

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur
Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR
D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

Thème

**Analyse mathématique d'une classe d'inéquations
variationnelles .**

présente par: Mesbahi Safa
Kahmane Ouafa

Devant le jury composé de :

	MCA	Président	Univ. El Oued
Mioudi Madjda	M.A.A	Encadreur	Univ. El Oued
	MCA	Examineur	Univ. El Oued

Promotion : 2023/2024

**** Dédicace ****

*On écrit sur les murs à l'encre de nos veines on dessine tous ce que l'on voudrait dire
dédie le fruit d'années d'efforts pour le chef-d'oeuvre merveilleux de Dieu de tout fatigué
de la paume des mains, les gens qui méritent mon respect et mon amour*

** Ma chère mère **

*Mem la rose la plus belle perd un jour sa beauté mais "Ma Mère " fidèle dure toute
éternité*

** Cher Père **

*A la chose la plus plus précieuse que j'ai, à ceux qui m'enseignent les principes de la
science et de la connaissance*

** Mes frères et soeurs **

*A leurs yeux, ma joie et leur joie dans ma vie, Nous remercions particulièrement mes
frères " Mohammed ", " Abd Razzaq "*

Nous mes soeurs, "Marim, Hanan, Hadd, Marwa, Somaya, Hana ".

Ames chers amis " Sondos "

**** Dédicace ****

"dédie le fruit d'années d'efforts Pour le chef-d'oeuvre merveilleux de Dieu de tout fatigué de la paume des mains, les gens qui méritent mon respect et mon amour"

** Ma chère mère **

"À la chose la plus précieuse que j'ai, à ceux qui m'enseignent les principes de la science et de la connaissance"

** Cher Père **

"A toi mon mari pour ton réconfort, ta compréhension, ton soutien moral surtout dans les moments difficiles durant cette thèse"

** Mon Mari **

" A leurs yeux, ma joie et leur joie dans ma vie "

** Mes frères et soeurs **

Remerciements

Avant tout, nous remercions DIEU le tout puissant de nous avoir donné la volonté d'accomplir et d'achever ce mémoire.

Je tiens à remercier **Dr. Miloudi Madjda**, d'avoir accepté de rapporter mon mémoire, se fut un grand honneur pour moi. Et pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de juger notre travail.

Table des matières

Notations	vii
Introduction générale	1
1 <i>Préliminaires mathématiques</i>	3
1.1 Espace de Banach	3
1.2 Espace de Hilbert	4
1.3 Espace L^p	5
1.4 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	6
1.5 Formulation variationnelle :	8
1.6 Théorème de Riesz	9
1.6.1 Formulation variationnelle	9
1.7 Formule de Green	10
1.8 Théorème de Lax-Milgram	12
1.9 Théorème de Projection	13
1.10 Théorème de Stampacchia	13
2 <i>Généralité sur les inéquations variationnelles elliptiques</i>	14
2.1 Inéquations variationnelles elliptiques	14
2.1.1 Notations et hypothèses	14
2.1.2 IVE du premier genre	15
2.1.3 IVE du second genre	16

2.2	Inéquations variationnelles linéaire	16
2.2.1	Inéquations variationnelles de première espace	16
2.2.2	Inéquations variationnelles de deuxième espace	18
2.3	Inéquations variationnelles non linéaire	20
2.3.1	Inéquations variationnelles de première espace	20
2.3.2	Inéquations variationnelles de deuxième espace	22
2.4	Inéquations quasi-variationnelles	25
3	<i>Problème d'obstacle</i>	27
3.1	Problème variationnelles	27
3.2	Régularité de la solution	28
3.3	Exemple sur le problème de l'obstacle	30
3.3.1	Interprétation du problème à frontière libre	31
3.4	Problème quasi-variationnelles	32
3.5	Problème de contraintes	34
3.5.1	Description du problème	34
3.6	Le problème de Signorini	35
3.6.1	Contact sans frottement	37
3.6.2	Contact avec frottement (la loi de Tresca)	38
	Bibliographie	40

Notations

\mathbb{R}	: l'ensemble des nombres réels.
\mathbb{N}	: l'ensemble des nombres naturels.
\mathbb{C}	: l'ensemble des nombres complexes.
H	: l'espaces hilbert
$H^1(\Omega)$: l'espaces de sobolev d'ordre 1.
$H^2(\Omega)$: l'espaces de sobolev d'ordre 2.
L^p	
L^2	: l'espace des fonctions carré integrable pour la mesure de Lebiegue.
L^∞	: l'espace des fonctions indefinement integrable pour la mesure de Lebiegue dx.
Ω	: est un ouvert de R^2 de frontière polygonale notée $\partial\Omega$
$W^{m,p}(\Omega)$: l'espace de Sobolev.
$H_0^1(\Omega)$: l'espace de Soblev.
$H^m(\Omega)$: l'espace de Soblev $W^{m,2}(\Omega)$.
\longrightarrow	: convergence forte
K	: est un ensemble non vide convexe fermé de V .
$ \cdot $: valeur absolue ou modul.
$\ \cdot\ $..
(\cdot, \cdot)	: le produit de dual entre V et V' .

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans les cinquantes dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil pertinent dans l'étude des problèmes non linéaires en physique et en mécanique.

La théorie des inéquations variationnelles a été faite à partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par A. Signorini [3] et G. Fichera [10]. La théorie mathématique a été obtenue par G. Stampacchia [11], J.L. Lions et G. Stampacchia [18] et puis développé par H. Brézi [16], G. Stampacchia [13], J.L. Lions [19], U. Mosco [29], D. Kinderlehrer et G. Stampacchia [6]. Pour l'approximation des inéquations variationnelles on rappelle, les contributions de U. Mosco [28], R. Glowinski [25], J.L. Lions et R. Trémoières ou R. Glowinsky [23].

La théorie des inéquations variationnelles a été utilisée dans plusieurs domaines tels que la mécanique, la physique, l'optimisation, le contrôle optimal, la programmation linéaire, les mathématiques financières, etc... ; Aujourd'hui elle est considérée comme un outil indispensable dans plusieurs secteurs de mathématiques appliquées.

Depuis longtemps les chercheurs dans leurs étude des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles, des équations variationnelles en générale et en particulier des inéquations variationnelles, se sont intéressés aux différentes techniques d'approximations, à savoir les méthodes des différences finis, des éléments finis, des volumes finies et méthodes spectrales.

Le problème de l'obstacle est un exemple classique de motivation de l'étude mathématique des inéquations variationnelles et des problèmes à frontière libre. Il consiste à trouver la position d'équilibre d'une membrane élastique dont les bords sont fixes et devant passer

au-dessus d'un obstacle donné. Il est profondément lié à l'étude des surfaces minimales et de la capacité d'un ensemble en *théorie du potentiel*. Les applications s'étendent à l'étude de la filtration d'un fluide en milieu poreux, au chauffage contraint, l'élastoplasticité, le contrôle optimal et les mathématiques financières.

Ce présent mémoire présente l'étude des inéquation variationnelles et leurs application au problème d'obstacle.

Ce mémoire est divisé en 3 chapitres.

On début notre travail par un chapitre reprend, de façon générale, les définitions, et les résultats fondamentaux qui seront essentiels pour comprendre les chapitres suivantes. Le deuxième chapitre est consacré a l'étude des inéquations variationnelles (existence et unicité).

La section 2.1 contient les inéquations variationnelles stationnaires (elliptique) de première et deuxième espèce dans le cas des opérateurs linéaires et continus dans des espaces de Hilbert ou des opérateurs non linéaire.

La section 2.2 étudie les inéquations quasi-variationnelles stationnaires, l'existence et l'unicité dans le cas des opérateurs fortement monotones et hemicontinus. Au dernier chapitre, on passe à l'étude de problèmes d'obstacle et on présente quelques problèmes classique.

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Ce chapitre est introductif est consacré, de façon générale, les définitions, et les résultats fondamentaux qui seront essentiels pour prendre les chapitres suivants.

1.1 Espace de Banach

Dans tout le chapitre \mathbb{K} représente le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 1.1.1 (*Norme*) Soit E un espace vectoriel. Une norme sur E est une application de E dans \mathbb{R}_+ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tous x, y dans E et tout α dans \mathbb{K} :

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité),
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire),

Définition 1.1.2 (*Espace vectoriel normé*) Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$, noté $(E, \|\cdot\|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.3 Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.

