

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur
Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR
D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

La méthode de décomposition des opérateurs et
ses applications

présenté par : TAMMA SOUMAIA
BEDDI NOUR EL HOUDA

Devant le jury composé de :

Youmbi Ahmed Amine	MCB	Président	Univ. El Oued
Ahmed Hamroun	MCA	Rapporteur	Univ. El Oued
Guabci Hocine	MCA	Examineur	Univ. El Oued

Promotion : 2022/2023

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier "**Dieu**" le tout puissant et miséricordieux qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

En deuxième lieu, nous tenons à remercier notre encadreur : **Dr.Ahmed Hamrouni** pour ses appréciations compétentes, ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nous remercions vivement nos familles **BEDDI , TAMMA**.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude envers tous les Enseignants et le personnel administratif d'université de **Chahid Hamma Lakhdar El-Oued** qui ont contribué à notre formation et à l'élaboration de ce présent travail.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Notation	3
Introduction	5
1 Préliminaire	7
1.1 La topologie faible	7
1.2 La topologie faible *	8
1.3 Espaces réflexifs, espaces séparables	8
1.4 Rappels sur les espaces	9
1.4.1 Inégalités principales	9
1.4.2 Convolution et régularisation	10
1.5 Espaces de Sobolev	11
1.6 Compacité	12
1.7 Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décom- position	13
1.7.1 Problèmes d'évolution	13
1.7.2 Problèmes de calcul des variations	17
2 Application 1	19
2.1 Position du problème	20
2.2 Problème par méthode de décomposition	20
2.2.1 Existence de la solution	21
2.2.2 Unicité de la solution	31
2.3 Exemple numérique	32

3 Application 2	37
3.1 Position du problème	37
3.2 Etude de l'existence et l'unicité	38
3.2.1 Etude de l'existence	38
3.2.2 L'unicité	47
Conclusion	50
Bibliographie	51

Notations

\mathbb{N}	:= l'ensemble des nombres naturels.
\mathbb{R}	:= corps des réels.
Ω	:= est un ouvert de \mathbb{R}^n .
$[0, T]$:= l'intervalle fermé $0 \leq t \leq T$ $Q = (0, T) \times \Omega$; T est fini
Σ	:= est la frontière latéral de Q
$\mathfrak{D}(\Omega)$:= l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact
$L^2(\Omega)$:= l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure de
Lebésque dx	
$L^p(\Omega)$:= l'espace des classes de fonctions de puissance p - ième intégrable pour la mesure
	de Lebésque dx
$L^\infty(\Omega)$:= $\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable ; $\sup \text{ess}_{t \in \Omega} u(t) < \infty\}$ $\ u\ _{L^\infty} := \sup \text{ess}_{t \in I} u(t) $
$H^1(\Omega)$:= l'espace de Sobolev d'ordre 1.
$H_0^1(\Omega)$:= l'adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$:= l'adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$
$H^m(\Omega)$:= l'espace de Sobolev d'ordre m , pour $m \in \mathbb{N}$ et on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$
$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / D^\alpha u \in L^2(\Omega) ; \alpha \leq m \right\}$	
On munit l'espace H^m	du produit scalaire :
$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{ \alpha \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$	$\forall u, v \in H^m(\Omega)$
E'	:= le dual topologique de E .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E' \times E}$: le crochet de dualité entre l'espace E et son dual topologique
$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$,	le gradient de la
fonction u en $x \in \mathbb{R}^n$	(les dérivées sont prises au sens des distributions).
Δ	:= l'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
$W^{1,p}$:= l'espace de Sobolev, $1 \leq p < \infty$.

$W_0^{1,p}$:= la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}$, $1 \leq p < \infty$.
 \rightharpoonup := la convergence faible dans $W^{1,p}$, $1 \leq p < \infty$.
 $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$: espace de Sobolev p.p. : presque partout.
 $|\cdot|$:= la norme associée aux produits scalaires
 $\sigma(E, E')$:= la topologie faible définie sur E .
 $\sigma(E', E)$:= la topologie *faible** définie sur E'
 $L^p(0, T, X)$:= $\{f : (0, T) \rightarrow X \text{ mesurable } \int_0^T \|f\|_X^p < \infty\}$
 $L^\infty(0, T, X)$:= $\{f : (0, T) \rightarrow X \text{ mesurable } \textit{ess sup}_{t \in (0, T)} \|f\|_X < \infty\}$
 $\textit{ess sup}_{t \in (0, T)} \|f\|_X = \inf_{t \in (0, T)} \{C > 0, \|f\|_X < \infty \text{ p.p. } \}$ $C([0, T], X) = \{f \rightarrow X; \textit{continue}\}$

Introduction

Un grand nombre de phénomènes physiques, chimiques, biologiques et autres issus de la technologie moderne sont décrits par des systèmes complexes d'équations différentielles aux dérivées partielles. La résolution numérique de ces systèmes d'équations nécessite des connaissances approfondies en mathématiques. Chacune de ces équations différentielles aux dérivées partielles peut être répertoriée par type.

