     4    7    8
     8    5    4
     5    8    9
     9    6    5
     7    10   11
    11    8    7
     8    11   12
    12    9    8];
p = [    0    0    0    %%%%% Cordoonees du noeuds 1
      0    0.0500    0
      0    0.1000    0
    1.6700    0    0
    1.6700    0.0500    0
    1.6700    0.1000    0
    3.3300    0    0
    3.3300    0.0500    0
    3.3300    0.1000    0
    5.0000    0    0
    5.0000    0.0500    0
    5.0000    0.1000    0];
e = [1
     2
     3
     4
     5
     6
     7
     8
     9];
      % noeuds 1 et 2 bloqué dans TOUS LES DIRECTIONS
      % nombre des elements total
E = 10^7 ;      % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ;      % coef de poisson

g=0.1; %%%épaisseur
```

Fdonnees.m pouter consol (N°=2x5)

```

function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [1    4    5    %%% Conectivité de l'élément 1
      5    2    1
      2    5    6
      6    3    2
      4    7    8
      8    5    4
      5    8    9
      9    6    5
      7    10   11
      11   8    7
      8    11   12
      12   9    8
      10   13   14
      14   11   10
      11   14   15
      15   12   11
      13   16   17
      17   14   13
      14   17   18
      18   15   14];
p = [    0    0    0    %%%%% Cordoonees du noeuds 1
      0    0.0500    0
      0    0.1000    0
      1.0000    0    0
      1.0000    0.0500    0
      1.0000    0.1000    0
      2.0000    0    0
      2.0000    0.0500    0
      2.0000    0.1000    0
      3.0000    0    0
      3.0000    0.0500    0
      3.0000    0.1000    0
      4.0000    0    0
      4.0000    0.0500    0
      4.0000    0.1000    0
      5.0000    0    0
      5.0000    0.0500    0
      5.0000    0.1000    0];
e = [1
      2
      3
      4
      5
      6
      7
      8
      9];
      % noeuds 1 et 2 bloqué dans TOUS LES DIRECTIONS
      % nombre des elements total
E = 10^7 ;      % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ;      % coef de poisson

g=0.1; %%%épaisseur

```

Fdonnees.m pouter consol (N°=3x3)

```

function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [1      5      6      %%% Conectivité de l'élément 1
      6      2      1
      2      6      7
      7      3      2
      3      7      8
      8      4      3
      5      9     10
     10      6      5
      6     10     11
     11      7      6
      7     11     12
     12      8      7
      9     13     14
     14     10      9
     10     14     15
     15     11     10
     11     15     16
     16     12     11];
p = [      0      0      0      %%%%% Cordoonees du noeuds 1
      0     0.0300      0
      0     0.0600      0
      0     0.1000      0
     1.6700      0      0
     1.6700     0.0300      0
     1.6700     0.0600      0
     1.6700     0.1000      0
     3.3300      0      0
     3.3300     0.0300      0
     3.3300     0.0600      0
     3.3300     0.1000      0
     5.0000      0      0
     5.0000     0.0300      0
     5.0000     0.0600      0
     5.0000     0.1000      0];
e = [1
      2
      3
      4
      5
      6
      7
      8
      9
     10
     11
     12];
      % noeuds 1 et 2 bloqué dans TOUS LES DIRECTIONS
      % nombre des elements total
E = 10^7 ;      % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ;      % coef de poisson

g=0.1; %%%épaisseur

```

Fdonnees.m pouter consol (N°=3x5)

```
function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [1      5      6      %%% Conectivité de l'élément 1
      6      2      1
      2      6      7
      7      3      2
      3      7      8
      8      4      3
      5      9     10
     10      6      5
      6     10     11
     11      7      6
      7     11     12
     12      8      7
      9     13     14
     14     10      9
     10     14     15
     15     11     10
     11     15     16
     16     12     11
     13     17     18
     18     14     13
     14     18     19
     19     15     14
     15     19     20
     20     16     15
     17     21     22
     22     18     17
     18     22     23
     23     19     18
     19     23     24
     24     20     19];

p = [      0      0      0      %%% Cordoonees du noeuds 1
      0     0.0300      0
      0     0.0600      0
      0     0.1000      0
     1.0000      0      0
     1.0000     0.0300      0
     1.0000     0.0600      0
     1.0000     0.1000      0
     2.0000      0      0
     2.0000     0.0300      0
     2.0000     0.0600      0
     2.0000     0.1000      0
     3.0000      0      0
     3.0000     0.0300      0
     3.0000     0.0600      0
     3.0000     0.1000      0
     4.0000      0      0
     4.0000     0.0300      0
     4.0000     0.0600      0
     4.0000     0.1000      0
     5,0000      0      0
     5,0000     0.0300      0
     5,0000     0.0600      0
     5,0000     0.1000      0];
```

```
e =[1
    2
    3
    4
    5
    6
    7
    8
    9
   10
   11
   12]; % noeuds 1 et 2 bloqué dans TOUS LES DIRECTIONS
      % nombre des elements total
E = 10^7 ; % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ; % coef de poisson

g=0.1; %%%épaisseur
```

Fdonnees.m pouter consol (N°=3x7)

```

function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [1      5      6      %%% Conectivité de l'élément 1
      6      2      1
      2      6      7
      7      3      2
      3      7      8
      8      4      3
      5      9     10
     10      6      5
      6     10     11
     11      7      6
      7     11     12
     12      8      7
      9     13     14
     14     10      9
     10     14     15
     15     11     10
     11     15     16
     16     12     11
     13     17     18
     18     14     13
     14     18     19
     19     15     14
     15     19     20
     20     16     15
     17     21     22
     22     18     17
     18     22     23
     23     19     18
     19     23     24
     24     20     19
     21     25     26
     26     22     21
     22     26     27
     27     23     22
     23     27     28
     28     24     23
     25     29     30
     30     26     25
     26     30     31
     31     27     26
     27     31     32
     32     28     27];
p = [      0      0      0      %%% Cordoonees du noeuds 1
      0      0.0300      0
      0      0.0600      0
      0      0.1000      0
     0.7100      0      0
     0.7100      0.0300      0
     0.7100      0.0600      0
     0.7100      0.1000      0
     1.4200      0      0
     1.4200      0.0300      0
     1.4200      0.0600      0
     1.4200      0.1000      0
     2.1400      0      0
     2.1400      0.0300      0
     2.1400      0.0600      0
     2.1400      0.1000      0
     2.8500      0      0
     2.8500      0.0300      0

```

```

2.8500    0.0600    0
2.8500    0.1000    0
3,5500     0        0
3,5500    0.0300    0
3,5500    0.0600    0
3,5500    0.1000    0
4.2700     0        0
4.2700    0.0300    0
4.2700    0.0600    0
4.2700    0.1000    0
5.0000     0        0
5.0000    0.0300    0
5.0000    0.0600    0
5.0000    0.1000    0];
e =[1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12]; % noeuds 1 et 2 bloqué dans TOUS LES DIRECTIONS
% nombre des elements total
E = 10^7 ; % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ; % coef de poisson

g=0.1; %%%épaisseur

```

Fdonnees.m cylindre pince (N°=3x3)