Définition 1.1.4 (*L'adhérence*) Soit A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est un point adhérent de A si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

On appelle l'adhérence de A dans E et on note \bar{A} l'ensemble des points adhérents de A .

Proposition 1.1.1 *Soit A une partie de E , alors A est fermé dans E si et seulement si $\bar{A} = A$*

Définition 1.1.5 (L'intérieur) *Soit A une partie de E . On dit que $x \in E$ est un point intérieur de A si :*

$$\exists r > 0 B(x, r) \subset A$$

On appelle intérieur de A et on note par A° l'ensemble des points intérieurs de A . [27]

Définition 1.1.6 (Espace de Banach) *On appelle espace de Banach est tout espace vectoriel normé (e.v.n) et complet.*

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2.1 (Espace préhilbertien) *Soit E un espace vectoriel. Une application $(.,.) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée produit scalaire sur E si elle vérifie*

1.Symétrie :

$$(x, y) = (y, x), \quad \forall x, y \in E.$$

2.Bilinéarité :

$$(x + \lambda y, z) = (x, z) + \lambda(y, z), \forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.Définie positivité :

$$(x, x) > 0, \forall x \in E, x \neq 0,$$

(pour $x = 0$ on a automatiquement $(x, x) = 0$ par bilinéarité).

On dit que $(E, (.,.))$ est un espace préhilbertien. (Si E est de dimension finie , on dit aussi : espace euclidien).

On appelle espace préhilbertien réel un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) . [8]

Définition 1.2.2 (*Espace de Hilbert*) On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien dont la norme associée en fait un espace complet [9].

1.3 Espace L^p

soit Ω sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^N . Pour p donné avec $1 < p < +\infty$, on désigne par $L^p(\Omega)$, l'espace des (classes de) fonctions u mesurables sur Ω et telles que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1.1)$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme (1.1) est un espace de Banach (évidemment, (1.1) n'est pas une norme si $0 < p < 1$). De plus, il est séparable et réflexif, pour $1 < p < \infty$. Les éléments de $L^p(\Omega)$, comme classes d'équivalence de fonction mesurables, seront identifiées si elles sont égales presque partout dans Ω . Mais pour simplifier l'écriture, on note $u \in L^p(\Omega)$ pour tout u satisfaisant (1.1) et on fait la convention $u = 0$ dans $L^p(\Omega)$ si $u(x) = 0$ p.p. dans Ω .

Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondante à la norme (1.1) étant donné par :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

On va identifier l'espace $L^2(\Omega)$ à son dual (ce qui n'est pas vrai dans d'autres cas, pour $p \neq 2$).

Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions v mesurables et essentiellement bornées sur Ω i.e. il existe une constante C telle que $|u(x)| \leq C$ p.p. sur Ω . C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

1.4 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^1 , On a l'espace de Sobolev suivant :

$W^{m,p}(\Omega) = \{u, D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ pour } |\alpha| \leq m\}$ ou $D^\alpha u$ est la dérivée au sens des distributions pour tout $u \in L^p(\Omega)$ l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banaach lorsqu'on le munit de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p \in [1, \infty),$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

De façon évidente, on a $W^{m,p}(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$. La semi-norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p \in [1, \infty)$$

$$|u|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Dans le cas $p = 2$, on utilise la notation :

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Théorème 1.4.1 (*Théorème de traces dans $H^1(\Omega)$*) : Supposons que Ω est un ouvert de classe C^1 de frontière Γ . Alors, on peut définir de façon unique la trace $\gamma_0 u$ de $u \in H^1(\Omega)$ sur Γ de façon que $\gamma_0 u$ coïncide avec la définition usuelle

$$\gamma_0 u(x) = u(x), x \in \Gamma.$$

Si $u \in C^1(\Omega)$. De plus, l'application :

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma),$$

est linéaire, continue mais elle n'est pas surjective et l'application :

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

est linéaire, continue et surjective. [1]

Définition 1.4.1 (*Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$*) : Soit $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω . L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par :

Définition 1.4.2 (*Espace $H^m(\Omega)$*)

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que, } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, D^\alpha v \in L^2(\Omega)\},$$

où la dérivée partielle $D^\alpha v \in L^2(\Omega)$ est à prendre au sens faible.

Définition 1.4.3 (*La forme bilinéaire*) La forme bilinéaire $a(.,.)$ est dite -continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$a(u, v) \leq M \|u\|_X \|v\|_X \forall u, v \in X.$$

X - elliptique s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$a(v, v) \geq m \|v\|_X^2, \forall v \in X.$$

-Symétrique si :

$$a(u, v) = a(v, u), \forall u, v \in X.$$

Définition 1.4.4 (*Applications injectives*) : On dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est injective si elle vérifie la condition d'unicité des antécédents :

$$\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Définition 1.4.5 (*Applications surjectives*) : On dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si elle vérifie la condition d'existence des antécédents

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

Définition 1.4.6 (*Applications bijectives*) On dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si elle est injective et surjective, autrement dit si elle vérifie la condition d'existence et d'unicité des antécédents.

Définition 1.4.7 Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue supérieurement sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes :

— $\forall a \in \mathbb{R}, u \in V, J(u) \geq a$ est fermé

$$— \forall a \in \mathbb{V}, \limsup_{u \rightarrow \bar{u}} j(u) \leq j(\bar{u})$$

Définition 1.4.8 Une fonction J de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes :

$$— \forall a \in \mathbb{R}, u \in V, J(u) \leq a \text{ est fermé}$$

$$— \forall a \in \mathbb{V}, \limsup_{u \rightarrow \bar{u}} j(u) \geq j(\bar{u})$$

Définition 1.4.9 V est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans V' (en général non linéaire).

i) A est monotone si :

$$\forall u, v \in V, (A(u) - A(v), u - v) \geq 0,$$

ii) A est strictement monotone si de plus $(A(u) - A(v), u - v) = 0$ implique $u = v$.

iii) A est hémicontinue si pour tous $u, v \in V$, l'application $t \rightarrow (A(u + tv), v)$ est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1.5 Formulation variationnelle :

Le théorème de représentation de Riesz permet de représenter toute forme linéaire continue sur V comme le produit scalaire avec un vecteur de V . Le théorème de représentation de Riesz est un cas particulier du théorème de Lax-Milgram (d'ailleurs, on a utilisé le théorème de Riesz pour sa démonstration).

Définition 1.5.1 Une forme linéaire continue sur V est une application linéaire $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\exists C > 0, \forall v \in V, |l(v)| \leq C \|v\|_V.$$

On note V' le dual de V c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur V . Pour tout $l \in V'$ on note

$$\|l\|_{V'} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{l(v)}{\|v\|_V}. [15]$$

1.6 Théorème de Riesz

Théorème 1.6.1 *Soit l une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert V , alors il existe un unique vecteur $u \in V$ tel que*

$$\forall v \in V, (u, v)_V = l(v).$$

D'autre part : $\|l\|_{V'} = \|u\|_V$.

Preuve.

Si l est la forme linéaire nulle $u = 0$ convient. Sinon, $H = \text{Ker } l$ est un hyperplan fermé de V . Ainsi, H^\perp est une droite vectorielle supplémentaire de H dans V . Soit $b \in H^\perp$ non nul, on pose $u = \frac{l(b)}{\|b\|}$. Les deux formes linéaires l et $(u, \cdot)_V$ coïncident sur H (elles y sont nulles) et sur H^\perp . Elles coïncident donc sur tout V . Enfin, si $v \in V$, on a

$\|l(v)\| = |(u, v)_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de sorte que $\|l\|_V \leq \|u\|_V$. Mais $l(u) = \|u\|_V^2$ montre que $\|l\|_V = \|u\|_V$. [22] ■

1.6.1 Formulation variationnelle

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Nous supposons que l'ouvert Ω est borné et régulier, et que le second membre $\bar{\Omega} f$ de (1.2) est continu sur $\bar{\Omega}$. Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivante :

Proposition 1.6.1 *Soit u une fonction de $\bar{\Omega}$. Soit X l'espace défini par*

$$X = \{\phi \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Alors u est une solution du problème aux limites (1.2) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx. \quad (1.3)$$

pour toute fonction $v \in X$ L'égalité (1.3) est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites.

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert est borné et régulier, et que le second membre f de (1.2) est continu sur Ω . Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivante.

