وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمه لخضر – الوادي –
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم المالية والمحاسبية

محاضرات في مقياس إحصاء 03

لطلبة السنة الثانية ليسانس علوم مالية ومحاسبية

إعداد:
د. تجاني محمد العيد
أستاذ محاضر صنف أ

الموسم الجامعي 2023 / 2024


بسم الله الرحمن الرحيم

أهدي هذا العمل إلى

كل طالب علم

تقديم

بسم الله الرحمان الرحيم والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد (صل الله عليه وسلم) وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد.......

على الرغم من تعدد المصادر والكتب التي تداولت في مجال الاحصاء، إلا أنها لازالت قليلة وهذا باعتبار بأن كل كاتب أو باحث له نظرة وأسلوب خاص به في الكتابة الشيء الذي يجعل التركيز على جانب دون الآخر.

ومن خلال تجربنا في مجال تدريس لهذا المقياس ومن خلال اطلاعنا على العديد من المراجع، فارتأينا أن أضع بين يدي الطالب هذه المطبوعة حول الإحصاء 3 حسب البرنامج الوزاري المخصص لسنة ثانية علوم مالية ومحاسبية ، والتي نهدف من خلالها إلى تبسيط وتوضح هذا المقياس الذي يعتبر من المقاييس الأساسية التي تستوجب على رجال المال والأعمال، حيث نقدم هذه المطبوعة بأسلوب يساعد الطالب القارئ على فهم واستيعاب العديد من المفاهيم والأساليب التي تساعد على اتخاذ القرارات الإدارية في المؤسسات ، والتي قد يصعب فهمها بالاعتماد على أساليب التحليل الاحصائي والرياضي.

ولقد تضمنت هذه المطبوعة على العديد من المحاضرات والتي يمكن صياغتها على شكل مبسط وبسيط.

الدكتور : تجاني محمد العيد

مقدمة:

تعود بداية علم الاحتمال إلى ألعاب الحظ في القرن السابع عشر. ثم تطور هذا العلم نتيجة تضافر جهود مختلفة في مجالات علمية متنوعة، وأصبح ميدانا رئيسيا لكثير من العلوم الأخرى وخصوصا الاحصاء وتطبيقاته العملية، والذي أصبح أحد الأدوات المهمة في اتخاذ القرارات المثلى في ظروف تتحكم فيها الصدفة. وقد اتسعت استخدامات الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية، وأصبحت ادارة رئيسية وهامة للاقتصادي والاجتماعي والسياسي وغيرهم، ودخلت في كافة العلوم، وأصبحت تدرس في المدارس والجامعات.

وللإحصاء والاحتمالات أهمية كبيرة لطلبة العلوم الاقتصادية والتجارية والتسيير خاصة في مجال انجاز البحوث والدراسات الاقتصادية، ونظرا لأهمية هذا الموضوع ارتأينا أن نضع بين أيدي الطلبة الأعزاء هذا المؤلف، الذي هو مقدمة في الاحتمالات أوردنا من خلاله شرح مبسط لمختلف المفاهيم المرتبطة بالاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية مع أمثلة تطبيقية وتمارين وحلول لهذه التمارين تسهل على الطالب الفهم.

لقد احتوى هذا المؤلف على أربعة فصول حيث شمل كل فصل عدد من المفاهيم والتي عرضت بشكل مبسط مستخدمين الأمثلة المبسطة التي تزود الطالب بالمهارات اللازمة لحل المسائل الإحصائية.

فهرس المحتويات

الفصل الأول:

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

تمهيد:

كثير من الظواهر التي تبدو مختلفة عن بعضها البعض، الا أنها متماثلة بسلوكها على سبيل المثال عند رمي قطعة نقد نحصل على رقم أو صورة وعند رمي زهرة نرد نحصل على عدد زوجي أو فردي، فالتجربتان تتميزان بكونهما تؤولان الى نتيجة واحدة من بين نتيجتين متنافيتين، وبالتالي فان كل هذه الظواهر تتبع قانون نظري معين يسمح بالوصول الى النتائج بطريقة أسرع على أساس الخصائص المميزة لهذه القوانين.

1- التوزيع المنتظم:

يعتمد قانون هذا التوزيع عندما يأخذ المتغير العشوائي X قيما مختلفة باحتمالات متساوية.

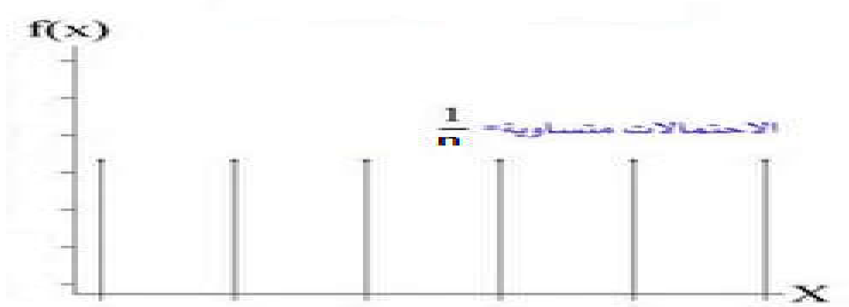
فاذا رمزنا لقيم المتغير العشوائي بـ x_i حيث $i = \{1,2,3, \dots \dots \dots \dots n\}$ فان قانون التوزيع المنتظم يكتب بالعلاقة التالية:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad ; \forall i$$

أي:

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . . P(X = n)$$

والتمثيل البياني لهذا التوزيع يكون كما يلي:



خواصه:

$$\forall i : \ P_i > 0 \qquad , \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

مثال:

- رمي زهرة النرد: $P(X = x_i) = P_{x_i} = \frac{1}{6} \ , \ x_i = \{1,2,3,4,5,6\}$
- رمي قطعة نقدية: $P(X = x_i) = P_{x_i} = \frac{1}{2} \ , \ x_i = \{1,2\}$

1-1 تابع التوزيع:

تابع التوزيع للتوزيع المنتظم يعرف كما يلي:

$$F(X) = P(X \leq x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$$

2-1 المميزات العددية للتوزيع المنتظم:

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i . x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} . x_i = \frac{1}{n}(1) + \frac{1}{n}(2) + \cdots \dots \dots \dots \dots \frac{1}{n}(n)$$

$$= \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots \dots \dots \dots \dots . +n)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{n+1}{2}$$

ومنه: $E(X) = \frac{n+1}{2}$

التباين:

لدينا: $V(X) = E(x^2) - [E(x)]^2$

نقوم بحساب: $E(x^2)$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} P_i . x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} . x_i^2 = \frac{1}{n}(1^2) + \frac{1}{n}(2^2) + \cdots \dots \dots \dots \dots \frac{1}{n}(n^2)$$

$$= \frac{1}{n}(1 + 4 + \cdots \dots \dots \dots \dots . +n^2)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

أما $\left(E(x)\right)^2$ فتساوي: $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n+1)^2}{4}$

وبالتعويض نجد:

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$$

$$= \frac{n+1}{12}(4n+2-3n-3)$$

$$= \frac{n+1}{12}(n-1)$$

$$= \frac{n^2-1}{12}$$

ومنه: $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

مثال:

عند رمي قطعة نرد متوازنة، فان عدد النقاط المسجلة على الوجه الذي تستقر عليه القطعة هو متغير عشوائي X ، وأن التوزيع الاحتمالي هو توزيع منتظم لان:

$$P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) \ldots\ldots\ldots\ldots P(X=6)$$

أي: $P(X = x_i) = P_i = \frac{1}{6} \qquad , \forall i \leq 6$

ومنه: $E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}$$

2- توزيع برنولي:

نقول عن تجربة عشوائية أنها تجربة لبرنولي إذا كانت تقبل نتيجتين أو حدثين متنافيين A و $\bar{A}$ ، فاذا تحقق الحدث A يكون نجاحا، وA فشلا، ويأخذ المتغير العشوائي X القيمة 1 إذا تحقق الحدث A، والقيمة 0 إذا تحقق الحدث $\bar{A}$، ونرمز بالرمز P لاحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X القيمة 1(تحقق الحدث A) وبالرمز $q = 1 - P$ لاحتمال أن يأخذ المتغير X القيمة 0 (تحقق الحدث $\bar{A}$).

$P(X=0)$, $P(X=1) = P$ $\qquad X = \{X/X_1 = 0, \ X_2 = 1\}$ $=1-P = q$

ونكتب: $X \rightarrow B(1.P)$

أما المميزات العددية للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع برنولي فتكون كما يلي:

$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = 0.q + 1.P = P$$

$=P.q V(X)=E(X^2)-E(X)^2=(0^2.q+1^2.P)-P^2=P-P^2=P(1-P)$

مثال:

نرمي قطعة نقدية مرة واحدة، ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة

$$X=\{X/X_1=0,\ X_2=1\} \quad P(X=0)=P(\text{ك})=1-P=q=0.5 \quad ,$$

$$=P(\text{ص})=P=0.5\ P(X=1)$$

ومنه فان: $X\to B(1.\ 0,5)$

اذن: $E(X)=P=0.5$ و $V(X)=P.q=0.5.0.5=0.25$

3- توزيع ثنائي الحدين:

إذا تكررت تجربة برنولي n مرة، فإن المتغير X يمثل عدد مرات تحقق الحدث A، وبالتالي فهو يأخذ القيم التالية: $X=\left\{x/_{0.1.2.3....n}\right\}$

فمثلا عند رمي وحدة نقدية n مرة وكان المتغير X هو عدد مرات ظهور الصورة، فإنه:

من أجل $n=2$ نجد: $X=\left\{x/_{0.1.2}\right\}$

$$P(X=0)=P(\text{ك ك})=q\cdot q=q^2=0.25$$
$$P(X=1)=P(\text{ص ك})+P(\text{ك ص})=P\cdot q+q\cdot P=2(P\cdot q)=0.5$$
$$P(X=2)=P(\text{ص ص})=P\cdot P=P^2=0.25$$

من أجل $n=3$ نجد: $X=\left\{x/_{0.1.2.\ 3}\right\}$

$$P(X=0)=P(\text{ك ك ك})=q\cdot q\cdot q=q^3$$
$$P(X=1)=P(\text{ص ك ك})+P(\text{ك ص ك})+P(\text{ك ك ص})=(P\cdot q\cdot q)+(q\cdot P\cdot q)+(q\cdot q\cdot P)=3(P\cdot q^2)$$
$$P(X=2)=P(\text{ص ص ك})+P(\text{ص ك ص})+P(\text{ك ص ص})=(P\cdot P\cdot q)+(P\cdot q\cdot P)+(q\cdot P\cdot P)=3(P^2\cdot q)$$
$$P(X=3)=P(\text{ص ص ص})=P\cdot P\cdot P=P^3$$

فمثلا من $P(X=2)=3(P^2\cdot q)$ نلاحظ أن:

- 2 هي قيمة المتغير العشوائي X.
- 1 هو 3-2، أي عدد مرات تكرار التجربة العشوائية ناقص قيمة المتغير العشوائي.

- 3 هو عدد الطرق الملائمة للحصول على نجاحين من بين 3 ثلاث تجارب، ويمكن حسابه كمايلي:

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

ومنه فاحتمال عدد ما x من النجاحات من بين n تجربة برنولية يحسب كمايلي:

$$P(X=x)=C_n^x \cdot P^x \cdot q^{n-x} \qquad x=0.1.2.3......n$$

حيث: x عدد مرات النجاح، P: احتمال النجاح في التجربة الواحدة، $q=1-P$: احتمال الفشل، n: عدد مرات تكرار التجربة العشوائية. ويكتب قانون التوزيع الاحتمالي لتوزيع ثنائي الحدين كمايلي: $X \to B(n.P)$ أما شروط تطبيق التوزيع ثنائي الحدين فهي:

- تجربة برنولي مكررة عدد محدد من المرات.
- احتمال النجاح في التجربة ثابت.

X	0	1	....	x	....	n
P_i	$C_n^0.P^0.q^{n-0}$	$C_n^1.P^1.q^{n-1}$	....	$C_n^x.P^x.q^{n-x}$	....	$C_n^n.P^n.q^{n-n}$

ويمكن التعبير عن قانون توزيع ثنائي الحدين بصورة جدولية كما يلي:

مثال: في عائلة مكونة من 04 أولاد، ما هو احتمال أن يكون بينهم 03 ذكور، ذكر واحد.

نضع: X متغير عشوائي يمثل عدد الأولاد الذكور في هذه العائلة.

$$X=\left\{ {}^{x}\!\diagup_{0.1.2.3.4} \right\} \qquad n=4 \qquad P=0.5 \qquad q=1-P=0.5$$

ومنه: $X \to B(4.0.5)$

أما الاحتمال فيحسب بالعلاقة التالية: $P(X=x)=C_n^x \cdot P^x \cdot q^{n-x}$

$$P(X=3)=C_4^3 \cdot (0.5)^3 \cdot (0.5)^{4-3} = 4 \cdot (0.5)^3 \cdot (0.5)^1 = 0.25$$
$$P(X=1)=C_4^1 \cdot (0.5)^1 \cdot (0.5)^{4-1} = 4 \cdot (0.5)^1 \cdot (0.5)^3 = 0.25$$

3-1 المميزات العددية لتوزيع ثنائي الحدين:

يمكن اعتبار المتغير العشوائي X مجموع متغيرات لتجربة برنولي مستقلة، أي: $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ لها نفس المعلم P، وبالتالي نفس الأمل الرياضي ونفس التباين، ومنه نجد:

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = \sum P = nP$$
$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) = \sum V(X) = \sum Pq = nPq$$

من المثال السابق يمكن استنتاج المميزات العددية للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأولاد الذكور في أسرة مكونة من 04 أولاد كمايلي:

$$E(X) = n \cdot P = 4 \cdot (0.5) = 2$$
$$V(X) = n \cdot P \cdot q = 4 \cdot (0.5) \cdot (0.5) = 1$$
$$\delta_X = \sqrt{1} = 1$$

3-2 تابع التوزيع لتوزيع ثنائي الحدين:

ان تابع التوزيع لتوزيع ثنائي الحدين يعطى بالعلاقة التالية:

$$F(X) = P(X \leq x_i) = \sum_{i=1}^{n} C_n^{x_i} . P^n . q^{n-x_i}$$

واحتمال الحوادث من الشكل $(L \leq X \leq K)$ تحسب كما يلي:

$$P(L \leq X \leq K) = \sum_{L}^{K} P(X = x_i) = F(K) - F(L)$$

أما احتمال الحوادث من الشكل $(X \geq)$ فيمكن حسابها وفق العلاقة التالية:

$$P(X \geq K) = \sum_{x=k}^{n} C_n^x . P^x . q^{n-x} = 1 - F(K)$$

4- التوزيع فوق الهندسي :

عند دراستنا لقانون توزيع ثنائي الحدين، لاحظنا أن عملية السحب كانت تتم مع الاعادة أما في بعض الحالات فانه لا يمكن اعادة الوحدة المسحوبة وبالتالي عمليات السحب لا تكون مستقلة، وفي هذه الحالة نلجأ الى تطبيق قانون آخر يسمى التوزيع الهندسي الزائد.

ويتعلق قانون التوزيع فوق الهندسي بثلاثة ثوابت هي:

- N : عدد عناصر المجتمع أو أصلي المجموعة الكلية.

- M : عدد عناصر المجتمع الذي ينصب عليه اهتمامنا.
- n : حجم العينة المسحوبة بدون ارجاع.

أي أن التوزيع فوق الهندسي هو توزيع احتمالي يوافق تجربة برنولي نكررها n مرة بدون إرجاع، ونعتبر المتغير X عبارة عن مجموع n متغير عشوائي يتبع توزيع برنولي.

1-4 قانون التوزيع فوق الهندسي

نفترض أننا نسحب n كرية من صندوق كريات وبدون إرجاع، وأن الصندوق يحتوي على N كرية منها M كرية بيضاء، فإن احتمال الحصول على x كرية بيضاء $(x \leq b)$ يمكن حسابه من خلال القانون الكلاسيكي للاحتمال (عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة) كمايلي:

$$P(X = x) = \frac{C_M^x . C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

تسمى هذه الصيغة بقانون التوزيع فوق الهندسي ويعرف كما يلي:

$$X \rightarrow H(N, M, n)$$

مثال: فوج من الطلبة مكون من 4 طلبة ذكور، 7 طلبة اناث، تم سحب وبصورة عشوائية، لجنة مؤلفة من 4 أفراد.

- عين جدول التوزيع الاحتمالي لعدد الذكور في اللجنة.

نلاحظ أن هذه التجربة (سحب لجنة) هي تجربة برنولي مكررة وبدون ارجاع أي هي تجربة فوق هندسية.

نضع X متغير عشوائي يمثل عدد الطلبة الذكور في اللجنة ويأخذ القيم التالية:

$$X = \left\{{}^{X}/_{0,1,2,3,4}\right\} \qquad , \quad X \rightarrow H(11,4,4)$$

$$P(X = 0) = \frac{C_4^0 . C_7^4}{C_{11}^4} = 0.106 \quad , P(X = 1) = \frac{C_4^1 . C_7^3}{C_{11}^4} = 0.424 \quad ,$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 . C_7^2}{C_{11}^4} = 0.38$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3 . C_7^1}{C_{11}^4} = 0.0848 \quad , P(X = 4) = \frac{C_4^4 . C_7^0}{C_{11}^4} = 0.0030$$

ومنه جدول التوزيع الاحتمالي يمكن تشكيله كما يلي:

x_i	0	1	2	3	4	$\sum P_i$
P_i	0.106	0.424	0.38	0.0848	0.00303	1

نلاحظ أن: $\sum P_i = 1$ و $P_i \geq 0 \quad \forall i$

2-4 المميزات العددية للمتغير العشوائي الخاضع للتوزيع فوق الهندسي:

التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X الخاضع للتوزيع فوق الهندسي يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = n\left(\frac{M}{N}\right) = n.P$$

التباين:

تباين المتغير العشوائي X الخاضع للتوزيع فوق الهندسي يعطى بالعلاقة التالية:

$$V(X) = \frac{N-n}{N-1}.n.P.q$$

مثال:

حساب التوقع الرياضي والتباين الخاص بعدد الطلبة الذكور في اللجنة (أنظر المثال السابق مباشرة)

$$E(X) = n\left(\frac{M}{N}\right) = 4\left(\frac{4}{11}\right) = 4 \times 0.36 = 1.45$$

$$V(X) = \frac{N-n}{N-1}.n.P.q = \frac{11-4}{11-1} \times 4 \times 0.36 \times 0.64 = 0.64$$

3-4 قاعدة تقارب:

نلاحظ أنه توجد علاقة تقارب بين التوزيع فوق الهندسي وتوزيع ثنائي الحدين، في حالة N كبير جدا (يؤول إلى $+\infty$) فإن $\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$ تؤول إلى 1. فيعطي التوزيع فوق الهندسي نتائج قريبة من نتائج توزيع ثنائي الحدين، ويصبح السحب بدون إرجاع مطابقا للسحب بإرجاع ويمكن اجراء عملية التقريب ابتداءا من $\left(n < \frac{N}{10}\right)$.

5- التوزيع الهندسي:

إذا كررنا تجربة برنولي إلى غاية الحصول على النتيجة أو تحقق الحدث المطلوب (نجاح مرة واحدة)، فإن المتغير X الذي يمثل عدد مرات تكرار التجربة بما فيها المرة التي حصل فيها النجاح يتبع التوزيع الهندسي.

فإذا كان P هو احتمال النجاح وكان q هو احتمال الفشل، فإن احتمال الحصول على النتيجة المطلوبة عند التجربة رقم x يعطى بالعلاقة التالية: $P(X=x)=P\cdot q^{x-1}$ حيث: $X=\{x/1.2.3.4.........\ ...\}$

أما المميزات العددية لهذا التوزيع فهي: $V(X)=\frac{q}{P^2}$ $\qquad E(X)=\frac{1}{p}$

مثال: نرمي وحدة نقدية إلى غاية الحصول على صورة، ما هو احتمال أن يتطلب ذلك 04 رميات.

$P=0.5 \qquad q=0.5 \qquad X=\{x/1.2.3.4.........\ ...\}$

$$P(X=4)=P(\text{ك ك ك ص})=P\cdot q^{4-1}=(0.5)\cdot(0.5)^3=0.0625$$

6- توزيع بواسون:

في الحياة العملية احيانا ما نقابل بعض الظواهر التي ينطبق عليها شروط توزيع ثنائي الحدين و لكن هذه الحوادث تكون نادرة الوقوع و هذا يعنى أن احتمال النجاح يكون صغير جدا أي يقترب من الصفر، و يكون احتمال الفشل كبير أي أنه يقترب من الواحد، ولهذا فقد استطاع بواسون أن يشتق جبريا قانون خاص بالاحتمالات الصغيرة انطلاقا من قانون توزيع ثنائي الحدين أطلق عليه بتوزيع أو قانون بواسون، هذا الاخير له تطبيقات واسعة حيث يمثل عدد الحوادث النادرة الوقوع في وحدة قياسية معينة كالزمن، المسافة ، الحجم وكأمثلة عن ذلك نذكر مثلا:

- عدد المكالمات الهاتفية خلال فترة زمنية محددة.
- عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من كتاب معين.
- عدد الحوادث التي تقع على طريق معين خلال فترة زمنية.
- عدد الزبائن الذي يصلون الى محطة البنزين في ساعة ما.

وبذلك تكون شروط هذا التوزيع كالآتي:.

. أن يكون احتمال النجاح ثابت وكذلك احتمال الفشل في كل محاولة ويرمز لهما بالرمز q, p على التوالي.

-. أن يكون احتمال النجاح صغيرا ويقترب من الصفر واحتمال الفشل يقترب من الواحد الصحيح.

- أن تكون عدد المحاولات كبيرا جدا حيث أن $\lambda=n.P$ مقدار ثابت.

1-6 قانون توزيع بواسون:

إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل حدثا معينا نادر الحدوث في زمن أو مسافة أو مساحة وبمعدل وليكن (λ)، فوجود أن احتمال حدوث هذا الحدث عدد x مرة يتبع العلاقة الاحتمالية التالية:

$$/ \ x = 0,1,2, \quad P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad \lambda > 0 ;\ ....$$

حيث: x: العدد المعين من النجاحات.

