



N° d'ordre  
N° de série

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la**  
**Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR**  
**EL OUED**

**FACULTE DESSCIENCES ET DE TECHNOLOGIE**

**Mémoire de fin d'étude**

**LICENCE ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Modélisation Mathématiques & simulation

Numérique

**Thème**

**Méthodes directes pour la résolution des systèmes  
d'équations linéaires**

Présenté par : HACHIA Kenza

GEUDDA Fathia

ZITOUNA ATTALLAH Fatima

Sous la supervision de :

**Mr: BEGGAS Mohammed**

**Année universitaires: 2014-2015**

5/

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**

**HOUARI BOUMEDIENNE**

**FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES**

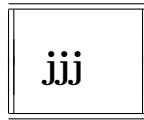
Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister  
mathématiques

Spécialité : Algèbre et théorie des nombres

Par

**CHARI**

**THÈME**



Soutenu publiquement, le devant le jury composé de

Mr. **D. E. TENIOU** Professeur

Mr. **A. HEMINNA** Maître de Conférences

:

Mr. **K. LEMRABET** Professeur

Mr. Maître de Conférences LLL

# *Remerciements*

Nous remercions tout d'abord notre Dieu clément qui nous a donné la puissance pour que nous puissions terminer ce travail.

Qu'il nous soit permis de présenter ici nos remerciements à tout ce petit monde de personnes qui ont rendu possible la présente étude et qui ont contribué à son élaboration sous quelque forme que ce soit.

Nous tenons à dire notre reconnaissance envers le professeur:

BEGGAS MOHAMMED.

L'encadreur de ce mémoire, pour sa disponibilité, ses conseils avisés et ses relectures attentives de ce travail.

Plus généralement, tout le personnel enseignant, du département de sciences et de technique

Tous les parents, connaissances et amies qui nous ont été un soutien moral tout au long de notre formation.

Que tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin, trouvent ici l'expression de notre gratitude.

Tout l'ensemble des membres du département de mathématique de l' université ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED.

# Notations générales

$X$	vecteur .
$A$	matrice .
$A^T$	matrice transposée .
$A^{-1}$	matrice inverse .
$\det(A)$	déterminant de la matrice $A$ .
$A^*$	matrice hermitienne .
$A^D$	matrice adjoint .
$I$	matrice unité .
$M_n(\mathbb{k})$	ensemble de matrices carrées .
$S_{ij}$	Cofacteur
$E_i$	ligne de la matrice

# Table des matières

Notations générales	ii
Introduction générale	1
<b>1 Préliminaires</b>	<b>2</b>
1.1 Vecteur . . . . .	2
1.2 La Matrice . . . . .	2
1.2.1 Les divers matrices . . . . .	3
1.2.2 opérations sur les matrices . . . . .	6
1.2.3 les déterminants . . . . .	7
1.2.4 Transposée d'une matrice . . . . .	9
1.2.5 Matrice particuliers . . . . .	10
1.2.6 Inverse d'une matrice: . . . . .	11
<b>2 Les méthodes directes de résolution de systèmes linéaires</b>	<b>13</b>
2.1 systèmes linéaires . . . . .	13
2.2 système linéaire a matrice A particulière . . . . .	15
2.2.1 système linéaire matrice A triangulaire inférieure . . . . .	15
2.2.2 système linéaire matrice A triangulaire supérieure . . . . .	15
2.2.3 Système matrice diagonale . . . . .	16
2.3 Méthode de Cramer . . . . .	16
2.3.1 Nombre d'opération . . . . .	17

2.4	Méthode de Gauss . . . . .	17
2.4.1	Principe . . . . .	18
2.4.2	Description de la méthode . . . . .	18
2.4.3	Nombre d'opérations . . . . .	21
2.5	Problème des pivots . . . . .	22
2.6	Méthode de JORDAN . . . . .	23
2.6.1	Principe . . . . .	23
2.6.2	Description de la méthode . . . . .	23
2.6.3	Nombre d'opérations . . . . .	26
2.7	Méthode de Choleski . . . . .	26
2.7.1	Principe . . . . .	26
2.7.2	Décomposition de la matrice $A$ . . . . .	26
2.7.3	Résolution des systèmes linéaires : $AX = b$ par la méthode de choleski. . . . .	27
2.7.4	Nombre d'opérations . . . . .	27
2.8	Comparaison : . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>30</b>
3.1	Résolution du systèmes linéaires: . . . . .	30
3.1.1	Première application . . . . .	30
3.1.2	Deuxième application . . . . .	32
3.1.3	Troisième application . . . . .	33
	 Conclusion Générale	 <b>36</b>
	 Bibliographie	 <b>37</b>

# Introduction générale

L'analyse matricielle étudie deux problèmes fondamentaux : l'inversion de matrice ; L'inversion de matrice ou la résolution de système linéaires.

Dans la pratique, pour trouver la solution à un problème d'étude donné, on est souvent amené à résoudre un système d'équations linéaires, selon le type du problème, on aura le choix entre plusieurs méthodes.

Celles-ci sont classées en deux catégories :

1. Les méthodes dites exactes
2. Les méthodes itératives

Les méthodes de la première catégorie qui font l'objet de notre mémoire permettent de calculer la solution après un nombre fini d'opérations de calcul.

Dans ce travail, nous présenterons certaines méthodes classiques les plus utilisées en pratique :

1. la méthode de Cramer
2. la méthode de Gauss
3. la méthode de Gauss-Jordan
4. la méthode de Cholesky

Ce mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres .

On introduit au premier chapitre quelques notions et définitions de base concernant l'analyse matricielle.

Quant au deuxième chapitre, il est consacré à la description des méthodes étudiées avec la mise en évidence du nombre d'opérations effectuées par chaque méthode.

Dans le dernier chapitre, on va aborder des applications où, en utilisant les méthodes directes précédentes, on précise les étapes qui nous mènent à la solution du système linéaire proposé .