Proposition 1.6.2 Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$. Soit X l'espace défini par

$$X = \{\phi \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

. Alors u est une solution du problème aux limites (1.2) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité : L'égalité (1.3) est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites (1.2).

Remarque 1.6.1 : Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (1.3) est qu'elle a un sens si la solution u est seulement une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$, contrairement à la formulation "classique" (1.2) qui requiert que u appartienne à $C^2(\overline{\Omega})$. On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre (1.3) que (1.2) puis qu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution. Dans la formulation variationnelle (1.3), la fonction v est appelée fonction test. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (1.2). En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de "principe des travaux virtuels". En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité. Lorsqu'on prend $v = u$ dans (1.3), on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine (le terme de gauche de (1.3)) et une énergie potentielle associée à f (le terme de droite de (1.3)).[2]

1.7 Formule de Green

Théorème 1.7.1 (Formule de Green) Soit Ω un ouvert régulier de classe $C^1(\Omega)$. Soit w une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) n_i(x) ds,$$

où n_i est la i -ème composante de la normale extérieure unité de Ω .

Remarque 1.7.1 : Dire qu'une fonction régulière w a son support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$ veut dire qu'elle s'annule à l'infini si le fermé n'est pas borné. On dit aussi que la fonction w a un support compact dans $\bar{\Omega}$ (attention : cela n'implique pas que w s'annule sur le bord $\partial\Omega$). En particulier, l'hypothèse du Théorème à propos du support borné de la fonction w dans $\bar{\Omega}$ est inutile si l'ouvert $\bar{\Omega}$ est borné. Si Ω n'est pas borné, cette hypothèse assure que les intégrales dans sont finies. [27]

Remarque 1.7.2 a de nombreux corollaires qui sont tous de conséquences immédiates de la formule de Green . Le lecteur qui voudra économiser sa mémoire ne retiendra donc que la formule de Green Toutefois, nous ne saurions trop conseiller d'apprendre (par cœur) la formule de Green du Corollaire ci-dessous.

Corollaire 1.7.1 (Formule d'intégration par parties) Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u et v deux fonctions de C^1 à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds.$$

Preuve.

Il suffit de prendre $w = uv$ dans le Théorème(1.7.1) ■

Corollaire 1.7.2 Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ deux à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) ds,$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq N}$ est le vecteur gradient de u et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$.

Preuve.

On applique le Corollaire à v et $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et on somme en i on obtient la résultat.[5] ■

Lemme 1.7.1 *Si $\Omega \in C^{1,1}$ Alors il existe des applications uniquement déterminé π_n de E en $H_T^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tel que*

$$\langle \pi(\tau), \gamma(v) \rangle_\Gamma = \langle \pi_n(\tau), v_n \rangle_{n,\Gamma} + \langle \pi_T(\tau), v_T \rangle_{T,\Gamma}$$

Pour tout $\tau \in E$ et $v \in H^1(\Omega)$, et $\pi_n(\tau) = \tau_n \cdot n$ et $\pi_T(\tau) = \tau n - \tau_n n$, pour tout $\tau \in C^1(\bar{\Omega})$ où $\tau_n \equiv \pi_n(\tau)$ Ci-après désigner simplement $\tau_T \equiv \pi_T(\tau)$ s'il n'y a pas de confusion. [4]

1.8 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.8.1 *Soit V un espace de Hilbert réel, $L(\Delta)$ une forme linéaire continue sur V , $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V . Alors la formulation variationnelle :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \forall v \in V \end{array} \right. \quad (1.4)$$

admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L .

Proposition 1.8.1 *On se place sous les hypothèses du théorème(1.8.1) de Lax-Milgram.*

On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique $a(w, v) = a(v, w)$ pour tout $v, w \in V$ Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle (1.4). Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle.[2]

1.9 Théorème de Projection

Théorème 1.9.1 (*Projection sur un convexe fermé*). Soit $K \subset H$ (espace de Hilbert) est un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in K$ unique tel que :

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$(u - f, u - v) \leq 0, \forall v \in K$$

On note $u = P_K f =$ Projection de f sur K .

1.10 Théorème de Stampacchia

Théorème 1.10.1 Soit H un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire noté (\cdot, \cdot) . Soit K une partie convexe fermée non vide de H .

Si $a(u, v)$ une forme bilinéaire qui soit

- Continue sur $H \times H : \exists c > 0 \forall u, v \in H, \|a(u, v)\| \leq c\|u\|\|v\|$.
- Coercive sur $H : \exists \alpha > 0 \forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$.

Si $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur H

Sous ces conditions, il existe un unique u de K tel que

$$\forall v \in K a(u, v - u) \geq f(v - u)$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de K qui minimise la fonctionnelle $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$ pour tout v de K , en particulier :

$$\exists! u \in K J(u) = \min_{v \in K} J(v)$$

Preuve. [14] ■

Chapitre 2

Généralité sur les inéquations variationnelles elliptiques

Dans cette section on établit quelques résultats de base d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de première et deuxième espèce. Dans le cas des opérateurs linéaires et non linéaires définies sur des ensembles convexes dans des espaces de Hilbert et de Banach réflexif respectivement.

2.1 Inéquations variationnelles elliptiques

2.1.1 Notations et hypothèses

- Soient : Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N à frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière.
- V un espace de Hilbert réel avec un produit scalaire (\cdot, \cdot) et une norme associée $\|\cdot\|$.
 - V' le dual de V .
 - $a(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et V -elliptique (coercive) sur $V \times V$,
i.e

$$\exists M > 0 \text{ tel que } a(u, v) \leq M \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V,$$

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V.$$

- $L : V \longrightarrow R$ une fonctionnelle linéaire continue.

– K un sous ensemble convexe fermé non vide de V .

– $j(\cdot) : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonctionnelle convexe semi continue inférieurement (s.c.i) et propre i.e (vérifiant $j(v) > -\infty, \forall v \in V, j \neq +\infty$).

Soient $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue de $V \times V$ dans \mathbb{R} , V' le dual de V et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre V et V' , et $f \in V'$, et $K \subset V$ Nous considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K, \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Le problème (2.1) est appelé inéquation variationnelle. On définit aussi un problème plus général (2.2) qui est équivalent au problème (2.1) .

Soit V un espace de Banach réflexif, et si la forme bilinéaire $a(u, v)$ est continue et linéaire en v , alors $a(u, v) = (Au, v)$, où l'opérateur A est non linéaire. Il s'agit du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ (Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

On dit que (2.2) est plus général car A n'est pas obligatoirement symétrique. En plus si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, on définit une troisième formulation à ce problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que ,} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où $J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u)$.

Notre but est de rappeler les résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème (2.1). Pour cela on a besoin de quelques définitions.

2.1.2 IVE du premier genre

Trouver $u \in K$ solution du problème

$$a(u; v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \quad (2.4)$$

2.1.3 IVE du second genre

Trouver $u \in V$ solution du problème

$$a(u; v - u) + j(v) - j(u) \geq f(v - u) \quad \forall v \in V. \quad (2.5)$$

2.2 Inéquations variationnelles linéaire

2.2.1 Inéquations variationnelles de première espace

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Théorème 2.2.1 (*Stampacchia*) *Sous les hypothèses précédentes, le problème (2.6) a une unique solution $u \in K$.*

Preuve. 1. Unicité : soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.6), alors nous avons

$$a(u_1, v - u_1) \geq L(v - u_1) \quad \forall v \in K, \forall u_1 \in K \quad (2.7)$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq L(v - u_2) \quad \forall v \in K, \forall u_2 \in K \quad (2.8)$$

posons $v = u_2$ dans (2.7) et $v = u_1$ dans (2.8) et en additionnant les deux inéquations, nous obtenons

$$a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

en utilisant la V-ellipticité de $a(., .)$,

$$\alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

d'où $u_1 = u_2$

2. Existence : L'idée est transformer le problème (3.18) à un problème de point fixe. Par

le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert, il existe un opérateur différentiel $A \in L(V, V)$ et un élément $f \in V'$ tels que :

$$\begin{cases} a(u, v) = (Au, v), \quad \forall u, v \in V \\ L(v) = (f, v), \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (2.9)$$

ainsi, le problème (2.6) est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ (Au - f, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (2.10)$$