```

function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [ 6      5      1
      1      2      6
      7      6      2
      2      3      7
      8      7      3
      3      4      8
     10      9      5
      5      6     10
     11     10      6
      6      7     11
     12     11      7
      7      8     12
     14     13      9
      9     10     14
     15     14     10
     10     11     15
     16     15     11
     11     12     16];

p = [ 3.0      0.0      0.0
      3.0      1      0.0
      3.0      2      0.0
      3.0      3      0.0
      3*cos(30*(pi/180))      0.0      3*sin(30*(pi/180))
      3*cos(30*(pi/180))      1      3*sin(30*(pi/180))
      3*cos(30*(pi/180))      2      3*sin(30*(pi/180))
      3*cos(30*(pi/180))      3      3*sin(30*(pi/180))
      3*cos(60*(pi/180))      0.0      3*sin(60*(pi/180))
      3*cos(60*(pi/180))      1      3*sin(60*(pi/180))
      3*cos(60*(pi/180))      2      3*sin(60*(pi/180))
      3*cos(60*(pi/180))      3      3*sin(60*(pi/180))
      3*cos(90*(pi/180))      0.0      3*sin(90*(pi/180))
      3*cos(90*(pi/180))      1      3*sin(90*(pi/180))
      3*cos(90*(pi/180))      2      3*sin(90*(pi/180))
      3*cos(90*(pi/180))      3      3*sin(90*(pi/180))];

e = [1
      3
      6
      9
     11
     12
     13
     15
     23
     25
     27
     35
     37
     39
     40
     43
     46
     47
      ];

      % noeud 6 bloqué dans la direction z

      % nombre des elements total
E = 3*(10^10) ;      % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ;      % coef de poisson

g=0.03;

```

Fdonnees.m cylindre pince (N°=8x4)

```

function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [11    10    1
      1     2   11
     12    11    2
      2     3   12
     13    12    3
      3     4   13
     14    13    4
      4     5   14
     15    14    5
      5     6   15
     16    15    6
      6     7   16
     17    16    7
      7     8   17
     18    17    8
      8     9   18
     20    19   10
     10    11   20
     21    20   11
     11    12   21
     22    21   12
     12    13   22
     23    22   13
     13    14   23
     24    23   14
     14    15   24
     25    24   15
     15    16   25
     26    25   16
     16    17   26
     27    26   17
     17    18   27
     29    28   19
     19    20   29
     30    29   20
     20    21   30
     31    30   21
     21    22   31
     32    31   22
     22    32   23
     23    24   33
     34    33   24
     24    25   34
     35    34   25
     25    26   35
     36    35   26
     26    27   36
     38    37   28
     28    29   38
     39    38   29
     29    30   39
     40    39   30
     30    31   40
     41    40   31
     31    32   41
     42    41   32
     32    33   42
     43    42   33
     33    34   43
     44    43   34

```

```

34      35      44
45      44      35
35      36      45];

```

```

p = [ 3.0          0.0      0.0
      3.0          3/8      0.0
      3.0          2*3/8    0.0
      3.0          3*3/8    0.0
      3.0          4*3/8    0.0
      3.0          5*3/8    0.0
      3.0          6*3/8    0.0
      3.0          7*3/8    0.0
      3.0          3        0.0

```

```

3*cos(11.25*(pi/180))    0.0      3*sin(11.25*(pi/180))
3*cos(11.25*(pi/180))    3/8      3*sin(11.25*(pi/180))
3*cos(11.25*(pi/180))    2*3/8    3*sin(11.25*(pi/180))
3*cos(11.25*(pi/180))    3*3/8    3*sin(11.25*(pi/180))
3*cos(11.25*(pi/180))    4*3/8    3*sin(11.25*(pi/180))
3*cos(11.25*(pi/180))    5*3/8    3*sin(11.25*(pi/180))
3*cos(11.25*(pi/180))    3*6/8    3*sin(11.25*(pi/180))
3*cos(11.25*(pi/180))    3*7/8    3*sin(11.25*(pi/180))
3*cos(11.25*(pi/180))    3        3*sin(11.25*(pi/180))

```

```

3*cos(22.50*(pi/180))    0.0      3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    3/8      3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    2*3/8    3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    3*3/8    3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    4*3/8    3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    5*3/8    3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    3*6/8    3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    3*7/8    3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    3        3*sin(22.50*(pi/180))

```

```

3*cos(33.75*(pi/180))    0.0      3*sin(33.75*(pi/180))
3*cos(33.75*(pi/180))    3/8      3*sin(33.75*(pi/180))
3*cos(33.75*(pi/180))    2*3/8    3*sin(33.75*(pi/180))
3*cos(33.75*(pi/180))    3*3/8    3*sin(33.75*(pi/180))
3*cos(33.75*(pi/180))    4*3/8    3*sin(33.75*(pi/180))
3*cos(33.75*(pi/180))    5*3/8    3*sin(33.75*(pi/180))
3*cos(33.75*(pi/180))    3*6/8    3*sin(33.75*(pi/180))
3*cos(33.75*(pi/180))    3*7/8    3*sin(33.75*(pi/180))
3*cos(33.75*(pi/180))    3        3*sin(33.75*(pi/180))

```

```

3*cos(45*(pi/180))        0.0      3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))        3/8      3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))        2*3/8    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))        3*3/8    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))        4*3/8    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))        5*3/8    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))        3*6/8    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))        3*7/8    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))        3        3*sin(45*(pi/180))

```

3*cos(56.25*(pi/180))	0.0	3*sin(56.25*(pi/180))
3*cos(56.25*(pi/180))	3/8	3*sin(56.25*(pi/180))
3*cos(56.25*(pi/180))	2*3/8	3*sin(56.25*(pi/180))
3*cos(56.25*(pi/180))	3*3/8	3*sin(56.25*(pi/180))
3*cos(56.25*(pi/180))	4*3/8	3*sin(56.25*(pi/180))
3*cos(56.25*(pi/180))	5*3/8	3*sin(56.25*(pi/180))
3*cos(56.25*(pi/180))	3*6/8	3*sin(56.25*(pi/180))
3*cos(56.25*(pi/180))	3*7/8	3*sin(56.25*(pi/180))
3*cos(56.25*(pi/180))	3	3*sin(56.25*(pi/180))

3*cos(67.50*(pi/180))	0.0	3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))	3/8	3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))	2*3/8	3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))	3*3/8	3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))	4*3/8	3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))	5*3/8	3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))	3*6/8	3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))	3*7/8	3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))	3	3*sin(67.50*(pi/180))

3*cos(78.75*(pi/180))	0.0	3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))	3/8	3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))	2*3/8	3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))	3*3/8	3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))	4*3/8	3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))	5*3/8	3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))	3*6/8	3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))	3*7/8	3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))	3	3*sin(78.75*(pi/180))

3*cos(90*(pi/180))	0.0	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3/8	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	2*3/8	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3*3/8	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	4*3/8	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	5*3/8	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3*6/8	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	3*7/8	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	3	3*sin(30*(pi/180))];

e =[1
3
6
9
12
15
18
21
24
26
27
28
30
53
55
57
72
80
107
109