$P(X = x)$: احتمال عدد x من النجاحات.

λ : متوسط عدد النجاحات في وحدة القياس (زمن، مسافة، حجم.....).

e : أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي أو : 2.71828.

نلاحظ أن هذا التوزيع معرف فقط في المعلمة λ أي يكفي معرفة λ لتطبيق هذا التوزيع ويعرف كما يلي:

$$X \rightarrow P(\lambda)$$

مثال:

إذا علمت أن معدل المكالمات الهاتفية التي تتلقاها احدى الادارات هو مكالمتان كل خمس دقائق.

أوجد: - احتمال عدم استقبال ولا مكالمة خلال الخمس دقائق القادمة.

- احتمال استقبال مكالمة واحدة على الأقل خلال الخمس دقائق القادمة.

الحل:

نفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات التي تستقبلها هذه الادارة خلال 5 دقائق، نلاحظ أن X يتبع توزيع بواسون بمعدل $\lambda = 2$ وبالتالي فان دالة كثافة هذا المتغير كما يلي:

$$/ \ x = 0,1,2, \quad P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \propto ....$$

ومنه نجد:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2}.2^{0}}{0!} = 0.135$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.135 = 0.865$$

2-6 المميزات العددية للمتغير العشوائي الخاضع لتوزيع بواسون:

التوقع الرياضي:

ان التوقع الرياضي للمتغير العشوائي الخاضع لتوزيع بواسون هو معلمة هذا التوزيع أي:

$$E(X) = \lambda$$

البرهان:

لدينا: $E(X) = \sum P_i . x_i$

وبالتعويض بقيمة P_i بدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون نجد:

$$E(X) = \sum \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}.x_i = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^x . x_i}{x_i(x_i \quad 1)!}$$

بالاختزال يصبح لدينا:

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^x}{(x_i - 1)!}$$

لنفرض أن $y = x - 1$ أي أن $x = y + 1$ نقوم بالتعويض على هذا الأساس في الطرف الأخير فنجد:

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^{y+1}}{y!} = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^y . \lambda}{y!} = \lambda . e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^y}{y!}$$

ولدينا المقدار $\sum \frac{\lambda^y}{y!}$ ليس سوى عبارة عن سلسلة أسية تحسب كما يلي:

$$\sum \frac{\lambda^y}{y!} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\lambda^y}{y!} \ldots \ldots = e^{\lambda}$$

وعليه فان:

$$E(X) = \lambda . e^{-\lambda} . e^{\lambda} = \lambda . e^{-\lambda+\lambda} = \lambda . e^{0} = \lambda$$

اذن: $E(X) = \lambda$

التباين:

ان تباين توزيع بواسون يساوي أيضا معلمة هذا التوزيع أي:

$$V(X) = \lambda$$

البرهان:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

نقوم بحساب $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum x_i^2 . P_i = \sum x_i^2 . e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!} = \sum [x_i^2 - x_i + x_i] . e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum [x_i(x_i - 1) + x_i] . e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum x_i(x_i - 1).\ e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!} + \sum x_i.\ e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

نلاحظ ان الطرف الثاني ما هو الا عبارة عن $E(X)$ أي λ ، أما الطرف الأول فيمكن حسابه كما يلي:

$$\sum x_i(x_i - 1).\ e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}.\sum \frac{x_i(x_i - 1).\lambda^x}{x_i(x_i - 1).(x_i - 2)!}$$

بعد اجراء عملية الاختزال نجد الطرف الأول يساوي:

$$e^{-\lambda}.\sum \frac{\lambda^x}{(x_i - 2)!}$$

ولنضع $y = x - 2$ أي: $x = y + 2$ ونقوم بعملية التعويض فنجد:

$$= e^{-\lambda}.\sum \frac{\lambda^{y+2}}{y!} = e^{-\lambda}.\sum \frac{\lambda^y.\lambda^2}{y!} = e^{-\lambda}.\lambda^2.\sum \frac{\lambda^y}{y!}\ e^{-\lambda}.\sum \frac{\lambda^x}{(x_i - 2)!}$$

ولدينا سابقا $\left(\sum \frac{\lambda^y}{y!} = e^{\lambda}\right)$ ومنه:

$$= \lambda^2.e^{-\lambda}.e^{\lambda} = \lambda^2.e^{-\lambda+\lambda} = \lambda^2.e^0 = \lambda^2 e^{-\lambda}.\sum \frac{\lambda^x}{(x_i - 2)!}$$

ومنه لدينا: $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ أما $[E(X)]^2 = \lambda^2$

بالتعويض في علاقة $V(X)$ نجد:

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

مثال: التوقع الرياضي والتباين للمثال السابق يساوي: $\lambda = 2$

3-6 تابع التوزيع لتوزيع بواسون:

ليكن X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون يأخذ قيمة أكبر من x فان تابع التوزيع في هذه الحالة يعطى بالعلاقة التالية:

$$F(X) = P(X > x) = \sum_{x=x+1}^{\infty} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

الا أن عملية الحساب هنا طويلة لذا نلجأ الى الحساب عن طريق المتمم أي:

$$P(X \le x_i) = \sum_{x=0}^{x_i} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

ومنه تصبح دالة التوزيع كما يلي:

$$F(X) = P(X > x) = 1 - P(X \le x_i) = 1 - \sum_{x=0}^{x_i} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

6-4 توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ثنائي الحدين:

ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ثنائي الحدين أي: $X \rightarrow B(n, P)$، فاذا كانت n تتزايد بصورة كبيرة غير منتهية، والاحتمال P صغير جدا أي يؤول الى الصفر، بحيث أن الجداء $(n.P)$ يساوي مقدار ثابت وليكن λ، ففي هذه الظروف يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين الى توزيع بواسون ذو المعلمة λ.

وبصورة عامة يمكن تقريب X الخاضع لتوزيع ثنائي الحدين الى توزيع بواسون بمعدل $(\lambda = n.P)$ عندما يكون:

$n.P \le 5$ و $n \ge 30$

$$\boxed{B(n,P)} \xrightarrow{\quad n.P \le 5 \ , \quad n \ge 30 \quad} \boxed{P(\lambda)}$$

مثال:

إذا كانت نسبة الانتاج المعيب في انتاج أحد المصانع هي 1% وكانت هذه السلعة تعبأ في صناديق كل صندوق يسع 300 وحدة، فأوجد احتمال أن يكون في أحد هذه الصناديق 3 وحدات معيبة.

الحل:

نفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات المعيبة في كل صندوق، نلاحظ أن X يتبع توزيع ثنائي الحدين أي: $X \rightarrow B(300{,}0.01)$ حيث n كبيرة جدا و P احتمال صغير جدا.

فانه يمكن اعتماد قانون توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ثنائي الحدين نظرا لتوفر الشروط التالية:

$$n = 300 > 30 \ , \ n.P = 300 \times 0.01 = 3 \le 5 \ , \lambda = n.P = 3$$

ومنه احتمال أن يكون في أحد هذه الصناديق 3 وحدات معيبة يساوي:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3}.3^3}{3!} = 0.224$$

تمارين محلـــــولة

التمرين الاول:

إذا كان من المعلوم أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام دواء معين هي 60% إذا تناول هذا الدواء 05 مصابين بهذا المرض، وإذا عرفنا المتغير العشوائي X بأنه عدد المصابين الذين يستجيبون لهذا الدواء (حالات الشفاء).

المطلوب:

1- ما هو نوع المتغير العشوائي؟ وما هو قانون التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟
2- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير X ثم أحسب الاحتمالات التالية: استجابة 03 مرضى لهذا الدواء، استجابة مريض واحد على الأقل، استجابة مريضين على الأقل.
3- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.

التمرين الثاني:

مجلس أساتذة يتشكل من 40 عضو، 24 رجل و16امرأة، نريد اختيار عشوائيا شخصين منهم للمشاركة في ندوة وطنية حول البرامج البيداغوجية، ليكن X يمثل عدد النساء من بين الشخصين الذين تم اختيارهم.

المطلوب:

1- ما هو القانون الاحتمالي الأصلي لـ X ؟ علل ذلك.
2- عين التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة؟
3- ما هو قانون التوزيع الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب اليه التوزيع الاحتمالي السابق؟ علل ذلك.
4- عين التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة؟
5- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري في الحالتين، ثم قارن بين النتائج، ماذا تلاحظ.

التمرين الثالث:

يحتوي تقرير ما مكون من 200 صفحة على 220 خطأ مطبعي موزعة عشوائيا على صفحات التقرير.

المطلوب: أحسب احتمال أن تحتوي صفحة معينة على: لا خطأ، على الأقل خطأ، خطأين فأكثر.

التمرين الرابع:

أظهرت التجارب السابقة أن 2% من علب الصابون المسحوق "ازيس" يكون وزنها الحقيقي عند خروجها من المصنع يقل عن الوزن المعياري المقرر، وبغرض الاطلاع على حقيقة ذلك أجريت دراسة على عينة من 100 علبة تم اختيارها عشوائيا، ليكن X يمثل عدد العب التي يقل وزنها عن الوزن المعياري من بين 100 علبة.

المطلوب:

1- ما هو القانون الاحتمالي لهذا التوزيع؟
2- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟
3- أحسب احتمال X المعرف أعلاه يساوي: 0، يقل عن4، محصورا بين 2و5 (بما في ذلك 5).
4- باستعمال قانون بواسون كتقريب لهذا التوزيع أجب على نفس الأسئلة السابقة ثم قارن بين النتائج.

الحلـــول

حل التمرين الاول:

1- تحديد نوع المتغير العشوائيX:

X: متغير عشوائي منفصل كمي: يمثل عدد حالات الاستجابة.

قانون التوزيع الاحتمالي لـ X:

بما أن المصاب بعد تناوله للدواء هناك نتيجتين متنافيتين، شفاء وعدم شفاء فإننا نكون بصدد تجربة برنولي مكررة 05 مرات، أي توزيع ثنائي الحدين، حيث:

$$n = 5 \ ,P = 0.6 \ \ , q = 1 - 0.6 = 0.4$$

ونكتب: $X \sim B(5,0.6)$ و $X = \{x/0.1.2.3.4.5\}$

2- ايجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير:

$P(X = x) = C_n^x P^x q^{n-x}$, $P(X = x) = C_n^x (0.6)^x (0.4)^{n-x}$

$P(X = 0) = C_5^0 (0.6)^0 (0.4)^5 = 0.01024$,

$P(X = 1) = C_5^1 (0.6)^1 (0.4)^4 = 0.0768$

$P(X - 2) - C_5^2 (0.6)^2 (0.4)^3 - 0.2304$,

$P(X=3)=C_5^3(0.6)^3(0.4)^2=0.3456$

$P(X=4)=C_5^4(0.6)^4(0.4)^1=0.3456$,

$P(X=5)=C_5^5(0.6)^5(0.4)^0=0.07776$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي كما يلي:

X	0	1	2	3	4	5	$\sum P_x$
$P(X=x)$	0.0102	0.0768	0.2304	0.3456	0.2592	0.07776	1

حساب الاحتمالات:

- استجابة 03 مرضى: $P(X=3)=0.3456$
- استجابة مريض واحد على الأقل:

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.0102=0.9897$

- استجابة مريضين على الأقل:

$P(X\leq 2)-0.0102+0.0768+0.2304-0.31744$

3- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

$E(X)=nP=5.(0.6)=3$

$V(X)=n.P.q=4(0.6)(0.4)=1.2$

$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=1.095$

حل التمرين الثاني:

1- القانون الاحتمالي الاصلي لـ X هو التوزيع فوق الهندسي لاننا لدينا نتيجتين متنافيتين (رجل وامرأة) وبالتالي التجربة تجربة برنولي مكررة مرتين مع ضرورة عدم ارجاع العنصر المسحوب.

ونكتب: $X\times\sim H(40{,}16{,}2)$

2- تعيين التوزيع الاحتمالي لـ X:

$X\{x/0{,}1{,}2\}$

$$P(X=0)=\frac{C_{16}^{0}.C_{24}^{2}}{C_{40}^{2}}=0.353\ ,$$

$$P(X=1)=\frac{C_{16}^{1}.C_{24}^{1}}{C_{40}^{2}}=0.492\qquad ,P(X=2)=\frac{C_{16}^{2}.C_{24}^{0}}{C_{60}^{2}}=0.153$$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي كما يلي:

X	0	1	2	$\sum P_x$
$P(X=x)$	0.353	0.492	0.153	1

3- لدينا: $n<\frac{N}{10}$ (محققة)أي: $2<\frac{40}{10}$ ومنه القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه هذا التوزيع هو توزيع ثنائي الحدين، ويصبح لدينا: $X\sim B\left(2,\frac{16}{40}\right)$

4- تعيين التوزيع الاحتمالي الجديد:

$$P(X=0)=C_2^0.0.4^0.0.6^2=0.36\ ,$$

$$P(X=1)=C_2^1.0.4^1.0.6^1=0.48\ ,P(X=2)=C_2^2.0.4^2.0.6^0=0.16$$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي كما يلي:

X	0	1	2	$\sum P_x$
$P(X-x)$	0.36	0.48	0.16	1

5- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

6- حالة التوزيع فوق الهندسي:

$$E(X)=n.P=2\times 0.4=0.8$$

$$V(X)=\frac{N-n}{N-1}nPq=\frac{40-2}{40-1}\times 2\times 0.4\times 0.6=0.467$$

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=0.68$$

حالة توزيع ثنائي الحدين:

$$E(X)=n.P=2\times 0.4=0.8$$

$$V(X)=nPq=2\times 0.4\times 0.6=0.48$$

$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = 0.69$

بمقارنة النتائج في كلا التوزيعين نلاحظ أنه يوجد تقارب كبير بينها مما يعني أن توزيع ثنائي الحدين أحسن تقريب للتوزيع فوق الهندسي.

حل التمرين الثالث:

نلاحظ أن هذه التجربة هي تجربة بواسون والمعرفة على المعلمة $\lambda = \frac{220}{200} = 1.1$ أي: $X \sim P(\lambda = 1.1)$

حيث أن:

$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

- احتمال أن تحتوي صفحة معينة عن لا خطأ:

$P(X = 0) = \frac{e^{-1.1}1.1^0}{0!} = 0.332$.

- احتمال أن تحتوي على الأقل خطأ:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.332 = 0.668$.

- احتمال أن تحتوي خطأين فأكثر:

$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0.302$.

حل التمرين الرابع:

1- القانون الاحتمالي لهذا التوزيع هو توزيع ثنائي الحدين لأننا أمام تجربة برنولي مكررة 100 مرة باحتمال ثابت ونتيجتين متنافيتين (وزن معياري ووزن غير معياري) وعملية السحب تكون مع الارجاع ومعالم هذا التوزيع موضحة كما يلي: $X \sim B(100{,}0.02)$.

2- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري

$E(X) = n.P = 100 \times 0.02 = 2$

$V(X) = nPq = 100 \times 0.02 \times 0.08 = 0.16$

$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = 0.4$

3- حساب الاحتمالات:

$P(X = 0) = C_{100}^{0}.0.02^{0}.0.98^{100} = 0.132$

$$P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.132 + 0.270 + 0.273 + 0.182 = 0.857$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$
$$= 0.273 + 0.182 + 0.038 + 0.0352 = 0.528$$

لدينا معلمة توزيع بواسون هي: $\lambda = 100 \times 0.02 = 2$ ، حيث أن: $P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري: $E(X) = V(X) = \lambda$
- حساب الاحتمالات:

$$P(X=0) = \frac{e^{-2}.2^0}{0!} = 0.135$$

$$P(X<4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$
$$= 0.135 + 0.270 + 0.27 + 0.18 = 0.855$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0.27 + 0.18 + 0.09 + 0.036$$
$$= 0.576$$

بمقارنة النتائج في كلا التوزيعين نلاحظ أنه يوجد تقارب كبير بينها مما يعني أن توزيع بواسون أحسن تقريب لتوزيع ثنائي الحدين.

تمارين مقترحة

التمرين الأول: سلة تحتوي 10 كرات منها 4 حمراء والباقي بيضاء، سحبت عشوائيا وبدون إعادة 3 كرات.

المطلوب:

- ما هو التوزيع الاحتمالي لعدد الكرت الحمراء المسحوبة، حدده ومثله بيانيا؟
- ما احتمال أن يكون من بين الكرات المسحوبة كرتان بيضاويتان؟
- احسب التوقع الرياضي والتباين لعدد الكرات الحمراء المسحوبة؟

التمرين الثاني:

في اختبار لفعالية دواء ما، إذا فرضنا أنه صار باحتمال 0.001، وأنه أعطي لـ 2000 شخص من المتبرعين.

المطلوب: باستخدام تقريب بواسون أحسب

- احتمال أن يتضرر أكثر من شخصين نتيجة تلقيهما هذا الدواء؟
- احتمال أن يتضرر شخصان على الأقل.

التمرين الثالث: يطلق رام على هدف 10 طلقات، فإذا رمزنا بـ X لعدد الطلقات التي تصيب الهدف خلال هذه التجربة، وكان احتمال إصابته للهدف في كل مرة هو $\frac{1}{4}$

والمطلوب:

- حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- ما احتمال أن يصاب الهدف بطلقتين على الأقل.

التمرين الرابع: لتكن E تجربة إلقاء قطعة نقود متجانسة 6 مرات، فإذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد مرات ظهور الشعار.

المطلوب: أحسب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X

الفصل الثاني:

التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر

تمهيد:

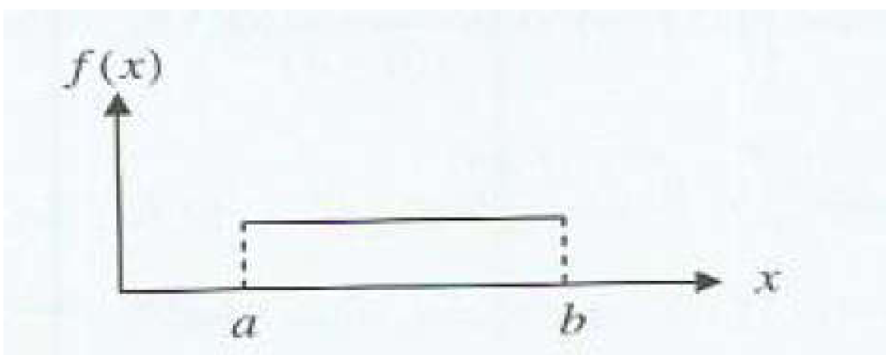
سنحاول من خلال هذا الفصل التطرق لمختلف التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر من خلال التطرق الى دالة الكثافة الاحتمالية لكل توزيع ودالة التوزيع، بالإضافة إلى المميزات العددية لكل توزيع مع إعطاء مجموعة من الأمثلة عن كل نوع من التوزيعات الاحتمالية المستمرة.

1- التوزيع المنتظم:

يسمى احيانا بالتوزيع المستطيل وهو من أبسط أنواع التوزيعات المستمرة حيث الصيغة العامة لهذا التوزيع هي من الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & , a \leq x \leq b \\ 0 , & \text{ذلك خلاف} \end{cases}$$

نلاحظ أن دالة الكثافة هي مقدار ثابت، ويمكن توضيحها بيانيا بالشكل التالي:

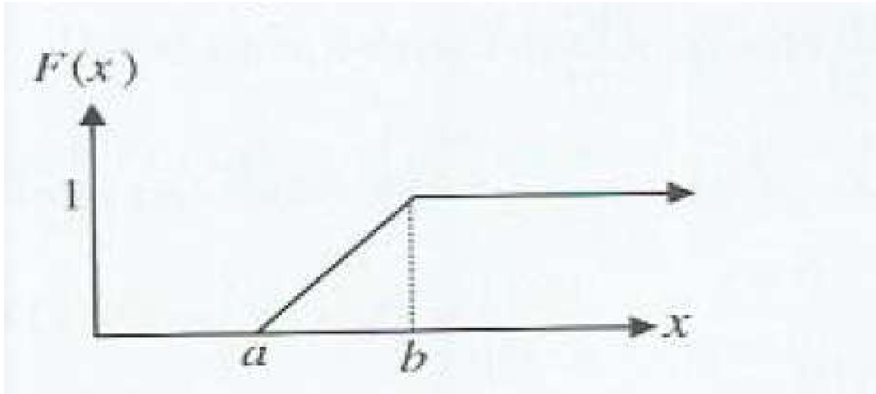


1-1 دالة التوزيع للتوزيع المنتظم:

يمكن كتابة دالة التوزيع للتوزيع المنتظم بالشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < a \\ \frac{x - a}{b - a} & ; \quad a \leq x \leq b \\ 1 & ; \quad x \geq b \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لدالة التوزيع للتوزيع المنتظم بالشكل التالي:



2-1 المميزات العددية للتوزيع المنتظم:

التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي للتوزيع المنتظم يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} xdx=\frac{a+b}{2}$$

التباين:

$$E(X^2)=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x^2dx=\frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a}$$

وبالتالي:

$$\sigma^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

مثال:

في محطة للحافلات، تصل كل 20 دقيقة حافلة، وليكن X متغير عشوائي يمثل زمن انتظار راكب للحافلة بالدقائق.

المطلوب:

- حدد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.
- أحسب التوقع الرياضي والتباين.
- أحسب احتمال أن ينتظر الراكب أقل من 10دقائق.
- إيجاد دالة التوزيع.

الحل:

نلاحظ أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المنتظم ضمن المجال وعليه تكون دالة الكثافة الاحتمالية وفق الصيغة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20-0} & ,0 \leq x \leq 20 \\ 0 & , \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حساب التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{20+0}{2} = 10$$

أي في المتوسط ينتظر الشخص 10 دقائق لوصول الحافلة.