Soit $t > 0$, alors

$$(-t(Au - f), v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K,$$

ce qui implique que :

$$(u - t(Au - f) - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K.$$

Soit $P_K : V \rightarrow K$ la projection orthogonale de V sur K . Alors le problème (2.6) est équivalent à un problème de point fixe :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ u = P_K(u - t(Au - f)), \text{ pour } t > 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Maintenant montrons que P_K est une contraction sur V . Soit $v, w \in V$, alors Nous choisissons $0 < t < \frac{2\alpha}{M^2}$, alors P_K est une contraction, et par le théorème du point fixe de Banach, il existe donc une solution $u \in K$.

$$\begin{aligned} & \|P_K(v - t(Av - f)) - P_K(w - t(Aw - f))\|^2 \\ & \leq \|(v - t(Av - f)) - (w - t(Aw - f))\|^2 \\ & = \|(v - w) - tA(v - w)\|^2 \\ & = \|v - w\|^2 - 2t\alpha(v - w, v - w) + t^2\|A(v - w)\|^2 \leq (1 - 2t\alpha + t^2M^2)\|v - w\|^2. \end{aligned}$$

Nous choisissons $0 < t < \frac{2\alpha}{M^2}$, alors P_K est une contraction, et par le théorème du point fixe de Banach, il existe donc une solution $u \in K$. ■

2.2.2 Inéquations variationnelles de deuxième espace

Définition 2.2.1 *On appelle inéquation variationnelle elliptique de 2^e espèce linéaire toute inéquation de la forme :*

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (m, v - u) \quad \forall v \in K$$

Proposition 2.2.1 *Soient V un espace de Hilbert, $K \neq \emptyset$, convexe fermé de V , $j : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre convexe et semi continue inférieurement, $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive, $m \in V$. Alors l'inéquation variationnelle*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K, \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (m, v - u) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.12)$$

admet une solution unique.

Preuve.

1 -L'unicité :

Supposons u_1 et u_2 solution de (2.6) alors

$$a(u_1, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geq (m, v - u_1) \quad \forall v \in K \quad (2.13)$$

$$a(u_2, v - u_2) + j(v) - j(u_2) \geq (m, v - u_2) \quad \forall v \in K \quad (2.14)$$

On pose $v = u_2$ puis $v = u_1$ respectivement dans (2.13) et (2.14) on trouve par sommation :

$$a(u_1, u_2 - u_1) + a(u_2, u_1 - u_2) \geq (m, u_2 - u_1) + (m, u_1 - u_2)$$

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

$\Rightarrow u_1 = u_2$ d'où l'unicité.

2 -L'existence :

On définit le problème auxiliaire pour u fixé dans K et $\rho > 0$

Trouver $w \in K$

$$(w, v - w) + \rho j(v) - \rho j(w) \geq -\rho(a(u, v - w) - (m, v - w)) + (u, v - w) \quad \forall v \in K \quad (2.15)$$

Le problème (2.15) admet une solution unique (d'après le théorème de Weierstrass) T_ρ :
 $u \mapsto w$, w solution du problème (2.15), on montre que T_ρ admet un point fixe unique.

Il suffit de montrer que T_ρ est strictement contractant c.à.d :

$$\| T_\rho(u_1) - T_\rho(u_2) \| \leq c \| u_1 - u_2 \| \quad \forall u_1, u_2 \in V, c < 1$$

$$\| w_1 - w_2 \| \leq c \| u_1 - u_2 \| \quad tqw_i = T_\rho(u_i), i = 1, 2$$

Alors :

$$(w_1, v - w_1) + \rho j(v) - \rho j(w_1) \geq \rho a(u_1, v - w_1) + \rho(m, v - w_1) + (u_1, v - w_1) \quad (2.16)$$

$$(w_2, v - w_2) + \rho j(v) - \rho j(w_2) \geq \rho a(u_2, v - w_2) + \rho(m, v - w_2) + (u_2 - v - w_2) \quad (2.17)$$

On prend $v = w_2$ et $v = w_1$ respectivement dans (2.16) et (2.17) on obtient

$$- \| w_1 - w_2 \|^2 \geq \rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) - (u_1 - u_2, w_1 - w_2)$$

$$\implies \| w_1 - w_2 \|^2 \leq -\rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2) + (u_1 - u_2, w_1 - w_2)$$

en utilise théorèm de représentation de Riez $a(u, v) = (Au, v)$

$$\implies \| w_1 - w_2 \|^2 \leq (-\rho A(u_1 - u_2) + (u_1 - u_2), w_1 - w_2)$$

$$\leq ((-\rho A + I)(u_1 - u_2), w_1 - w_2)$$

$$\leq \| -\rho A + I \| \cdot \| u_1 - u_2 \| \| w_1 - w_2 \|$$

$$\implies \| w_1 - w_2 \| \leq \| -\rho A + I \| \cdot \| u_1 - u_2 \|$$

Alors $\exists \rho > 0 tq \| I - \rho A \| < 1$

$$\| (I - \rho A)v \|^2 = (v - \rho Av, v - \rho Av) = (v, v) - 2\rho(Av, v) + \rho^2(Av, Av)$$

$$\leq \| v \|^2 - 2\rho(Av, v) + \rho^2 \| Av \|^2$$

On utilisant la coercivité $(Av, v) \geq \alpha \| v \|^2 \implies -2\rho(Av, v) \leq -2\rho\alpha \| v \|^2$

$$\text{alors } \|(I - \rho A)v\|^2 \leq \| v \|^2 - 2\rho\alpha \| v \|^2 + \rho^2 \| A \|^2 \cdot \| v \|^2$$

$$\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho \| A \|^2) \| v \|^2$$

$$\text{si } \rho \in \left] 0, \frac{2\alpha}{\| A \|^2} \right] \implies 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \| A \|^2 < 1$$

$\implies \| I - \rho A \| < 1$ alors T_ρ est strictement contractante $\implies T_\rho$ admet un point fixe unique.

$T_\rho u = u = w$ d'où u vérifie le problème (2.12).[26] ■

2.3 Inéquations variationnelles non linéaire

"Cette section est consacrée à l'étude d'existence et d'unicité des solutions des inéquations variationnelles d'opérateurs non linéaires nommément les opérateurs monotones et hémicontinus" Soient $(V, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach réel réflexif avec son dual $(V', \|\cdot\|')$ et $K \subset V$ un ensemble non vide convexe et fermé. On considère $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe sémicontinue inférieurement propre et un opérateur $A : V \rightarrow V'$ monotone et hémicontinu, c'est-à-dire

$$\begin{cases} (Au - Av, u - v) \geq 0, \\ u, v \in V, \text{ l'application } t \in [0, 1] \rightarrow (A((1-t)u + tv), u - v), \end{cases} \quad (2.18)$$

est continue où (\cdot, \cdot) désigne le produit de dualité entre V' et V .

2.3.1 Inéquations variationnelles de première espace

Théorème 2.3.1

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ A(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.19)$$

Si A est strictement monotone alors la solution de l'inéquation variationnelle (2.18) est unique.

Preuve.

Soient $u_1, u_2 \in K$ deux solutions. Pour tous $v_1, v_2 \in K$,

$$\begin{aligned} (Au_1, v_1 - v_1) &\geq (f, v_1 - v_1) \\ (Au_2, v_2 - v_2) &\geq (f, v_2 - v_2) \end{aligned}$$

On prend $v_1 = u_2$ et $v_2 = u_1$, d'où

$$\begin{aligned} (Au_1, v_2 - v_1) &\geq (f, v_2 - v_1) \\ (Au_2, v_1 - v_2) &\geq (f, v_1 - v_2) \end{aligned}$$

par addition on obtient

$$(Au_1, v_2 - v_1) + (Au_2, v_1 - v_2) \geq (f, v_2 - v_1) + (f, v_1 - v_2)$$

$$(Au_1, v_2 - v_1) - (Au_2, v_1 - v_2) \geq$$

$$(Au_1 - Au_2, v_2 - v_1) \geq 0$$

$$-(eAu_1 - Au_2, v_2 - v_1) \geq 0$$

$$(Au_1 - Au_2, v_2 - v_1) \leq 0$$

Par conséquent, comme A est monotone,

$$(Au_1 - Au_2, v_2 - v_1) = 0$$

d'où $u_1 = u_2$ par stricte monotonie. ■

Théorème 2.3.2 *Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercive et soit K un convexe fermé non vide de V . Alors, pour tout $f \in V'$, l'inéquation variationnelle (2.18) admet au moins une solution.[17].*

Preuve.