```
111
112
115
118
121
124
127
130
133
134];

                                % noeud 6 bloqué dans la direction z

                                % nombre des elements total
E = 3*(10^10) ;                % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ;                      % coef de poisson

g=0.03;
```

Fdonnees.m cylindre pince (N°=5x5)

```
function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [8      7      1
      1      2      8
      9      8      2
      2      3      9
     10      9      3
      3      4     10
     11     10      4
      4      5     11
     12     11      5
      5      6     12
     14     13      7
      7      8     14
     15     14      8
      8      9     15
     16     15      9
      9     10     16
     17     16     10
     10     11     17
     18     17     11
     11     12     18
     20     19     13
     13     14     20
     21     20     14
     14     15     21
     22     21     15
     15     16     22
     23     22     16
     16     17     23
     24     23     17
     17     18     24
     26     25     19
     19     20     26
     27     26     20
     20     21     27
     28     27     21
     21     22     28
     29     28     22
     22     23     29
     30     29     23
     23     24     30
     32     31     25
     25     26     32
     33     32     26
     26     27     33
     34     33     27
     27     28     34
     35     34     28
     28     29     35
     36     35     29
     29     30     36];
```

```
p = [ 3.0      0.0      0.0
      3.0      3/5      0.0
      3.0      2*3/5    0.0
      3.0      3*3/5    0.0
      3.0      4*3/5    0.0
      3.0      3        0.0
```

```
3*cos(18*(pi/180))    0.0    3*sin(18*(pi/180))
3*cos(18*(pi/180))    3/5    3*sin(18*(pi/180))
3*cos(18*(pi/180))    2*3/5  3*sin(18*(pi/180))
3*cos(18*(pi/180))    3*3/5  3*sin(18*(pi/180))
3*cos(18*(pi/180))    4*3/5  3*sin(18*(pi/180))
3*cos(18*(pi/180))    3      3*sin(18*(pi/180))
```

```
3*cos(36*(pi/180))    0.0    3*sin(36*(pi/180))
3*cos(36*(pi/180))    3/5    3*sin(36*(pi/180))
3*cos(36*(pi/180))    2*3/5  3*sin(36*(pi/180))
3*cos(36*(pi/180))    3*3/5  3*sin(36*(pi/180))
3*cos(36*(pi/180))    4*3/5  3*sin(36*(pi/180))
3*cos(36*(pi/180))    3      3*sin(36*(pi/180))
```

```
3*cos(54*(pi/180))    0.0    3*sin(54*(pi/180))
3*cos(54*(pi/180))    3/5    3*sin(54*(pi/180))
3*cos(54*(pi/180))    2*3/5  3*sin(54*(pi/180))
3*cos(54*(pi/180))    3*3/5  3*sin(54*(pi/180))
3*cos(54*(pi/180))    4*3/5  3*sin(54*(pi/180))
3*cos(54*(pi/180))    3      3*sin(54*(pi/180))
```

```
3*cos(72*(pi/180))    0.0    3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))    3/5    3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))    2*3/5  3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))    3*3/5  3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))    4*3/5  3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))    3      3*sin(72*(pi/180))
```

```
3*cos(90*(pi/180))    0.0    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    3/5    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    2*3/5  3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    3*3/5  3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    4*3/5  3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    3      3*sin(90*(pi/180))
```

```
];
```

```
e =[1
    3
    6
    9
   12
   15
   17
   18
   19
   21
   35
   37
   39
   53
   55
   57
   71
   73
   75
   89
   91
   93
   94
   97
  100
  103
  106
 107];

                                % noeud 6 bloqué dans la direction z

                                % nombre des elements total
E = 3*(10^10) ;                % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ;                      % coef de poisson
```

Fdonnees.m cylindre pince (N°=6x6)

```

function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [9      8      1
      1      2      9
     10      9      2
      2      3     10
     11     10      3
      3      4     11
     12     11      4
      4      5     12
     13     12      5
      5      6     13
     14     13      6
      6      7     14
     16     15      8
      8      9     16
     17     16      9
      9     10     17
     18     17     10
     10     11     18
     19     18     11
     11     12     19
     20     19     12
     12     13     20
     21     20     13
     13     14     21
     23     22     15
     15     16     23
     24     23     16
     16     17     24
     25     24     17
     17     18     25
     26     25     18
     18     19     26
     27     26     19
     19     20     27
     28     27     20
     20     21     28
     30     29     22
     22     23     30
     31     30     23
     23     24     31
     32     31     24
     24     25     32
     33     32     25
     25     26     33
     34     33     26
     26     27     34
     35     34     27
     27     28     35
     37     36     29
     29     30     37
     38     37     30
     30     31     38
     39     38     31
     31     32     39
     40     39     32
     32     33     40
     41     40     33
     33     34     41
     42     41     34
     34     35     42

```

```

44      43      36
36      37      44
45      44      37
37      38      45
46      45      38
38      39      46
47      46      39
39      40      47
48      47      40
40      41      48
49      48      41
41      42      49
];

```

```

p = [ 3.0      0.0      0.0
      3.0      3/6      0.0
      3.0      2*3/6    0.0
      3.0      3*3/6    0.0
      3.0      4*3/6    0.0
      3.0      5*3/6    0.0
      3.0      3        0.0

```

```

3*cos(15*(pi/180))    0.0      3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))    3/6      3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))    2*3/6    3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))    3*3/6    3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))    4*3/6    3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))    5*3/6    3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))    3        3*sin(15*(pi/180))

```

```

3*cos(30*(pi/180))    0.0      3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))    3/6      3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))    2*3/6    3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))    3*3/6    3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))    4*3/6    3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))    5*3/6    3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))    3        3*sin(30*(pi/180))

```

```

3*cos(45*(pi/180))    0.0      3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    3/6      3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    2*3/6    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    3*3/6    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    4*3/6    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    5*3/6    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    3        3*sin(45*(pi/180))

```

```

3*cos(60*(pi/180))    0.0      3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    3/6      3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    2*3/6    3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    3*3/6    3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    4*3/6    3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    5*3/6    3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    3        3*sin(60*(pi/180))

```

```

3*cos(75*(pi/180))    0.0      3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    3/6      3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    2*3/6    3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    3*3/6    3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    4*3/6    3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    5*3/6    3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    3        3*sin(75*(pi/180))

```