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(20-0)^2}{12} = 33.33$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{33.33} = 5.77$$

حساب احتمال أن ينتظر الراكب أقل من 10دقائق.

$$P(X < 10) = \int_0^{10} \frac{1}{20}\, dx = \left|\frac{x}{20}\right|_0^{10} = \frac{1}{2}$$

تحديد دالة التوزيع:

يمكن كتابة دالة التوزيع بالشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{x}{20} & ; \; 0 \leq x \leq 20 \\ 1 & ; \quad x \geq 20 \end{cases}$$

2- التوزيع الطبيعي:

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. فلو اخترنا بالصدفة مئة أو ألفا من المارين في شارع ما وقسنا أطوالهم لوجدنا نسبة كبيرة منها قريبة من متوسط ما، ونسبة قليلة من طوال القامة ونسبة مقاربة لها من قصار القامة. ومثل هذا بالنسبة للأوزان. ولو مثلنا هذه البيانات في معلم متعامد متجانس لكان المنحنى الذي يمثل النسبة، أو ما يمكن أن نسميه الاحتمال، ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط وهي صفات التوزيع الطبيعي:

ويوجد التوزيع الطبيعي تحت صيغتين هما:

- التوزيع الطبيعي العام.
- التوزيع الطبيعي المعياري.

1-2 - تعريف قانون التوزيع الطبيعي العام:

يعرف تابع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي الطبيعي X وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty}$$

حيث أن:

x : يمثل المتغير العشوائي الطبيعي وهو معرف ضمن المجال $]-\infty\,,+\infty[$.

e : مقدار ثابت وهو أساس اللوغاريتم الطبيعي ويساوي 2.7183.

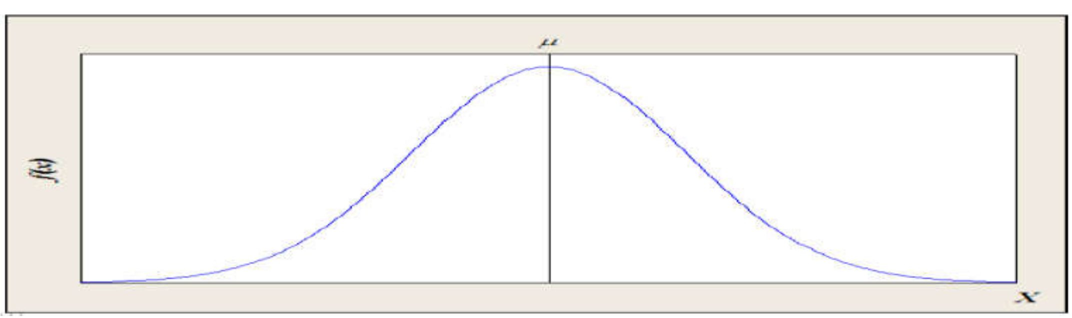
π: مقدار ثابت ويساوي 3.1416.

μ:وسط حسابي وهو مقدار ثابت يعكس المتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي المدروس.

σ:مقدار ثابت حقيقي وموجب، يعكس الانحراف المعياري لتوزيع المجتمع الاحصائي المدروس.

وبالتالي فان المتغير العشوائي X يخضع للتوزيع الطبيعي يكتب باختصار على الشكل التالي: $X\sim N(\mu,\sigma)$

ويمثل بيانيا كما يلي:



2-2 - خصائص التوزيع الطبيعي العام:

ان تابع التوزيع لمتغير طبيعي يعرف بوسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري σ ويرمز له بالرمز $N(\mu,\sigma)$، يلبي الشرطان الضروريان لكل التوزيعات الاحتمالية:

الشرط الأول: $\forall X \in \mathbb{R}\ , f(x) \geq 0$

الشرط الثاني: $\int_{\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

نلاحظ أن الشرط الأول محقق دوما لأنه مهما كانت القيمة المعطاة لـ x فان مربعها دوما موجب أي: $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 > 0$ وذلك بغض النظر عن قيمة المعلمة μ.

ولدينا التابع $f(x)$ هو من الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

نلاحظ أن $f(x)$ موجب دوما وذلك لان:

- $e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} > 0$ ($(x-)^2 > 0$ و $2\sigma^2 > 0$ لان التباين موجب دوما من التعريف).
- $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} > 0$ (σ موجب و $\sqrt{2} > 0$).

أما بالنسبة للشرط الثاني أي: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

لدينا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

ولحساب هذا التكامل نستعمل طريقة تحويل المتغير أي: $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$

ولتحديد حدود التكامل الجديدة بالنسبة لـ t نجد عندما:

$x \to +\infty$ فان $t \to +\infty$ و $x \to -\infty$ فان $t \to -\infty$

وأيضا:

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x - \mu = \sigma t; dx = \sigma.dt$$

بالتعويض نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.\sigma.dt = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt$$

نلاحظ أن التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt$ هو احدى التكاملات الشهيرة ويدعى بتكامل آيار بواسون ويساوي $\sqrt{2\pi}$ وبالتالي نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\sqrt{2\pi} = 1$$

أي أن الشرط الثاني محقق أيضا وبالتالي فالتوزيع الطبيعي هو دالة كثافة احتمالية.

3-2 المميزات العددية للمتغير العشوائي الخاضع للتوزيع الطبيعي:

التوقع الرياضي:

ان التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X الخاضع للتوزيع الطبيعي يساوي المعلمة الاولى لهذا التوزيع أي: $E(X) = \mu$.

البرهان:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \quad = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

بتحويل المتغير نضع: $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$

وبالتالي:

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Longrightarrow x-\mu = \sigma t;\, dx = \sigma.dt$$

بالتعويض نجد:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(t\sigma+\mu).e^{-\frac{t^2}{2}}.\sigma.dt$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma t.e^{-\frac{t^2}{2}}.dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\mu.e^{-\frac{t^2}{2}}.dt\right]$$

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}.dt$$

$$= 0 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}.\sqrt{2\pi} = \mu$$

التباين:

ان تباين المتغير العشوائي X الخاضع للتوزيع الطبيعي يساوي المعلمة الثانية لهذا التوزيع مربعة أي:

$$V(X) = \sigma^2$$

البرهان:

لدينا: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

حيث: $[E(X)]^2 = \mu^2$ نقوم بحساب $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

بإجراء التحليل السابق (تبديل المتغير) وبعد التعويض وتبسيط العلاقة نجد:

$$E(X^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 . e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu^2$$

لحساب هذا التكامل، نكامل بالتجزئة مع اجراء التحويل التالي:

$$E(X^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu^2 = 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} . \sqrt{2\pi} + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

ومنه: $$V(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

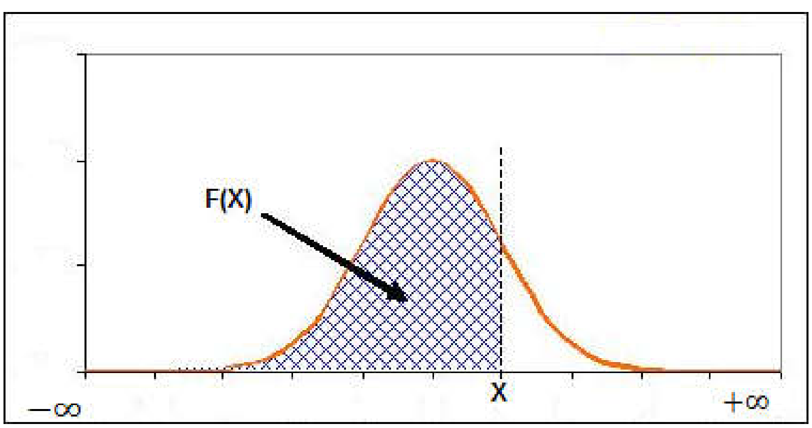
2-4 تابع التوزيع للمتغير العشوائي الطبيعي:

نعرف أن: $$F(X) = P(X \leq x)$$

ومنه:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ويعكس هذا التابع المساحة الاجمالية تحت المنحنى المقابل لـ $f(x)$ والمحصورة بين $-\infty$ و x وهي تمثل بيانيا كما يلي:



ولحساب المساحة المحصورة بين نقطتين x_1 و x_2 يعني ايجاد احتمال أن يتردد المتغير العشوائي بين هاتين النقطتين أي:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ان حساب هذا التكامل يحتاج الى ايجاد التابع الأصلي لـ $e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ وهذا غير ممكن الا بشكل تقريبي، ولهذا نختار الحالة التي يكون فيها0 =μ و 1=σ لتكون معيارا لحساب الاحتمالات في كل الحالات ويسمى هذا التوزيع الموحد بالتوزيع الطبيعي المعياري.

2-5- قانون التوزيع الطبيعي المعياري:

التوزيع الطبيعي المعياري هو التوزيع الذي يكون وسطه الحسابي يساوي الصفر (0 =μ) وانحرافه المعياري يساوي الواحد (1=σ)، ويتم التحول من القانون الطبيعي العام الى القانون الطبيعي المعياري كما يلي:

$$X \sim N(\mu,\sigma) \Leftrightarrow Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

ويعرف تابع الكثافة للمتغير العشوائي المعياري Z كما يلي:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty}$$

وهذا التوزيع بدوره يتمتع بما يتمتع به قانون التوزيع الطبيعي العام.

2-5-1 تابع التوزيع الطبيعي المعياري:

ان تابع التوزيع الطبيعي المعياري يعطى بالشكل التالي: $F(Z) = P(Z \leq z)$

ومنه:

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

ان احتمال الحادثة $(X \leq x)$ هو نفس احتمال الحادثة $(Z \leq z)$. حيث أن قيمة Z محسوبة من العلاقة $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ وهناك جداول احصائية توضح قيمة $F(Z)$ من أجل أي قيمة لـ $(z \geq 0)$ وتسمى بجداول التوزيع الطبيعي المعياري، وأن كل قيمة لـ $F(Z)$ ما هي الا احتمال أن يقع المتغير العشوائي المعياري ضمن المجال $[-\infty, \ Z]$ وهي أيضا احتمال أن يقع المتغير العشوائي الطبيعي x ضمن المجال $\left[-\infty, \frac{x-\mu}{\sigma}\right]$.

ويمثل تابع التوزيع الطبيعي المعياري بيانيا كما يلي:

2-5-2 خصائص قانون التوزيع الطبيعي المعياري:

- $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$
- $F(0) = 0.5$

ولاستخراج قيم $F(Z)$ من جداول التوزيع الطبيعي نشير الى أن قيم Z واردة في العمود الأول والسطر الأول، حيث أن العمود الأول يتضمن قيم Z الصحيحة وذات المرتبة الواحدة بعد الفاصلة، أما السطر الأول فيتضمن قيم $\boldsymbol{Z}$ ذات المرتبة الثانية بعد الفاصلة وفي نقطة التقائهما نحصل على $F(Z)$ أي على $P(Z \leq z)$.

مثال:

لإيجاد قيمة التابع $\boldsymbol{F(Z)}$ لما $\boldsymbol{Z - 1.57}$ نبدأ بالبحث عن القيمة 1.5 في العمود الاول ونتحرك في السطر المناظر لهذا العمود حتى نحصل على العمود 0.05، وتكون القيمة التي نحصل عليها هي القيمة الواقعة في السطر المقابل لـ 1.6 والعمود المقابل لـ 0.05 وهي: 0.9418 وهي موضحة في الجدول التالي:

	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.							.		
.							.		
1.00							.		
1.10							.		
1.20							.		
1.30							.		
1.40							.		
1.50	.	.	.	.	.	.	0.9418		
.									

أما اذا كانت z سالبة فان:

$$P(Z \leq -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - F(z)$$

6-2 - تقريب توزيع ثنائي الحدين الى التوزيع الطبيعي:

في حالة n كبيرة يمكن اعتبار توزيع ثنائي الحدين كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي. ويعطي التوزيعان نتائج أكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة أكثر.

ويمكن التقريب وفق الصيغة التالية:

$$B(n,P) \to \quad N\left(nP, \sqrt{nPq}\right)$$

$$n \longrightarrow \infty$$

ونكتب:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(a \le z \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz, \qquad z = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$$

والقاعدة العملية للتقارب هي: $n.P \ge 5$ و $n.P \ge 5$

وتوجد قواعد أخرى متبعة للتقريب منها:

- $nPq \ge 10$
- $n \ge 20 \quad , nq \ge 10 \quad , \quad nP \ge 10$

7-2- تقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي:

بما أنه توجد علاقة تربط توزيع بواسون بتوزيع ثنائي الحدين، وتوجد علاقة تربط توزيع ثنائي الحدين بالتوزيع الطبيعي فانه من المنطقي أن نقول توجد علاقة تربط توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي، ويتحقق ذلك عندما تكون λ كبيرة جدا أي: $\lambda \to \infty$. ويمكن التقريب وفق الصيغة التالية:

$$P(\lambda) \to N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$$

$$\lambda \to \infty$$

ونكتب:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} P\left(a \le \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

والقاعدة العملية للتقارب هي عندما تتجاوز المعلمة λ للمقدار 15 أي (λ≥15) فيما يعتمد بعض الاحصائيين كشرط للتقرب (λ≥10).

3- التوزيع الأسي

يعد التوزيع الأسي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة حيث يتم استخدامه لوصف المتغيرات العشوائية الموافقة للأزمنة بتعبير آخر هو توزع زمن الانتظار مثل:

- الزمن العشوائي لمدة بقاء المريض في المشفى؛

- الزمن العشوائي لصيانة جهاز ما؛

- الزمن العشوائي لتقديم خدمة في مركز خدمات معين؛

- الزمن العشوائي للرد على مكالمة هاتفية.

3-1 تعريف التوزيع الأسي:

نقول عن المتغير العشوائي X أنه يتبع التوزيع الأسي المعرف على المعلمة λ حيث $(\lambda > 0)$ اذا كان له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda . e^{-\lambda x} & , x>0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

3-2 خواص التوزيع الأسي:

حتى يكون هذا التوزيع دالة كثافة احتمالية يجب أن يحقق الخاصيتين التاليتين:

$$* f(x) > 0 \quad , \quad * \int_D f(x)dx = 1$$

الخاصية الأولى:

$f(x) > 0$ وهذه الخاصية صحيحة من أجل أي قيمة لـ X حيث $(\lambda > 0)$.

الخاصية الثانية: $\int_D f(x)dx = 1$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left[\frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda}\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

3-3 دالة التوزيع الاحتمالي للتوزيع الأسي:

يعبر عن دالة التوزيع الاحتمالية بصورة عامة كما يلي:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} f(u)du + \int_{0}^{x} f(u)du = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda u}\, du = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda u}\, du$$
$$= \lambda \left[\frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda u}\right]_0^x = 1\left[-e^{-\lambda u}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}$$

ومنه تعرف دالة التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

مثال:

لدينا x متغير عشوائي يمثل المدة الزمنية التي تستغرق في صيانة أحد الأجهزة الالكترونية بالدقائق، ودالة كثافتها الاحتمالية تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) - \begin{cases} 2.5e^{-2.5x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

المطلوب:

- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية.
- أوجد احتمال أن لا تقل مدة الصيانة عن 2 دقيقة.

الإجابة:

-إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية.

وفقا لتعريف دالة التوزيع تكون دالة التوزيع لهذا المتغير العشوائي وفقا للصيغة التالية:

$$F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{\;2.5x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

- حساب احتمال أن لا تقل مدة الصيانة عن 40 دقيقة.

$$P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2.5*2}) = e^{-5} = 0.0067$$

4-3 المميزات العددية للمتغير العشوائي الخاضع للتوزيع الأسي:

التوقع الرياضي:

من تعريف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي نحصل على:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x.\lambda e^{-\lambda x}dx$$

باستخدام قانون التكامل بالتجزئة لدينا:

$$\int_a^b u^1 v dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv^1 dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

لتكن: $v = x\lambda$ و $u' = e^{-\lambda x}$ معناه أن: $v' = \lambda$ و $u = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$

نعوض في (1) نجد:

$$\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} = \int_0^{+\infty} vu^1 dx = [-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$$

لدينا: $[-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} = 0$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-\lambda x} = 0$ و $0e^{-\lambda 0} = 0$ معناه أن:

$$\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda 0}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

أي أن التوقع الرياضي للتوزيع الأسي هو : $E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda}$

التباين والانحراف المعياري:

من علاقة التباين لدينا:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

نقوم بحساب: $E(X^2)$

$$E(X^2) - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

نستعمل التكامل بالتجزئة:

نضع: $u' = e^{-\lambda x}$ و $v = x^2\lambda$ أي :

$$v' = 2x\lambda u = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$$

معناه أن:

$$\int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{\;\lambda x}dx = \int_0^{+\infty} vu'\,dx = [-x^2e^{\;\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{\;\lambda x}\,dx$$

بالاعتماد على نفس العملية في الطريقة الأولى يمكن أن نبين أن:0= $[-x^2e^{-\lambda x}]_0^{+\infty}$

أي:

$$\int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx = 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx = 2\frac{\lambda}{\lambda}\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx$$
$$= \frac{2}{\lambda}.\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

ومنه:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

أي أن تباين التوزيع الأسي هو $\frac{1}{\lambda^2}$ وعليه يكون انحرافه المعياري يساوي $\frac{1}{\lambda}$.

مثال:

ليكن x متغير عشوائي مستمر دالة التوزيع لهذا المتغير معرفة كما يلي:

$$F(X) = P(X \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

المطلوب:

- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية.
- أحسب $P(x > 2)$.
- إيجاد التوقع الرياضي والتباين.

الإجابة:

- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية:

لدينا: $F(X)^{-} = f(x)$

ومنه نشتق دالة التوزيع لنحصل على دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي:

$$f(x) = \frac{dF(X)}{dx} = \begin{cases} 2e^{-2x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

- حساب $P(x > 2)$

الطريقة الأولى: عن طريق دالة الكثافة الاحتمالية

$$P(x > 2) = \int_{2}^{+\infty} 2e^{-2x} dx = [-e^{-2x}]_{2}^{+\infty} = \left(-e^{-2(+\infty)} + e^{-2*2}\right) = e^{-4}$$

الطريقة الثانية: عن طريق دالة التوزيع.

$$P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2*2}) = 1 - 1 + e^{-4} = e^{-4} = 0.018$$

حساب التوقع الرياضي والتباين

$$E(X) = \mu = \frac{1}{2} \quad , \quad V(X) = \frac{1}{4}$$

مثال: إذا كان لدينا X متغير عشوائيا يمثل مدة مكالمة هاتفية يتبع التوزيع الأسي بمتوسط قدره 4 دقائق، أحسب أحتمال أن تستغرق مكالمة هاتفية ما :

- أكثر من 4 دقائق.
- أقل من 4 دقائق.

الحل:

لدينا: $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$ وعليه تكون دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير وفقا للصيغة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

- حساب احتمال أن تكون مدة المكالمة أكثر من 4 دقائق:

$$P(X > 4) = \int_{4}^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx = \left[e^{-\frac{x}{4}}\right]_{4}^{+\infty} = e^{-1} = 0.367$$

- حساب احتمال أن تكون مدة المكالمة أقل من 4 دقائق:

$$P(X<4)=\int_0^4 \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=\left[e^{-\frac{x}{4}}\right]_0^4=-0.367+1=0.633$$

4- توزيع قاما:

1-4 دالة قاما:

نرمز لدالة قاما بالرمز $\Gamma(n)$ وتعرف وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$$

مثال:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx \quad , \quad \Gamma(2)=\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$$

بعض خصائص دالة قاما:

- $\Gamma(1)=1$

البرهان: انطلاقا من تعريف دالة قاما وبالتعويض بالقيمة 1 نجد:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=-\left|e^{-x}\right|_0^{+\infty}=1$$

- $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

البرهان: انطلاقا من التعريف ومن اجل $(n+1)$ نجد:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n+1-1}dx=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n}dx$$

باجراء عملية التكامل بالتجزئة نجد:

$$\Gamma(n+1)=\left|-e^{-x}x^{n}\right|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$$

نلاحظ أنه عندما $x\to+\infty$ فإن: $e^{-x}\to 0$ وعليه فإن:

$$\Gamma(n+1)=n\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx=n\Gamma(n)$$

- $\Gamma(n+1) = n!\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$

البرهان:

من الخاصية الثانية لدينا:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n-1) = (n-2)\Gamma(n-2)$$

$$\Gamma(n-2) = (n-3)\Gamma(n-3)$$

وعليه فإن:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3.2.1.\Gamma(1) = n!$$

2-4 تعريف توزيع قاما

توزيع قاما يمكن أن يعطى وفقا لثلاث صيغ مختلفة وذلك حسب المعالم التي يعرف على أساسها التوزيع كما يلي:

توزيع قاما المعرف بالمعلمة n

نقول عن المتغير العشوائي المتصل X بأنه يخضع لتوزيعا قاما بمعلمة $n > 0$ إذا كانت دالته الاحتمالية من الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n)} e^{-x} x^{n-1} & , \quad x > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} , \end{cases}$$

ملاحظة: حتى يكون هذا التوزيع دالة كثافة احتمالية يجب أن يحقق الشرطين التاليين:

- $f(x) > 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

بالنسبة للشرط الأول محقق دوما من اجل $x > 0$.