Pour $R > 0$, on pose $K_R = \{v \in K, \|v\|_V \leq R\}$. C'est un convexe fermé borné de V non vide, si R est assez grand, il existe au moins une solution u_R de l'inéquation sur K_R . En particulier, on peut prendre R assez grand pour que $v_0 \in K_R$ et donc :

$$(Au_R, v_0 - u_R) \geq (f, v_0 - u_R),$$

soit

$$(Au_R, u_R - u_R) \leq (f, u_R - v_0) \leq \|f\|_{V'} (\|u_R\|_V + \|v_0\|_V).$$

Montrons que u_R reste bornée dans V indépendamment de R . Divisant la dernière inégalité par $\|u_R\|_V$ (que l'on suppose non nul, sinon il n'y a rien à montrer), il vient

$$\frac{(Au_R, u_R - v_0)}{\|u_R\|_V} \leq \|f\|_{V'} \left(1 + \frac{\|v_0\|_V}{\|u_R\|_V}\right)$$

Supposons qu'il existe une suite $R_n \rightarrow +\infty$ telle que $\|u_R\|_V \rightarrow +\infty$. Alors on a $\frac{\|v_0\|_V}{\|u_R\|_V} \rightarrow 0$ et l'inégalité ci-dessus contredit la coercivité. Il existe donc une constante C telle que $\|u_R\|_V \leq C$ pour tout R .

On prend maintenant $R = C + 1$. Montrons que u_R est alors solution de l'inéquation variationnelle (2.19). Pour tout $v \in K$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda v + (1 - \lambda)u_R$ appartient à K .

De plus,

$$\|\lambda v + (1 - \lambda)u_R\|_V \leq \lambda\|v\|_V + (1 - \lambda)\|u_R\|_V \leq \lambda\|v\|_V + C.$$

En particulier, si l'on prend $0 < \lambda \leq \frac{1}{\|v\|_V}$, on voit que $\lambda v + (1 - \lambda)u_R$ appartient à K_R .

Donc, par l'inéquation variationnelle sur K_R ,

$$(Au_R, \lambda v + (1 - \lambda)u_R - u_R) \geq (f, \lambda v + (1 - \lambda)u_R - u_R)$$

$$(Au_R - f, \lambda v + (1 - \lambda)u_R - u_R) \geq 0$$

$$(Au_R, \lambda v + u_R - \lambda u_R - u_R) = 0$$

$$(Au_R, \lambda(v - u_R)) \geq 0,$$

$$(Au_R, v - u_R) \geq 0,$$

d'où le résultat en divisant par λ ■

2.3.2 Inéquations variationnelles de deuxième espace

On va établir les conditions qui assurent l'existence des solutions de l'inéquation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ A(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.20)$$

pour $f \in V'$ donné. D'abord, procédant de la même façon comme dans la démonstration du lemme(1.7.1), on obtient :

Lemme 2.3.1 *Sous les hypothèses ci-dessus, un élément $u \in K$ satisfait l'inéquation (2.20) si et seulement si il satisfait l'inéquation*

$$(Av, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K \quad (2.21)$$

De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation (2.20) est un convexe fermé de V . Le résultat essentiel de cette section est le suivant théorème d'existence et d'unicité.

Théorème 2.3.3 *Dans les hypothèses ci-dessus, si une des trois conditions est satisfaite*

$$i) K \text{ est bornée.} \quad (2.22)$$

$$ii) 0 \in K, j(0) = 0 \text{ et } \lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \frac{(Av, v) + j(v)}{\|v\|} = +\infty, \quad (2.23)$$

$$iii) \exists v_0 \in K \text{ tel que } \lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \frac{(Av, v) + j(v) - j(v_0)}{\|v\|} = +\infty, \quad (2.24)$$

alors, pour tout $f \in V'$, il existe $u \in K$ solution de (2.20). De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (2.20) est un convexe fermé et borné de V (donc faiblement compact).

Si, de plus, j est strictement convexe ou A est strictement monotone, soit

$$(Au - Av, u - v) > 0 \quad \forall u, v \in V, u \neq v,$$

alors la solution de l'inéquation variationnelle (2.20) est unique.

Preuve.

Dans l'hypothèse (2.22), de lemme(2.3.1), l'ensemble des solutions de (2.20) s'écrit

$$X + \bigcap_{v \in K} \text{où } S(v) = \{u \in K; (Av, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)\}$$

Nous allons montrer que les hypothèses de coercivité (2.23) ou (2.24) implique $\|u_R\| < R$.

Supposons $\|u_R\| < R$.

Si la condition (2.23) est satisfaite, alors

$$(Au_R, u_R) + j(u_R) > (f, u_R),$$

ce qui est contraire à

$$(Au_R, u_R) + j(u_R) \leq (f, u_R),$$

obtenu de(2.25) pour $v = 0 \in K_R$. Si (2.24) a lieu, alors on à

$$(Au_R, u_R - v_0) + j(u_R) - j(v_0) > (f, u_R - v_0)$$

Mais, en supposant $R \geq \|v_0\|$ (on peut toujours trouver R assez grand), de (2.25) pour $v = v_0 \in K_R$ on obtient la contradiction

$$(Au_R, v_0 - u_R) + j(v_0) - j(u_R) > (f, v_0 - u_R). \quad (2.25)$$

En conséquence, $\|u_R\| < R$. Pour tout $w \in K$ il existe $\epsilon = \epsilon(w) \in (0, 1]$ tel que $v = u + \epsilon(w - u) \in K_R$. En effet, si $w \in K_R$ on prend $\epsilon = 1$ et si $w = 2K_R$ alors prenant $0 < \epsilon \leq \frac{R - \|u_R\|}{\|w\| - \|u_R\|} \in (0, 1)$ on obtient $v \in K_R$. Alors de (2.25) et la convexité de j ,

$$(Au_R - u_R + \epsilon(w - u_R) - u_R) + j(u_R + \epsilon(w - u_R)) - j(u_R) \geq (f, u_R + \epsilon(w - u_R) - u_R)$$

$$(Au_R, \epsilon(w - u_R)) + j(\epsilon w + (1 - \epsilon)u_R) - j(u_R) \geq (f, \epsilon(w - u_R)) \forall w \in K_R$$

$$(Au_R, \epsilon(w - u_R)) + \epsilon j(w) + (1 - \epsilon)j(u_R) - j(u_R) \geq (f, \epsilon(w - u_R)) \forall w \in K$$

$$\epsilon(Au_R, w - u_R) + \epsilon j(w) - \epsilon j(u_R) \geq \epsilon(f, w - u_R) \forall w \in K_R$$

$$(Au_R, w - u_R) + j(w) - j(u_R) \geq (f, w - u_R) \forall w \in K$$

soit u_R est solution de (2.20). L'ensemble des solutions V est convexe et fermé. Montrons qu'il est borné. Si non, pour tout $R > 0$, il existe $u_R \in V$ tel que $\|u_R\| > R$. Mais alors, pour R assez grand, les relations de coercivité (2.22), (2.23) et l'inéquation (2.20) donnent, comme ci-dessus, une contradiction. La première partie de la démonstration est achevée. Enfin, pour montrer l'unicité de la solution dans des cas particuliers, supposons que : l'inéquation (2.20) a deux solutions $u_1, u_2 \in K$

$$(Au_1, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geq (f, v - u_1)$$

$$(Au_2, v - u_2) + j(v) - j(u_2) \geq (f, v - u_2)$$

$$\text{Prenant } v = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

$$\frac{1}{2}(Au_1, u_2 - u_1) + j\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) - j(u_1) \geq (f, v - u_1)$$

$$\frac{1}{2}(Au_2, u_1 - u_2) + j\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) - j(u_2) \geq (f, v - u_2)$$

par addition

$$\frac{1}{2}(Au_1 - Au_2, u_2 - u_1) + 2j\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) - j(u_1) - j(u_2) \geq 0$$

donc

$$2j\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) - j(u_1) - j(u_2) \geq \frac{1}{2}(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \geq 0$$

$$0 \leq \frac{1}{2}(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) - 2j\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) + j(u_1) + j(u_2) \geq 0$$

Il en résulte que $u_1 = u_2$ si A est strictement monotone ou j est strictement convexe. [4]