Finalement, ce mémoire se termine par une conclusion et un résumé de notre travail.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### Introduction :

Ce chapitre est consacré à l'introduction de quelques notions fondamentales d'analyses matriciels.

nous faisons également, un rappel de certains résultats que nous utiliserons dans le chapitre 2 et 3.

### RAPPELS

## 1.1 Vecteur

on appelle vecteur  $x$  un élément de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}$  C'est un ensemble d'éléments de  $\mathbb{R}$  souvent note des manières suivants :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

voir [5]

## 1.2 La Matrice

**Définition 1.2.1** on se donne un corps  $\mathbb{k}$  (en générale  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) on note par

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la matrice a élément dans  $\mathbb{k}$  ayant  $m$  lignes et  $n$  colonnes on note plus simplement  $A = (a_{ij})$ .

On note  $M_{mn}$  l'ensemble des matrices a  $m$  lignes et  $n$  colonnes.

voir [5]

### 1.2.1 Les divers matrices

#### la matrice rectangulaire

On appelle matrice rectangulaire de type  $m \times n$  toute matrice formant un tableau rectangulaire de  $m$  lignes et  $n$  colonnes.

#### Exemple 1.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

#### la matrice carrée

on appelle matrice carrée d'ordre  $n$  toute matrice formant un tableau carrée de  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

#### Exemple 1.2.2

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**La Matrice unité**

La matrice unité d'ordre  $n$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  dont les termes de la diagonale principale sont  $a_{ij} = 1, 1 \leq i \leq n$

Et tous les autres  $a_{ij} = 0 \ i \neq j$ . ie :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} .$$

**Le matrice triangulaire**

Une matrice carrée dont tous les termes au-dessous de la diagonale sont nuls est appelée matrice triangulaire supérieure si  $(a_{ij})$  est une matrice triangulaire supérieure d'ordre  $n$  on a donc :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \neq 0 & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

De même, les matrices triangulaires inférieures sont telles que :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \neq 0 & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

**Matrice diagonale**

c'est une matrice carrée telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} = 0 & \text{si } \forall i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } \forall i = j \end{cases} .$$

### Matrice par blocs

Une matrice par blocs  $A = (A_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  est une matrice dont les entrées  $(a_{ij})$  sont des matrices au lieu d'être des scalaires.

On doit toutefois respecter les deux règles suivantes :

1. Toutes les matrices d'une même ligne ( $A_{ij}$  avec  $1 \leq j \leq n$ ) ont même nombre de ligne.
2. Toutes les matrices d'une même colonne ( $A_{ij}$  avec  $1 \leq i \leq m$ ) ont même nombre de colonnes . Ainsi, il existe des nombres entiers  $m_i$  et  $n_j$  tel que  $A_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times n_j}$  .

**Exemple 1.2.3**  $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C & E \end{pmatrix}$ , telle que :  $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

### Matrice bande

On dit qu' une matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (ou  $\mathbb{C}^{m \times n}$ ) est une matrice bande si elle n'admet des éléments non nuls que sur un "certain nombre" de diagonales autour de la diagonale principale.

Plus précisément, on dit que  $A$  est une matrice bande- $p$  inférieure si  $a_{ij} = 0$  quand  $i < j + p$  et bande- $q$  supérieure si  $a_{ij} = 0$  quand  $j > i + q$  .

On appelle simplement matrice bande- $p$  une matrice qu' est bande- $p$  inférieure et supérieure .

voir [5]

**Exemple 1.2.4**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

## 1.2.2 opérations sur les matrices

soit  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices  $m \times n$  sur  $\mathbb{k}$ .

### Matrices égales

On dit que  $A$  est égal à  $B$ , si  $a_{ij} = b_{ij}$  pour  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ , on définit de plus les opérations suivantes :

### Somme de deux matrices

On appelle somme de matrices  $A$  et  $B$  la matrice  $C$  ( $m \times n$ ) dont coefficients

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. [5]$$

**Exemple 1.2.5**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+2 & 0+1 \\ 2+0 & 3+1 & 2+3 \\ 3+(-2) & 4+(-2) & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

### Produit matriciel

Le produit d'une matrice  $A$  de taille  $(m, p)$  par une matrice  $B$  de taille  $(p, n)$  est la matrice  $C(m, n)$  dont les coefficients sont donnés par :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad i = 1 \dots m, j = 1 \dots n [5].$$

**Exemple 1.2.6**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 A \times B &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 + (-1) \times 4 & 1 \times 2 + 2 \times 6 + (-1) \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 8 + (-1) \times 1 \\ 3 \times 1 + 0 \times 3 + 0 \times 4 & 3 \times 2 + 0 \times 6 + 0 \times 2 & 3 \times 0 + 0 \times 8 + 0 \times 1 \\ 1 \times 1 + 3 \times 4 + 1 \times 4 & 1 \times 2 + 4 \times 6 + 1 \times 2 & 1 \times 0 + 4 \times 8 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 3 & 6 & 0 \\ 17 & 28 & 33 \end{pmatrix} \\
 &\text{voir [5]}
 \end{aligned}$$

**Remarque 1.2.1** La multiplication de  $A$  par  $\lambda \in \mathbb{k}$  est la matrice  $C(m \times n)$  donc les coefficients sont donnés par  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**Exemple 1.2.7**  $\lambda = 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

### 1.2.3 les déterminants

Pour toute une matrice carrée  $A$ , on peut associer une quantité scalaire appelée déterminant et noté  $\det(A)$  ou  $|A|$  calculée par :

$$\det(A) = \sum_{t=1}^n (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \text{ où } j_1, j_2, \dots, j_n \text{ représente une des } n! \text{ permutations possibles des entiers } 1, 2, \dots, n.$$

La somme étant faite sur toutes les ( $n!$ ) permutations possibles.

Pour une permutation de  $j_1, j_2, \dots, j_n$  on définit pour chaque produit  $a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n}$  le nombre de transpositions requises pour arranger la séquence  $j_1, j_2, \dots, j_n$  dans l'ordre naturel  $1, 2, \dots, n$  ce nombre de transpositions est noté  $t$ .