Il existe plusieurs méthodes de résoudre des équations aux dérivées partielles.

Nous allons donner dans ce mémoire un aperçu de quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites qui se jouent actuellement un grand rôle en Analyse Numérique.

L'idée commune à ces méthodes est la "décomposition" : il s'agit, utilisant certaines propriétés spécifiques du problème (décomposition des opérateurs pour les problèmes aux limites, décomposition des opérateurs et des contraintes en calcul des variations), de ramener la résolution d'un problème donné à la résolution d'un certain nombre de problèmes beaucoup plus simples.

Dans ce travail, nous développons le cas l'équation de Fisher et des équations de Carleman, qui est un système hyperbolique non linéaire intervenant dans la théorie de la cinétique des gaz [2], et introduit par T. Carleman. Les méthodes de décomposition permettent d'obtenir un schéma d'approximation particulièrement simple.

La méthode de décomposition est une méthode approximative parmi d'autres utilisée pour prouver l'existence et l'unicité des solutions des Equations aux Dérivées partielles.

Principe de la méthode

Décrivons ici la stratégie (les étapes) de la méthode de décomposition : a) Approximation de solution (Recherche des solutions approchées.)

b) On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori.

c) On passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité (dans les termes non linéaires).

Nous avons appliqué cette méthode à deux problèmes :

Le premier problème contient l'équation de Fisher et nous avons essayé d'utiliser la méthode de décomposition pour prouver l'existence et l'unicité de la solution à ce problème.

Et le deuxième problème contient des équations de Carleman où nous avons appliqué la méthode de de décomposition pour prouver l'existence et l'unicité de la solution.

Dans toutes nos étapes, nous avons adopté les propriétés des solutions faibles, des solutions fortes, des topologies faibles et des convergences faibles, théorème de Vitali , Inégalité de Poincaré, espaces de Sobolev, formules de Green, dualité, espace de Hilbert, produit scalaire.

Ce mémoire comprend trois chapitres.

Le première chapitre intitulé "Préliminaires", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.

Dans le deuxième chapitre :

Nous avons appliqué la méthode de décomposition, pour un problème de l'équation de Fisher et la condition de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \mu u(1 - u) & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma =]0, T[\times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Dans Le troisième chapitre : Nous avons appliqué la méthode de décomposition, pour un problème des équations de Carleman.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 - v^2 = 0 \text{ avec } u(a_1, x_2, t) = 0 \\ \text{et } u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + v^2 - u^2 = 0 \text{ avec } v(x_1, a_2, t) = 0 \\ \text{et } v(x, 0) = v_0(x), \end{cases}$$

Préliminaire

$L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes des) fonctions essentiellement bornés

- Si $1 \leq p < \infty$: $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$
- Si $p = \infty$: $\|f\|_{L^p} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

Pour $T \geq 0$ et X un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_X$ on note :

- $C(0, T, X)$: l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans X
- $L^p(0, T, X)$: l'espace des fonctions v telles que :

$$t \mapsto \|v(t)\|_X \text{ est une fonction de } L^p(0, T), 1 \leq p \leq \infty$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

1.1 La topologie faible

Définition 1.1.1.

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une application p de E dans \mathbb{R}^+ , appelé semi-norme quand :

- a) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ ou } p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$
- b) $\forall x \in E, \forall y \in E, \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Définition 1.1.2.

Soit E un espace vectoriel normé F un sous-espace vectoriel de E' (dual topologique de E), la topologie faible $\sigma(E, F)$ sur E est définie comme ci-dessus par les semi-normes :

$p_{\phi} : x \in E \rightarrow p_{\phi}(x) = |\langle \phi, x \rangle|$, quand ϕ décrit F Autrement dit :

$$x_n \longrightarrow x$$

dans $\sigma(E, F) \Leftrightarrow \forall \phi \in F, \langle \phi, x_n \rangle \rightarrow \langle \phi, x \rangle$

1.2 La topologie faible *

Soit E un espace de Banach, E' son dual muni de la norme :

$$\|\phi\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |F(\phi)|$$

$|\phi(x)|$ et E'' son bidual, c'est à dire le dual de E' muni de la norme :

$$\|F\| = \sup_{x \in E', \|x\| \leq 1} |F(\phi)|$$

Proposition 1.