■

2.4 Inéquations quasi-variationnelles

Pour les inéquations variationnelles étudiées dans cette sous-section nous considérons que la fonction j dépend de solution elle-même. Par conséquent, étant donné une sous-section $K \subset X$, un opérateur $A : K \rightarrow X$, une fonction $j : K * K \rightarrow \mathbb{R}$ et un élément $f \in X$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in K, (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K \end{array} \right. \quad (2.26)$$

$$K \text{ est un sous-ensemble convexe non vide de } X \quad (2.27)$$

$A : K \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Il existe une constante } m > 0 \text{ tel que} \\ (Au - Av, u - v)_X \geq m |u - v|^2 \quad \forall u, v \in X. \\ b) \text{ Il existe une constante } M > 0 \text{ tel que} \\ |Au - Av, u - v| \leq M |u - v|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Une inéquation de la (2.26) est appelée inéquation quasi-variationnelles elliptique. Dans l'étude de (2.26), en plus de (2.27) et de (2.28), nous considérons l'hypothèse suivante sur la fonction j

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Pour tout } \eta \in K, j(\eta, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et s.c.i.} \\ b) \text{ Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \leq \alpha | \eta_1 - \eta_2 |_X | v_1 - v_2 |_X \\ \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in K. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (2.26)

Théorème 2.4.1 *soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.29) sont satisfaites. De plus, supposons que $m > \alpha$ où $m > 0$ Alors, pour tout $f \in X$ l'inéquation quasi-variationnelles (2.26) admet une solution unique. [?]*

Chapitre 3

Problème d'obstacle

Dans ce chapitre, on étudie les problèmes de type de l'obstacle sous forme des inéquations variationnelles, on prend comme exemples : problèmes de contraintes et le problème de Signorini.

Définition 3.0.1 $K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \psi \text{ p.p dans } \Omega\}$. Alors le problème de l'obstacle est un cas particulier du problème (2.1), défini par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que,} \\ a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (3.1)$$

L'interprétation physique de ce problème est comme suit : Soit une membrane élastique définie par dans le plan x_1, x_2 , cette membrane est fixée le long de la frontière Γ . S'il n'y a pas d'obstacle, de la théorie d'élasticité, le déplacement vertical u obtenu en appliquant.

3.1 Problème variationnelles

Définition 3.1.1 Le problème considéré est appelé inéquation variationnelle de première espèce.

Théorème 3.1.1 [20] D'après le théorème de Stampacchia (voir chapitre 1) il existe un unique u de K tel que :

$$\forall v \in K a(u, v - u) \geq (f, v - u).$$

3.2 Régularité de la solution

Théorème 3.2.1 *Soit Ω un borné de \mathbb{R}^N de frontière suffisamment régulière. Si avec $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ et $p \in W^{2,p}(\Omega)$. Alors la solution du problème de l'obstacle (3.1) est dans $W^{2,p}(\Omega)$. [24]*

preuve. [20] ■

Remarque 3.2.1 *On sait que $W^{2,p}(\Omega) \subset C_1(\overline{\Omega})$ si $p > 2$, donc si $f \in L^p(\Omega)$ et $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$, la solution du problème (3.1) est dans $C_1(\overline{\Omega})$, pour $p > 2$. Nous donnons un autre résultat de régularité dans le cas où $f \in L^2(\Omega)$ et $\psi \equiv 0$ sur Ω , alors $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.*

Théorème 3.2.2 *Si Γ est assez régulière, si $\psi \equiv 0$, et si $L(v) = \int_{\Omega} f v dx$ avec $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution u du problème (3.1) satisfait :*

$$u \in K \cap H^2(\Omega), \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 3.2.2 *Si $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, Alors la norme $\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$ est équivalente à la norme $H^2(\Omega)$, i.e $\|v\|_{H^2(\Omega)}$.*

preuve. (Démontrons par pénalisation)

D'après le théorème(3.3.1), le problème (3.1) admet une unique solution $u \in K$. Soit $\varepsilon > 0$, considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u_{\varepsilon} + u_{\varepsilon} = u \text{ dans } \Omega, \\ u_{\varepsilon}|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Le problème (3.2) a une seule solution $u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$, et par la régularité de Γ nous avons $u_{\varepsilon} \in H^2(\Omega)$. Comme $u \geq 0$ p.p dans Ω , par le principe du maximum appliqué aux opérateurs différentiels elliptiques du seconde ordre (voir[20]), nous avons $u_{\Omega} \geq 0$. Donc

$$u_{\varepsilon} \in K, u_{\varepsilon} \in K \cap H^2(\Omega).$$

De(3.1), on a :

$$a(u, u_\varepsilon - u) \geq L(u_\varepsilon - u) = \int_{\Omega} f(u_\varepsilon - u)dx \quad u_\varepsilon \in K, u \in K.$$

La V-ellipticité de $a(.,.)$ implique :

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) = a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) + a(u, u_\varepsilon - u) \geq a(u, u_\varepsilon - u),$$

ce qui donne :

$$a(u, u_\varepsilon - u) \geq \int_{\Omega} f(u_\varepsilon - u)dx, \quad (3.3)$$

De (3.2) et (3.3), nous obtenons :

$$a(u, u_\varepsilon - u) = \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \nabla (u_\varepsilon - u)dx = \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \nabla (\varepsilon \nabla u_\varepsilon)dx,$$

et :

$$\int_{\Omega} f(u_\varepsilon - u)dx = \int_{\Omega} f(\varepsilon \nabla u_\varepsilon)dx,$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \nabla (\Delta u_\varepsilon)dx \geq \varepsilon \int_{\Omega} f \Delta u_\varepsilon dx,$$

Soit aussi :

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \nabla (\Delta u_\varepsilon)dx \geq \int_{\Omega} f \Delta u_\varepsilon dx.$$

En utilisant la formule de Green,nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \nabla (\Delta u_\varepsilon) &= -\varepsilon \int_{\Omega} f |\Delta u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Gamma} \nabla u_\varepsilon \Delta u_\varepsilon \eta d\sigma \\ &= -\varepsilon \int_{\Omega} f |\Delta u_\varepsilon|^2 dx \quad (\text{Car } \varepsilon \Delta u_\varepsilon = u_\varepsilon - u = 0 \text{ sur } \Gamma) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} f |\Delta u_\varepsilon|^2 dx \leq - \int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon dx.$$

Par inégalité de Schwarz dans $L_2(\Omega)$, nous obtenons :

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.4)$$

De (3.2), (3.4), on a :

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc u_ε converge fortement vers u dans $L^2(\Omega)$. Appliquons la remarque (3.2.2) à (3.4), nous obtenons :

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.5)$$

La suite $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $H^2(\Omega)$, donc il existe une sous-suite notée encore $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ qui converge faiblement vers u dans $H^2(\Omega)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u \text{ faiblement dans } H^2(\Omega). \quad (3.6)$$

Donc $u \in H^2(\Omega)$. De plus, u_ε converge fortement vers u dans $H^s(\Omega)$, pour $s < 2$. et on a

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} - \|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq | \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} - \|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} | \\ &\leq \|\Delta u_\Omega - \Delta u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u_\Omega - u\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

■

3.3 Exemple sur le problème de l'obstacle

Une force verticale F est donné par la solution du problème de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u|_\Gamma = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Où $f = F/t$, t est la tension de la membrane. S'il y'a un obstacle, on a un problème de frontière libre, et le déplacement u satisfait l'inéquation variationnelle (3.1) avec ψ étant la hauteur de l'obstacle.

Théorème 3.3.1 *Le problème (3.7) a une unique solution.*

Preuve. En effet, nous appliquons le théorème(2.2.1) du chapitre II. On prouve que $a(.,.)$ est continue V -elliptique, K est un ensemble convexe fermé non vide, et $L(.)$ est continue. 1. Continuité de $L(.)$

$$|L(v)| = \int_\Omega f v \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

2. Continuité et V-ellipticité de $a(.,.)$ sont évidente. Par inégalité de Poincaré on a :

$$\| v \|_{H_0^1} \simeq \| \nabla v \|_{L^2}$$

3. Convexité de K est trivial.

4. Montrons que K est non vide. On a :

$$\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega) \text{ avec } \psi \leq 0 \text{ sur } \Gamma.$$

On sait que :

$$\psi = \psi^+ + \psi^- \text{ ou } \psi^+ = \max(\psi, 0) \text{ et } \psi = \min(\psi, 0),$$

ψ^+ et ψ^- sont 2 fonctions positives, alors $\psi^+ \in H^1(\Omega)$. Comme $\psi_\Gamma \leq 0$, alors par définition $\psi_\Gamma = 0$ Cela implique que $\psi^+ \in H_0^1(\Omega)$ et comme :

$$\psi^+ = \max(\psi, 0) \geq \psi,$$

donc $\psi^+ \in K$. Ainsi K est non vide.