بالنسبة للشرط الثاني نتأكد منها عن طريق حساب التكامل:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-x} x^{n-1}\, dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1}\, dx$$

نلاحظ أن : $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1}\, dx = \Gamma(n)$ وعليه فإن:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-x} x^{n-1}\, dx = \frac{1}{\Gamma(n)} . \Gamma(n) = 1$$

4-3 المميزات العددية للمتغير العشوائي الخاضع لتوزيع قاما:

التوقع الرياضي:

$$E(X) - n$$

البرهان:

لدينا: $E(X) = \int_D xf(x)dx$

بتعويض $f(x)$ نجد:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x.\frac{1}{\Gamma(n)} e^{-x} x^{n-1} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = \frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = n$$

التباين:

$$V(X) = n$$

البرهان:

لدينا: $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

نحسب $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-x} x^{n-1} dx$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n+1} = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = \frac{n.(n+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = n(n+1)$$

بالتعويض في علاقة التباين نجد:

$$V(X) = n^2 + n - n^2 = n$$

توزيع قاما المعرف بالمعلمتين n, β:

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنع يتبع توزيع قاما المعرف بالمعلمتين n, β إذا كانت كثافته الاحتمالية تعطى بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^n \Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x/\beta} \quad : x > 0 \ , \ n,\beta > 0$$

وفي هذه الحالة يكون التوقع الرياضي والتباين لتوزيع قاما يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = n.\beta \qquad , \quad V(X) = n.\beta^2$$

توزيع قاما المعرف بالمعلمتين $n,\ \beta = \frac{1}{\lambda}$

نقول عن متغير عشوائي مستمر X أنع يتبع توزيع قاما المعرف بالمعلمتين $n, \beta = \frac{1}{\lambda}$ إذا كانت كثافته الاحتمالية تعطى بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}; \quad x > 0 \ , n, \beta = \frac{1}{\lambda} > 0$$

وفي هذه الحالة يكون التوقع الرياضي والتباين لتوزيع قاما يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \frac{n}{\lambda} \qquad , \quad V(X) = \frac{n}{\lambda^2}$$

4-4 دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع قاما:

تعرف دالة التوزيع لتوزيع قاما بالصيغة التالية:

$$F(X) = P(X \le x_i) = \int_0^{x_i} f(x)dx = \int_0^{x_i} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{x_i} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$$

مثال:

إذا كانت مدة صلاحية منتوج معين بالسنوات تتبع التوزيع الاحتمالي التالي:

$$f(x) = \begin{cases} cx\,e^{-2x} & , \ x \ge 0 \\ 0 & , \text{خلال ذلك} \end{cases}$$

حيث c ثابت.

المطلوب:

- أوجد قيمة الثابت c.

- نختار منتوج بصورة عشوائية ما احتمال أن تكون مدة صلاحيته أقل من 5 أشهر.

- أحسب التوقع الرياضي والتباين.

الحل:

نلاحظ أن X يتبع توزيع قاما المعرف بالمعلمتين $\lambda = 2\ ,\ n = 2$ وعليه نكتب صيغة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}$$

نلاحظ أن: $c = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} = \frac{4}{\Gamma(2)} = \frac{4}{1} = 4$

- حساب احتمال أن تكون مدة صلاحيته أقل من 5 أشهر

نلاحظ أن مدة 5 أشهر تعادل $\frac{5}{12}$ سنة أي نحسب الاحتمال $P\left(X \leq \frac{5}{12}\right)$

$$P\left(X \leq \frac{5}{12}\right) = \int_0^{\frac{5}{12}} 4xe^{-2x} dx = 0.018$$

- حساب التوقع الرياضي والتباين:

التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{n}{\lambda} = 1$

التباين: $V(X) = \frac{n}{\lambda^2} = \frac{2}{4}$

5- توزيع بيتا:

توزيع بيتا مشتق من دالة بيتا أو ما يسمى في بعض الأحيان تكامل بيتا حيث يعتبر واحدا من التوزيعات الاحتمالية المستمرة المهمة وله تطبيقات كثيرة مثل الرقابة على الإنتاج.

5-1 دالة بيتا وخواصها:

تعرف دالة بيتا لأي عددين موجبين m, n ، والتي يرمز لها بالرمز $\beta(m,n)$ وفقا للصيغة الرياضية التالية:

$$\beta(m\ ,n) = \int_0^1 X^{m-1}(1-X)^{n-1} dx \quad : \quad m,n > 0$$

بعض خصائص دالة بيتا:

- الدالة بيتا متماثلة: أي أن $\beta(m,n) = \beta(n\ ,m)$
- العلاقة بين دالة بيتا ودالة قاما كما يلي:
$$\beta(m\ ,n) = \frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$
- إذا كانت $n = m = \frac{1}{2}$ فإن: $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$
- إذا كانت $n = m = 1$ فإن: $\beta(1,1) = 1$

2-5 دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا:

إذا كان لدينا المتغير العشوائي المستمر X يتبع توزيع بيتا المعرف بالمعلمتين m,n فإن دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(m,n)} X^{m-1}(1-X)^{n-1} & , \ 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

شروط دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا:

حتى يكون هذا التوزيع دالة كثافة احتمالية يجب أن يحقق الشرطين التاليين:

- $f(x) > 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

- بالنسبة للشرط الأول نلاحظ أنه دوما محقق من أجل $0 \leq X \leq 1$

- بالنسبة للشرط الثاني نتأكد منه من خلال حساب تكامل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا.

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\beta(m,n)} X^{m-1}(1-X)^{n-1}dx = \frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^1 X^{m-1}(1-X)^{n-1}dx$$

نلاحظ أن: $\int_0^1 X^{m-1}(1-X)^{n-1}dx = \beta(m,n)$ وعليه فإن:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\beta(m,n)}{\beta(m,n)} = 1$$

ملاحظة:

يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا بدلالة دالة قاما وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\Gamma(n)} X^{m-1}(1-X)^{n-1} & , \ 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

3-5 دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع بيتا:

تعرف دالة التوزيع لتوزيع بيتا بالصيغة التالية:

$$F(X) = P(X \leq x_i) = \int_0^{x_i} \frac{1}{\beta(m,n)} X^{m-1}(1-X)^{n-1}dX = \frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^{x_i} X^{m-1}(1-X)^{n-1}dX$$

4-5 المميزات العددية للمتغير العشوائي الخاضع لتوزيع بيتا:

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\frac{m}{m+n}$$

البرهان:

لدينا: $E(X)=\int_0^1 xf(x)dx$

$$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 X.\frac{1}{\beta(m,n)}X^{m-1}(1-X)^{n-1}dX=\frac{1}{\beta(m,n)}\int_0^1 X^m(1-X)^{n-1}dx \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ولدينا: $\int_0^1 X^m(1-X)^{n-1}dx=\beta(m+1,n)$

ولدينا من خصائص العلاقة بين دالة بيتا ودالة قاما

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\Longrightarrow\frac{1}{\beta(m,n)}=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\Gamma(n)}$$

$$\beta(m+1,n)=\frac{\Gamma(m+1).\Gamma(n)}{\Gamma(m+1+n)}$$

بالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$E(X)=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\Gamma(n)}.\frac{\Gamma(m+1).\Gamma(n)}{\Gamma(m+1+n)}$$

بتطبيق الخاصية الثانية من دالة قاما نجد:

$$E(X)=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\Gamma(n)}.\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma(m+1+n)}=\frac{m\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(m+n)}{(m+n)\Gamma(m+n)\Gamma(m)\Gamma(n)}$$

بإجراء بعض الاختزالات نحصل على:

$$E(X)-\frac{m}{m+n}$$

التباين:

يعطى التباين لتوزيع بيتا بالعلاقة التالية:

$$V(X)=\frac{m.n}{(m+n+1)(m+n)^2}$$

البرهان:

لدينا: $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

نقوم بحساب $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) fx = \int_0^1 X^2 \frac{1}{\beta(m,n)} X^{m-1}(1-X)^{n-1} dX = \frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^1 X^{m+1}(1-X)^{n-1} dX$$

نلاحظ أن: $\int_0^1 X^{m+1}(1-X)^{n-1} dX = \beta(m+2,n)$

$$\frac{1}{\beta(m,n)} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m).\Gamma(n)}$$

$$\beta(m+2,n) = \frac{\Gamma(m+2).\Gamma(n)}{\Gamma(m+2+n)}$$

بالتعويض نجد:

$$E(X^2) - \frac{\Gamma(m+2)\Gamma(n).\Gamma(m+n)}{\Gamma(m+n+2).\Gamma(m).\Gamma(n)} - \frac{(m+1)m\Gamma(m)\Gamma(m+n)}{(m+n+1)(m+n)\Gamma(m+n)\Gamma(m)}$$

بإجراء الاختزالات نجد:

$$E(X^2) = \frac{(m+1)m}{(m+n+1)(m+n)}$$

بالتعويض في علاقة التباين نجد:

$$V(X) = \frac{(m+1)m}{(m+n+1)(m+n)} - \left(\frac{m}{m+n}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{(m+n)(m+1)m - m^2(m+n+1)}{(m+n+1)(m+n)^2}$$

$$= \frac{m^3 + nm^2 + m^2 + nm - m^3 - nm^2 - m^2}{(m+n+1)(m+n)^2} = \frac{n.m}{(m+n+1)(m+n)^2}$$

مثال:

ليكن X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته تأخذ الصيغة التالية:

$$f(X) = \begin{cases} \lambda X^3(1-X)^2 & , \ 0 \le X \le 1 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

- أوجد قيمة λ.

- أحسب $P(X \leq 0.25)$
- أحسب توقع وتباين المتغير العشوائي X

الحل:

نلاحظ أن المتغير العشوائي يتبع توزيع بيتا المعرف بالمعلمتين m, n والذي يأخذ الصيغة التالية:

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(m\,,n)} X^3(1-X)^2 & , \quad 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

نلاحظ أن:

$$\begin{cases} m-1=3 \Longrightarrow m=4 \\ n-1=2 \Longrightarrow n=3 \\ \lambda = \dfrac{1}{\beta(m\,,n)} = \dfrac{1}{\beta(4,3)} \end{cases}$$

$$\beta(4,3) = \int_0^1 X^3(1-X)^2 dX = \int_0^1 (-X^5 + X^3) dX = \left[-\frac{X^6}{6} + \frac{X^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

ومنه:

$$\lambda = \frac{1}{\beta(4,3)} = 12$$

- حساب $P(X \leq 0.25)$:

$$P(X \leq 0.25) = \int_0^{0.25} 12X^3(1-X)^2 dX = 12\left[-\frac{X^5}{6} + \frac{X^4}{4} \right]_0^{0.25} =$$

- حساب توقع وتباين المتغير العشوائي X

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \frac{m}{m+n} = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$$

التباين:

$$V(X) = \frac{m*n}{(m+n+1)(m+n)^2} = \frac{4*3}{(4+3+1)(4+3)^2} = \frac{12}{392}$$

تمارين محلولة

التمرين الأول: إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا خاضعا لقانون التوزيع المنتظم في المجال $[-3,\ 5]$.

المطلوب:

- حدد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع.
- أحسب الاحتمال $P(-1 < X < 2)$

التمرين الثاني: تفيد احصائيات السنوات السابقة في جامعة برج بوعريريج أن نقاط الطلبة في مقياس الاحصاء الرياضي تتوزع توزيع طبيعي بمتوسط قدره 7 نقاط، وانحراف معياري يقدر بـ 2 نقاط.

المطلوب:

1- ما هي طبيعة ونوع المتغير العشوائي المدروس؟ اكتب الصيغة الرياضية لتوزيع هذا المتغير.
2- أحسب نسبة الطلبة الذين: تقل نقاطهم عن المعدل المتوسط، تقل نقاطهم عن 3 نقاط، تفوق نقاطهم 10، ما بين 7 و11 نقطة.
3- حدد المجال الذي يتراوح بين حديه نقاط الطلبة 90%، $P(X < x) = 0.9772$

التمرين الثالث: اذا كان الدخل الشهري للأسر في احدى المناطق يتبع توزيع طبيعي بمتوسط قدره 80 الف د.ج وانحراف معياري قدره30 ألف دينار جزائري.

المطلوب:

1- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60 ألف دينار جزائري؟
2- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول؟

التمرين الرابع: إذا افترضنا أن عمر المصابيح الكهربائية يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 1000 ساعة

المطلوب:

- أحسب احتمال أن يعمل أحد المصابيح أكثر من 2000 ساعة.
- أحسب احتمال أن يحترق أحد المصابيح خلال 100 ساعة.

التمرين السابع: إذا كان لدينا X متغير عشوائي مستمر يمثل عدد سنوات تسديد قرض متوسط الأجل، فإذا علمت بأن قيمة المعلمتين $n\ ;\ \beta$ تتبع توزيع قاما بالمقدار 2.

المطلوب:

- تحديد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع.
- إيجاد التوقع الرياضي والتباين.
- تحديد دالة التوزيع.
- احتمال أن يسدد القرض في 5 سنوات على الأكثر.

التمرين الثامن: إذا كان لدينا X متغير عشوائي يمثل نسبة نجاح الطلبة في السنة الأولى جامعي، فإذا كانت لدينا المعلمتين m, n تتبع توزيع بيتا حيث أن $m = 3, n = 2$.

المطلوب:

- تحديد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع.
- أحسب احتمال أن تكون نسبة النجاح لا تتجاوز 25%.
- أحسب التوقع الرياضي والتباين لنسبة النجاح.

الحلول

حل التمرين الأول:

- تحديد دالة الكثافة الاحتمالية

إن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم تعطى بالصيغة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad a \le X \le b \\ 0 & \text{خلاف ذلك}, \end{cases}$$

بتعويض قيمتي a, b نجد أن:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-(-3)} = \dfrac{1}{8} & , \quad -3 \le X \le 5 \\ 0 & \text{خلاف ذلك}, \end{cases}$$

- حساب $P(-1 < X < 2)$

$$F(-1 < X < 2) = \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} \frac{1}{8} dx = \left[\frac{x}{8}\right]_{-1}^{2} = \frac{2}{8} - \frac{-1}{8} = \frac{3}{8}$$

حل التمرين الثاني:

1- طبيعة ونوع المتغير المدروس: متغير كمي مستمر، وصيغته الرياضية تكتب على الشكل التالي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty}$$

2- حساب الاحتمالات:

- نسبة الطلبة الذين الذين تقل نقاطهم عن المعدل المتوسط:

$$P(X < 7) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{7-7}{2}\right) = P(z < 0) = F(0) = 0.5$$

ومنه نسبة الطلبة الذين تقل نقاطهم عن المعدل المتوسط هو 50%

- نسبة الطلبة الذين تقل نقاطهم عن 03:

$$P(X < 3) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{3-7}{2}\right) = P(z < -2) = 1 - F(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

ومنه النسبة هي: 2.28%.

- نسبة الطلبة الذين تفوق علامتهم 10:

$$P(X > 10) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{10-7}{2}\right) = P(z > 1.5) = 1 - F(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

- نسبة الطلبة الذين تتراوح نقاطهم بين 7 و11:

$$P(7 < X < 11) = P\left(\frac{7-7}{2} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{11-7}{2}\right) = P(0 < z < 2) = F(2) - F(0)$$
$$= 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

ومنه النسبة هي: 47.72%.

3- تحديد المجال الذي يتراوح بين حديه 90% من العلامات:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = 0.90 = P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) = P(-z \le Z \le z) = 2F(z) - 1$$
$$= 0.9$$

$$F(z) = \frac{0.9+1}{2} = 0.95$$

من الجداول الاحصائية نجد: $z = 1.65$ ومنه:

$$\frac{x_1-\mu}{\sigma} = -1.65 \Rightarrow x_1 = \mu - 1.65\sigma = 7 - 1.65 \times 2 = 3.7$$
$$\frac{x_2-\mu}{\sigma} = 1.65 \Rightarrow x_2 = \mu + 1.65\sigma = 7 + 1.65 \times 2 = 10.3$$

ومنه 90% من الطلبة علامتهم تتراوح بين 3.7 و10.3

$$P(X < x) = 0.9776 = P(Z < z) = 0.9772$$

ومنه من الجداول الاحصائية نجد $z = 2$.

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = 2 \Rightarrow x = \mu + 2\sigma = 7 + 2 \times 2 = 11$$

حل التمرين الثالث:

1- حساب نسبة الأسر التي يقل دخلها عن 60ألف دينار جزائري:

$$P(X < 60) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{60-80}{30}\right) = P(z < -0.67) = 1 - F(0.67) = 1 - 0.7486 = 0.2514$$

2- حساب الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول:

$$P(X < x) = 0.975 = P(Z < z) = 0.975$$

من الجداول الاحصائية نجد: $z = 1.96$

$$\frac{x-80}{30} = 1.96 \Rightarrow x = \mu + 1.96\sigma = 80 + 1.96 \times 30 = 138.8$$

اذن الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول هو 138.8 ألف دينار جزائري.

حل التمرين الرابع:

نعلم أن :

$$E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda} = 1000 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1000}$$

ومنه تعرف دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الأسي وفقا للصيغة الرياضية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000}.e^{-\frac{x}{1000}} & , x>0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$$

ولدينا دالة التوزيع لهذا المتغير تأخذ الصيغة التالية:

$$P(X \le x) = F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{1000}}$$

- حساب احتمال أن يعمل أحد المصابيح أكثر من 2000 ساعة.

$$P(X > 2000) = 1 - P(X \leq 2000) = 1 - F(2000) = 1 - 1 + e^{-\frac{2000}{1000}} = 0.135$$

- أحسب احتمال أن يحترق أحد المصابيح خلال 100 ساعة.

$$P(X \leq 100) = F(100) = 1 - e^{-\frac{100}{1000}} = 0.1$$

حل التمرين الخامس:

- تحديد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع

بما أن X متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع قاما المعرف بالمعلمتين $n\,;\beta$ فإننا نكتب:

$$X \sim G(n, \beta) \rightarrow X \sim G(2,2)$$

وتكون دالة كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}; \quad x > 0 \;\; ,n, \beta = \frac{1}{\lambda} > 0$$

بالتعويض نجد:

$$f(x) = \frac{(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

ولدينا من خصائص دالة قاما فإن: $\Gamma(2) = 1$

$$f(x) = \frac{1}{4} x\, e^{-\frac{x}{2}}$$

- إيجاد التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = \frac{n}{\lambda} = \frac{2}{2} = 1 \qquad , \quad V(X) = \frac{n}{\lambda^2} = \frac{2}{4} = 0.5$$

- إيجاد دالة التوزيع:

تعرف دالة التوزيع لتوزيع قاما بالصيغة التالية:

$$
\begin{aligned}
F(X) = P(X \leq x_i) \\
&= \int_0^{x_i} f(x)dx \\
&= \int_0^{x_i} \frac{1}{4}x\, e^{-\frac{x}{2}}dx = \left[-\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{x_i} - \left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{x_i} = -\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 0 - e^{-\frac{x}{2}} + e^0 \\
&= -\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} + 1 = -e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}+1\right)+1
\end{aligned}
$$

ومنه دالة التوزيع تعرف كما يلي:

$$F(X) = P(X \leq x_i) = -e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}+1\right)+1$$

- حساب احتمال أن يسدد القرض في 5 سنوات على الأكثر.

$$P(X \leq 5) = F(5) = -e^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}+1\right)+1 = 0.712$$

حل التمرين السادس:

لدينا المتغير العشوائي X يتبع توزيع بيتا والمعرف على المعلمتين m,n والذي يعرف كما يلي:

$$X \sim \beta(m,n) \rightarrow X \sim \beta(3,2)$$

- تحديد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع.

تعطى دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X وفقا للصيغة الرياضية التالية:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{\Gamma(3+2)}{\Gamma(3).\Gamma(2)}X^{3-1}(1-X)^{2-1} & , \ 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & , \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{4!}{2!.1!}X^{2}(1-X)^{1} & , \ 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & , \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f(X) = \begin{cases} 12X^{2}(1-X)^{1} & , \ 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & , \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

- حساب احتمال أن تكون نسبة النجاح لا تتجاوز 25%.

$$P(X \leq 0.25) = \int_0^{0.25} f(x)dx = \int_0^{0.25} 12x^2(1-x)dx = 12\left[\frac{-x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^{0.25} = 0.051$$

- حساب التوقع الرياضي والتباين لنسبة النجاح.

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \frac{m}{m+n} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

التباين:

$$V(X) = \frac{m.n}{(m+n+1)(m+n)^2} = \frac{3*2}{(3+2+1)*(3+2)^2} = 0.0$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول: إذا كان العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة والمنتج بمعرفة إحدى شركات الكمبيوتر يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 1000 ساعة وانحراف معيارى 100 ساعة . فإذا تم اختيار وحدة مشغل من إنتاج هذه الشركة بطريقة عشوائية ، فأوجد احتمال أن يكون عمرها الافتراضى :

*بين 1000 ، 1150 ساعة .

* أقل من 930 ساعة .

*أكبر من 780 ساعة .

التمرين الثاني:

إذا كان Z متغير عشوائيا مستمر يتبع التوزيع الطبيعي المعياري

المطلوب: احسب ما يلي

$$P(1 \leq Z \leq 2) \quad P(-1.8 \leq Z \leq 0) \quad P(Z \leq 1.54)$$

التمرين الثالث: إذا كانت أطوال مجموعه من النباتات تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 168 سم و انحرافه المعياري 6 سم. أخذنا عشوائياً أحد النباتات. ما هو احتمال أن يكون طوله:

أقل من 159 سم؟

أكبر من 180 سم؟

واقعاً في الفترة(174 , 165) ؟

التمرين الرابع: إذا كان X متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع الأسي بمتوسط قدره 2.

المطلوب:

- تحديد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير.
- تحديد دالة التوزيع.
- احسب الاحتمالات:

$P(X \geq 2)$,$P(1 < X \leq 3)$

التمرين الخامس: إذا كان لدينا X متغير عشوائي مستمر توزيعه الاحتمالي يعطى بالصيغة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2e^{-2x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 \quad , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث c مقدار ثابت.

المطلوب:

- إيجاد قيمة المقدار الثابت c.
- أثبت أن هذا التوزيع دالة كثافة احتمالية.
- أحسب الاحتمال $P(X \leq 0.25)$

التمرين السابع: إذا كان لدينا X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالصيغة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx^3(1-x)^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \quad , & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث c مقدار ثابت.

المطلوب:

- إيجاد قيمة المقدار الثابت c.
- أثبت أنها فعلا دالة كثافة احتمالية.

- أحسب الاحتمال $P(X \leq 0.6)$
- أحسب التوقع الرياضي والتباين.

الفصل الثالث:

تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

1- تقريب توزيع ثنائي الحدين الى التوزيع الطبيعي:

في حالة n كبيرة يمكن اعتبار توزيع ثنائي الحدين كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي. ويعطي التوزيعان نتائج أكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة أكثر.