Soit E un espace de Banach, E'' son bidual, alors l'application J de E dans E'' définie par :

$$[J(x)](\phi) = \phi(x)$$

est une isométrie linéaire de E dans E''

Démonstration.

la démonstration de cette proposition se trouve dans [9]. □

Définition 1.2.1.

Sur E' on a défini deux topologies : la topologie asso-clée à la norme de E' et la topologie faible $\sigma(E', E'')$. On considérera aussi sur E' une autre topologie faible, la topologie $\sigma(E', E)$ appelée topologie faible * car J n'est pas nécessairement surjective, mais toujours d'identifier E à un sous espace de E''

Remarque 1.

La topologie $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications ϕ_x où $x \in E$.

Donc chaque ouvert pour la topologie (E', E) est un ouvert pour la topologie de la norme

1.3 Espaces réflexifs, espaces séparables

Soit E un espace de Banach et $J : E \rightarrow E''$ l'injection canonique de E dans E'' définie par :

$J_x(f) = f(x)$, pour tout $x \in E$, $f \in E'$

Définition 1.3.1.

L'espace E est réflexif, si $J(E) = E''$

Théorème 1.1.

Soit E un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.

Démonstration.

la démonstration de ce théorème se trouve dans [1]. □

Définition 1.3.2.

Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble D dense et dénombrable

Théorème 1.2.

Soit E un espace de Banach séparable, alors toute suite bornée $(f_n)_{n \geq 0}$ dans E' admet au moins une sous-suite faiblement $*$ convergente

Démonstration.

la démonstration de ce théorème se trouve dans [1]. □

1.4 Rappels sur les espaces

1.4.1 Inégalités principales

Théorème 1.3.

Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n $1 \leq p, q \leq \infty$ deux réels et $q = p'$ l'exposant conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

1) Inégalité de Hölder :

Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f.g \in L^1$ et

$$\|f.g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

2) Inégalité d'interpolation :

Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors $f \in L^r(\Omega)$ quelque soit $r \in [p, q]$ et

$$\|f.g\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}$$

avec

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\alpha - 1}{q}$$

pour un certain $0 \leq \alpha \leq 1$

3) *Inégalité d'inclusion*

Si de plus $|\Omega| < \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

En particulier

$$L_p(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall 1 \leq p, q < \infty$$

1.4.2 Convolution et régularisation

Définition 1.4.1.

Soit $\rho \in C_0^\infty$ une fonction non négative telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(X) dX = 1, \quad \text{supp} \rho \subset \overline{B}(0, 1)$$

pour $\epsilon > 0$, arbitrairement choisi la fonction $\rho_\epsilon := \epsilon^{-N} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\text{supp} \rho_\epsilon \subset \overline{B}(0, \epsilon)$

La fonction ρ_ϵ est appelée fonction régularisante et la convolution :

$$U_\epsilon(X) := (\rho_\epsilon * U)(X) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\epsilon(X - y) U(y) dy$$

est appelée, pour autant que le membre à droite de l'égalité ait un sens, la régularisation de u .

Corolaire 1.

Soient $p \geq 1$, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. les assertions suivantes sont vérifiées :

- 1) pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^N
- 2) On pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)$$

alors

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

En outre on a :

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

Théorème 1.4.

Soit $f \in C_0^k(\mathbb{R}^N)$, $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ et α un multi-indice tel que $|\alpha| = k$ Alors

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \text{ et } D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$$

En particulier si $f \in C_0^k(\mathbb{R}^N)$, $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Ici D^α représente la α ième dérivée au sens usuel.

Corolaire 2.

Si $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, $\epsilon > 0$, $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $D^\alpha(\rho_\epsilon * u) = (D^\alpha \rho_\epsilon) * u$

Théorème 1.5.

Soit $u \in C(\mathbb{R}^N)$, alors $\rho_\epsilon * u \rightarrow u$ uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^N

1.5 Espaces de Sobolev

Définition 1.5.1.

Les espaces de Sobolev sont, pour Ω ouvert de \mathbb{R}^N , $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$:

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) | \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m, D^\alpha f \in L^2(\Omega)\}$$

$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) | \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m, D^\alpha f \in L^2(\Omega)\}$ On définit :

- sur $H^m(\Omega)$, le produit scalaire $\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2}$
- sur $W^{m,p}(\Omega)$, la norme $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|D^\alpha u\|_{L^p}$

Remarque 2.