```

3*cos(90*(pi/180))      0.0      3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))      3/6      3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))      2*3/6    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))      3*3/6    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))      4*3/6    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))      5*3/6    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))      3        3*sin(90*(pi/180))
];

e =[1
3
6
9
12
15
18
20
21
22
24
41
43
45
62
64
66
83
85
87
104
106
108
125
127
129
130
133
136
139
142
145
146
]; % noeud 6 bloqué dans la direction z

% nombre des elements total
E = 3*(10^10) ; % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ; % coef de poisson

g=0.03;
```

Fdonnees.m cylindre pince (N°=7x7)

```
function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [10      9      1
      1      2     10
     11     10      2
      2      3     11
     12     11      3
      3      4     12
     13     12      4
      4      5     13
     14     13      5
      5      6     14
     15     14      6
      6      7     15
     16     15      7
      7      8     16
     18     17      9
      9     10     18
     19     18     10
     10     11     19
     20     19     11
     11     12     20
     21     20     12
     12     13     21
     22     21     13
     13     14     22
     23     22     14
     14     15     23
     24     23     15
     15     16     24
     26     25     17
     17     18     26
     27     26     18
     18     19     27
     28     27     19
     19     20     28
     29     28     20
     20     21     29
     30     29     21
     21     22     30
     31     30     22
     22     23     31
     32     31     23
     23     24     32
     34     33     25
     25     26     34
     35     34     26
     26     27     35
     36     35     27
     27     28     36
     37     36     28
     28     29     37
     38     37     29
     29     30     38
     39     38     30
     30     31     39
     40     39     31
     31     32     40
     42     41     33
     33     34     42
     43     42     34
     34     35     43]
```

```

44      43      35
35      36      44
45      44      36
36      37      45
46      45      37
37      38      46
47      46      38
38      39      47
48      47      39
39      40      48
50      49      41
41      42      50
51      50      42
42      43      51
52      51      43
43      44      52
53      52      44
44      45      53
54      53      45
45      46      54
55      54      46
46      47      55
56      55      47
47      48      56
58      57      49
49      50      58
59      58      50
50      51      59
60      59      51
51      52      60
61      50      52
52      53      61
62      61      53
53      54      62
63      52      54
54      55      63
64      63      55
55      56      64];

```

```

p = [ 3.0      0.0      0.0
      3.0      3/7      0.0
      3.0      2*3/7    0.0
      3.0      3*3/7    0.0
      3.0      4*3/7    0.0
      3.0      5*3/7    0.0
      3.0      6*3/7    0.0
      3.0      3        0.0

```

```

3*cos(12.86*(pi/180))    0.0      3*sin(12.86*(pi/180))
3*cos(12.86*(pi/180))    3/7      3*sin(12.86*(pi/180))
3*cos(12.86*(pi/180))    2*3/7    3*sin(12.86*(pi/180))
3*cos(12.86*(pi/180))    3*3/7    3*sin(12.86*(pi/180))
3*cos(12.86*(pi/180))    4*3/7    3*sin(12.86*(pi/180))
3*cos(12.86*(pi/180))    5*3/7    3*sin(12.86*(pi/180))
3*cos(12.86*(pi/180))    6*3/7    3*sin(12.86*(pi/180))
3*cos(12.86*(pi/180))    3        3*sin(12.86*(pi/180))

```

```

3*cos(25.70*(pi/180))    0.0      3*sin(25.70*(pi/180))
3*cos(25.70*(pi/180))    3/7      3*sin(25.70*(pi/180))

```

3*cos(25.70*(pi/180))	2*3/7	3*sin(25.70*(pi/180))
3*cos(25.70*(pi/180))	3*3/7	3*sin(25.70*(pi/180))
3*cos(25.70*(pi/180))	4*3/7	3*sin(25.70*(pi/180))
3*cos(25.70*(pi/180))	5*3/7	3*sin(25.70*(pi/180))
3*cos(25.70*(pi/180))	6*3/7	3*sin(25.70*(pi/180))
3*cos(25.70*(pi/180))	3	3*sin(25.70*(pi/180))
3*cos(38.58*(pi/180))	0.0	3*sin(38.58*(pi/180))
3*cos(38.58*(pi/180))	3/7	3*sin(38.58*(pi/180))
3*cos(38.58*(pi/180))	2*3/7	3*sin(38.58*(pi/180))
3*cos(38.58*(pi/180))	3*3/7	3*sin(38.58*(pi/180))
3*cos(38.58*(pi/180))	4*3/7	3*sin(38.58*(pi/180))
3*cos(38.58*(pi/180))	5*3/7	3*sin(38.58*(pi/180))
3*cos(38.58*(pi/180))	6*3/7	3*sin(38.58*(pi/180))
3*cos(38.58*(pi/180))	3	3*sin(38.58*(pi/180))
3*cos(51.44*(pi/180))	0.0	3*sin(51.44*(pi/180))
3*cos(51.44*(pi/180))	3/7	3*sin(51.44*(pi/180))
3*cos(51.44*(pi/180))	2*3/7	3*sin(51.44*(pi/180))
3*cos(51.44*(pi/180))	3*3/7	3*sin(51.44*(pi/180))
3*cos(51.44*(pi/180))	4*3/7	3*sin(51.44*(pi/180))
3*cos(51.44*(pi/180))	5*3/7	3*sin(51.44*(pi/180))
3*cos(51.44*(pi/180))	6*3/7	3*sin(51.44*(pi/180))
3*cos(51.44*(pi/180))	3	3*sin(51.44*(pi/180))
3*cos(64.30*(pi/180))	0.0	3*sin(64.30*(pi/180))
3*cos(64.30*(pi/180))	3/7	3*sin(64.30*(pi/180))
3*cos(64.30*(pi/180))	2*3/7	3*sin(64.30*(pi/180))
3*cos(64.30*(pi/180))	3*3/7	3*sin(64.30*(pi/180))
3*cos(64.30*(pi/180))	4*3/7	3*sin(64.30*(pi/180))
3*cos(64.30*(pi/180))	5*3/7	3*sin(64.30*(pi/180))
3*cos(64.30*(pi/180))	6*3/7	3*sin(64.30*(pi/180))
3*cos(64.30*(pi/180))	3	3*sin(64.30*(pi/180))
3*cos(77.16*(pi/180))	0.0	3*sin(77.16*(pi/180))
3*cos(77.16*(pi/180))	3/7	3*sin(77.16*(pi/180))
3*cos(77.16*(pi/180))	2*3/7	3*sin(77.16*(pi/180))
3*cos(77.16*(pi/180))	3*3/7	3*sin(77.16*(pi/180))
3*cos(77.16*(pi/180))	4*3/7	3*sin(77.16*(pi/180))
3*cos(77.16*(pi/180))	5*3/7	3*sin(77.16*(pi/180))
3*cos(77.16*(pi/180))	6*3/7	3*sin(77.16*(pi/180))
3*cos(77.16*(pi/180))	3	3*sin(77.16*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	0.0	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3/7	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	2*3/7	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3*3/7	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	4*3/7	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	5*3/7	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	6*3/7	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3	3*sin(90*(pi/180))

];