ويمكن التقريب وفق الصيغة التالية:

$$B(n,P) \rightarrow \quad N\left(nP, \sqrt{nPq}\right)$$

$$n \longrightarrow \infty$$

ونكتب:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(a \leq z \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz, \qquad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

والقاعدة العملية للتقارب هي: $n.P \geq 5$ و $n.P \geq 5$

وتوجد قواعد أخرى متبعة للتقريب منها:

- $nPq \geq 10$
- $nP \geq 10 \quad , nq \geq 10 \;, \quad n \geq 20$

2-تقريب توزيع بواسون الى التوزيع الطبيعي:

بما أنه توجد علاقة تربط توزيع بواسون بتوزيع ثنائي الحدين، وتوجد علاقة تربط توزيع ثنائي الحدين بالتوزيع الطبيعي فانه من المنطقي أن نقول توجد علاقة تربط توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي، ويتحقق ذلك عندما تكون λ كبيرة جدا أي: $\lambda \to \infty$. ويمكن التقريب وفق الصيغة التالية:

$$P(\lambda) \to N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$$

$$\lambda \to \infty$$

ونكتب:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

والقاعدة العملية للتقارب هي عندما تتجاوز المعلمة λ للمقدار 15 أي (λ≥15) فيما يعتمد بعض الاحصائيين كشرط للتقرب (λ≥10).

الفصل الرابع:

المتغيرات العشوائية

تمهيد:

ان نتائج جميع التجارب العشوائية تكون غير معروفة مسبقا الا أنها لا تخرج عن مجال معين من القيم، هذه النتائج تختلف باختلاف التجربة وبعدد مرات تكرارها.

فقد تكون نتائج التجربة نتائج كمية، مثلا عند القاء زهرة نرد مرة واحدة ونهتم بالرقم الظاهر على سطحها العلوي، فان النتيجة تكون كمية عددية ممثلة بأحد الارقام:1،2،3،4،5،6.

وقد تكون نتائج التجربة نتائج نوعية، فمثلا عند القاء قطعة نقدية مرة واحدة ونهتم بالنتيجة الظاهرة، هذه النتيجة قد تكون صورة أو كتابة، ونستطيع القول أن حصولنا على الصورة يمثل نجاحا يعبر عنه بالقيمة1، أما حصولنا على الكتابة يمثل فشلا ويعبر عنه بالقيمة0.

1- مفهوم المتغيرات العشوائية:

المتغير العشوائي قد يكون هو نتيجة التجربة العشوائية ذاتها، مثل نتيجة رمي حجر النرد. فنتيجة الرمية تكون متغيراً لأنها تتغير من محاولة إلى أخرى، وهذا التغير من محاولة إلى أخرى يكون عشوائياً لأنه يخضع في تغيره لعوامل العشوائية أو الصدفة، حيث لا يستطيع أحد أن يحدد نتيجة الرمية مسبقاً.

ان المتغير العشوائي هو مجموعة مقادير أو قيم لنتائج تجربة عشوائية يكون تحققها مقترنا باحتمالات معينة.

إذا كان لدينا Ω فراغ إمكانات لتجربة عشوائية، المتغير العشوائي عبارة عن تابع حقيقي يلحق بكل عنصر من عناصر فراغ إمكانات التجربة Ω قيمة حقيقية، نرمز عادة للمتغير العشوائي بحرف كبير .... $X; Y; Z$ كما نرمز للقيم التي يأخذها المتغير العشوائي بأحرف صغيرة .... $x,\ y\ ,z$.

مثال:

عند رمي قطعة نقدية مرتين، ونعرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الصور الظاهرة، وبالتالي يمكن التعبير عن قيم المتغير العشوائي من خلال الجدول التالي:

فراغ العينة	عدد الصور الظاهرة (X)
(ص ص)(FF)	2
(ك ك) (PP)	0
(ك ص)(FP)	1
(ص ك)(PF)	1

ومنه فالقيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي:$\{0,1,2\}$.

اما احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي فهو بالشكل: $P(X = x_i)$

$$P(X=0)=P(PP)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1)=P(PF)+P(FP)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=P(FF)=\frac{1}{4}$$

مثال:

عند رمي زهرة نرد مرة واحدة وبطريقة عشوائية، نعرف المتغير العشوائي بأنه X الرقم الظاهر، وبالتالي يمكن التعبير عن قيم المتغير العشوائي كما يلي:

$$X=\{1,2,3,4,5,6\}$$

اما احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي فهو بالشكل: $P(X = x_i)$

$$P(X=1)=\frac{1}{6}\ ,P(X=2)=\frac{1}{6}\ ;\ P(X=3)=\frac{1}{6}\ ;$$

$$P(X=4)=\frac{1}{6}\ ;\ P(X=5)=\frac{1}{6}\ ,P(X=6)=\frac{1}{6}$$

2- انواع المتغيرات العشوائية:

حسب طبيعة الظاهرة المدروسة يمكن تصنيف المتغيرات العشوائية الى نوعين:

- متغيرات عشوائية متقطعة(منفصلة).
- متغيرات عشوائية مستمرة (متصلة).

2-1 المتغير العشوائي المتقطع:

إذا كان المتغير العشوائي يأخذ عددا من القيم المنفصلة عن بعضها أو المتميزة أو المختلفة فيقال أن المتغير العشوائي متقطع، ففي المثال الخاص برمي قطعتي نقد نجد أن المتغير يأخذ ثلاث قيم متقطعة هي 0 , 1 , 2. وهي قيم متقطعة، وفي مثال رمي زهرة النرد نجد أن المتغير العشوائي يأخذ القيم 1،2،3،4،5،6 وهي قيم متقطعة كما يمكن إعطاء أمثلة متنوعة أخرى عن المتغير المتقطع كما يلي:

- عدد الاولاد الذكور في الأسرة المكونة من 3أولاد $X=\{0,1,2,3\}$.

- عدد المكالمات الهاتفية خلال فترة زمنية محددة .
- عدد الأخطاء المطبعية في مذكرة تخرج.

2-1-1-التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المتقطعة:

تعريف التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المتقطعة

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X هو دالة احتمالية $f(x)$ تعطي احتمالات قيم X المختلفة. وتعطى هذه الدالة في صورة جدول أو صيغة رياضية تبين قيم X المختلفة واحتمالات هذه القيم. وتعرف هذه الدالة بالمعادلة التالية:

$$f(x) = P(X = x)$$

فاذا كانت المتغيرة العشوائية المتقطعة X تأخذ القيم:

$$X = \{X = x_1, X = x_2, X = \cdots \dots X = x_n\}$$

وكان $P(X = x_i) = f(x_i)$ هو احتمال أن المتغيرة العشوائية تأخذ القيمة x_i، فيمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المتقطعة X كما يلي:

X	x_1	x_2	x_3	....	x_n	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	....	$f(x_n)$	1

نعبر عن احتمال قيمة معينة بـ $P(X = x_i)$ وأيضا $f(x_i)$ وتسمى الدالة $f(x)$ بدالة الكثافة الاحتمالية والتي تحقق الشرطين التاليين:

$$* \sum f(x_i) = 1 \qquad\qquad * \; 0 \leq f(x_i) \leq 1$$

مثال:

بالرجوع للمثال السابق والخاص بالمتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد الصور الظاهرة في تجربة القاء قطعة نقدية مرتين، فيمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي لـ X كما يلي:

X	0	1	2	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

مثال:

صندوق يحتوي على 12 كرية، منها 4 كرات حمراء نسحب بطريقة عشوائية 3 كرات، ونعرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

- عين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

الحل:

نلاحظ أن التجربة العشوائية هنا هي سحب ثلاث كرات دفعة واحدة ودون تحيز، وبذلك فإن فراغ إمكانات التجربة هو جميع الطرق المكنة والتي تمثل توفيقة لسحب 3 كرات من بين 12 كرية أي:

$$|\Omega| = C_{12}^{3} = \frac{12!}{(12-3)!\,3!} = 220$$

يمثل المتغير العشوائي X عدد الكرات المسحوبة، والقيم الممكنة لهذا المتغير تعطى على الشكل التالي:

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

نقوم بحساب الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي على النحو التالي:

$$P(X = x_1) = P(X = 0) = \frac{C_4^0 \times C_8^3}{220} = \frac{56}{220}$$

$$P(X = x_2) = P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_8^2}{220} = \frac{112}{220}$$

$$P(X = x_3) = P(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_8^1}{220} = \frac{48}{220}$$

$$P(X = x_4) = P(X = 3) = \frac{C_4^3 \times C_8^0}{220} = \frac{4}{220}$$

ومنه يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي لـ X كما يلي:

X	0	1	2	3	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	1

ملاحظة: نلاحظ أن هذا التوزيع الاحتمالي هو دالة كثافة احتمالية لأنه يحقق الشرطين المتعلقين بدالة الكثافة الاحتمالية وهما :

$$\sum P(X=x_i)=\sum f(x_i)=\frac{56}{220}+\frac{112}{220}+\frac{48}{220}+\frac{4}{220}=1$$

$$0<f(x_1)=\frac{56}{220}<1$$

$$0\leq f(x_2)=\frac{112}{220}\leq 1$$

$$0\leq f(x_3)=\frac{48}{220}\leq 1$$

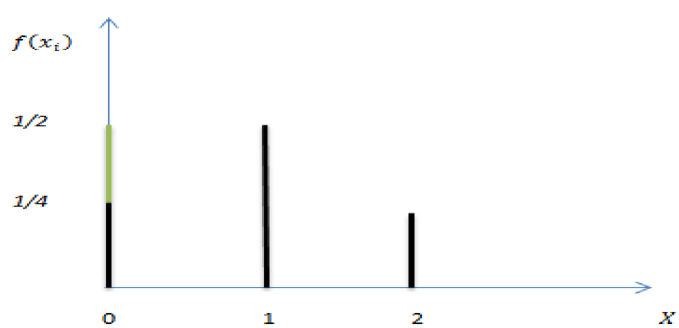
$$0\leq f(x_4)=\frac{4}{220}\leq 1$$

2-1-2- التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المتقطعة:

يمكن تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المتقطعة بيانيا برسم محورين متعامدين وتمثيل قيم المتغير العشوائي على المحور الافقي وتمثيل الاحتمالات على المحور العمودي ثم رفع كل قيمة من قيم المتغير بارتفاع الاحتمال المناظر لها.

مثال:

تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور الظاهرة عند القاء قطعة نقدية مرتين.



3-1-2 - دالة التوزيع $F(x)$ للمتغيرة العشوائية المتقطعة:

ان دالة التوزيع تشبه من حيث المبدأ التكرار المتجمع الصاعد النسبي، وهذه الدالة تقيس أو تبين احتمال أن يأخذ متغير عشوائي ما قيمة أصغر أو تساوي قيمة أو مقدار محددا.

إذا كان X متغيرا عشوائيا بدالة كثافة احتمالية $f(x)$ فان دالة التوزيع لهذا المتغير العشوائي هي احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ قيمة أقل من أو تساوي قيمة معينة x_i ويعبر عنها بالصيغة الرياضية التالية:

$$F(x) = P(X \le x_i)$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية $f(x_i)$ كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x_i) = \sum_{x \le x_i}^{x} f(x_i)$$

فاذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فان $F(x)$ يمكن تعريفها ضمن المجال $[-\infty\ ,\ +\infty]$ كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & , \quad x_2 \le x < x_3 \\ \cdots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & \quad x_n \le x < +\infty \end{cases}$$

ملاحظة1:

تتميز دالة التوزيع بالخصائص التالية:

- تكون دالة التوزيع $F(X)$ متزايدة دوما أي إذا كان لدينا: $x \le y$ فإن: $F(x) \le F(y)$.

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

ملاحظة2: إذا كانت $F(X)$ دالة التوزيع للمتغير العشوائي X فإن:

$$P(X > x) = 1 - F(X \le x) = 1 - F(x)$$

مثال: أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور الظاهرة عند القاء قطعة نقدية مرتين.

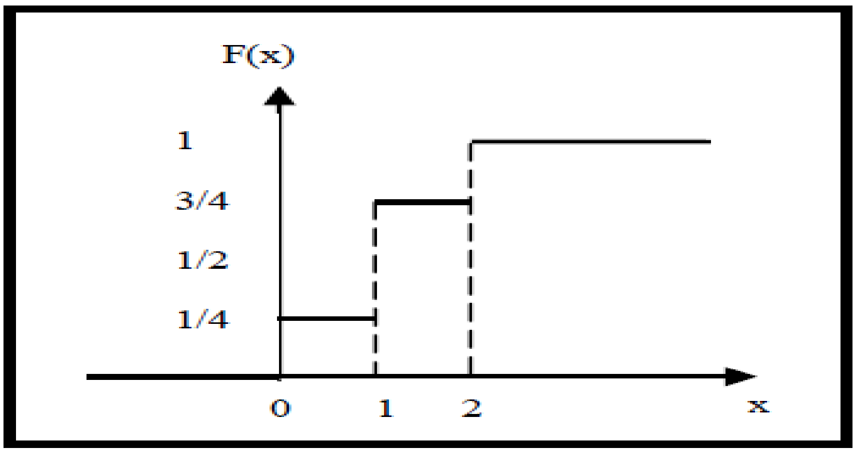
لدينا: جدول التوزيع الاحتمالي لـ X كما يلي:

$\sum P(X = x_i)$	2	1	0	X
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$P(X = x_i)$

وبالتالي فان دالة التوزيع $F(X)$ يمكن ادراجها كما يلي:

$$F(X)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ \frac{1}{4} & , \quad 0\le x<1\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4} & , \quad 1\le x<2\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1 & , \quad 2\le x\end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لدالة التوزيع كما يلي:



نلاحظ من الشكل البياني أن دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة تأخذ شكل سلم، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي1 .

2-2 المتغيرالعشوائي المتصل :

المتغير العشوائي المستمر أو المتصل هو ذلك المتغير الذي يأخذ قيما غير محدودة داخل مجال تغيره، من أجل هذا فإن وحدات قياس المتغيرة المستمرة تكون مستمرة كالزمن، الوزن، المسافة. نأخذ مثال علىها:

- الدخل الشهري لأحد الأشخاص؛
- النفقات اليومية لمجموعة من الأسر خلال فترة زمنية معينة.
- أطوال 20 طالب في تخصص معين؛
- علامات 10 طلبة في مقياس معين.

وتحسب الاحتمالات للمتغير المتصل باستخدام المساحات تحت منحنى الدالة أو المتغير.

2-2-1- التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المستمرة (المتصلة):

تعريف التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المستمرة:

هو مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرة العشوائية المستمرة والاحتمالات الملحقة بها ويسمى توزيعا كهذا بدالة الكثافة الاحتمالية، بحيث أن المساحة تحت هذا التوزيع تعطي الاحتمالات المناظرة للمجالات التابعة لها على المحور الأفقي، حيث أن تكامل دالة الكثافة الاحتمالية من a الى b حيث a<b يعطي احتمالا أن المتغير العشوائي سيأخذ أي قيمة في المجال من a الى b، ودونه لن يكون معرفا، وتكتب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة على الشكل التالي:

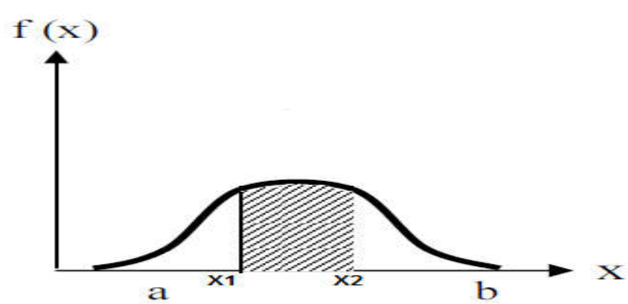
$$f(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in [a,b] \\ 0 & si \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

انطلاقا من هذا التعريف يمكننا أن نحسب قيمة الاحتمالات لأي مجال جزئي ينتمي الى مجال التعريف $[a,b]$، فاذا كان $[x_1,x_2]$ هو المجال الجزئي من مجال التعريف أي: $[x_1,x_2] \subset [a,b]$.

فإن: $$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

ويمكن تمثيل هذا التوزيع بيانيا من خلال الشكل البياني الموالي:

$$P[x \in [a,b]] = P(x_1 \le x \le x_2)$$



حيث يعكس هذا الاحتمال المساحة المحصورة تحت المنحنى $f(x)$ بين الخطين:

$X = x_1$ وَ $X = x_2$.

مثال:

لتكن لديك دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & si \quad x \in [0,2] \\ 0 & si \quad x \notin [0,2] \end{cases}$$

المطلوب: حساب الاحتمال التالي $P(1 \leq X \leq 1.5)$

$$P(1 \leq X \leq 1.5) = \int_1^{1.5} f(x)dx = \int_1^{1.5} 0.5xdx = 0.5\int_1^{1.5} xdx = 0.5\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{1.5} = 0.5\left[\frac{1.5^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] = 0.3125$$

خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة:

- الخاصية الاولى: $f(x) \geq 0$ بمعنى أن الاحتمال المقابل لأي مجال جزئي يكون موجبا.
- الخاصية الثانية: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ بمعنى أن تكامل دالة الكثافة الاحتمالية من اول مجال التعريف الى آخره تساوي1.
- الخاصية الثالثة: احتمال أن تأخذ المتغيرة العشوائية المستمرة X القيمة المحددة x يساوي 0 أي:

$$P(X = x) = 0$$

مثال:

لدينا التوزيع الاحتمالي التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & si \quad x \in [0,4] \\ 0 & si \quad x \notin [0,4] \end{cases}$$

المطلوب:

- أثبت أن هذا التوزيع الاحتمالي هو دالة كثافة احتمالية.
- أحسب: $P(1 \leq X \leq 3)$, $P(X = 1)$, $P(X \leq 1)$

الحل:

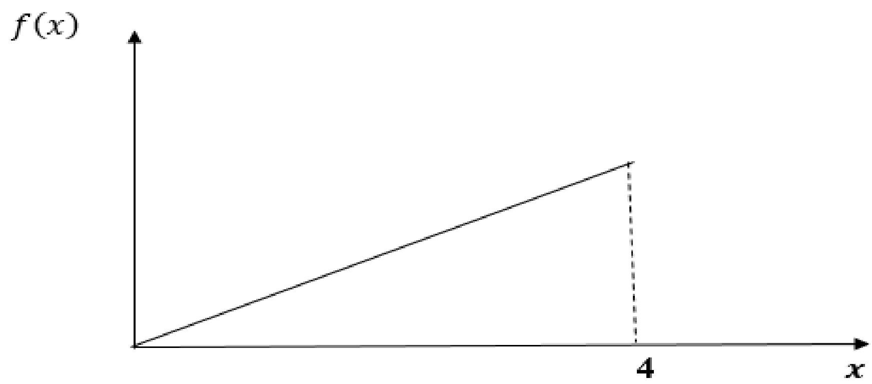
حتى يكون هذا التوزيع دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق الشرطين التاليين (الخاصية الأولى والثانية):

- $f(x) \geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

نلاحظ أن $f(x) \geq 0$ محقق دوما وذلك مهما كان المتغير X ينتمي إلى المجال $[0-4]$ ونأخذ مثلا:

$f(0) = \frac{1}{8}.0 = 0 \quad , f(1) = \frac{1}{8}.1 = \frac{1}{8} \quad , \quad f(2)\frac{1}{8}.2 = \frac{2}{8} \quad ,f(4) = \frac{1}{8}.4 = \frac{4}{8}$

ويمكن أن نلاحظ ذلك بيانيا كما يلي:



بالنسبة للشرط: $\int_{-\propto}^{+\propto} f(x)dx - 1$

$$\int_{-\propto}^{+\propto} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{4} \frac{1}{8}xdx = \frac{1}{8}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{4^2}{2} - 0\right) = 1$$

نلاحظ أن الشرطين محققين ومنه هذا التوزيع فعلا دالة كثافة احتمالية.

-حساب: $P(1 \leq X \leq 3)$, $P(X = 1)$,$P(X \leq 1)$

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} \frac{1}{8}dx = \frac{1}{8}\left|\frac{x^2}{2}\right|_1^3 = \frac{1}{2}$$

$$P(X \leq 1) = \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{8}dx = \frac{1}{8}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 1) = \int_{1}^{1} f(x)dx = \int_{1}^{1} \frac{1}{8}xdx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = 0$$

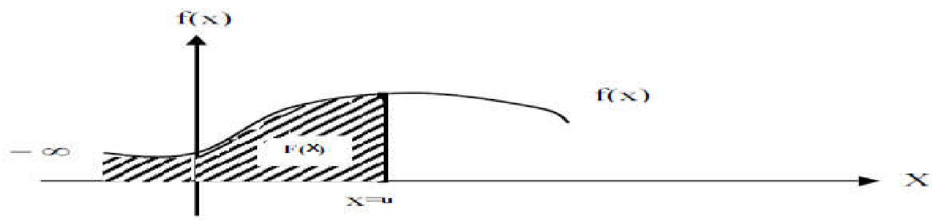
2-2-2- دالة التوزيع $F(X)$ للمتغيرة العشوائية المستمرة:

تعريفها:

تعرف دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المستمرة كما يلي:

$$F(X) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

ويمكن توضيحها بيانيا من خلال الشكل البياني التالي:



خواصها:

تتميز دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المستمرة بالخواص التالية:

- $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} (X) = 1$ حيث أن $x \in]-\infty, +\infty[$.
- الدالة $F(X)$ دالة متزايدة بالنسبة للمتغير العشوائي x، أي أن لكل $x_1 < x_2$ فان $F(x_1) \leq F(x_2)$
- اذا كان $x_1 < x_2$ فان: $P[x_1 \leq X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$
- اذا كانت $F(x)$ هي دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر فان:

$$P(X > x) = 1 - F(X \leq x) = 1 - F(x)$$

في حالة المتغيرة العشوائية المستمرة نهتم بحساب احتمال أن تقع X داخل مجال معين ولهذا فانه يمكن حساب هذا الاحتمال باستعمال دالة التوزيع عوضا عن حساب التكامل.