#### Mineur

Soit une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$ , si l'on supprime la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne le déterminant de la matrice d'ordre  $(n-1)$  obtenu est appelé mineur associé à l'élément  $a_{ij}$  de la matrice  $A$ , on le note  $m_{ij}$  un mineur de  $A$  dont les éléments diagonaux sont aussi des éléments diagonaux de  $A$  est appelé "mineur principal" de  $A$ .

**Cofacteur**

Dans une matrice carrée A d'ordre n, on appelle cofacteur de l'élément  $a_{ij}$  le terme

$$S_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}.$$

**Calcul d'un déterminant**

Le déterminant peut s'obtenir par l'intermédiaire des cofacteurs.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} S_{ij} \text{ (suivant la colonne } j)$$

$$\text{Ou } \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} S_{ij} \text{ (suivant la ligne } i), S_{ij} \text{ étant le cofacteur de l'élément } a_{ij}.$$

voir [5]

$$\text{Méthode(1) : } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

$$\text{Exemple 1.2.8} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 4 & 8 & 7 \end{vmatrix} = (1 \times 6 \times 4) + (3 \times 3 \times 8) + (9 \times 2 \times 7) \\ &- (8 \times 6 \times 9) - (7 \times 3 \times 1) - (4 \times 3 \times 2) = 24 + 72 + 126 - 432 - 21 - 24 = -225 \end{aligned}$$

**Méthode(2) :**

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \end{aligned}$$

**Exemple 1.2.9**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times ((-1) \times 1 - 1 \times 0) - 2(3 \times 1 - 2 \times 0) \\ + (-2)(3 \times 1 - 2 \times (-1)) = -17$$

**Proposition 1.2.1** soit  $A \in M_n(\mathbb{k})$  une matrice carrée d'ordre :

1. On ne modifie pas le déterminant de A en ajoutant à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes.
2. Si A a deux colonnes identiques alors  $\det(A)=0$  si on échange deux colonnes de A, alors son déterminant est échangé en son opposé.
3. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  une matrice triangulaire par blocs où A et C sont des matrices carrées d'ordre respectif p et q on :  $\det(M) = \det(A) \times \det(C)$ .

### 1.2.4 Transposée d'une matrice

On appelle transposée d'une matrice  $A = (a_{ij})$  de type  $p \times q$ . La matrice  $B = (b_{ij})$  de type  $q \times p$ . Obtenue en échangeant lignes et colonnes de A :  $b_{ij} = a_{ji}$ . voir [5]

**Exemple 1.2.10**  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

**Corollaire 1.2.1** La transposition des matrice vérifie les formules :

1.  $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. pour  $\lambda \in \mathbb{k}$ . alors  $(\lambda A)^t = \lambda(A^t)$

$$3. (AB)^t = (B)^t \cdot (A)^t$$

$$4. (A^t)^t = A$$

### 1.2.5 Matrice particuliers

#### La matrice adjointe

La matrice des cofacteurs  $C_{ij}$  des éléments  $a_{ij}$  d'une matrice  $A$  carrée,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lorsqu'elle est transposée est appelée la matrice adjointe de  $A$  on note généralement cette matrice  $A^D$  ou encore  $\text{adj}(A)$ .

$$A^D = \text{adj}(A) = [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & c_{ij} & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{adj}(A) = C^T \quad \text{avec } C = (C_{ij})$$

**Proposition 1.2.2**  $A^D A = A A^D = |A| I$  où  $|A|$  est le déterminant de la matrice  $A$

$$\text{adj}(AB) = \text{adj}(A) \text{adj}(B)$$

#### Matrice symétrique

C'est une matrice  $A$  carrée telle que :  $A = A^t$ .

#### Matrice hermitienne

C'est une matrice  $A$  carrée telle que :

$$A = A^* \text{ et } \mathbb{k} = \mathbb{C}.$$

#### Matrice définie positive (forme quadratique)

On appelle forme quadratique associée à la matrice  $A$  la forme :

$$Q(x) = x^t A x$$

Une forme quadratique est dite définie positive si :

$$x^t A x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Une matrice carrée est définie positive si la forme quadratique qui lui est associée est définie positive.

voir [5]

### 1.2.6 Inverse d'une matrice:

Une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$  est dite inversible s'il existe une matrice carrée  $B$  d'ordre  $n$  telle que  $BA = AB = I$  on dit que  $B$  est la matrice inverse de  $A$  et on note une matrice qui n'est pas inversible est dit singulière

· Si  $A$  est inversible son inverse aussi inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$  de plus.

· Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices inversibles d'ordre  $n$  leur produit  $AB$  est aussi inversible tel que :  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .

· Si  $A$  est une matrice inversible d'ordre  $n$  alors :  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}C$

où  $C$  : transposée la matrice adjointe

- Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

- Une matrice carrée est inversible si et seulement si ses vecteur colonne sont linéairement indépendant.

· Si  $A$  est inversible alors :  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

voir [1]

#### Exemple 1.2.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3 - 4) - 2(-2) - 1(-1) = -1 + 4 + 1 = 4 \neq 0$$

donc la matrice  $A$  est inversible car  $\det(A) \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-4) & -(-2) & -1 \\ -(6+2) & (3+1) & -2 \\ (4+1) & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$A^{-1} = (\text{adj}(A))^t / \det(A) = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} / 4 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & -2 & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



Où  $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ .

Ou, sous forme matricielle :  $AX=B$ , ou  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_i)_{n \times 1}$  et  $X = (x_j)_{m \times 1}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Une solution de ce système est un vecteur  $X = (x_j)_{m \times 1}$  dont les composantes vérifient simultanément toutes les équations du système.

On distingue divers type de systèmes :

- système carré si  $m = n$ .
- système de Cramer si le système est carré et A est une matrice inversible.
- système homogène si  $B = 0$ .
- système impossible s'il n'admet aucune solution (équation incompatible).
- système compatible s'il admet au moins une solution.
- système indéterminé s'il admet plusieurs solutions.