```
e =[1
    3
    6
    9
   12
   15
   18
   21
   23
   24
   25
   26
   37
   49
   51
   71
   73
   75
   95
   97
   99
  119
  121
  123
  143
  145
  147
  167
  169
  171
  172
  175
  178
  181
  184
  187
  190
  191
    ];          % noeud 6 bloqué dans la direction z

          % nombre des elements total
E = 3*(10^10) ;      % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ;          % coef de poisson
```

Fdonnees.m cylindre pince (N°=4x8)

```
function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [7      6      1
      1      2      7
      8      7      2
      2      3      8
      9      8      3
      3      4      9
     10      9      4
      4      5     10
     12     11      6
      6      7     12
     13     12      7
      7      8     13
     14     13      8
      8      9     14
     15     14      9
      9     10     15
     17     16     11
     11     12     17
     18     17     12
     12     13     18
     19     18     13
     13     14     19
     20     19     14
     14     15     20
     22     21     16
     16     17     22
     23     22     17
     17     18     23
     24     23     18
     18     19     24
     25     24     19
     19     20     25
     27     26     21
     21     22     27
     28     27     22
     22     23     28
     29     28     23
     23     24     29
     30     29     24
     24     25     30
     32     31     26
     26     27     32
     33     32     27
     27     28     33
     34     33     28
     28     29     34
     35     34     29
     29     30     35
     37     36     31
     31     32     37
     38     37     32
     32     33     38
     39     38     33
     33     34     39
     40     39     34
     34     35     40
     42     41     36
     36     37     42
     43     42     37
     37     38     43]
```

```

44      43      38
38      39      44
45      44      39
39      40      45];

```

```

p = [ 3.0          0.0      0.0
      3.0          3/4      0.0
      3.0          2*3/4    0.0
      3.0          3*3/4    0.0
      3.0          3        0.0

```

```

3*cos(22.50*(pi/180))    0.0      3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    3/4      3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    2*3/4    3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    3*3/4    3*sin(22.50*(pi/180))
3*cos(22.50*(pi/180))    3        3*sin(22.50*(pi/180))

```

```

3*cos(45*(pi/180))      0.0      3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))      3/4      3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))      2*3/4    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))      3*3/4    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))      3        3*sin(45*(pi/180))

```

```

3*cos(67.50*(pi/180))    0.0      3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))    3/4      3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))    2*3/4    3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))    3*3/4    3*sin(67.50*(pi/180))
3*cos(67.50*(pi/180))    3        3*sin(67.50*(pi/180))

```

```

3*cos(90*(pi/180))      0.0      3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))      3/4      3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))      2*3/4    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))      3*3/4    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))      3        3*sin(90*(pi/180))];

```

```

e =[1
    3
    6
    9
   12
   14
   15
   16
   18
   20
   31
   33
   43
   46
   48
   59
   61
   63
   74

```

```
76
78
89
91
93
104
106
108
119
121
123
124
127
130
133
134];

                                % noeud 6 bloqué dans la direction z

                                % nombre des elements total
E = 3*(10^10) ;                % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3 ;                      % coef de poisson
```

Fdonnees.m cylindre pince a bord libre (N°=2x10)

```

function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
t = [1    12    13
     13    2     1
     2    13    14
    14    3     2
     3    14    15
    15    4     3
     4    15    16
    16    5     4
     5    16    17
    17    6     5
     6    17    18
    18    7     6
     7    18    19
    19    8     7
     8    19    20
    20    9     8
     9    20    21
    21    10    9
    10    21    22
    22    11    10
    12    23    24
    24    13    12
    13    24    25
    25    14    13
    14    25    26
    26    15    14
    15    26    27
    27    16    15
    16    27    28
    28    17    16
    17    28    29
    29    18    17
    18    29    30
    30    19    18
    19    30    31
    31    20    19
    20    31    32
    32    21    20
    21    32    33
    33    22    21];

p = [ 3.0          0.0      0.0
      3.0          3/10     0.0
      3.0          2*3/10   0.0
      3.0          3*3/10   0.0
      3.0          4*3/10   0.0
      3.0          5*3/10   0.0
      3.0          6*3/10   0.0
      3.0          7*3/10   0.0
      3.0          8*3/10   0.0
      3.0          9*3/10   0.0
      3.0           3       0.0

      3*cos(9*(pi/180))    0.0    3*sin(9*(pi/180))
      3*cos(9*(pi/180))    3/10    3*sin(9*(pi/180))
      3*cos(9*(pi/180))    2*3/10  3*sin(9*(pi/180))
      3*cos(9*(pi/180))    3*3/10  3*sin(9*(pi/180))
      3*cos(9*(pi/180))    4*3/10  3*sin(9*(pi/180))

```

80

3*cos(54*(pi/180))	6*3/10	3*sin(54*(pi/180))
3*cos(54*(pi/180))	7*3/10	3*sin(54*(pi/180))
3*cos(54*(pi/180))	8*3/10	3*sin(54*(pi/180))
3*cos(54*(pi/180))	9*3/10	3*sin(54*(pi/180))
3*cos(54*(pi/180))	3	3*sin(54*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	0.0	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	3/10	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	2*3/10	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	3*3/10	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	4*3/10	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	5*3/10	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	6*3/10	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	7*3/10	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	8*3/10	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	9*3/10	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(63*(pi/180))	3	3*sin(63*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	0.0	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	3/10	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	2*3/10	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	3*3/10	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	4*3/10	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	5*3/10	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	6*3/10	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	7*3/10	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	8*3/10	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	9*3/10	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(72*(pi/180))	3	3*sin(72*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	0.0	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	3/10	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	2*3/10	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	3*3/10	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	4*3/10	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	5*3/10	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	6*3/10	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	7*3/10	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	8*3/10	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	9*3/10	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(81*(pi/180))	3	3*sin(81*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	0.0	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3/10	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	2*3/10	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3*3/10	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	4*3/10	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	5*3/10	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	6*3/10	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	7*3/10	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	8*3/10	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	9*3/10	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3	3*sin(90*(pi/180))];

```
e =[3
    31
    36
    64
    68
    69
    71
    74
    77
    80
    83
    86
    92
    95
    97
    98];

                                % noeud 6 bloqué dans la direction z

                                % nombre des elements total
E = 10.5106 ;                  % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3125 ;                  % coef de poisson
```

Fdonnees.m cylindre pince a bord libre (N°=2x11)

```
function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
```

```
t = [1    13    14
     14    2     1
       2    14    15
     15    3     2
       3    15    16
     16    4     3
       4    16    17
     17    5     4
       5    17    18
     18    6     5
       6    18    19
     19    7     6
       7    19    20
     20    8     7
       8    20    21
     21    9     8
       9    21    22
     22   10     9
     10    22    23
     23   11    10
     11    23    24
     24   12    11
     13    25    26
     26   14    13
     14    26    27
     27   15    14
     15    27    28
     28   16    15
     16    28    29
     29   17    16
     17    29    30
     30   18    17
     18    30    31
     31   19    18
     19    31    32
     32   20    19
     20    32    33
     33   21    20
     21    33    34
     34   22    21
     22    34    35
     35   23    22
     23    35    36
     36   24    23];
```