5. Montrons K est fermé. Soit $v_n \rightarrow v$ fortement dans H^1 , avec $v_n \in K$ et $v \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi $v_n \rightarrow v$ fortement dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent on peut extraire une sous suite fnig telle que $v_n \rightarrow v$ p.p sur Ω (convergence simple). Comme $v_n \geq \psi$ p.p sur Ω cela implique que

$$v \geq \psi \text{ p.p sur } \Omega,$$

donc $v \in K$. En appliquant le théorème (2.2.1) du chapitre I, le problème (2.1) possède une seule solution. ■

3.3.1 Interprétation du problème à frontière libre

De la solution u de (3.1), nous définissons

$$\Omega^+ = \{x \mid x \in \Omega, u(x) > \psi(x)\},$$

$$\Omega^0 = \{x \mid x \in \Omega, u(x) = \psi(x)\},$$

$$\gamma = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0; u^+ = u|_{\Omega^+}; u^0 = u|_{\Omega^0}.$$

Classiquement le problème (3.1) est formulé comme suit :

Trouver γ (la frontière libre) et u tel que :

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega^+. \quad (3.8)$$

$$u = \psi \text{ sur } \Omega^0. \quad (3.9)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (3.10)$$

$$u|_{\gamma}^+ = u|_{\gamma}^0. \quad (3.11)$$

L'interprétation physique de ces relations est la suivante : (3.8) indique que sur Ω^+ la membrane est strictement audessus de l'obstacle ; (3.9) indique que la membrane touche l'obstacle sur la partie Ω^0 ; (3.11) est une relation de transmission sur la frontière libre. Actuellement (3.8)-(3.11) sont insuffisantes pour caractériser u , ainsi il existe une infinité de solutions du problème (3.8)-(3.11). Par conséquent il est nécessaire d'ajouter une autre propriété de transmission : pour l'instant on suppose $\psi \in H^2(\Omega)$.

3.4 Problème quasi-variationnelles

Soient $(V, \| \cdot \|)$ un espace de Banach réel réflexif et $(V', \| \cdot \|)$ son dual, et K un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de V .

On considère un opérateur $A : V \longrightarrow V'$ et une fonction $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pour $m \in V'$ donné nous considérons l'inéquation quasi-variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in Q(u) \\ (Au, v - u) + j(v) - j(u) \geq (m, v - u) \quad \forall v \in Q(u). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Hypothèses :

1. (H_A) L'application $A : V \longrightarrow V'$ est borné tel que : (i) l'application $A : V \longrightarrow V'$ est monotone et continue.

2. (H_j) La fonction $j : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est propre, convexe et semi-continue inférieurement avec $K \in \text{int}(\text{dom}(j))$.

3. (H_Q) L'application de multivoque $Q : K \longrightarrow 2^K$, pour tout $u \in K$, l'ensemble $Q(u) \subseteq K$ est non vide, convexe et fermé et tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \forall \text{ suites } x_n \in K \text{ avec } x_n \longrightarrow x \text{ et, pour tout } y \in Q(x) \text{ il existe une suite } y_n \subset K \text{ tel que} \\ y_n \in Q(x_n) \text{ et } y_n \longrightarrow y \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \\ (ii) \forall \text{ suites } x_n \text{ et } y_n \text{ dans } K \text{ avec } y_n \in Q(x_n), \text{ si } x_n \longrightarrow x \text{ et } y_n \longrightarrow y \text{ alors } y \in Q(x). \end{array} \right. \quad (3.13)$$

4. (H_0) Il existe un ensemble bornée $K_0 \subset V$ avec $Q(u) \cap K_0 \neq \emptyset, \forall u \in K$, de plus, il existe une fonction $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $h(t) \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$ tel que :

$$(Aw, w - v_0) + j(u) - j(v_0) \geq h(\|w\|_V) \|w\|_V \quad \forall v_0 \in K_0, w \in K. \quad (3.14)$$

Lemme 3.4.1 *On suppose que les hypothèses ci-dessus sont vérifiées. Si $Q : K \longrightarrow 2^K$ est tel que pour tout $u \in K, Q(u) \subseteq K$ est non vide, fermée et convexe, alors l'inéquation quasi-variationnelle (3.12) est équivalente à l'inéquation suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que } u \in Q(u), \\ (Av, v - u + j(v) - j(u) \geq 0 \text{ pour tout } v \in Q(u). \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Preuve. Soit u solution du (3.12), alors $u \in Q(u)$ et :

$$(Au, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0 \quad \forall v \in Q(u).$$

Par la monotonie de A on a

$$(Av - Au, v - u) + (Au, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0$$

$$\forall v \in Q(u) \implies (Av, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0,$$

alors u est solution de (3.15).

(\Leftarrow)

Soit $u \in K$ solution de (3.15), puisque $Q(u)$ est convexe, $\forall \omega \in Q(u)$ et $\lambda \in [0, 1]$, on pose

$v = u_\lambda := \lambda \omega + (1 - \lambda)u \in Q(u)$ dans (3.15) on obtient :

$(Au_\lambda, \lambda\omega + (1 - \lambda)u - u) + j(\lambda\omega + (1 - \lambda)u) - j(u) = \lambda((Au_\lambda, \omega - u) + j(\omega) - \varphi(u)) \geq 0$
 $\implies ((Au_\lambda, \omega - u) + j(\omega) - j(u)) \geq 0, \forall \omega \in Q(u)$ puisque A est hemi-continue on prend $\lambda = 0$ on confirme que $u \in Q(u)$ est un solution de(3.12). ■

3.5 Problème de contraintes

3.5.1 Description du problème

Soient Ω un domaine de \mathbb{R}^N , de frontière Γ suffisamment régulière,

$$f \in L^2(\Omega), \psi \in H^2(\Omega) \text{ et } \psi|_{\Gamma} \leq 0.$$

On considère le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u \geq f & \text{dans } \Omega \\ u \geq \psi & \text{dans } \Omega \\ (-\Delta - f)(u - \psi) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Ce problème est appelé problème de contraintes, ce problème est un problème de l'obstacle. La solution u représente un petit déplacement transversal d'une membrane élastique Ω fixée le long de sa frontière Γ , soumise à une force f et heurtant un obstacle rigide ψ . Le problème de l'obstacle est un exemple type d'un problème de frontière libre que l'on peut interpréter ainsi : la solution u divise le domaine Ω en deux sous domaines :

$$\Omega = \Omega^\psi \cup \Omega^+,$$

$$\text{ou } \Omega^+ = (x, y) \in \Omega : u(x, y) > \psi(x, y),$$

$$\text{et } \Omega^\psi = (x, y) \in \Omega : u(x, y) = \psi(x, y).$$

Ces deux sous domaines sont séparés par une frontière libre notée par :

$$\Gamma = \partial\Omega^\psi \cap \partial\Omega^+.$$

Qui est a priori inconnue et qu'il faudra déterminer si nécessaire. La formulation (3.16) du problème de l'obstacle est la formulation forte. On s'intéresse dans ce travail à la formulation en I.V. du problème de l'obstacle. En effet, la forme bilinéaire $a(.,.)$ associée au problème (3.16) peut ne pas être symétrique et ainsi donc la formulation en I.V. est la plus appropriée. A cet effet, soit

$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0\}$ Et , soit le problème en I.V. suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que,} \\ a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K, \end{cases} \quad (3.17)$$

où $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega.$

$$L(v) = \int_\Omega f \cdot v d\Omega,$$

et

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega), u \geq q \text{ dans } \Omega\}. \quad (3.18)$$

D'après Brezis-Stampacchia [12], la solution u de ce problème existe et est dans $H^2(\Omega)$.

3.6 Le problème de Signorini

On s'intéresse ici d'un problème statique de contact unilatéral en élasticité linéaire.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $p = 2, 3$, un ouvert, supposé borné et de frontière assez régulière, occupé par un corps élastique dans son forme initiale, non-déformé. La frontière de Ω est divisée en trois parties $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, Le corps est soumis à une densité de forces volumique f donnée dans Ω et à une densité de forces surfacique t donnée sur Γ_1 . Le corps est en contact unilatéral contre un support rigide en Γ_2 .