**Théorème 2.1.1** [4] *On va citer quelques résultats concernant l'existence et l'unicité solution du système (Q)*

Si  $b$  appartient à l'espace engendré par les colonnes de A, alors le système (Q) admet au moins une solution.

**Théorème 2.1.2** [4] *Une condition suffisante pour que le système (Q) admette au moins une solution est que les colonnes de A soient génératrices de  $\mathbb{R}^p$ , autrement dit, doit être surjective ou  $\text{rang } A = p$  [4].*

**Corollaire 2.1.1** [4] *soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée, une condition nécessaire et suffisante pour que le système (Q) admette une seule solution, est que  $\det(A) \neq 0$  (ce qui est équivalent à A inversible, ou A bijectif, ou  $\text{rang } A = n$ ). On parle alors d'un système de Cramer et la solution s'obtient par  $x = A^{-1}b$ .*

## 2.2 système linéaire a matrice A particulière

### 2.2.1 système linéaire matrice A triangulaire inférieure

Soit le système cramérien d'ordre n :

$$Ax = b$$

Où A est une matrice triangulaire inférieure.

Développons ce système :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1 \dots n$$

où  $a_{ij} = 0$  quant  $j > i$ .

Il équivaut donc à :

$$b_i = \sum_{j=1}^i a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j + a_{ii}x_i \quad i = 1 \dots n$$

Si on connaît les  $(i - 1)$  première éléments de x , le i-ième s'écrit :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \right] \quad i = 1 \dots n \quad (F).$$

voir [1]

### 2.2.2 système linéaire matrice A triangulaire supérieure

Si dans le système cramérien :

$$Ax = b$$

A est une matrice triangulaire supérieure on a :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1 \dots n$$

où  $a_{ij} = 0$  quant  $j < i$ .

Il équivaut donc à :

$$b_i = \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j = \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j + a_{ii}x_i \quad i = 1 \dots n$$

$x_i$  s'obtient donc aisément par la calcul à rebours suivants :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right] \quad i=n, n-1, \dots, 1 \quad (\text{G}) .$$

voir [1]

### 2.2.3 Système matrice diagonale

Soit le système :

$$AX = b$$

où A est une matrice diagonale.

La solution X s'obtient immédiatement par :

$$X_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, n .$$

voir [1]

## 2.3 Méthode de Cramer

C'est certainement la méthode la plus connue de résolution des système linéaires .

Toutefois, nous allons voir que c'est la moins recommandable.

On l'écrit :

$$x = A^{-1}b$$

expression de la solution de la méthode Cramer par :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

tell que  $x_i$  calculer selon la forme suivant :

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}$$

Elle consiste à calculer  $A^{-1}$  et à lui post-multiplier le vecteur b .

### 2.3.1 Nombre d'opération

On calcule successivement :

- Le déterminant de A avec  $n!$  additions et multiplications.
- Les  $n^2$  termes de  $A^{-1}$  avec  $(n-1)!$  additions et multiplications chacun.
- Le produit  $A^{-1}b$  avec  $n^2$  multiplications.

Soit environ:  $n! + n^2(n-1)! + n^2$  opérations.

Pour un petit système moyen (exemple :  $n = 10$ ), le nombre d'opérations  $\simeq 3 \cdot 10^9$ .

Pour un système moyen (exemple :  $n = 50$ ), le nombre d'opérations  $\simeq 7 \cdot 10^{67}$ .

Or, certaines méthodes de résolution comme celles des éléments finis peuvent générer des systèmes où  $n$  est très grand, par exemple  $n = 10^4$  équations.

La méthode de Cramer est donc impraticable au sens du temps de calcul. De plus, l'erreur cumulée d'arrondi croissant avec le nombre d'opérations, la précision des résultats restreint extrêmement douteuse pour les systèmes moyens et grands .

voir [1]

**Remarque 2.3.1** *On peut appliquer la méthode d'inversion d'une matrice de que la déterminant est non nul, définit de la manière suivant :*

$$AX = b$$

$$\text{d'où } A^{-1}AX = A^{-1}b$$

$$\text{on obtient alors } X = A^{-1}b.$$

L'inconvénient de cette méthode est de fois la difficulté du calcul de l'inverse de A.

Nous allons voir des méthodes demandant moins d'opérations :

## 2.4 Méthode de Gauss

**théorème de Gauss [1]**

Etant donnée une matrice carrée A quelconque, il existe des matrices inversibles S telles que  $SA = A'$  où  $A'$  est une matrice triangulaire supérieure .

### 2.4.1 Principe

La méthode de Gauss consiste à transformer le système  $AX = b$  à matrice quelconque en un système équivalent  $A'X = b'$  où  $A'$  est une matrice triangulaire supérieure la résolution de ce dernier système étant immédiate avec l'algorithme :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right] \quad i=n, n-1, \dots, 1$$

La triangularisation est effectuée par le jeu de transformations élémentaires introduites par prémultiplication de  $[A, b]$  par des matrices de perlis.

### 2.4.2 Description de la méthode

soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

sachant que les mêmes transformations seront opérées sur  $A$  et sur  $b$  afin de ne pas modifier le système, on simplifie l'algorithme en formant la matrice augmentée  $[A, b]$  où le vecteur  $b$  devient la  $(n+1)$  ième colonne de la matrice  $A$ .

Le système s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

La méthode comporte  $n-1$  étapes.

#### première étape

On transforme  $[A, b]$  en une matrice dont les termes sous diagonaux de la première colonne sont nuls

$$a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = \dots = a_{n1}^{(1)} = 0 \quad (\text{l'indice (1) au-dessus des } a \text{ notant l'étape 1}).$$

Prémultiplions  $[A, b]$  par  $E_{21}(-a_{21}/a_{11})$ .