```
p = [ 3.0      0.0      0.0
      3.0      3/11     0.0
      3.0     2*3/11    0.0
      3.0     3*3/11    0.0
      3.0     4*3/11    0.0
      3.0     5*3/11    0.0
      3.0     6*3/11    0.0
      3.0     7*3/11    0.0
      3.0     8*3/11    0.0
      3.0     9*3/11    0.0
      3.0    10*3/11    0.0
      3.0       3      0.0
```

$3\cos(8.18\pi/180)$	0.0	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	3/11	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	2*3/11	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	3*3/11	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	4*3/11	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	5*3/11	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	6*3/11	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	7*3/11	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	8*3/11	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	9*3/11	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	10*3/11	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(8.18\pi/180)$	3	$3\sin(8.18\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	0.0	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	3/11	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	2*3/11	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	3*3/11	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	4*3/11	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	5*3/11	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	6*3/11	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	7*3/11	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	8*3/11	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	9*3/11	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	10*3/11	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(16.36\pi/180)$	3	$3\sin(16.36\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	0.0	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	3/11	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	2*3/11	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	3*3/11	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	4*3/11	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	5*3/11	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	6*3/11	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	7*3/11	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	8*3/11	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	9*3/11	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	10*3/11	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(24.54\pi/180)$	3	$3\sin(24.54\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	0.0	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	3/11	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	2*3/11	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	3*3/11	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	4*3/11	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	5*3/11	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	6*3/11	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	7*3/11	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	8*3/11	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	9*3/11	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	10*3/11	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(32.72\pi/180)$	3	$3\sin(32.72\pi/180)$
$3\cos(40.90\pi/180)$	0.0	$3\sin(40.90\pi/180)$
$3\cos(40.90\pi/180)$	3/11	$3\sin(40.90\pi/180)$
$3\cos(40.90\pi/180)$	2*3/11	$3\sin(40.90\pi/180)$
$3\cos(40.90\pi/180)$	3*3/11	$3\sin(40.90\pi/180)$
$3\cos(40.90\pi/180)$	4*3/11	$3\sin(40.90\pi/180)$
$3\cos(40.90\pi/180)$	5*3/11	$3\sin(40.90\pi/180)$
$3\cos(40.90\pi/180)$	6*3/11	$3\sin(40.90\pi/180)$
$3\cos(40.90\pi/180)$	7*3/11	$3\sin(40.90\pi/180)$
$3\cos(40.90\pi/180)$	8*3/11	$3\sin(40.90\pi/180)$
$3\cos(40.90\pi/180)$	9*3/11	$3\sin(40.90\pi/180)$

85

```

3*cos(81.81*(pi/180))      6*3/11  3*sin(81.81*(pi/180))
3*cos(81.81*(pi/180))      7*3/11  3*sin(81.81*(pi/180))
3*cos(81.81*(pi/180))      8*3/11  3*sin(81.81*(pi/180))
3*cos(81.81*(pi/180))      9*3/11  3*sin(81.81*(pi/180))
3*cos(81.81*(pi/180))     10*3/11  3*sin(81.81*(pi/180))
3*cos(81.81*(pi/180))       3      3*sin(81.81*(pi/180))

3*cos(90*(pi/180))         0.0      3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))         3/11     3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        2*3/11    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        3*3/11    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        4*3/11    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        5*3/11    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        6*3/11    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        7*3/11    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        8*3/11    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        9*3/11    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))       10*3/11    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))         3      3*sin(90*(pi/180))] ;

e =[3
    34
    39
    70
    74
    75
    77
    80
    83
    86
    89
    92
    95
    98
   101
   104
   106
  107];

% noeud 6 bloqué dans la direction z

% nombre des elements total
E = 10.5106 ;      % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3125 ;      % coef de poisson

```

Fdonnees.m cylindre pince a bord libre (N°=2x12)

```
function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
```

```
t = [1    14    15
     15    2     1
       2    15    16
     16    3     2
       3    16    17
     17    4     3
       4    17    18
     18    5     4
       5    18    19
     19    6     5
       6    19    20
     20    7     6
       7    20    21
     21    8     7
       8    21    22
     22    9     8
       9    22    23
     23   10     9
     10   23    24
     24   11    10
     11   24    25
     25   12    11
     12   25    26
     26   13    12
     14   27    28
     28   15    14
     15   28    29
     29   16    15
     16   29    30
     30   17    16
     17   30    31
     31   18    17
     18   31    32
     32   19    18
     19   32    33
     33   20    19
     20   33    34
     34   21    20
     21   34    35
     35   22    21
     22   35    36
     36   23    22
     23   36    37
     37   24    23
     24   37    38
     38   25    24
     25   38    39
     39   26    25];
```

```
p = [ 3.0      0.0      0.0
      3.0      3/12     0.0
      3.0      2*3/12   0.0
      3.0      3*3/12   0.0
      3.0      4*3/12   0.0
      3.0      5*3/12   0.0
      3.0      6*3/12   0.0
      3.0      7*3/12   0.0
      3.0      8*3/12   0.0
      3.0      9*3/12   0.0]
```

3.0	10*3/12	0.0
3.0	11*3/12	0.0
3.0	3	0.0
3*cos(7.5*(pi/180))	0.0	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	2*3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	3*3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	4*3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	5*3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	6*3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	7*3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	8*3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	9*3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	10*3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	11*3/12	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(7.5*(pi/180))	3	3*sin(7.5*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	0.0	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	2*3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	3*3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	4*3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	5*3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	6*3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	7*3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	8*3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	9*3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	10*3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	11*3/12	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(15*(pi/180))	3	3*sin(15*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	0.0	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	2*3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	3*3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	4*3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	5*3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	6*3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	7*3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	8*3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	9*3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	10*3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	11*3/12	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(22.5*(pi/180))	3	3*sin(22.5*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	0.0	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	2*3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	3*3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	4*3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	5*3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	6*3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	7*3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	8*3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	9*3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	10*3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	11*3/12	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))	3	3*sin(30*(pi/180))
3*cos(37.5*(pi/180))	0.0	3*sin(37.5*(pi/180))

$3 \cos(67.5^\circ (\pi/180))$	0.0	$3 \sin(67.5^\circ (\pi/180))$
$3 \cos(67.5^\circ (\pi/180))$	3/12	$3 \sin(67.5^\circ (\pi/180))$
$3 \cos(67.5^\circ (\pi/180))$	2*3/12	$3 \sin(67.5^\circ (\pi/180))$
$3 \cos(67.5^\circ (\pi/180))$	3*3/12	$3 \sin(67.5^\circ (\pi/180))$
$3 \cos(67.5^\circ (\pi/180))$	4*3/12	$3 \sin(67.5^\circ (\pi/180))$
$3 \cos(67.5^\circ (\pi/180))$	5*3/12	$3 \sin(67.5^\circ (\pi/180))$
$3 \cos(67.5^\circ (\pi/180))$	6*3/12	$3 \sin(67.5^\circ (\pi/180))$

3*cos(67.5*(pi/180))	7*3/12	3*sin(67.5*(pi/180))
3*cos(67.5*(pi/180))	8*3/12	3*sin(67.5*(pi/180))
3*cos(67.5*(pi/180))	9*3/12	3*sin(67.5*(pi/180))
3*cos(67.5*(pi/180))	10*3/12	3*sin(67.5*(pi/180))
3*cos(67.5*(pi/180))	11*3/12	3*sin(67.5*(pi/180))
3*cos(67.5*(pi/180))	3	3*sin(67.5*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	0.0	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	2*3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	3*3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	4*3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	5*3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	6*3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	7*3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	8*3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	9*3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	10*3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	11*3/12	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))	3	3*sin(75*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	0.0	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	2*3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	3*3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	4*3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	5*3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	6*3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	7*3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	8*3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	9*3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	10*3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	11*3/12	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(82.5*(pi/180))	3	3*sin(82.5*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	0.0	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	2*3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3*3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	4*3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	5*3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	6*3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	7*3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	8*3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	9*3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	10*3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	11*3/12	3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))	3	3*sin(90*(pi/180))];