1) $D_1 f$ étant une distribution, $D_1 f \in L^2$ signifie qu'il existe $g \in L^2$ telle que

$$D_1 f = T_g$$

:

$$\forall \phi \in D(\Omega), \quad \langle D_1 f, \phi \rangle = \int_\omega g(x) \phi(x) dx$$

2) $W^{m,2} = H^m$ et les normes sur $W^{m,2}$ et sur H^m sont équivalentes.

Proposition 2.

- 1) $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.
- 2) pour $p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable.
- 3) pour $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif

Remarque 3.

$H^m(\Omega)$ est donc un Banach muni d'un produit scalaire c'est un Hilbert.

Définition 1.5.2.

Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , $m \in \mathbb{N}$, et $p \in [1, +\infty]$, on définit :

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$$

ou l'adhérence est prise pour la topologie de ; $W_0^{m,p}(\Omega)$

Proposition 3.

Si $u \in W^{m,p}(\Omega)_0$ et \tilde{u} est définie par :

$$\begin{cases} u & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } \Omega^c \end{cases}$$

alors $\tilde{u} \in W^{m,p}(\Omega)$

1.6 Compacité

Théorème 1.6. (Kolmogorov)

Si Ω est un ouvert borné et $1 \leq p < \infty$ et $B \subset L^p$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) B est relativement compacte dans L^p
- 2) Il existe un opérateur $P : B \rightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ tel que :
 - $\forall u \in B, Pu = u$ sur Ω ,
 - $\{Pu, u \in B\}$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}^N)$
 - $\sup_{u \in B} \|\tau h Pu - Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$

Théorème 1.7. (Rellich)

Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 < p < \infty$ alors toute partie bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$

Remarque 4.

Ceci traduit que l'inclusion $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte .

Remarque 5.

Si l'on supprime l'hypothèse "à frontière lipschitzienne" alors le théorème reste valable en remplaçant $W^{1,p}$ par $W_0^{1,p}$

Théorème 1.8.

Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 < p < \infty$ alors la trace $\gamma : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ est compacte.

Remarque 6.

Une application linéaire est compacte si l'image de tout borné est relativement compacte .

Remarque 7.

Ce théorème est faux pour $p = 1$ puisque :

$\gamma : W_0^{1,1}(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$ est surjective.

Lemme 1.1. (Lemme de Gronwall)

Soit $f \in L^1([0, T])$ une fonction positive,

$\forall x \in \mathbb{R}$ et g, h sont deux fonction continuées et positives sur l'intervalle $[0, T]$ et si h satisfait :

$$h(t) \leq g(t) + \int_0^t f(s)h(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors :

$$h(t) \leq g(t) + \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \tag{1.1}$$

Remarque 8.

Si pour tout $t \in]0, T[$, et si :

$$h^2(t) \leq C^2 + \int_0^t f(s)h(s)ds$$

alors :

$$h(t) \leq C + \frac{1}{2} \int_0^t f(s)ds \tag{1.2}$$

1.7 Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition

1.7.1 Problèmes d'évolution

Description heuristique de la méthode des pas fractionnaires on considère dans un espace de Hilbert H une équation d'évolution

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t) + Au(t) = f(t), & 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

où A est un opérateur linéaire dans H (hypothèses à préciser).

Dans les méthodes usuelles d'approximation, on considère un découpage de l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles égaux de longueur k et on définit une famille d'éléments de H ,

$$u^0, u^1, \dots, u^N$$

Par récurrence, en part de :

$$u^0 = u_0 \quad (1.4)$$

et de :

$$\left\{ \frac{u^{n+1} - u^n}{K} + Au^{n+1} = f^{n+1} = (f((n+1)k)), \quad n = 0, \dots, N-1 \right. \quad (1.5)$$