**Deuxième étape**

Au cours de cette phase, nous devons annuler les termes sous-diagonaux de la seconde colonne  $a_{32}^{(2)} = a_{42}^{(2)} = \dots = a_{n2}^{(2)} = 0$  prémultiplions  $[A, b]$  par  $E_{32}(-a_{32}/a_{22})$ . La troisième ligne devient alors :

$$\begin{cases} a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - (a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \cdot a_{22}^{(1)} = 0 \\ a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - (a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \cdot a_{23}^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{3,n+1}^{(2)} = a_{3,n+1}^{(1)} - (a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \cdot a_{2,n+1}^{(1)} \end{cases}$$

Soit :  $a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - (a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \cdot a_{2j}^{(1)} \quad j=3, \dots, n+1$

De même prémultiplions  $[A, b]^{(1)}$  par  $E_{i2}(-a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$  pour modifier la i-ième ligne comme suit :

$$\begin{cases} a_{i2}^{(2)} = a_{i2}^{(1)} - (a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \cdot a_{22}^{(1)} = 0 \\ a_{i3}^{(2)} = a_{i3}^{(1)} - (a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \cdot a_{23}^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{i,n+1}^{(2)} = a_{i,n+1}^{(1)} - (a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \cdot a_{2,n+1}^{(1)} \end{cases}$$

La deuxième étape s'écrit donc :

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - (a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \cdot a_{2j}^{(1)} \quad \begin{cases} i = 3, \dots, n \\ j = 3, \dots, n+1 \end{cases}$$

A la fin de cette 2ème étape, le système  $[A, b]^{(2)}$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{n3}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

**k-ième étape**

Au cours de cette étape on veut annuler les termes sous-diagonaux de la k-ème colonne:  $a_{k+1,k}^{(k)} =$

$$a_{k+2,k}^{(k)} = \dots = a_{n,k}^{(k)} = 0 \text{ prémultiplions } [A, b]^{(k-1)} \text{ par la matrice de transformations : } E_{k+1,k} = \begin{pmatrix} -a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

la (k + 1) ième ligne de  $[A, b]^{(k-1)}$  devient :

$$\begin{cases} a_{k+1,k}^{(k)} = a_{k+1,k}^{(k-1)} - (a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}) \cdot a_{kk}^{(k-1)} = 0 \\ a_{k+1,k+1}^{(k)} = a_{k+1,k+1}^{(k-1)} - (a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}) \cdot a_{k,k+1}^{(k-1)} \\ \dots \\ a_{i,n+1}^{(k+1)} = a_{i,n+1}^{(k-1)} - (a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}) \cdot a_{k,n+1}^{(k-1)} \end{cases}$$

soit :  $a_{k+1,j}^{(k)} = a_{k+1,j}^{(k-1)} - (a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}) \cdot a_{k,j}^{(k-1)}$  pour  $j=k+1, \dots, n+1$  puis nous pré-multiplication  $[A, b]^{(k-1)}$  par:

$$E_{k+2,k} \begin{pmatrix} -a_{k+2,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_{k+3,k} \begin{pmatrix} -a_{k+3,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ etc.....}$$

Nous pouvons donc condense ces transformations à la k-ième étape par :

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - (a_{i,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}) \cdot a_{k,j}^{(k-1)} \text{ pour } \begin{cases} i = k + 1, \dots, n \\ j = k + 1, \dots, n + 1 \end{cases}$$

### 2.4.3 Nombre d'opérations

pour passer de  $[A, b]^{(k-1)}$  à  $[A, b]^{(k)}$ , il faut :

$$(n-k)(n-k+1) \text{ multiplication : nm}$$

$$(n-k)(n-k+1) \text{ additions : na}$$

$$(n-k) \text{ divisions : nd}$$

Donc , pour passer de  $[A, b]$  à  $[A, b]^{(n-1)}$ , le nombre d'opérations sera :

$$nm=na=\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

$$nd = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Pour résoudre le système triangulaire, on doit effectuer :

$$nm=na=\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$nd = n$$

Donc la résolution d'un système linéaire par l'algorithme de Gauss demande :

$$nm = \frac{n(n-2)(2n+5)}{6} \text{ multiplications}$$

$$na = nm \quad \text{additions}$$

$$nd = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{divisions}$$

Pour  $n \gg 20$ , le nombre d'additions et de multiplications est de l'ordre de  $n^2/3$ .

voir [1]

## 2.5 Problème des pivots

Lorsqu'un pivot est nul, la méthode de Gauss ou de Jordan n'est plus applicable. Si le pivot est très petit, l'algorithme conduit à des erreurs d'arrondi importantes. C'est pourquoi des algorithmes qui échangent les éléments de façon à avoir le pivot le plus grand possible ont été développés. Les programmes optimisés intervertissent les lignes à chaque étape de façon à placer en pivot le terme de coefficient le plus élevé de la ligne : c'est la méthode du pivot partiel, à la  $K$ -ième étape le pivot est l'élément

$$a_{ik}^{(k)} = \max_{p=k, \dots, n} |a_{pk}^{(k)}|.$$

D'autres programmes intervertissent les lignes et les colonnes de façon à placer en pivot le terme de coefficient le plus élevé de la matrice : c'est la méthode du pivot total. À la  $k$ -ième étape, le pivot est l'élément

$$a_{ij}^{(K)} = \max_{p,q=k, \dots, n} |a_{pq}^{(k)}|.$$

**Exemple 2.5.1** *Considérons le système :*

$$\begin{cases} 10^{-4}x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

La solution de ce système est  $x = 1,0001$  et  $y = 0,99990$ . Supposons que notre calculateur travaille avec une mantisse de trois chiffres significatifs.

Comme  $a_{11} = 10^{-4}$  est très petit, l'élimination conduit au système suivant obtenu en multipliant la première équation par  $(10^{-4})$  et en ajoutant la seconde :

$$\begin{cases} 10^{-4}x + y = 1 \\ -9990y = -9990 \end{cases}$$

Si les chiffres  $(-10^4 + 1 = -9999)$  et  $(-10^4 + 2 = -9998)$  sont approchés par le même nombre  $-9990$ . La solution devient alors  $x = 1$  et  $y = 0$ . L'erreur est importante pour le nombre  $y$ .