بفرض أن $[x_1,x_2]$ مجال جزئي من مجال التعريف $[a,b]$ فان:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P[X \leq x_2] - P[X \leq x_1] = F(x_2) - F(x_1)$$

مثال:

$$f(x) - \begin{cases} 0.5x & si \quad x \in [0,2] \\ 0 & si \quad x \notin [0,2] \end{cases}$$

- تحديد دالة التوزيع $F(X)$:

$$F(X) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} 0.5udu = 0.5\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x = 0.5\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{4}$$

- حساب الاحتمال $P[1 \leq x \leq 1.5]$ باستعمال دالة التوزيع:

$$P[1 \leq x \leq 1.5] = P[x \leq 1.5] - P[x \leq 1] = F(1.5) - F(1) = \frac{1.5^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125$$

2-2-3- العلاقة بين دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ ودالة التوزيع $F(X)$(قاعدة لايبنيز):

تدل هذه القاعدة الرياضية العامة على أن مشتقة دالة التوزيع ما هي الا دالة الكثافة الاحتمالية أي: $F^{'}(x) = f(x)$

ودالة الكثافة الاحتمالية ما هي الا تفاضل دالة التوزيع: $f(x) - \frac{dF(x)}{dx}$

مثال:

لتكن لديك دالة التوزيع التالية:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & si \quad x \in [0,2] \\ 0 & si \quad x \notin [0,2] \end{cases}$$

المطلوب: ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0x \in [0,2] \cdot \frac{dF(x)}{dx} = \frac{2.x}{4} = \frac{x}{2} \qquad , x \notin [0,2]$$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si \quad x \in [0,2] \\ 0 & si \quad x \notin [0,2] \end{cases}$$

3- المميزات العددية للمتغيرات العشو ائية:

نحتاج في بعض الأحيان الى معرفة بعض القيم العددية المميزة للمتغير العشوائي والتي تحدده بدقة ومن خلالها يتم معرفة الخطوط الرئيسية للتوزيع محل الدراسة.

3-1- التوقع الرياضي (الأمل الرياضي)

يعتبر من أكثر وأهم المميزات العددية استخداما لوصف مركز التوزيع الاحتمالي، والتوقع الرياضي للمتغير العشوائي x هو عبارة عن وسط حسابي مثقل بالقيم الاحتمالية المتعلقة بقيم هذا المتغير العشوائي، ويرمز له بالرمز $E(x)$.

ليكن لدينا المتغير العشوائي X الذي يأخذ القيم التالية $x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots, x_n$ والتي تقابلها الاحتمالات الموالية: $P_1, P_2, P_3 \dots \dots \dots P_n$ نعرف التوقع الرياضي أو الأمل الرياضي أو القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي X والذي نرمز له بالرمز $E(X)$ أو بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i . P_i}{\sum P_i}$$

وبما أن: $\sum P_i = 1$ فإن: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i$

3-1-1- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع:

يعرف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع بالصيغة الرياضية التالية:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

مثال:

ماهو العدد المتوقع لظهور الصورة عند رمي قطعة نقدية مرتين.

لدينا جدول التوزيع الاحتمالي لعدد مرات ظهور الصورة كما يلي:

$\sum P(X = x_i)$	2	1	0	X
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$P(X = x_i)$
1	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$X.P(X = x_i)$

$$E(x) = \sum P_i x_i = 1$$

3-1-2 - التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر:

يعرف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر بالصيغة الرياضية التالية:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

مثال:

لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & si \quad x \in [0,3] \\ 0 & si \quad x \notin [0,3] \end{cases}$$

- المطلوب: حساب $E(x)$

$$E(x) = \int_0^3 xf(x)dx = \int_0^3 x.\frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3}{2}$$

3-1-3- خصائص التوقع الرياضي:

الخاصية الأولى:

إذا كان $\boldsymbol{x}$ متغير عشوائي موجب فان: $E(x) \geq 0$

الخاصية الثانية:

التوقع الرياضي لعدد ثابت يساوي الثابت نفسه أي: $E(c) = c$

البرهان:

اذا كان X متغيرا عشوائيا يأخذ القيمة الثابتة c دالة كثافة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i) = P(X = x_i)$، حيث $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ فإن من تعريف التوقع الرياضي نحصل على:

$$E(c) = \sum_{i=1}^{n} c.f(x_i) = c.f(x_1) + c.f(x_2) + c.f(x_3) + \cdots \ldots + c.f(x_n)$$

$$= c[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots \ldots + f(x_n)]$$

$$= c.\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

ولدينا : $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$، إذن: $E(c) = c$

الخاصية الثالثة:

التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مضروبا في ثابت c يساوي الثابت مضروبا في التوقع الرياضي للمتغير العشوائي أي: $E(cx) = c.E(x)$

البرهان:

اذا كان X متغيرا عشوائيا يأخذ القيم التالية: $x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots x_n$ دالة كثافة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i) = P(X = x_i)$، نقوم بضرب قيم هذا المتغير في الثابث c ونحسب التوقع الرياضي $E(cX)$.

$$E(cX) = \sum_{i=1}^{n} cx_i.f(x_i) = cx_1.f(x_1) + cx_2.f(x_2) + cx_3.f(x_3) + \cdots + cx_1.f(x_n)$$

$$= c[x_1.f(x_1) + x_2.f(x_2) + x_3.f(x_3) \dots . + x_n.f(x_n)] = c.\sum_{i=1}^{n} x_i.f(x_i) = c.E(X)$$

الخاصية الر ابعة:

التوقع الرياضي للتوقع الرياضي يساوي التوقع الرياضي نفسه أي: $E[E(x)] = E(x)$

البرهان:

بما أن التوقع الرياضي يمثل قيمة ثابتة وليست قيمة عشوائية، فإن التوقع الرياضي للقيمة الثابتة يساوي القيمة الثابتة نفسها وذلك وفقا للخاصية الثانية من خواص التوقع الرياضي.

الخاصية الخامسة:

إذا كان لدينا x و y متغيرين عشوائيين مستقلين فان: $E(xy) = E(x).E(y)$

البرهان:

ليكن لدينا X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين حيث:

X يأخذ القيم التالية: $x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots x_n$ ودالة كثافة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i) = P(X = x_i)$.

Y يأخذ القيم التالية: $y_1, y_2, y_3 \dots \dots \dots y_m$ ودالة كثافة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(y_j) = P(Y = y_j)$.

إذن من تعريف التوقع الرياضي نجد:

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j f(x_i).f(y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i.f(x_i).\sum_{j=1}^{m} y_i.f(y_j)$$
$$= E(X).E(Y)$$

ملاحظة: يمكن تعميم هذه الخاصية على عدة متغيرات عشوائية مستقلة، وذلك كما يلي:

$E(X.Y \dots\dots Z) = E(X).E(Y)\dots\dots.E(Z)$

الخاصية السادسة:

التوقع الرياضي لمجموع متغير عشوائي ومقدار ثابت يساوي الى التوقع الرياضي للمتغير العشوائي مضافا اليه المقدار الثابت أي: $E(x+c) = E(x) + c$

البرهان:

اذا كان X متغيرا عشوائيا يأخذ القيم التالية: $x_1, x_2, x_3 \dots\dots\dots x_n$ دالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i) = P(X = x_i)$، نقوم بإضافة مقدار ثابت c لقيم هذا المتغير ونحسب التوقع الرياضي $E(c+X)$.

$E(c+X) = \sum_{i=1}^{n}(c+x_i).f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} cf(x_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = c\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + E(X) = C + E(X)$

الخاصية السابعة:

التوقع الرياضي لمجموع (الفرق) بين متغيرين عشوائيين يساوي مجموع (الفرق) بين توقعها الرياضي أي: $E(x \mp y) = E(x) \mp E(y)$

البرهان:

ليكن لدينا X و Y متغيرين عشوائيين حيث:

X يأخذ القيم التالية: $x_1, x_2, x_3 \dots\dots\dots x_n$ ودالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i) = P(X = x_i)$.

Y يأخذ القيم التالية: $y_1, y_2, y_3 \dots\dots\dots y_m$ ودالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(y_j) = P(Y = y_j)$.

إذن من تعريف التوقع الرياضي نجد:

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)f(x_i,y_i) \quad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i f(x_i,y_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j f(x_i,y_i)$$

ولدينا:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i f(x_i,y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i.\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i.f(x_i) = E(X)$$

حيث أن: $\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)$ هي دالة هامشية للمتغير العشوائي X والتي تساوي $f(x_i)$

ولدينا:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_i f(x_i,y_i) = \sum_{j=1}^{m} y_i.\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_j) = \sum_{j=1}^{m} y_j.f(y_j) = E(Y)$$

حيث أن: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_j)$ هي دالة هامشية للمتغير العشوائي Y والتي تساوي $f(y_j)$

ومن ذلك ينتج لدينا:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن :

$$E\ (X-Y) = E(X) - E(Y)$$

ملاحظة:

يمكن تعميم هذه الخاصية على عدة متغيرات عشوائية، وذلك كما يلي:

$$E(X+Y+\cdots\ldots+Z) = E(X)+E(Y)+\cdots\ldots.+E(Z)$$

مثال:

ليكن لدينا المتغير العشوائي المتقطع X توزيعه الاحتمالي يعطى من خلال الجدول التالي:

4	3	2	1	0	X
0.1	0.3	0.1	0.3	0.2	$f(x) = P(X = x_i)$

المطلوب:

- أحسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X.
- أحسب التوقع الرياضي للمتغيرات Y, Z, M حيث:

$$M = Y * X\ , Z = Y + X,\ \ Y = 3X + 5$$

الحل:

حساب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i.f(x_i) = 0*0.2+1*0.3+2*0.1+3*0.3+4*0.1 = 1.8$$

حساب التوقع الرياضي للمتغيرات Y, Z, M

انطلاقا من خواص التوقع الرياضي نجد:

$$E(Y) = E(3X + 5) = 3E(X) + 5 = 3 * 1.8 + 5 = 10.4$$

$$E(Z) = E(Y + X) = E(Y) + E(X) = 10.4 + 1.8 = 12.2$$

$$E(M) = E(Y * X) = E(Y) * E(X) = 10.4 * 1.8 = 18.72$$

2-3- التباين والانحراف المعياري:

تطرقنا في الفقرة السابقة الى التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) كأحد المقاييس والقيم المميزة للمتغيرات العشوائية، والتي تصف لنا مركز التوزيع الاحتمالي، الا أن هذا المقياس غير كافي لتحديد صفات التوزيع الاحتمالي، فربما يكون لدينا توزيعان احتماليان لهما نفس التوقع الرياضي إلا أنهما مختلفان، لذا لا بد من استعمال مقاييس أخرى تبين مدى التفاوت والتشتت بين قيم التوزيع الاحتمالي، وتدعى هذه المقاييس " مقاييس التشتت" والتي من أهمها وأكثرها استخداما التباين والانحراف المعياري.

تعريف التباين والانحراف المعياري:

يدعى التوقع الرياضي لمربع انحراف قيم المتغير العشوائي x عن توقعه الرياضي بتباين x ويرمز له بالرمز $V(x)$ أي:

$$\boldsymbol{V(x) = E[x - E(x)]^2}$$

أما الانحراف المعياري والذي نرمز له بالرمز $\boldsymbol{\sigma_x}$ فهو عبارة عن الجذر التربيعي لتباين المتغير العشوائي $\boldsymbol{x}$ أي:

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

باعتماد تعريف وخواص التوقع الرياضي نجد:

$$V(x) = E[x - E(x)]^2$$

$$= E[x^2 - 2x.E(x) + E(x)^2]$$

$$= E(x^2) - E\big(2x.E(x)\big) + E[E(x)]^2$$

$$= E(x^2) - 2.E(x).E[E(x)] + E(x)^2$$

$$= E(x^2) - 2.E(x).E(x) + E(x)^2$$

$$= E(x^2) - 2.E(x)^2 + E(x)^2$$

$$= E(x^2) - E(x)^2$$

- حالة متغيرعشوائي متقطع:

تباين المتغير العشوائي المتقطع يعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$V(x) = \sum \left(x_i - E(x)\right)^2 . P_i = \sum x_i^2 . P_i - E(x)^2$$

مثال:

نقوم برمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية، ونعرف المتغير العشوائي X عدد مرات ظهور الصورة.

المطلوب:

- حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

- أحسب التوقع الرياضي.

- احسب التباين والانحراف المعياري.

الحل:

تحديد فراغ إمكانات التجربة:

$$|E| = 2^3 = 8$$

$$E = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PPP, PPF, PFP, PFF\}$$

$$X = \{X/0 .1 . 2 . 3\}$$

ومنه لدينا جدول التوزيع الاحتمالي لعدد مرات ظهور الصورة كما يلي:

X	0	1	2	3	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$X.P(X = x_i)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$
$X^2.P(X = x_i)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$	3

حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} X.P(X=x_i)=\frac{3}{2}$$

حساب التباين والانحراف المعياري:

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$$\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{3}{4}}$$

- حالة متغيرعشوائي مستمر:

تباين المتغير العشوائي المستمر يعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$V(x)=\int (x-E(x))^2.f(x)dx=\int x^2f(x)\,dx-E(x)^2$$

مثال:

اذا كان لدينا التوزيع الاحتمالي التالي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & , \quad 0\le x\le 2\\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

المطلوب:

- أوجد التوقع الرياضي لهذا التوزيع.
- أوجد التباين والانحراف المعياري.

الحل:

حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=\int_0^2 xf(x)\,dx=\int_0^2 x.\frac{x}{2}\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{2^3}{6}-\frac{0^3}{6}=\frac{4}{3}$$

حساب التباين والانحراف المعياري:

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$E(X^2)=\int_0^2 x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2.\frac{1}{2}xdx=\int_0^2\frac{1}{2}x^3dx=\left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2=\frac{2^4}{8}-\frac{0^4}{8}=2$$

$$V(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{2}{9}}$$

خواص التباين:

الخاصية الأولى:

تباين العدد الثابت يساوي 0 أي: $V(C) = 0$.

البرهان:

إذا كان X متغيرا عشوائيا يأخذ القيمة الثابتة c دالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i) = P(X = x_i)$، حيث $i = 1, 2, 3, \dots\dots, n$ فإن من تعريف التباين نحصل على:

$$V(C) = E(C^2) - E(C)^2$$

ومن خواص التوقع الرياضي نعلم أن التوقع الرياضي للمقدار الثابت يساوي الثابت نفسه وبالتالي لدينا:

$V(C) = C^2 - (C)^2 = 0$.

الخاصية الثانية:

تباين متغير عشوائي مضروبا بعدد ثابت C يساوي مربع الثابت مضروبا في تباين المتغير العشوائي أي: $V(C.x) = C^2.V(x)$

البرهان:

إذا كان X متغيرا عشوائيا يأخذ القيم التالية: $x_1, x_2, x_3 \dots\dots\dots x_n$ دالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i) = P(X = x_i)$، نقوم بضرب قيم هذا المتغير في الثابث c ونحسب التباين $V(cX)$.

$$V(cx) = E[cx - E(cx)]^2$$

بتطبيق الخاصية الثالثة من خواص التوقع الرياضي نجد:

$$V(cx) = E[cx - cE(x)]^2 = E\left[c(x - E(x))\right]^2 = c^2.E[x - E(x)]^2 = c^2.V(X)$$

الخاصية الثالثة:

تباين متغير عشوائي زائد عدد ثابت C يساوي تباين المتغير العشوائي نفسه (أي أن التباين لا يتغير) ونكتب:

$$V(C+x)=V(x),\ V(C-x)=V(x)\ ,V(ax+b)=a^2V(x)$$

البرهان:

إذا كان X متغيرا عشوائيا يأخذ القيم التالية: $x_1,x_2,x_3\ldots\ldots\ldots x_n$ دالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i)=P(X=x_i)$، نقوم بإضافة مقدار ثابت C لقيم هذا المتغير ونحسب التباين $V(c+X)$.

$$V(c+x)=E[c+x-\ E(\ c+x)]^2=E[c+x-E(x)-c]^2=E[x-E(x)]^2=V(X)$$

$$V(c-x)=E[c-x-\ E(\ c-x)]^2=E[c-x-E(x)+c]^2=E[x-E(x)]^2=V(X)$$

الخاصية الر ابعة:

تباين مجموع متغيرين عشوائيين مستقلين يساوي الى مجموع تباينهما أي:

$$V(x+y)=V(x)+V(y)$$

البرهان:

ليكن لدينا X و Yمتغيرين عشوائيين حيث:

X يأخذ القيم التالية: $x_1,x_2,x_3\ldots\ldots\ldots x_n$ ودالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i)=P(X=x_i)$.

Y يأخذ القيم التالية: $y_1,y_2,y_3\ldots\ldots\ldots y_m$ ودالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(y_j)=P(Y=y_j)$.

إذن من تعريف التباين لدينا:

$$V(X+Y)=E[(x+y)-E(x+y)]^2$$

بتطبيق الخاصية السابعة من خواص التوقع الرياضي يمكن كتابة التباين وفقا للصيغة التالية:

$$V(X+Y)=E[(x+y)-E(x)-E(y)]^2$$

$$V(X+Y)=E\big[(x-E(x))+(y-E(y))\big]^2$$

نحاول تبسيط هذه العلاقة كما يلي:

$$V(X+Y)=E\left[(x-E(x))^2+2(x-E(x))(y-E(y))+(y-E(y))^2\right]$$

$$V(X+Y) = E\big(x-E(x)\big)^2 + 2E\big(x-E(x)\big)\big(y-E(y)\big) + E\big(y-E(y)\big)^2$$

نلاحظ أن الحد: $\big(x-E(x)\big)\big(y-E(y)\big)$ يساوي الصفر لأنه يمثل صيغة تمام التباين، ونحن نعلم أن $COV(X,Y) = 0$ عندما تكون كلا من X, Y مستقلتين وعليه نجد:

$$V(X+Y) = E\big(x-E(x)\big)^2 + 2E(0) + E\big(y-E(y)\big)^2$$

$$V(X+Y) = E\big(x-E(x)\big)^2 + E\big(y-E(y)\big)^2$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

ملاحظة: يمكن تعميم هذه الخاصية على أكثر من متغيرين عشوائيين مستقلين كما يلي:

$$V(X+Y+\cdots\ldots+Z) = V(X)+V(Y)+\cdots\ldots.+V(Z)$$

العزوم:

تستخدم العزوم والتي تمثل مفهوم فيزيائي في الأصل عادة لقياس التشتت، والالتواء والتفرطح والعزم لمتغير عشوائي هو تعميم للمميزات العددية له، وتعد العزوم من تطبيقات التوقع الرياضي وذلك لكونها تعرف بدلالة التوقع الرياضي. ويمكن أن نميز بين نوعين من العزوم بسيطة ومركبة.

العزوم البسيطة (الابتدائية):

يعرف العزم البسيط من الدرجة k للمتغير العشوائي X بأنه التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X مرفوعة الى القوة k. حيث $k = 1,2,3, \ldots\ldots\ldots$ ، ويعطى بالصيغة التالية:

$$m_k = E(X^k)$$

العزم البسيط للمتغيرالعشوائي المتقطع:

إذا كان X متغير عشوائي متقطع يأخذ القيم التالية: $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$ ودالة كثافة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i) = P(X = x_i)$ فإن العزم البسيط من الدرجة k، يعطى بالصيغة التالية:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \,.\, P(X = x_i)$$

مثال:

احسب العزم الأولي (البسيط) من الدرجة الثالثة للتوزيع الاحتمالي التالي:

X	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.3	0.2	0.5

الحل:

لدينا: $k = 3$ أي:

$$m_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 \cdot P(X = x_i)$$

ومنه:

X	1	2	3	$\sum$
$P(X = x_i)$	0.3	0.2	0.5	1
X^3	1	8	27	/
$X^3 . P(X = x_i)$	0.3	1.6	13.5	15.4

$$m_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 \cdot P(X = x_i) = 15.4$$

العزم البسيط للمتغير العشوائي المستمر:

إذا كان X متغير عشوائي مستمر ودالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة: $f(x_i) = P(X = x_i)$ فإن العزم البسيط من الدرجة k، يعطى بالصيغة التالية:

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} X^k . f(x)\, dx$$

مثال:

ليكن لدينا التوزيع الاحتمالي التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0,1] \\ 0 & si \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$

المطلوب: أحسب العزم البسيط من الدرجة الثالثة.

الحل:

لدينا: $k = 3$ أي:

$$m_3 = \int_0^1 X^3 . f(x)\, dx$$

ومنه:

$$m_3 = \int_0^1 X^3 . f(x)\, dx = \int_0^1 x^3 . 2x dx = \int_0^1 2x^4 dx = \left[2\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

ملاحظة:

عندما تكون $k = 0$ فإن: $m_0 = E(X^0) = E(1) = 1$

عندما تكون $k = 1$ فإن: $m_1 = E(X^1) = E(X)$

أي أن العزم الابتدائي من الدرجة الأولى ما هو إلا التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X

العزوم المركزية:

يعرف العزم المركزي من الدرجة k للمتغير العشوائي X بأنه عبارة عن التوقع الرياضي لانحراف كل قيمة من قيم المتغير العشوائي عن توقعها الرياضي مرفوعة إلى القوة k . حيث $k = 0,1,2,3, \dots \dots$ ، ويعطى بالصيغة التالية:

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k$$

العزم المركزي للمتغير العشوائي المتقطع:

إذا كان X متغير عشوائي متقطع يأخذ القيم التالية: $x_1, x_2, x_3 \dots \dots \dots x_n$ ودالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i) = P(X = x_i)$ فإن العزم المركزي من الدرجة k، يعطى بالصيغة التالية:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} [X - E(X)]^k . P(X = x_i)$$

مثال:

احسب العزم المركزي (البسيط) من الدرجة الرابعة للتوزيع الاحتمالي التالي:

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.2	0.2	0.4	0.2

الحل:

لدينا: $k = 4$ أي أن: $\mu_4 = \sum_{i=1}^{n}[X - E(X)]^4 . P(X = x_i)$

X	0	1	2	3	$\sum$
$P(X = x_i)$	0.2	0.2	0.4	0.2	1
$X.P(X = x_i) = E(X)$	0	0.2	0.8	0.6	1.6
$X - E(X)$	-1.6	-0.6	0.4	1.4	/
$[X - E(X)]^4$	6.553	0.129	0.025	3.841	/
$[X - E(X)]^4 . P(X = x_i)$	1.310	0.025	0.01	0.768	2.113

ومنه: $\mu_4 = \sum_{i=1}^{n}[X - E(X)]^4 . P(X = x_i) = 2.113$

العزم البسيط للمتغير العشوائي المستمر:

إذا كان X متغير عشوائي مستمر ودالة كثافتة الاحتمالية تعطى بالصيغة التالية: $f(x_i) = P(X = x_i)$ فإن العزم البسيط من الدرجة k، يعطى بالصيغة التالية:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [X - E(X)]^k . f(x)dx$$

مثال: ليكن لدينا التوزيع الاحتمالي التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0,1] \\ 0 & si \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$

المطلوب: - أحسب التوقع الرياضي لهذا التوزيع

- أحسب العزم المركزي من الدرجة الثانية.