```
e =[3
    37
    42
    76
    80
    81
    83
    86
    89
    92
    95
    98
    101
    104
    107
    110
    112
    115
    116];

                                % noeud 6 bloqué dans la direction z

                                % nombre des elements total
E = 10.5106 ;                  % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3125 ;                  % coef de poisson
```

Fdonnees.m cylindre pince a bord libre (N°=3x6)

```
function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
```

```
t = [1      8      9
      9      2      1
      2      9     10
     10      3      2
      3     10     11
     11      4      3
      4     11     12
     12      5      4
      5     12     13
     13      6      5
      6     13     14
     14      7      6
      8     15     16
     16      9      8
      9     16     17
     17     10      9
     10     17     18
     18     11     10
     11     18     19
     19     12     11
     12     19     20
     20     13     12
     13     20     21
     21     14     13
     15     22     23
     23     16     15
     16     23     24
     24     17     16
     17     24     25
     25     18     17
     18     25     26
     26     19     18
     19     26     27
     27     20     19
     20     27     28
     28     21     20];
```

```
p = [ 3.0      0.0      0.0
      3.0      3/6      0.0
      3.0     2*3/6     0.0
      3.0     3*3/6     0.0
      3.0     4*3/6     0.0
      3.0     5*3/6     0.0
      3.0        3      0.0
```

```
      3*cos(15*(pi/180))      0.0      3*sin(15*(pi/180))
      3*cos(15*(pi/180))      3/6      3*sin(15*(pi/180))
      3*cos(15*(pi/180))     2*3/6      3*sin(15*(pi/180))
      3*cos(15*(pi/180))     3*3/6      3*sin(15*(pi/180))
      3*cos(15*(pi/180))     4*3/6      3*sin(15*(pi/180))
      3*cos(15*(pi/180))     5*3/6      3*sin(15*(pi/180))
      3*cos(15*(pi/180))      3      3*sin(15*(pi/180))
```

```
      3*cos(30*(pi/180))      0.0      3*sin(30*(pi/180))
      3*cos(30*(pi/180))      3/6      3*sin(30*(pi/180))
      3*cos(30*(pi/180))     2*3/6      3*sin(30*(pi/180))
      3*cos(30*(pi/180))     3*3/6      3*sin(30*(pi/180))
```

```

3*cos(30*(pi/180))    4*3/6    3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))    5*3/6    3*sin(30*(pi/180))
3*cos(30*(pi/180))    3        3*sin(30*(pi/180))

3*cos(45*(pi/180))    0.0      3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    3/6      3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    2*3/6    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    3*3/6    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    4*3/6    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    5*3/6    3*sin(45*(pi/180))
3*cos(45*(pi/180))    3        3*sin(45*(pi/180))

3*cos(60*(pi/180))    0.0      3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    3/6      3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    2*3/6    3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    3*3/6    3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    4*3/6    3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    5*3/6    3*sin(60*(pi/180))
3*cos(60*(pi/180))    3        3*sin(60*(pi/180))

3*cos(75*(pi/180))    0.0      3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    3/6      3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    2*3/6    3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    3*3/6    3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    4*3/6    3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    5*3/6    3*sin(75*(pi/180))
3*cos(75*(pi/180))    3        3*sin(75*(pi/180))

3*cos(90*(pi/180))    0.0      3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    3/6      3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    2*3/6    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    3*3/6    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    4*3/6    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    5*3/6    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))    3        3*sin(90*(pi/180))];

e =[3
    21
    24
    40
    45
    61
    65
    66
    68
    71
    74
    77
    80
    82
    83];

% noeud 6 bloqué dans la direction z

% nombre des elements total
E = 10.5106 ;      % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3125 ;      % coef de poisson

```

Fdonnees.m cylindre pince a bord libre (N°=3x7)

```
function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
```

```
t = [1    9    10
      10   2    1
        2   10   11
       11   3    2
        3   11   12
       12   4    3
        4   12   13
       13   5    4
        5   13   14
       14   6    5
        6   14   15
       15   7    6
        7   15   16
       16   8    7
        9   17   18
       18   10   9
       10   18   19
       19   11   10
       11   19   20
       20   12   11
       12   20   21
       21   13   12
       13   21   22
       22   14   13
       14   22   23
       23   15   14
       15   23   24
       24   16   15
       17   25   26
       26   18   17
       18   26   27
       27   19   18
       19   27   28
       28   20   19
       20   28   29
       29   21   20
       21   29   30
       30   22   21
       22   30   31
       31   23   22
       23   31   32
       32   24   23];
```

```
p = [ 3.0      0.0      0.0
      3.0      3/7      0.0
      3.0     2*3/7     0.0
      3.0     3*3/7     0.0
      3.0     4*3/7     0.0
      3.0     5*3/7     0.0
      3.0     6*3/7     0.0
      3.0      3      0.0
```

```
3*cos(12.85*(pi/180))      0.0      3*sin(12.85*(pi/180))
3*cos(12.85*(pi/180))      3/7      3*sin(12.85*(pi/180))
3*cos(12.85*(pi/180))     2*3/7     3*sin(12.85*(pi/180))
3*cos(12.85*(pi/180))     3*3/7     3*sin(12.85*(pi/180))
```



```
e =[3
    22
    27
    46
    51
    70
    74
    75
    77
    80
    83
    88
    89
    92
    95];

                                % noeud 6 bloqué dans la direction z

                                % nombre des elements total
E = 10.5106 ;                  % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3125 ;                  % coef de poisson
```

Fdonnees.m cylindre pince a bord libre (N°=3x8)