En revanche, si on échange les équations:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 10^{-4}x + y = 1 \end{cases}$$

et on prend pour pivot l'élément  $a_{11} = 1$ , on obtient:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0,999y = 0,999 \end{cases}$$

car les chiffres  $(-10^{-4} + 1 = 0,999)$  et  $(-2 \cdot 10^{-4} + 1 = 0,9998)$  sont arrondis au même

nombre  $0,999$ . Dans ce cas, la solution est correcte ( $x = y = 1$ ).

voir [3]

## 2.6 Méthode de JORDAN

### Théorème de Jordan [1]

Soit une matrice carrée  $A$  quelconque, il existe des matrices  $S$  telles que  $SA = D$ , où  $D$  est une matrice diagonale d'ordre  $n$ .

### 2.6.1 Principe

La méthode de Jordan consiste à transformer le système cramerien  $AX = b$  en un système

$$A'X = b', \text{ où } A' \text{ est la matrice identité d'ordre } n.$$

cette diagonalisation est opérée en  $n$  étapes qui se composent d'une opération de normalisation suivie d'une opération de réduction.

### 2.6.2 Description de la méthode

Soit le système de cramer:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

**Première étape**

**Normalisation** cette opération consiste à remplacer  $a_{11}$  par 1 en prémultipliant  $[A, b]$  par  $E_1 \left( \frac{1}{a_{11}} \right)$ , la première ligne de  $[A, b]$  devient :

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}/a_{11} \quad j = 1, \dots, n+1$$

**Réduction** Les coefficients extradiagonaux de A sont remplacés par :

$$a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = \dots = a_{n1}^{(1)} = 0$$

Ceci s'obtient en multipliant  $[A, b]$  par :

$$E_{21}(-a_{21}) \cdot E_{31}(-a_{31}) \dots E_{n1}(-a_{n1})$$

Soit, sous forme compacte :

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)} \quad i = 2, \dots, n \quad j = 1, \dots, n+1$$

Le système  $[A, b]^{(1)}$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nm}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

**Deuxième étape**

**Normalisation** Le terme pivot  $a_{22}^{(1)}$  est remplacé par 1 la prémultiplication  $E_2 \left( \frac{1}{a_{22}^{(1)}} \right) \cdot [A, b]^{(1)}$ .

$$\text{La seconde ligne de } [A, b]^{(1)} \text{ devient : } a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)} \quad j = 2, \dots, n+1$$

**Réduction** pour annuler les termes extradiagonaux de  $[A, b]^{(1)}$  par  $E_{12} \left( -a_{12}^{(1)} \right)$ , les termes de la 1ère rangée deviennent alors :

$$\left[ \begin{array}{l} a_{12}^{(2)} = a_{12}^{(1)} - a_{12}^{(1)} = 0 \\ a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{23}^{(2)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n+1}^{(2)} = a_{1n+1}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{2n+1}^{(2)} \end{array} \right.$$

Soit en général :

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{2j}^{(2)} \quad j = 3, \dots, n+1$$

De même, en prémultipliant  $[A, b]^{(1)}$  par  $E_{12} \left( -a_{12}^{(1)} \right)$  les termes de la ième rangée deviennent :

$$\left[ \begin{array}{l} a_{12}^{(2)} = a_{12}^{(1)} - a_{12}^{(1)} = 0 \\ a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{23}^{(2)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n+1}^{(2)} = a_{1n+1}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{2n+1}^{(2)} \end{array} \right.$$

Soit :

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{2j}^{(2)} \quad j = 3, \dots, n+1 \quad i \neq 2$$

Après cette étape, le système devient

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} a_{1,n+1}^{(2)} \\ a_{2,n+1}^{(2)} \\ a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n,n+1}^{(2)} \end{array} \right]$$

**K-ième étape**

Normalisation

Le terme pivot  $a_{KK}^{(K-1)}$  est remplacé par 1 par prémultiplication  $[A, b]$  par  $E_k \left( \frac{1}{a_{KK}^{(K-1)}} \right)$ .

La k-ième ligne du système  $[A, b]^{(K-1)}$  s'écrit alors :

$$a_{Kj}^{(K)} = a_{Kj}^{(K-1)} / a_{KK}^{(K-1)} \quad j = k, \dots, n+1$$

**Réduction** Les termes extradiagonaux de la k-ième colonne sont annulés par prémultiplication de  $[A, b]^{(K-1)}$  par  $E_{iK} \left( -a_{iK}^{(K-1)} \right)$ , donc la i-ème ligne devient :

$$a_{ij}^{(K)} = a_{ij}^{(K-1)} - a_{iK}^{(K-1)} \cdot a_{Kj}^{(K)} \quad j = k+1, \dots, n+1 \quad i \neq j \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Nous pouvons dans développer l'algorithme de Jordan pour un système d'ordre n.

### 2.6.3 Nombre d'opérations

Le nombre d'opérations nécessaires au passage de  $[A, b]^{(K+1)}$  à  $[A, b]^{(K)}$  est :

$$na = nm = (n - 1)(n - K + 1)$$

$$nd = (n - K + 1)$$

Donc le passage de  $[A, b]$  à  $[A, b]^{(n)}$  nécessite :

$$na = nm = \sum_{K=1}^n (n - 1)(n - K + 1) = n(n^2 - 1)/2$$

$$nd = \sum_{K=1}^n (n - K + 1) = n(n + 1)/2$$

En résumé, la résolution d'un système linéaire par la méthode de Jordan demande :

$$na = nm = n(n^2 - 1)/2 \quad \text{additions et multiplications}$$

$$nd = n(n + 1) \quad \text{divisions}$$

pour  $n > 20$  le nombre d'opérations est de l'ordre de  $n^3/2$ .

voir [1]

## 2.7 Méthode de Choleski

### 2.7.1 Principe

**Théorème de choleski** [1]

Si A est une matrice symétrique définie positive, alors elle peut être décomposée en :

$$A = L L^t$$

où L est une matrice réelle triangulaire inférieure.