الحل:

- حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x.2xdx = \int_0^1 2x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

- حساب العزم المركزي من الدرجة الثانية

لدينا: $k = 2$ أي:

$$\mu_2 = \int_0^1 [X - E(X)]^2 . f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 . 2xdx = 2\int_0^1 \left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right)dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2\right]_0^1 = \frac{5}{18}$$

ملاحظة:

عندما تكون $k = 0$ فإن: $\mu_0 = E[X - E(X)]^0 = E(1) = 1$

عندما تكون $k = 1$ فإن:

$$\mu_1 = E[X - E(X)]^1 = E(X) - E[E(X)]$$

$$= E(X) - E(X) = m_1 - m_1 = 0$$

عندما تكون $k = 2$ فإن:

$$\mu_2 = E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2]$$
$$= E(X^2) - E[2XE(X)] + E[E(X)^2] = E(X^2) - 2E(X).E(X) + E(X)^2$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 = m_2 - m_1^2 = V(X)$$

العلاقة بين العزوم البسيطة والعزوم المركزية:

توجد علاقة بين العزوم الابتدائية والعزوم المركزية يمكن إعطائها من خلال الصيغ الرياضية التالية:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

الدالة المولدة للعزوم:

نجد في بعض المسائل أن حساب العزوم يحتاج إلى عمليات جمع أو تكامل متكررة وأحيانا يكون من الصعب حسابها بالطرق العادية. وهو ما يتطلب طريقة أخرى لحساب العزوم عن طريق دالة تسمى الدالة المولدة للعزوم وهي تحتاج فقط إلى إجراء عملية تكامل أو جمع واحدة وأحيانا يكون حسابها سهلا ومباشرا وبعد ذلك يمكن توليد العزوم من هذه الدالة بتفاضلها أو إيجاد مفكوكها.

تعريف الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X بأنه عبارة عن التوقع الرياضي للدالة من الشكل e^{xt}. والتي تعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$M_X(t) = E(e^{xt})$$

حيث t: عدد حقيقي.

الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي المتقطع:

إذا كان X متغير عشوائي متقطع يأخذ القيم التالية: $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots x_n$ و دالة كثافة الاحتمالية تعطى بالصيغة $f(x_i) = P(X = x_i)$ فإن الدالة المولدة للعزوم لهذا المتغير تعطى بالصيغة التالية:

$$M_X(t) = E(e^{xt}) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} P_i$$

الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي المستمر:

إذا كان X متغير عشوائي مستمر و دالة كثافة الاحتمالية تعطى بالصيغة التالية: $f(x_i) - P(X - x_i)$ فإن الدالة المولدة للعزوم لهذا المتغير تعطى بالصيغة التالية:

$$M_X(t) = E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx_i} f(x) dx$$

ملاحظة: نقول أن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ للمتغير العشوائي X موجودة إذا كان يوجد عدد ثابت موجب وليكن b بحيث أن الدالة $M_X(t)$ منتهية لكل $|t| < b$.

خواص الدالة المولدة للعزوم:

الخاصية الأولى:

إذا كان $t = 0$ فإن: $M_X(0) = 1$

الخاصية الثانية:

إذا كان لدينا: $Y = aX + b$ فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي Y يمكن كتابته كما يلي:

$$M_{aX+b}(t) = E\left[e^{t(aX+b)}\right] = E\left[e^{taX}.e^{tb}\right] = e^{tb}.E\left(e^{taX}\right) = e^{tb}.M_X(at)$$

إذن:

$$M_{aX+b}(t) = e^{tb}.M_X(at)$$

الخاصية الثالثة:

إذا كان X وY متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $M_{X+Y}(t) = M_X(t).M_Y(t)$

ويمكن اثبات ذلك كما يلي:

$$M_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX}.e^{tY}\right] = E\left(e^{tX}\right).E\left(e^{tY}\right) = M_X(t).M_Y(t)$$

ملاحظة:

يمكن تعميم هذه الخاصية لأي عدد n من المتغيرات العشوائية المستقلة كالتالي:

$$M_{X_1+X_2+\dots\dots X_n}(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = E\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

أي أن الدالة المولدة للعزوم لمجموع عدد n من المتغيرات العشوائية المستقلة تساوي حاصل ضرب الدوال المولدة للعزوم لكل منها.

الخاصية الرابعة:

إذا كانت المتغيرات العشوائية المستقلة لها نفس الدالة المولدة للعزوم، فإن الدالة المولدة للعزوم لمجموع هذه المتغيرات العشوائية المستقلة تعطى بالصيغة التالية:

$$M_{\sum X_i}(t) = E\left[e^{t\sum X_i}\right] = \left[M_X(t)\right]^n$$

4- متباينة أو متراجحة شيبيشيف:

توجد متباينة أو متراجحة مشهورة ترجع إلى العالم الرياضي الروسي *chebyshev* تلعب دورا مهما في نظرية الاحتمالات، إذ تستخدم هذه النظرية في قياس التشتت حول التوقع الرياضي.

إذا كان X متغيرا عشوائيا وكانت $E(X)$ موجودة وكذلك $V(X)$ موجودة فإنهما لا يعطيان معلومات كافية عن هذا المتغير العشوائي، ولكن يمكن وضع تخمين عن بعض خواصه والتي من الممكن أن يكون مفيد، هذا التخمين يكون من خلال استخدام متباينة شيبيشيف.

من جهة أخرى نعلم أنه إذا عرفنا دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ للمتغير العشوائيX فإننا نستطيع حساب التباين والتوقع الرياضي، ولكن العكس غير صحيح بمعنى إذا كنا نعرف $E(X)$ و$V(X)$ فإننا لا نستطيع معرفة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X وبالتالي لا يمكن حساب الاحتمالات. إلا أنه يمكننا حساب حد أعلى أو حد أدني لهذه الاحتمالات وذلك باستخدام متباينة شيبيشيف.

تعريف متباينة شيبيشيف:

إذا كان X متغير عشوائي توقعه الرياضي $E(X) = \mu$ وانحرافه المعياريσ، فإنه لأي عدد حقيقي موجب ε تكون العلاقة التالية صحيحة:

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P(|X-\mu| < \varepsilon) \geq 1-\frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

بوضع : $\varepsilon = k\sigma$ يمكن كتابة العلاقة السابقة وفقا للصيغة التالية:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = P(|X-\mu| \leq k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

أو بعبارة أخرى:

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

تسمى هذه العلاقة بمتباينة أو متراجحة شيبيشيف.

أي أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة تختلف عن التوقع الرياضي μ بأقل من k انحراف معياري هو على الأقل $1-\frac{1}{k^2}$. وبلغة هندسية نقول في حالة متغير عشوائي متقطع أن $1-\frac{1}{k^2}$ على الأقل من المساحة تحت مدرج الاحتمال واقع بين $\mu - k\sigma$ و$\mu + k\sigma$. وفي حالة متغير عشوائي مستمر نقول أن مالا يقل عن $1-\frac{1}{k^2}$ من المساحة تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية واقع بين $\mu - k\sigma$ و$\mu + k\sigma$.

البرهان:

نحاول البرهان على هذه النظرية في حالة كون المتغير العشوائي مستمر

لدينا من تعريف التباين العلاقة التالية:

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (X-\mu)^2 f(x)dx$$

نقوم بتقسيم هذا التكامل الى ثلاثة أجزاء منفصلة كما يلي:

$$(-\infty, \mu - k\sigma) \ , (\mu - k\sigma \ , \mu + k\sigma), (\mu + k\sigma, +\infty)$$

يصبح لدينا:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (X-\mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (X-\mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} (X-\mu)^2 f(x)dx$$

نلاحظ أنه إذا قمنا بحذف الحد الأوسط فإنه يكون لدينا:

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (X-\mu)^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} (X-\mu)^2 f(x)dx \dots\dots\dots (1)$$

حيث أن: $|X-\mu| \geq k\sigma$ نلاحظ أيضا أن: $(X-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2$

عندما : $X \geq \mu + k\sigma$ أو $X \leq \mu - k\sigma$ فإن: $(X-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2$

بالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} k^2\sigma^2 f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} k^2\sigma^2 f(x)dx$$

بقسمة المتراجحة السابقة على $\frac{1}{k^2\sigma^2}$ نجد أن:

$$\frac{1}{k^2} \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} f(x)dx \dots\dots\dots (2)$$

بما أن المتراجحة (2) صحيحة فإنه يستلزم أن تكون المتراجحة التالية صحيحة:

$$\frac{1}{k^2} \geq \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} f(x)dx$$

إذن وباستعمال المتمم نجد أن:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} f(x)dx \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

وهو ما يبرهن متراجحة شيبيشيف.

لقد قمنا باثبات صحة هذه المتراجحة في حالة كون المتغير العشوائي X مستمر، ولكنها صحيحة كذلك في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة والبرهان عليها بنفس الطريقة مع استبدال التكامل بالمجموع.

مثال:

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الرحلات الجوية خلال فنترة زمنية معينة من مطار هواري بومدين، وإذا علمت أن متوسط عدد الرحلات هو 18 بانحراف معياري2، ما هو احتمال أن يقع المتغير العشوائي بين 22 و 14.

الحل:

نلاحظ هنا أننا لا نعلم التوزيع الذي يتبعه هذا المتغير العشوائي، وهو ما يقودنا الى متباينة شيبيشيف لحساب هذا الاحتمال.

لدينا:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

بتعويض μ وσ بما تساويه نجد:

$$\mu - k\sigma = 14 \Longrightarrow 18 - k2 = 14$$

$$\Longrightarrow -2k = 14 - 18$$

$$\rightarrow k = 2$$

عند $k = 2$ نحصل على:

$$P(14 < X < 22) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

أي أن احتمال أن يكون عدد الرحلات بين 14 و22 رحلة هو على الأقل 0.75.

مثال02:

إذا علمت أن متوسط أوزان عينة من منتوج معين هو 250غرام بانحراف معياري 16 غرام، باستخدام متباينة شيبيشيف ما هو الحد الأعلى لاحتمال أن يكون وزن منتوج من العينة أكبر من 32 غرام.

الحل:

من صيغة متباينة شيبيشيف لدينا:

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} = P(|X-250| \geq 16k) \leq \frac{1}{k^2}$$

نحسب قيمة k:

$$16k = 32 \rightarrow k = \frac{32}{16} = 2$$

أي أن: $P(|X-250| \geq 32) \leq \frac{1}{2^2} = 0.25$

5- نظرية (قانون) الأعداد الكبيرة:

نظرية الأعداد الكبيرة هي نظرية تستخدم في قياس التقارب الاحتمالي وتنص على أنه إذا قمنا بتجربة عشوائية بشكل مستقل عدد كبير من المرات فإن الاحتمال الواقعي لوقوع حدث معين يقترب أو يكاد ينطبق على الاحتمال المتوقع أي أنه إذا قمنا بحساب المتوسط الحقيقي لعدد مرات تكرار التجربة العشوائية فإن النتيجة المتحصل عليها يجب أن تكون قريبة من القيمة المتوقعة. وهناك نوعان رئيسيان من قانون الأعداد الكبيرة، وهما "القانون الضعيف للأعداد الكبيرة" و "القانون القوي للأعداد الكبيرة" وسوف نقتصر هنا فقط على القانون الضعيف للأعداد الكبيرة.

5-1 القانون الضعيف للأعداد الكبيرة:

إذاكانت لدينا متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة X_i حيث :

$i = 1,2,3, \dots \dots \dots \dots \dots n$ فإنه لأي عدد حقيقي موجب ε فإن هذه المتتالية من المتغيرات العشوائية تخضع لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف إذا حققت الشرط التالي:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad ;\varepsilon > 0$$

5-2 صيغة تشيبيشيف لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف:

اذا كان لدينا $X_1, X_2, X_3, \dots \dots \dots \dots \dots, X_n, \dots \dots$ متتالية متغيرات عشوائية مستقلة مثنى مثنى ولها نفس المتوسط الحسابي والتباين فإنه:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad ;\varepsilon > 0$$

هذه الصيغة يمكن كتابتها أيضا على الشكل التالي:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| > \varepsilon\right) = 0 \quad ;\varepsilon > 0$$

حيث أن:

$$E(X_i) = P_1X_1 + P_2X_2 + \cdots \ldots\ldots P_nX_n$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots \ldots\ldots X_n}{n}$$

البرهان: نحسب التوقع الرياضي للمتوسط الحسابي $\bar{X}$:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots \ldots\ldots X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}[E(X_1 + X_2 + \cdots \ldots\ldots X_n)]$$
$$= \frac{1}{n}[E(X_1) + E(X_2) + \cdots \ldots\ldots E(X_n)]$$

بما أن المتغيرات العشوائية لها نفس المتوسط الحسابي أي أن:

$$E(X_1) = E(X_2) = \cdots \ldots\ldots = E(X_n)$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}.nE(X_1) = E(X_1)$$

نحسب التباين للمتوسط الحسابي $\bar{X}$:

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots \ldots\ldots X_n}{n}\right) = V\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots \ldots\ldots X_n)\right]$$
$$= \frac{1}{n^2}[V(X_1) + V(X_2) + \cdots \ldots\ldots + V(X_n)] = \frac{1}{n^2}.nV(X_1) = \frac{V(X_1)}{n}$$

بالتعويض في متراجحة تشيبيشيف نجد:

$$P(|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma_{\bar{X}}^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{V(X_1)}{n.\varepsilon^2}$$

نلاحظ أن: $\lim_{n\to\infty} \frac{V(X_1)}{n.\varepsilon^2} = 0$ ومنه يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - 0 = 1$$

بما أن الاحتمال لا يمكن أن يتجاوز الواحد، فإننا نحصل على العلاقة المطلوبة التي تشير الى قانون الأعداد الكبيرة الضعيف.

مثال: ما هو عدد المتغيرات العشوائية المستقلة التي يمكن أخذها إذا أردنا أن يكون لدينا على الأقل احتمال قدره0.95 بأن الوسط الحسابي لهذه المتغيرات لن يختلف بأكثر من $\frac{\sigma}{10}$ عن وسطه الحسابي الحقيقي.

الحل: نعلم أن:

$$P(|\bar{X}-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

بأخذ : $\varepsilon = \frac{\sigma}{10}$ فإن:

$$P\left(|\bar{X}-\mu| \geq \frac{\sigma}{10}\right) = 1 - P\left(|\bar{X}-\mu| < \frac{\sigma}{10}\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\left(\sigma^2/100\right)}$$

ومنه:

$$P\left(|\bar{X}-\mu| < \frac{\sigma}{10}\right) \geq 1 - \frac{100}{n}$$

وحيث أن الاحتمال هو على الأقل 0.95 فإن:

$$1 - \frac{100}{n} \geq 0.95 \Rightarrow n = 2000$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

يحتوي اناء على 05 كريات مرقمة من 01 الى 05، نسحب كريتين من الإناء الواحدة تلوى الأخرى، ويمثل المتغير العشوائي X أكبر رقم سحب من الاناء.

المطلوب:

1- عين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X اذا كان السحب بدون ارجاع.
2- عين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X اذا كان السحب مع ارجاع.

التمرين الثاني:

أ- نرمي زهرتي نرد متماثلتين مرة واحدة وبصفة عشوائية، ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع الرقمين الظاهرين.

المطلوب:

1- حدد مجال تعريف X وطبيعته.
2- أحسب التوزيع الاحتمالي لـ X؟ تأكد أنه دالة كثافة احتمالية.
3- مثل بيانيا هذا التوزيع.
4- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.
5- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X=1)$،$P(X=4)$،$P(X \leq 4)$،$P(X<4)$

ب- نعرف على نفس التجربة العشوائية المتغير العشوائي Y الذي يمثل أكبر النتيجتين الظاهرتين.

المطلوب:

1- أجب على نفس الأسئلة(1،2،3،4) الموجود في الجزء أ والمتعلقة بالمتغير العشوائيY.
2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(Y)$؟ ثم مثلها بيانيا.
3- أحسب الاحتمالية التالية باستعمال التوزيع الاحتمالي (P_i) ودالة التوزيع الاحتمالية $F(Y)$:

$P(Y = 1)$، $P(Y < 3)$،$P(Y \leq 3)$،$P(1 < Y \leq 4)$.

التمرين الثالث:

في محفظة 07 كتب منها 04 كتب خاصة بالإحصاء والباقي خاصة بالرياضيات، نسحب كتابين من المحفظة وبطريقة عشوائية ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد كتب الاحصاء المسحوبة.

المطلوب:

1- ماهي طبيعة ونوع هذا المتغير؟
2- عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟ تأكد أنه دالة كثافة احتمالية.
3- ما هو احتمال أن ضمن الكتابين المسحوبين كتاب واحد على الأقل خاص بالإحصاء.
4- أحسب كلا من: $E(X)$، m_2، ثم استنتج $V(X)$.
5- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$.

التمرين الرابع:

ليكن X متغير عشوائي مستمر يمثل أحد مبيعات المؤسسة في اليوم الواحد، أقصى طاقة انتاجية لها هي 100 وحدة يوميا، ودالة الكثافة الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = x/5000.$$

المطلوب:

1- تأكد أن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية.
2- ما هو احتمال أن تحقق المؤسسة حجما من المبيعات: يفوق95 وحدة، يقل عن 50 وحدة، ما بين 40 و80 وحدة؟
3- أحسب الحجم المتوسط اليومي للمبيعات والانحراف المعياري؟
4- أوجد دالة التوزيع $F(X)$، ثم أحسب الاحتمالات السابقة باستعمال هذه الدالة؟

التمرين الخامس: ليكن لديك التوزيع الاحتمالي التالي:

$$f(x) = \begin{cases} Kx^2 & si\ x \in [0,3] \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

المطلوب:

1- حدد قيمة الثابت K حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

2- أحسب الاحتمال: $P(1 < X < 2)$.

3- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$

الحلـــول

حل التمرين الأول:

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في حالة السحب بدون ارجاع:

فضاء التجربة :

$$|E| = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

$$E = \begin{Bmatrix} (1.2)(1.3)(1.4)(1.5)(2.1)(2.3)(2.4)(2.5)(3.1)(3.2)(3.4) \\ (3.5)(4.1)(4.2)(4.3)(4.5)(5.1)(5.2)(5.3)(5.4) \end{Bmatrix}$$

$$X = \{X/2.3.4.5\}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{20} \qquad , P(X=3) = \frac{4}{20}$$

$$P(X=4) = \frac{6}{20} \qquad , P(X=5) = \frac{8}{20}$$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

5	4	3	2	X
$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$P(X = x_i)$

3- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في حالة السحب مع الارجاع:

فضاء التجربة:

$$|E| = n^2 = 5^2 = 25$$

$$E = \begin{Bmatrix} (1.2)(1.3)(1.4)(1.5)(2.1)(2.3)(2.4)(2.5)(3.1)(3.2)(3.4) \\ (3.5)(4.1)(4.2)(4.3)(4.5)(5.1)(5.2)(5.3)(5.4)(1.1)(2.2)(3.3)(4.4)(5.5) \end{Bmatrix}$$

$X = \{X/1.2.3.4.5\}$

$P(X=1) = \frac{1}{25}$, $P(X=2) = \frac{3}{25}$, $P(X=3) = \frac{5}{25}$

$P(X=4) = \frac{7}{25}$, $P(X=5) = \frac{9}{25}$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

5	4	3	2	1	X
$\frac{9}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{25}$	$P(X=x_i)$

حل التمرين الثاني:

أ- نرمي زهرتي نرد، X متغير عشوائي يمثل مجموع الرقمين الظاهرين.

فضاء التجربة:

$E = 6^2 = 36$

$E = \{(1.1)(1.2)(1.3) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5.6)(6.6)\}$

1- تحديد مجال المتغير العشوائي X وطبيعته:

$X = \{X/2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12\}$

وطبيعته: متغير كمي متقطع

2- حساب التوزيع الاحتمالي لـ X:

نضع الجدول التالي لتسهيل حساب الاحتمال:

6	5	4	3	2	1	
7	6	5	4	3	2	1
8	7	6	5	4	3	2
9	8	7	6	5	4	3

4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- التأكد أن هذا التوزيع دالة كثافة احتمالية:

لكي تكون هذه التوزيع دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشرطين:

- $f(x) \geq 0$
- $\sum f(x_i) = 1$

لدينا:

$$P(x=x_1) = P(x=2) = \frac{1}{36} \geq 0 \dots\dots\dots P(x=12) = \frac{1}{36} \geq 0$$

ومنه فالشرط الأول محقق.

لدينا: $\sum_{i=1}^{11} f(x_i) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \cdots \dots\dots\dots.\frac{1}{36} + \frac{2}{36} = 1$

ومنه فالشرط الثاني محقق، وعليه فهذا التوزيع هو دالة كثافة احتمالية.

4- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

الامل الرياضي:

$$E(X) = \sum x_i.f(x_i) = 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + \cdots \dots\dots + 11.\frac{2}{36} + 12.\frac{1}{36} = 7$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

حساب:$E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 . f(x_i) = 2^2 . \frac{1}{36} + 3^2 . \frac{2}{36} + \cdots \dots 11^2 . \frac{2}{36} + 12^2 . \frac{1}{36} = 54.83$$

ومنه:

$$V(X) - E(X^2) - E(X)^2 - 5.83$$

5- حساب الاحتمالات:

$$P(X = 1) = 0 \quad , P(X = 4) = \frac{3}{36} \ , P(X \leq 4) = \frac{6}{36} \ , P(X < 4) = \frac{3}{36}$$

ب- نرمي زهرتي نرد، Y متغير عشوائي يمثل أكبر الرقمين الظاهرين.