On note par u, ϵ, σ le champ vectoriel des déplacements, le champ tensoriel des déformations, respectivement, le champ tensoriel des contraintes. Et

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1 \leq i, j \leq p,$$

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \epsilon_{kh}(u),$$

avec la convention usuelle de sommation et $1 \leq i, j, k, h \leq p$.

On suppose que les coefficients d'élasticité a_{ijkh} , vérifient les conditions usuelles de symétrie :

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij},$$

et d'ellipticité :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a_{ijkh} \epsilon_{ij} \epsilon_{kh} \geq \alpha |\varepsilon|^2, \forall \varepsilon = (\epsilon_{ij}).$$

On utilise une décomposition classique en composantes normales et tangentielles du vecteur déplacement et du vecteur contrainte sur Γ :

$$u_n = u_i n_i,$$

$$u_T = u - u_n n,$$

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i,$$

$$\sigma_{T_i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i,$$

$\sigma_{ij} n_j$ étant défini par la formule de Green généralisé

$$(\sigma_{ij}(u) n_j, \gamma(v_i))_{\frac{1}{2}, \Gamma} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(u) v_i dx,$$

$$\forall u \in H_{div}^1(\Omega) \forall v \in (H^1(\Omega))^p,$$

$$H_{div}^1(\Omega) = \{v \in (H^1(\Omega))^p, \text{div} \sigma(v) \in (L^2(\Omega))^p\},$$

où $(\cdot, \cdot)_{\frac{1}{2}, \Gamma}$ désigne le produit de dualité entre les espaces $(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^p$ et $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^p$, $(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^p$ étant le dual de $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^p$.

Évidemment, pour u régulière, on a la formule de Green

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u) n_j v_i ds = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(u) v_i dx,$$

$$\forall u \text{ régulier}, \forall v \in (H^1(\Omega))^p.$$

3.6.1 Contact sans frottement

Problème classique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ tel que,} \\ -\text{div}\sigma(u) = f \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

$$\sigma(u) = A\epsilon(u), \quad \epsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \Omega. \quad (3.20)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \quad (3.21)$$

$$\sigma \cdot n = t \text{ sur } \Gamma_1. \quad (3.22)$$

$$u_n \leq 0, \sigma_n \leq 0, u_n \cdot \sigma_n = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \quad (3.23)$$

L'équation (3.19) désigne l'équation d'équilibre telle que $\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))$ est le tenseur des contraintes et $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\epsilon_{kl}(u)$, où $\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$, et $\epsilon(u) = (\epsilon_{ij}(u))$, est le tenseur des déformations linéarisé où, $\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. On simplifie l'écriture par $\sigma(u) = A\epsilon(u)$, qui est appelée loi de comportement. Les conditions $u_n \leq 0, \sigma_n \leq 0, u_n \cdot \sigma_n = 0$ sur Γ_2 sont appelées les conditions de Signorini. $\sigma_T = 0$ pas de frottement sur Γ_2

Problème variationnel

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^p, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

$$K = \{v \in V, v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2\}.$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) \epsilon(v) dx \forall u, v \in V.$$

$$(F, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_1} t \cdot v ds \forall v \in V.$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx.$$

La formulation variationnelle, en terme de déplacement, est la suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que,} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (3.24)$$

Théorème 3.6.1 *Si $f \in (L^2(\Omega))^p, t \in (L^2(\Gamma_1))^p$ alors le problème (3.24) admet une solution unique dans K*

Preuve. [4] ■

3.6.2 Contact avec frottement (la loi de Tresca)

Problème classique

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que,} \\ -\text{div}\sigma(u) = f \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\sigma(u) = A\epsilon(u), \quad \epsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad \Omega. \quad (3.26)$$

$$u = 0 \quad \Gamma_0. \quad (3.27)$$

$$\sigma.n = t \quad \Gamma_1. \quad (3.28)$$

$$u_n \leq 0, \sigma_n \leq 0, u_n \cdot \sigma_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2. \quad (3.29)$$

$$|\sigma_T| \leq S \text{ et } \begin{cases} |\sigma_T| < S \Rightarrow U_T = 0, \\ |\sigma_T| < S \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, u_T = -\lambda \sigma_T \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (3.30)$$

Problème variationnel

On introduit le sous-espace linéaire

$$V\{v \in (H^1(\Omega))^p, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

On utilise aussi les notations :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) \epsilon(u) dx \quad u, v \in V.$$

$$(F, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_1} t.v ds \quad u, v \in V.$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f.v ds.$$

$$j(v) = \int_{\Gamma_2} |v_T| ds \quad u, v \in V.$$

La formulation variationnelle, en termes de déplacements, est la suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) + j(v) + j(u) \geq (F, v - u) \quad \forall v \in K. \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Théorème 3.6.2 *Si $f \in (L^2(\Omega))^p, t \in (L^2(\Gamma_1))^p$, alors le problème(3.31) admet une solution unique dans K*

Preuve. [4] ■

Bibliographie

- [1] Anca Capatina, Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement, Institutul de Matematica "Simion Stoilow" AL Academiei Romane, 10/2011.
- [2] A. François, Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, Grégoire ALLAAIRES, Ecole Polytechnique, année 2015/2016.
- [3] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Progresso della Scienze, 1933.
- [4] B. Billel, Les inéquations variationnelles et leurs application aux problèmes de Signorini, Université kasdi merbah ouargla, 13/09/2012.
- [5] BONY J.-M, Cours d'analyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau 2001.
- [6] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.
- [7] F.Boyer, Analyse Fonctionnelle, Aix-Marseille Université 13 décembre 2015.
- [8] Franck Boyer,Analyse fonctionnelle, Master Mathématiques etApplications première année ,Aix-Marseille Université 2015.
- [9] G.Etienne, les espaces de Hilbert, Cours à l'Académie des sciences, FRANCE, 2022.
- [10] G.Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali, il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, Mem, Accad, Naz, dei Lincei , VIII(7), 1964.
- [11] G.Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad, Sci, Paris, 258, 1964.

- [12] G. Stampacchia, H. Brezis, Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, Bull, Soc, Math, France. Vol,96, 153-180, 1968.
- [13] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.
- [14] H. Brézis, Analyse fonctionnelle théories et application, Dunod 1999.
- [15] H. Brézis, Analyse fonctionnelle théories et application of quasi-variational inequalities, Optimization 64 (2015), 1703-1724.
- [16] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math, Pures Appl, 51, 1, 1-168, 1972.
- [17] H. Le Dret, équations aux dérivées partielles elliptiques, 04/03/2010.
- [18] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm, Pure Appl. Math, XX, 1967.
- [19] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.
- [20] M. Allaoua, Inéquations Variationnelles Elliptiques et leurs Approximations, Cours et Exercices, Cours, Université 08 Mai 1945 Guelma Algérie, 2017.
- [21] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland Amsterdam 1978.
- [22] R. Glowinski. Lectures on Numerical Methods For Non-Linear variational Problems. Bombay 1980.
- [23] R. Glowinsky, J.L. Lions , R. Tremolieres : Numerical Analysis of Variational Inequalities, studies in mathematics and its applications, volume 8, (North-holland, Amsterdam, 1981.
- [24] R. Glowinski, Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. Sons. New-York, 1984.
- [25] R. Glowinsky : Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems, springer, 1984.

Bibliographie

- [26] S.Widad, Existence de solutions d'une inéquation quasi-variationnelle ,departement de Mathematiques Master, Univesite Kasdi Meerbah Ouargla ,2019.
- [27] T.Safa, Université Echahid Hamma Lakhdar d'El OUED, 2019. 5.
- [28] U.Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.
- [29] U.Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect, Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

الخلاصة

في هذا العمل، نحن مهتمون بالدراسة الرياضية للتباينات المتغيرة، وقد تم استخدام النظرية الرياضية لعدم المساواة المتغيرة في العديد من المجالات مثل الميكانيكا و الفيزياء والتحسين والرياضيات المالية.

Résumé :

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude mathématique des inéquations variationnelles .La théorie mathématique des inéquations variationnelles elles à été irtlisé dans plusieurs domaines tels que la mécanique, la physique, l'optimisation, les mathémation ,financières.

Abstract :

In the work, we are interested in the mathematical study of variable inequalities. The mathematical theory of variable inequalities has been used in several fields such as mechanics, physics, optimization, mathematics, financial.