Si l'opérateur A admet une décomposition :

$$A = \sum_{i=1}^q A_i \quad (1.6)$$

on peut utiliser cette décomposition pour approcher (1.3) et ceci conduit au schéma de pas fractionnaires suivant : on définit les éléments :

$$u^{n+\frac{i}{q}}, n = 0, \dots, N-1; \quad i = 1, \dots, q$$

tel que (1.4) et

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{i}{q}} - u^{n-\frac{i-1}{q}}}{k} + A_i u^{n+\frac{i}{q}} = f^{n+\frac{i}{q}} \\ n = 0, \dots, N-1; \quad i = 1, \dots, q \end{cases} \quad (1.7)$$

où

$$f^{n+1} = \sum_{i=1}^q f^{n+\frac{i}{q}} \quad (1.8)$$

Dans le cas du schéma (1.5), le calcul de u^{n+1} nécessite l'inversion de l'opérateur $(I + KA)$; dans le cas du schéma (1.8), le calcul de $u^{n+\frac{i}{q}}, \dots, u^{n+1}$, nécessite l'inversion des opérateurs $(I + A_1), \dots, (I + KA_q)$, et la méthode est intéressante lorsque l'inversion de ces opérateurs est plus simple que l'inversion de l'opérateur $I + KA$

Un résultat de convergence Nous allons énoncer un résultat précis sur la manière dont les

$u^{n+\frac{i}{q}}$ approximent la solution u de (1.3). On se reportera à [5] pour la démonstration de ce résultat et pour d'autres résultats plus généraux .

Soient $V_i, i = 1, \dots, q$ des espaces de Hilbert.

$$V = \bigcap_{i=1}^q V_i, \text{ avec } V \subset V_i \subset H$$

les injections étant continues et chaque espace étant dans le suivant .

On identifie H à son dual V' , de V_i, V' celui de V , on a

$$V \subset V_i \subset H \subset V'_i \subset V' \quad (1.9)$$

avec injections continues , chaque espace étant dense dans le suivant .

Supposons que $A_i \in \underline{L}(V_i, V)$ avec

$$\begin{cases} (A_i v, v) \geq \alpha_i \|v\|_{V_i}^2 \\ \forall v \in V_i, \alpha_i > 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Alors , pour u_0 donnée dans H et f donnée dans $L^2([0, T]; H)$ l'équation (1.3) possède une solution unique $u \in L^2([0, T]; V) \cap C([0, T]; H)$ ([5])

On se donne une décomposition arbitraire de f

$$f = \sum_{i=1}^q f^i, \quad f^i \in L^2([0, T]; H) \quad (1.11)$$

et on pose :

$$f \left(\left(n + \frac{i}{q} \right) k \right) = f^{n+\frac{i}{q}} = \frac{1}{k} \int_{nk(n+1)k} f_i(s) ds \quad (1.12)$$

Les équations(1.7) définissent alors de manière unique les $u^{n+\frac{i}{q}}$ comme éléments de V_i , on introduit les fonctions étagées $u_{ik}, 1 \leq i \leq q$:

$$u_{ik} = u^{n+\frac{i}{q}}, \text{ pour } t \in [nk, (n+1)k[, \quad i = 1, \dots, q$$

et on a le résultat de convergence [5]

Théorème 1.9.

Lorsque $k \rightarrow 0$

1) u_{ik} converge vers u dans $L^2([0, T]; V_i)$ fort et $L^\infty([0, T]; H)$ faible *

2) $u_{ik}(t) \rightarrow u(t)$ dans H fort, $\forall t \in [0, T]$, où u est la solution unique de (1.3)

Cas particulier $q = 2$ De façon générale et formelle , considérons le système (u désignant éventuellement un vecteur) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1(u) + A_2(u) = f \quad (1.13)$$

où A_1 et A_2 sont deux opérateurs linéaires ou non .

Soit :

$$k = \Delta t$$

le pas de temps et supposons que nous connaissions :

$$u^n = \ll \text{l'approximation} \gg \text{ de } u \text{ l'instant } nk$$

Nous déterminons alors $u^{n+1} = \ll \text{l'approximation} \gg$ de u l'instant $(n+1)k$ en deux étapes :

Première étape : : on considère l'équation.

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial t} + A_1(W_1) = f_1; \\ W_1 \text{ verifiant les conditions aux limites } \ll \text{correspondantes } A_1 \gg W_1(nk) = u^n \end{cases} \quad (1.14)$$

et en « calcule » :

$$W_1((n+1)k) = u^{n+\frac{1}{2}} \quad (1.15)$$

Deuxième étape : on considère la « deuxième partie » de l'équation (1.13).