### 2.7.2 Décomposition de la matrice A

Développons l'équation  $A = L L^t$

$$a_{ij} = \sum_{K=1}^n L_{iK} \cdot L_{jK}$$

$$L_{iK} = 0 \quad \text{si } k > i.$$

$$L_{jK} = 0 \quad \text{si } k > i.$$

On a donc :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} L_{iK}L_{jK} \quad i = 1, n \quad j = 1, n$$

Pour la partie triangulaire supérieure de A, r-ième ligne s'écrit :

$$a_{rj} = \sum_{K=1}^r L_{rK}L_{jK} \quad j = r, n$$

$$\text{Soit : } a_{rj} = \sum_{K=1}^{r-1} L_{rK}L_{jK} + L_{rr}L_{jK} \quad j = r, n$$

ce qui donne l'algorithme suivant :

$$L_{rr} = \left[ a_{rr} - \sum_{K=1}^{r-1} L_{rK}^2 \right]^{1/2} \quad r = 1, n$$

$$L_{jr} = \left[ a_{rj} - \sum_{K=1}^{r-1} L_{rK}L_{jK} \right] / L_{rr} \quad j = r+1, n$$

### 2.7.3 Résolution des systèmes linéaires : $AX = b$ par la méthode de choleski.

Après décomposition, la résolution de  $LL^tX=b$  s'écrit :

$$\begin{cases} LY = b \\ L^tX = Y \end{cases}$$

et la résolution est immédiate par les algorithmes (F) et (G). voir [1]

### 2.7.4 Nombre d'opérations

#### Nombre d'opération

Dans le procédé de calcul de L exposé ci-dessus, le nombre d'opérations pour calculer la première colonne est n.

Calculons, pour  $p = 0, \dots, n-1$ , le nombre d'opérations pour calculer la (p+1) -ième colonne : pour la colonne (p+1), le nombre d'opérations par ligne est  $2p+1$ , car le calcul de  $1_{p+1, p+1}$  par la formule nécessite p multiplications, p soustractions et une extraction de

racine, soit  $2p+1$  opérations : le calcul de  $l_{i,p+1}$  par la formule nécessite  $p$  multiplications,  $p$  soustractions et une division, soit encore  $2p+1$  opérations.

Comme les calcul se font des lignes  $p+1$  à  $n$  (car  $l_{i,p+1} = 0$  pour  $i \leq p$ ), le nombre d'opérations pour calculer la  $(p+1)$ -ième colonne est donc  $(2p+1)(n-p)$ .

On en déduit que le nombre d'opérations  $N_L$  nécessaires au calcul de  $L$  est :

$$\begin{aligned} N_L &= \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1)(n-p) = 2n \sum_{p=0}^{n-1} p - 2 \sum_{p=0}^{n-1} p^2 + n \sum_{p=0}^{n-1} 1 - \sum_{p=0}^{n-1} p \\ &= (2n-1) \frac{n(n-1)}{2} + n^2 - 2 \sum_{p=0}^{n-1} p^2 \end{aligned}$$

On rappelle que  $2 \sum_{p=0}^{n-1} p = n(n-1)$  il reste à calculer  $C_N = \sum_{p=0}^n p^2$ , en remarquant par exemple

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n (1+p)^2 &= \sum_{p=0}^n 1 + p^3 + 3p^2 + 3p = \sum_{p=0}^n 1 + \sum_{p=0}^n p^3 + 3 \sum_{p=0}^n p^2 + 3 \sum_{p=0}^n p \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} p^3 = \sum_{p=0}^n p^3 (n+1)^3 \end{aligned}$$

On donc  $3C_N + 3 \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 = (n+1)^3$ , d'où déduit que

$$C_N = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} N_L &= (2n-1) \frac{n(n-1)}{2} - 2C_{N-1} + n^2 \\ &= n \left( \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} \right) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n^3}{3} + 0(n^2). \end{aligned}$$

En générale pour une matrice comme définie positive  $n \times n$  la méthode de cholesky nécessite nombre d'opérations égale au :

$$N = (n^3/3) + 0(n^2) .$$

voir [1]

## 2.8 Comparaison :

La tableau suivant résume une comparaison entre les quatres méthode étudiées:

Méthode	Nombre d'opérations	n=10
Cramer	$n! + n^2(n+1)! + n^2$	$3 \cdot 10^9$
Gauss	$(2n^3/3) + 0(n^2)$	6666,66
Jordan	$n^3/2$	5000
choleski	$(n^3/3) + 0(n^2)$	3333,33

On remarque que, la méthode de cholesky est le plus adaquate parmi les autres méthodes étudiées, et la méthode de Gauss et Gauss Jordan, parcequ'elles sont très proches dans le nombre d'opérations, et enfin la méthode de Cramer parcequ'elle a un grand nombre d'opérations.

# Chapitre 3

## Applications

### 3.1 Résolution du systèmes linéaires:

Dans ce chapitre on va appliquer les méthodes précédentes pour la résolution du systèmes linéaires comme suit :

1<sup>er</sup> application la méthode de Gauss.

2<sup>émé</sup> application la méthode de Gauss Jordan.

3<sup>émé</sup> application la méthode de cholesky.

#### 3.1.1 Première application

On va présenter dans l'application la méthode de Gauss pour la résolution de ce système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

sa forme matricielles est comme suit :

$$AX = b \quad \text{ou}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**1<sup>ere</sup> étape:**

triangularisation de la matrice  $[a_{ij}]$

Faisons apparaitre un 1 à la place de  $a_{11}$ , ensuite des 0 dans la 1<sup>ere</sup> colonne sous  $a_{11}$

$$\longrightarrow_{E_1/2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow_{E_2-2E_1} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow_{E_3-6E_1} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Faisons apparaitre un 1 à la place de  $a_{22}$ , ensuite des 0 dans la 1<sup>ere</sup> colonne sous  $a_{22}$  :

$$\longrightarrow_{E_2/-2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow_{E_3+5E_2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Faisons apparaitre un 1 à la place de  $a_{33}$  :

$$\longrightarrow_{E_3/-12} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

**2<sup>eme</sup> étape**

Résolution par substitution arrière :