1- تحديد مجال المتغير العشوائي Y وطبيعته:

$$Y = \{y/1.2.3.4.5.6\}$$

وطبيعته: متغير كمي متقطع

2- حساب التوزيع الاحتمالي لـ Y:

نضع الجدول التالي لتسهيل حساب الاحتمال:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y كما يلي:

X	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

- التأكد أن هذا التوزيع دالة كثافة احتمالية:

لكي تكون هذه التوزيع دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشرطين:

- $f(y) \geq 0$
- $\sum f(y_i) = 1$

لدينا:

$$P(y=y_1) = P(y=1) = \frac{1}{36} \ldots P(y=6) = \frac{11}{36} \geq 0$$

ومنه فالشرط الأول محقق.

لدينا:

$$\sum_{i=1}^{6} f(y_i) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \cdots \ldots \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = 1$$

ومنه فالشرط الثاني محقق، وعليه فهذا التوزيع هو دالة كثافة احتمالية.

حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

الامل الرياضي:

$$E(Y) = \sum y_i . f(x_i) = 1.\frac{1}{36} + 2.\frac{3}{36} + 3.\frac{5}{36} + 4.\frac{7}{36} + 5.\frac{9}{36} + 6.\frac{11}{36} = 4.47$$

التباين:

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

حساب:$E(Y^2)$

$$E(Y^2) = \sum y_i^2 . f(y_i) = 1^2.\frac{1}{36} + 2^2.\frac{3}{36} + 3^2.\frac{5}{36} + 4^2.\frac{7}{36} + 5^2\,\frac{9}{36} + 6^2.\frac{11}{36} = 21.97$$

ومنه:

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1.98$$

2- حساب دالة التوزيع $F(Y)$:

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{x \leq x_i}^{x} f(x_i)$$

وبالتالي فان دالة التوزيع $F(Y)$ يمكن ادراجها كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 1 \\ \frac{1}{36} & , \quad 1 \leq y < 2 \\ \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{4}{36} & , \quad 2 \leq y < 3 \\ \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} - \frac{9}{36} & , \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} = \frac{16}{36} & , 4 \leq y < 5 \\ \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{9}{36} = \frac{25}{36} & , 5 \leq y < 6 \\ \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = 1 & , 6 \leq y \end{cases}$$

3- حساب الاحتمالات:

باستعمال دالة الكثافة الاحتمالية:

$$P(Y = 1) = \frac{1}{36} \ , P(Y < 3) = \frac{4}{36} \ , \quad P(Y \leq 3) = \frac{9}{36} \ , \quad P(1 < Y \leq 4) = \frac{15}{36}$$

باستعمال دالة التوزيع:

$$P(Y = 1) = F(Y) = \frac{1}{36} \ , P(Y < 3) = F(2) = \frac{4}{36} \ ,$$

$$P(Y \leq 3) = F(3) = \frac{9}{36} \ ,$$

$$P(1 < Y \leq 4) = F(4) - F(1) = \frac{15}{36}$$

حل التمرين الثالث:

1- طبيعة ونوع المتغير: كمي متقطع.

2- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

قيم المتغير العشوائي X هي:

$X = \{x/0.1.2\}$

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 . C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} \;;\; P(X=1) = \frac{C_4^1 . C_3^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} \;;$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 . C_3^0}{C_7^2} = \frac{6}{21}$$

ومنه يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

2	1	0	X
$\frac{6}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{3}{21}$	$P(X = x_i)$

3- حساب احتمال أن يكون ضمن الكتابين كتاب واحد على الأقل خاص بالإحصاء:

$$P(X \geq 1) = \frac{12}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21}$$

4- حساب: $E(X), m_2$:

$$E(X) = \sum x_i . P(X = x_i) = 0.\frac{3}{21} + 1\frac{12}{21} + 2\frac{6}{21} = \frac{8}{7}$$

$$m_2 = \sum x_i^2 . P(X = x_i) = 0^2.\frac{3}{21} + 1^2.\frac{12}{21} + 2^2.\frac{6}{21} = \frac{12}{7}$$

استنتاج $V(X)$

$$V(X) = m_2 - m_1^2 = \frac{12}{7} - \frac{64}{49} = \frac{20}{49}$$

5- ايجاد دالة التوزيع:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{7} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5}{7} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = 1 & , \quad 2 \leq x \end{cases}$$

حل التمرين الرابع:

تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية إذا تحقق: $f(x) \geq 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

لدينا مجال التعريف هو: $[0,100]$

ومنه: $f(x) \geq 0$ و $\int_0^{100} \frac{x}{5000} dx = \frac{1}{5000} \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{100} = 1$

ومنه $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

- حساب الاحتمالات:

$$P(X > 95) = 1 - P(X \leq 95) \quad = 1 - \int_0^{95} f(x)dx = 1 - \int_0^{95} \frac{x}{5000} dx = 1 - \left|\frac{x^2}{10000}\right|_0^{95} = 0.0975$$

$$P(X < 50) = \int_0^{50} f(x)\, dx = \int_0^{50} \frac{x}{5000} dx = \left|\frac{x^2}{10000}\right|_0^{50} = 0.25$$

$$P(40 < X < 80) = \int_{40}^{80} \frac{x}{5000} dx = \left|\frac{x^2}{10000}\right|_{40}^{80} = 0.48$$

1- حساب الحجم المتوسط اليومي للمبيعات والانحراف المعياري:

$$E(X) = \int_0^{100} x.f(x)dx = \int_0^{100} x.\frac{x}{5000} dx = \left|\frac{x^3}{15000}\right|_0^{100} = 66.67$$

$$V(X) = m_2 - m_1^2$$

$$m_2 - \int_0^{100} x^2.f(x)dx - \int_0^{100} x^2.\frac{x}{5000} dx - \left|\frac{x^4}{20000}\right|_0^{100} - 5000$$

$$V(X) = 5000 - (66.67)^2 = 555.11$$

ومنه لدينا:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = 23.56$$

2- ايجاد دالة التوزيع:

لدينا:

$$F(X) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

- ✓ اذا كان: $x < 0$ فان: $F(X) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$
- ✓ اذا كان: $0 < x < 100$ فان: $F(X) = \int_0^x f(u)\, du = \left|\frac{u^2}{10000}\right|_0^x = \frac{x^2}{10000}$
- ✓ اذا كان: $x > 100$ فان: $F(X) = \int_0^{100} f(u)du = 1$

ومنه:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ \dfrac{x^2}{10000} & ,0 \le x \le 100 \\ 1 & , \quad x > 100 \end{cases}$$

حساب الاحتمالات السابقة باستعمال دالة التوزيع:

$$P(X > 95) = 1 - P(X \le 95) = 1 - F(95) = 1 - \frac{95^2}{10000} = 0.0975$$

$$P(X < 50) = F(50) = \frac{50^2}{10000} = 0.25$$

$$P(40 < X < 80) = F(80) - F(40) = \frac{80^2}{10000} - \frac{40^2}{10000} = 0.48$$

حل التمرين الخامس:

تحديد قيمة الثابت k حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية:

لكي تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب تحقق: $f(x) \ge 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 kx^2dx = k\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{27k}{3}$$

ومنه: $9k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9}$

ومنه لكي تكون هذه الدالة دالة كثافة احتمالية يجب أن تكون $k = \frac{1}{9}$

1- حساب الاحتمال: $P(1 < X < 2)$

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2dx = \frac{1}{9}\int_1^2 x^2dx = \frac{1}{9}\left|\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{7}{27}$$

2- ايجاد دالة التوزيع:

$$F(X) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

- ✓ اذا كان: $x < 0$ فان: $F(X) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$
- ✓ اذا كان: $0 \le x \le 3$ فان: $F(X) = \int_0^x f(u)\,du = \frac{1}{9}\left|\frac{u^3}{3}\right|_0^x = \frac{x^3}{27}$
- ✓ اذا كان: $x > 3$ فان: $F(X) = \int_0^3 f(u)du = 1$

ومنه:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ \dfrac{x^3}{27} & ,0 \leq x \leq 3 \\ 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X معطاة بالجدول التالي:

X	1-	0	1
$f(x)$	$3C$	$3C$	$6C$

المطلوب: - أوجد قيمة C.

- أوجد دالة الكثافة للمتغير $Y = 2X + 1$

التمرين الثاني:

يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء، 9 كرات سوداء. نختار عينة من الصندوق مكونة من 3 كرات وبدون ارجاع. إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء.

المطلوب: أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.

التمرين الثالث:

في أحد الامتحانات الشفوية المكون من خمسة أسئلة، إذا كان احتمال أن يجيب أحد الممتحنين على أي سؤال اجابة صحيحة هو 0.75، وكان X متغير عشوائي يمثل عدد الأسئلة التي يجيب عليها الممتحن إجابات صحيحة قبل أول فشل له في الإجابة.

المطلوب: أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

التمرين الرابع: لتكن لديك دالة الكثافة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(x-1) & ;0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ذلك خلاف} \end{cases}$$

المطلوب

1. برهن أن $\boldsymbol{f(x)}$ دالة كثافة احتمالية، ثم مثلها بيانيا.
2. أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي.
3. أحسب الاحتمالات التالية: $P(1/3 \le X \le 2/3)\,; P(X \le 1/2)$

التمرين الخامس: لتكن لديك دالة الكثافة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{e^{3x}} & ; x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

المطلوب

4. أوجد قيمة الثابت a حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية، ثم مثلها بيانيا.
5. أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي.
6. أحسب الاحتمال: $P(1 \le X \le 2)$

التمرين السادس:

ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا دالة توزيعه يأخذ الشكل التالي:

$$F(x) = Cx^4 \;, 0 \le x \le 3$$

المطلوب:

- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$، مع حساب قيمة الثابت C.
- أحسب الاحتمال: $P(1 \le X \le 3)$

المراجع

- أحمد علي الزغول، مدخل الى الاحتمالات وتطبيقاتها، الطبعة الاولى، دار الفرقان للنشر والتوزيع، عمان، الاردن، 2003.
- امجد ابراهيم شحادة وأخرون، الاحصاء والاحتمالات في التطبيقات الهندسية، الطبعة الأولى، دار الفجر للنشر والتوزيع، القاهرة، 2005.
- جان بول ماندري، الاحتمالات محاضرات وأعمال موجهة تضم تمارين محلولة، ترجمة أبو بكر خالد سعد الله، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1999.
- جبار عبد مضحي، مقدمة في نظرية الاحتمالات، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، الاردن، 2011.
- جلال مصطفى الصياد، نظرية الاحتمالات، الطبعة السادسة، دار حافظ للنشر والتوزيع، جدة، السعودية، 2008.
- دومينيك سالفاتور، نظريات ومسائل في الاحصاء والاقتصاد القياسي، سلسلة ملخصات شوم، الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1993.
- سيمور ليبسشتز، الاحتمالات، الطبعة الخامسة، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004.
- السعدي رجال، نظرية الاحتمالات دروس وتمارين، الجزء الأول، الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2005.
- السعدي رجال، نظرية الاحتمالات دروس وتمارين، الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1995.
- موراي شبيجل، جون شيلر،ألوسرينيقاسان، الاحتمالات والاحصاء، الطبعة الأولى، الدار الدولية للاستثمار الثقافية، مصر، 2004.
- خالد زهدي خواجة، أساسيات الاحتمالات، المعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية، 2014.
- ثائر فيصل شاهر، اختبار الفرضيات الاحصائية، ط1، دار الحامد للنشر والتوزيع، الاردن، 2013.
- عزام صبري، الاحصاء الرياضي، ط2، دار صفاء للنشر والتوزيع، الاردن، 2014.
- عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، الأساليب الاحصائية التطبيقية، ط1، دار الشروق للنشر والتوزيع، الاردن، 2008.
- عزام صبري، التحليل الاحصائي بين النظرية والتطبيق، ط1، عالم الكتب الحديث، الاردن، 2003.
- ثائر فيصل شاهر، الاحصاء في العلوم الادارية والمالية، ط1، دار الحامد، الاردن، 2010.
- محمد بن ابراهيم عقبل، نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها، النشر العلمي والمطابع، جامعة الملك سعود، السعودية، 2000.
- مبارك اسبر ديب، مبادى الاحتمالات والاحصاء، جامعة تشرين، سوريا، 2009.

- رامز قدسية، الاحتمالات والاحصاء، منشورات الجامعة الافتراضية السورية، سوريا، 2018.
- خالد زهدي مصطفى خواجة، مبادئ أساسيات الاحتمالات، المعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية، دائرة المكتبة الوطنية، الأردن، 2022.
- محمد محمد المزاح، مبادئ الاحصاء والاحتمالات للعلوم الادارية والتطبيقية، الطبعة الثالثة، مركز جامعة العلوم والتكنولوجيا للكتاب الجامعي، صنعاء، 2013.
- *Achim Klenke, Probability Theory A Comprehensive Course, Second Edition , Springer.*
- *Bernard Verlant et Geneviéve Saint-Pierre, Statistiques et Probabilités, Berti éditions, Alger, 2008.*
- *Dress. F , Les Probabilités et la Statistique, Edition DUNOD, Paris, 2012*
- *Michael J.Evans and Jeffrey Rosenthal, Probability and Statistics, Second Edition, University of Toronto, 2009.*
- *Rick Durrett, Probability : Theory and Examples, Version 5 , Copyright,2019.*
- *Robert B. Ash, Basic Probability Theory, Dover Publications, INC, Mineola, New York, 2008.*
- *Khaldi Khaled, Methodes statistiques : Rappels de cours et exercices corrigés , 5 edition, OPU, Alger,2008.*

الجداول الإحصائية

جدول التوزيع ثنائي الحدين : $P(X=x)=C_n^x \cdot P^x \cdot q^{n-x}$

p=		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
n=2	x=0	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n=3	x=0	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n=4	x=0	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n=5	x=0	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n=6	x=0	0.9415	0.8858	0.8330	0.7828	0.7351	0.6899	0.6470	0.6064	0.5679	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9985	0.9943	0.9875	0.9784	0.9672	0.9541	0.9392	0.9227	0.9048	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	1.0000	0.9998	0.9995	0.9988	0.9978	0.9962	0.9942	0.9915	0.9882	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=7$	$x=0$	0.9321	0.8681	0.8080	0.7514	0.6983	0.6485	0.6017	0.5578	0.5168	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9980	0.9921	0.9829	0.9706	0.9556	0.9382	0.9187	0.8974	0.8745	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	1.0000	0.9997	0.9991	0.9980	0.9962	0.9937	0.9903	0.9860	0.9807	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9982	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=8$	$x=0$	0.9227	0.8508	0.7837	0.7214	0.6634	0.6096	0.5596	0.5132	0.4703	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9973	0.9897	0.9777	0.9619	0.9428	0.9208	0.8965	0.8702	0.8423	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9999	0.9996	0.9987	0.9969	0.9942	0.9904	0.9853	0.9789	0.9711	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9987	0.9978	0.9966	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=9$	$x=0$	0.9135	0.8337	0.7602	0.6925	0.6302	0.5730	0.5204	0.4722	0.4279	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9966	0.9869	0.9718	0.9522	0.9288	0.9022	0.8729	0.8417	0.8088	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9999	0.9994	0.9980	0.9955	0.9916	0.9862	0.9791	0.9702	0.9595	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9977	0.9963	0.9943	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=10$	$x=0$	0.9044	0.8171	0.7374	0.6648	0.5987	0.5386	0.4840	0.4344	0.3894	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9957	0.9838	0.9655	0.9418	0.9139	0.8824	0.8483	0.8121	0.7746	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9999	0.9991	0.9972	0.9938	0.9885	0.9812	0.9717	0.9599	0.9460	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9980	0.9964	0.9942	0.9912	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9990	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

p=	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
n=11 x=0	0.8953	0.8007	0.7153	0.6382	0.5688	0.5063	0.4501	0.3996	0.3544	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
1	0.9948	0.9805	0.9587	0.9308	0.8981	0.8618	0.8228	0.7819	0.7399	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
2	0.9998	0.9988	0.9963	0.9917	0.9848	0.9752	0.9630	0.9481	0.9305	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
3	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9984	0.9970	0.9947	0.9915	0.9871	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9990	0.9983	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n=12 x=0	0.8864	0.7847	0.6938	0.6127	0.5404	0.4759	0.4186	0.3677	0.3225	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
1	0.9938	0.9769	0.9514	0.9191	0.8816	0.8405	0.7967	0.7513	0.7052	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
2	0.9998	0.9985	0.9952	0.9893	0.9804	0.9684	0.9532	0.9348	0.9134	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9978	0.9957	0.9925	0.9880	0.9820	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9973	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n=13 x=0	0.8775	0.7690	0.6730	0.5882	0.5133	0.4474	0.3893	0.3383	0.2935	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
1	0.9928	0.9730	0.9436	0.9068	0.8646	0.8186	0.7702	0.7206	0.6707	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
2	0.9997	0.9980	0.9938	0.9865	0.9755	0.9608	0.9422	0.9201	0.8946	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9986	0.9969	0.9940	0.9897	0.9837	0.9758	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9959	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

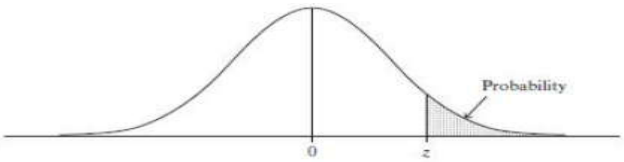
$p=$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=14$ $x=0$	0.8687	0.7536	0.6528	0.5647	0.4877	0.4205	0.3620	0.3112	0.2670	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
1	0.9916	0.9690	0.9355	0.8941	0.8470	0.7963	0.7436	0.6900	0.6368	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
2	0.9997	0.9975	0.9923	0.9833	0.9699	0.9522	0.9302	0.9042	0.8745	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
3	1.0000	0.9999	0.9994	0.9981	0.9958	0.9920	0.9864	0.9786	0.9685	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9965	0.9941	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=15$ $x=0$	0.8601	0.7386	0.6333	0.5421	0.4633	0.3953	0.3367	0.2863	0.2430	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
1	0.9904	0.9647	0.9270	0.8809	0.8290	0.7738	0.7168	0.6597	0.6035	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
2	0.9996	0.9970	0.9906	0.9797	0.9638	0.9429	0.9171	0.8870	0.8531	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
3	1.0000	0.9998	0.9992	0.9976	0.9945	0.9896	0.9825	0.9727	0.9601	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9972	0.9950	0.9918	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=20$ $x=0$	0.8179	0.6676	0.5438	0.4420	0.3585	0.2901	0.2342	0.1887	0.1516	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9831	0.9401	0.8802	0.8103	0.7358	0.6605	0.5869	0.5169	0.4516	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
2	0.9990	0.9929	0.9790	0.9561	0.9245	0.8850	0.8390	0.7879	0.7334	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
3	1.0000	0.9994	0.9973	0.9926	0.9841	0.9710	0.9529	0.9294	0.9007	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
4	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9974	0.9944	0.9893	0.9817	0.9710	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059
5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9981	0.9962	0.9932	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316

جدول توزيع بواسون: $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$

λ=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
x= 0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358	0.6626	0.5918	0.5249	0.4628
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197	0.8795	0.8335	0.7834	0.7306
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810	0.9662	0.9463	0.9212	0.8913
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963	0.9923	0.9857	0.9763	0.9636
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9985	0.9968	0.9940	0.9896
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9974
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
λ=	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.5	5.0	5.5
x= 0	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.4060	0.3546	0.3084	0.2674	0.2311	0.1991	0.1712	0.1468	0.1257	0.1074	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
2	0.6767	0.6227	0.5697	0.5184	0.4695	0.4232	0.3799	0.3397	0.3027	0.2689	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
3	0.8571	0.8194	0.7787	0.7360	0.6919	0.6472	0.6025	0.5584	0.5152	0.4735	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
4	0.9473	0.9275	0.9041	0.8774	0.8477	0.8153	0.7806	0.7442	0.7064	0.6678	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
5	0.9834	0.9751	0.9643	0.9510	0.9349	0.9161	0.8946	0.8705	0.8441	0.8156	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
6	0.9955	0.9925	0.9884	0.9828	0.9756	0.9665	0.9554	0.9421	0.9267	0.9091	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
7	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919	0.9881	0.9832	0.9769	0.9692	0.9599	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
8	0.9998	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9943	0.9917	0.9883	0.9840	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$\lambda=$		6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	10.0	12.0	14.0	15.0
$x=$	0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0002	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0012	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000
	3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0049	0.0103	0.0023	0.0005	0.0002
	4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0151	0.0293	0.0076	0.0018	0.0009
	5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0375	0.0671	0.0203	0.0055	0.0028
	6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.0786	0.1301	0.0458	0.0142	0.0076
	7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1432	0.2202	0.0895	0.0316	0.0180
	8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2320	0.3328	0.1550	0.0621	0.0374
	9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3405	0.4579	0.2424	0.1094	0.0699
	10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.4599	0.5830	0.3472	0.1757	0.1185
	11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.5793	0.6968	0.4616	0.2600	0.1848
	12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.6887	0.7916	0.5760	0.3585	0.2676
	13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.7813	0.8645	0.6815	0.4644	0.3632
	14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8540	0.9165	0.7720	0.5704	0.4657
	15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9074	0.9513	0.8444	0.6694	0.5681
	16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9441	0.9730	0.8987	0.7559	0.6641
	17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9678	0.9857	0.9370	0.8272	0.7489
	18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9823	0.9928	0.9626	0.8826	0.8195
	19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9907	0.9965	0.9787	0.9235	0.8752
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9953	0.9984	0.9884	0.9521	0.9170
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9977	0.9993	0.9939	0.9712	0.9469
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9997	0.9970	0.9833	0.9673
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9999	0.9985	0.9907	0.9805
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9993	0.9950	0.9888
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997	0.9974	0.9938
	26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9967
	27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983
	28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991
	29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
	30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
	31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

جدول التوزيع الطبيعي المعياري:



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000