```
function [t,p,e,E,nu,g] = Fdonnees
```

```
t = [1    10   11
     11    2    1
       2   11   12
     12    3    2
       3   12   13
     13    4    3
       4   13   14
     14    5    4
       5   14   15
     15    6    5
       6   15   16
     16    7    6
       7   16   17
     17    8    7
       8   17   18
     18    9    8
     10   19   20
     20   11   10
     11   20   21
     21   12   11
     12   21   22
     22   13   12
     13   22   23
     23   14   13
     14   23   24
     24   15   14
     15   24   25
     25   16   15
     16   25   26
     26   17   16
     17   26   27
     27   18   17
     19   28   29
     29   20   19
     20   29   30
     30   21   20
     21   30   31
     31   22   21
     22   31   32
     32   23   22
     23   32   33
     33   24   23
     24   33   34
     34   25   24
     25   34   35
     35   26   25
     26   35   36
     36   27   26];
```

```
p = [ 3.0      0.0      0.0
      3.0      3/12     0.0
      3.0      2*3/12   0.0
      3.0      3*3/12   0.0
      3.0      4*3/12   0.0
      3.0      5*3/12   0.0
      3.0      6*3/12   0.0
      3.0      7*3/12   0.0
      3.0        3      0.0
```

$3\cos(11.25^\circ)$	0.0	$3\sin(11.25^\circ)$
$3\cos(11.25^\circ)$	$\frac{3}{8}$	$3\sin(11.25^\circ)$
$3\cos(11.25^\circ)$	$\frac{2\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(11.25^\circ)$
$3\cos(11.25^\circ)$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(11.25^\circ)$
$3\cos(11.25^\circ)$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(11.25^\circ)$
$3\cos(11.25^\circ)$	$\frac{5\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(11.25^\circ)$
$3\cos(11.25^\circ)$	$\frac{6\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(11.25^\circ)$
$3\cos(11.25^\circ)$	$\frac{7\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(11.25^\circ)$
$3\cos(11.25^\circ)$	3	$3\sin(11.25^\circ)$

$3\cos(22.5^\circ)$	0.0	$3\sin(22.5^\circ)$
$3\cos(22.5^\circ)$	$\frac{3}{8}$	$3\sin(22.5^\circ)$
$3\cos(22.5^\circ)$	$\frac{2\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(22.5^\circ)$
$3\cos(22.5^\circ)$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(22.5^\circ)$
$3\cos(22.5^\circ)$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(22.5^\circ)$
$3\cos(22.5^\circ)$	$\frac{5\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(22.5^\circ)$
$3\cos(22.5^\circ)$	$\frac{6\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(22.5^\circ)$
$3\cos(22.5^\circ)$	$\frac{7\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(22.5^\circ)$
$3\cos(22.5^\circ)$	3	$3\sin(22.5^\circ)$

$3\cos(33.75^\circ)$	0.0	$3\sin(33.75^\circ)$
$3\cos(33.75^\circ)$	$\frac{3}{8}$	$3\sin(33.75^\circ)$
$3\cos(33.75^\circ)$	$\frac{2\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(33.75^\circ)$
$3\cos(33.75^\circ)$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(33.75^\circ)$
$3\cos(33.75^\circ)$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(33.75^\circ)$
$3\cos(33.75^\circ)$	$\frac{5\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(33.75^\circ)$
$3\cos(33.75^\circ)$	$\frac{6\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(33.75^\circ)$
$3\cos(33.75^\circ)$	$\frac{7\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(33.75^\circ)$
$3\cos(33.75^\circ)$	3	$3\sin(33.75^\circ)$

$3\cos(45^\circ)$	0.0	$3\sin(45^\circ)$
$3\cos(45^\circ)$	$\frac{3}{8}$	$3\sin(45^\circ)$
$3\cos(45^\circ)$	$\frac{2\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(45^\circ)$
$3\cos(45^\circ)$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(45^\circ)$
$3\cos(45^\circ)$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(45^\circ)$
$3\cos(45^\circ)$	$\frac{5\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(45^\circ)$
$3\cos(45^\circ)$	$\frac{6\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(45^\circ)$
$3\cos(45^\circ)$	$\frac{7\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(45^\circ)$
$3\cos(45^\circ)$	3	$3\sin(45^\circ)$

$3\cos(56.25^\circ)$	0.0	$3\sin(56.25^\circ)$
$3\cos(56.25^\circ)$	$\frac{3}{8}$	$3\sin(56.25^\circ)$
$3\cos(56.25^\circ)$	$\frac{2\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(56.25^\circ)$
$3\cos(56.25^\circ)$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(56.25^\circ)$
$3\cos(56.25^\circ)$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(56.25^\circ)$
$3\cos(56.25^\circ)$	$\frac{5\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(56.25^\circ)$
$3\cos(56.25^\circ)$	$\frac{6\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(56.25^\circ)$
$3\cos(56.25^\circ)$	$\frac{7\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(56.25^\circ)$
$3\cos(56.25^\circ)$	3	$3\sin(56.25^\circ)$

$3\cos(67.5^\circ)$	0.0	$3\sin(67.5^\circ)$
$3\cos(67.5^\circ)$	$\frac{3}{8}$	$3\sin(67.5^\circ)$
$3\cos(67.5^\circ)$	$\frac{2\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(67.5^\circ)$
$3\cos(67.5^\circ)$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(67.5^\circ)$
$3\cos(67.5^\circ)$	$\frac{4\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(67.5^\circ)$
$3\cos(67.5^\circ)$	$\frac{5\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(67.5^\circ)$
$3\cos(67.5^\circ)$	$\frac{6\sqrt{3}}{8}$	$3\sin(67.5^\circ)$

```

3*cos(67.5*(pi/180))      7*3/8  3*sin(67.5*(pi/180))
3*cos(67.5*(pi/180))      3      3*sin(67.5*(pi/180))

3*cos(78.75*(pi/180))     0.0    3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))     3/8    3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))     2*3/8  3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))     3*3/8  3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))     4*3/8  3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))     5*3/8  3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))     6*3/8  3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))     7*3/8  3*sin(78.75*(pi/180))
3*cos(78.75*(pi/180))     3      3*sin(78.75*(pi/180))

3*cos(90*(pi/180))        0.0    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        3/8    3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        2*3/8  3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        3*3/8  3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        4*3/8  3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        5*3/8  3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        6*3/8  3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        7*3/8  3*sin(90*(pi/180))
3*cos(90*(pi/180))        3      3*sin(90*(pi/180))] ;

e =[3
    25
    30
    52
    57
    79
    83
    84
    86
    89
    92
    95
    98
    101
    104
    106
    107];

% noeud 6 bloqué dans la direction z

% nombre des elements total
E = 10.5106 ;      % module d'élasticité des éléments
nu = 0.3125 ;      % coef de poisson

```