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1/6 \quad \longrightarrow \quad x_3 = 1/6$$

$$0x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \longrightarrow x_2 = -1/3$$

$$x_1 + 3/2x_2 + 4x_3 = 1/2 \quad \longrightarrow x_1 = 1/3.$$

voir [6]

### 3.1.2 Deuxième application

On va résoudre le même système en application la méthode de Gauss-Jordan.[6]

Faisons apparaître un 1 à la place de  $a_{11}$  , ensuite des 0 dans la 1<sup>ere</sup> colonne sous  $a_{11}$  :

$$\longrightarrow_{E_1/2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow_{E_2-2E_1} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow_{E_3-6E_1} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Faisons apparaître un 1 à la place de  $a_{22}$  , ensuite des 0 dans la 2<sup>eme</sup> colonne sous et sur

$a_{22}$  :

$$\longrightarrow_{E_2/-2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow_{E_1-3/2E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_3+5E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_3/-12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_1-E_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_2-2E_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Par identification directe , Nous obtenons:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} \quad [6].$$

### 3.1.3 Troisième application

enfin on va aboutir à une méthode de décomposition dite méthode de choleski

qui concerne une matrice symétrique définit positive dans le but [6].

de la résolution du système suivant:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Sa forme matricielle est comme suivant:

$$AX = b \quad \text{ou}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A est symétrique définit positive:

$$\begin{aligned} X^t A X &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x_1^2 + \frac{1}{2}x_2x_1 + \frac{1}{2}x_3x_1 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= \frac{1}{2} [(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2] \geq 0 \end{aligned}$$

Comme A est symétrique définit positive, elle admet décomposition de choleski  $LL^t$

Décomposition:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

**Calcul des  $l_{1j}$  :**

$$l_{11}^2 = a_{11} \implies l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$$

$$l_{12} = a_{12}/l_{11} \implies l_{12} = \frac{1}{2}$$

$$l_{13} = a_{13}/l_{11} \implies l_{13} = \frac{1}{2}$$

**Calcul des  $l_{2j}$  :**

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{12}^2} \implies l_{22} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l_{23} = [a_{23} - (l_{12} \times l_{13})] / l_{22} \implies l_{23} = \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) \right] / \frac{\sqrt{3}}{2} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) / \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

**Calcul des  $l_{3j}$  :**

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{k=1}^2 l_{k3}^2} = \sqrt{a_{33} - (l_{13}^2 + l_{23}^2)} \implies l_{33} = \sqrt{1 - \left( \frac{1}{4 \times 3} \right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Nous obtenons le système suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Résolution

le système devient:  $LL^t X = b$

Posons:  $LX = Y$

et résolvons  $L^t X = b$  et calculons  $Y$  par substitution avant.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

nous trouvons 
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

ensuite résolvons:  $LX = Y$  et calculons  $X$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

nous trouvons 
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
 voir [6].

**Remarque 3.1.1** *Les résultats d'applications obtenus confirment notre résumé de comparaison au chapitre 2*

# Conclusion Générale

Dans ce travail, une stratégie d'analyse matricielle étudie deux problèmes fondamentaux sont l'inversion de matrice et la résolution de systèmes linéaires.

Dans ce cadre de cette thèse, deux aspects principaux ont été étudiés, le premier aspect concerne l'introduction de quelques notions fondamentales d'analyses matricielles, et le deuxième aspect concerne les méthodes exactes dites méthodes directes de résolution de système linéaire qui nous a permis d'exposer les méthodes : Cramer, Gauss, Jordan et Choleski.

Cette exposition nous a permis de conclure que :

la méthode de Cramer est impraticable au sens du temps de calcul et l'erreur canulée d'arrondir croissant avec le nombre d'opérations, la méthode de Gauss est plus facile dans leur différentes étapes de calcul.

Aussi, la même procédure pour la méthode de Jordan c-à-d

Gauss-Jordan sont identiques dans les nombres d'opérations.

D'autre part, la méthode de Choleski nous a permis de voir la résolution des systèmes linéaires avec un nombre d'opérations diminué par rapport aux autres méthodes précédentes, cette méthode est plus facile et efficace nous a permis de calculer la solution après un nombre fini d'opérations de calculs.

# Bibliographie

- [1] BOUMAH RAT.M- GOURDIN.A ; Méthodes Numériques Appliquées,O.D.P.U .
- [2] Ciarlet.P-G ; Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation; Masson paris Milan Barcelone. 1988.
- [3] Herbin Raphaële ; Cours d'Analyse numérique Licence de mathématiques : Université Aix Marseille. 20 août 2010.
- [4] Sibony Jean Moise -Mardon Claude ; Analyse Numérique, Système linéaire et non linéaire ; Troisième tirage. Hermann, Paris. Octobre 1988.
- [5] Zitouni.M ; Elements D'algebre.O.P.U.1993.
- [6] [http : //www.moodle.utc.fr/file.php/665/MT09-ch4.pdf](http://www.moodle.utc.fr/file.php/665/MT09-ch4.pdf).

## **Résumé**

*Dans ce travail, nous avons étudiés la résolutions d'une système équations linéaires, en utilisant les méthodes directs avec la mise en évidence le nombre d'opérations effectués. Finalement, on a étudié quelques application concernant la résolution d'une système d'équations linéaires.*

**Les mots clés :** Matrice ,Système linéaire, méthodes directes.

## **Abstract**

In this work, we studied the resolutions of a system of linear equations with directs methods.

Finally, we studied some applications concerning the resolution of a linear system.

**Key words :** Matrices, linear system, direct methods.

## **ملخص**

تم التطرق في هذا العمل الى حل جمل معادلات خطية باستعمال بعض الطرق المباشرة واضعين في الاعتبار عدد العمليات لكل طريقة أخيرا قدمنا بعض التطبيقات المتعلقة بحل جمل معادلات خطية.

**الكلمات المفتاحية:** المصفوفة - الجمل الخطية - الطرق المباشرة .