$$\begin{cases} \frac{\partial W_2}{\partial t} + A_2(W_2) = f_2; \\ W_2 \text{ verifiant les conditions aux limites } \ll \text{correspondantes } A_2 \gg W_2(nk) = u^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.16)$$

où

$$f_1 + f_2 = f$$

On prend alors :

$$u^{n+1} = W_2((n+1)k) \quad (1.17)$$

Pour « l'intégration » de(1.14) ,(1.16) il est naturel de se borner à une approximation de l'équation (1.14),(ou (1.16)) (puisque , même une intégration exacte ne fournit qu'une « approxima-

tion » de u). On arrive ainsi ,par exemple , au schéma décomposé (ou de pas fractionnaire) :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k} + A_1 u^{n+\frac{1}{2}} = f_1^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{k} + A_2 u^{n+1} = f_2^n \end{cases} \quad (1.18)$$

1.7.2 Problèmes de calcul des variations

Soient H un espaces de Hilbert, $V_i, 1 \leq i \leq q$ des espaces de Banach réflexifs $V = \bigcap_{i=1}^q V_i$ avec

$$V \subset V_i \subset H \quad (1.19)$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant.

Pour chaque i , soit K_i , un ensemble convexe fermé de V_i et soit $K = \bigcap_{i=1}^q K_i$

Soit J_i une fonctionnelle réelle définie sur K_i , strictement convexe, semi-continue intérieurement et vérifiant

$$\lim_{u \in K_i} \|u\|_{V_i} \rightarrow \infty J_i(u) = \infty$$

soit alors : $J = \sum_{i=1}^q \{J_i\}$

Il est bien connu que le problème d'optimisation :

$$\inf_{v \in K} J(v) \quad (1.20)$$

Possède une solution unique u . On peut proposer un algorithme d'approximation de u par décomposition :

soient $\tau > 0$ et un entier N fixés ($\frac{1}{\tau}$ et N destinés à tendre vers l'infini).

on définit une famille d'éléments $u^{n+\frac{i}{q}}, n = 0, \dots, N, i = 1, \dots, q$

On part de :

$$u^0 \in H \quad (1.21)$$

quelque ,puis, lorsque $u^0, \dots, u^{n+\frac{i-1}{q}}$ sont connus , on définit :

$$u^{n+\frac{i}{q}} \in K_i \quad (1.22)$$

car la solution du problème (1.3) existe et unique :

$$\inf_{v \in K_i} \{|v - u^{n+\frac{i-1}{q}}|^2 + \tau J_i(v)\} \quad (1.23)$$

Ayant ainsi défini les $u^{n+\frac{i-1}{q}}$, on introduit les moyennes (du type Cesaro) :

$$W^{n+\frac{i-1}{q}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\frac{i-1}{q}} \in K_i \quad (1.24)$$

On démontre alors le résultat suivant [14] : Sous les hypothèses précédentes, si $\tau \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ avec

$$\tau N \rightarrow \infty \quad (1.25)$$

alors, pour tout i , $1 \leq i \leq q$

$$W^{n+\frac{i}{q}} \rightarrow u \quad (1.26)$$

solution de (1.20) dans V_i faible.

Application 1

Nous appliquons la méthode de décomposition des opérateurs pour prouver l'existence de problème de Fisher

L'équation de Fisher dans une dimension

$$u_t - u_{xx} = \mu u(1 - u) \text{ dans }]0, T[\times]0, 1[$$

Depuis les deux articles classiques de Fisher [10] et Kolmogorov, Petrowskii et Piscounoff [6], tous les deux Ecrit en 1936, il ya eu beaucoup de travaux sur L'équation de diffusion non linéaire

avec la conditions de Dirichlet

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \text{ pour } t \in]0, T[$$

et

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ pour } x \in]0, 1[.$$

Ceci montre un modèle simple pour décrire l'interaction Entre mécanisme réactionnel et diffusion Transport physique et biologique Systèmes. De nos jours, il a été universellement reconnu Dans la communauté physique que le non-linéaire Diffusion joue un rôle important dans la dissipation Systèmes dynamiques. Certaines Phénomènes, tels que la propagation de la paroi dans les cristaux liquides, La propagation des nerfs dans les fibres nerveuses, la formation de motifs Dans les systèmes dissipatifs, la cinétique de nucléation et Neutron dans le réacteur, sont étroitement liés Avec les études des équations de diffusion non linéaire. Les propriétés générales de cette équation Systématiquement étudiés par Aronson et Weinberger [6] (1975-1978). Ils ont

souligné que la solution De cette équation convergeront vers une onde itinérante locale Avec une vitesse définie à partir d'une large classe de données intial.

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous considérons l'analyse de modèle d'équation

$$u_t - \Delta u = \mu u(1 - u) \text{ dans }]0, T[\times \Omega. \quad (2.1)$$

Avec des conditions aux limites de Dirichlet , Ω Est un demaine ouvert borné dans \mathbb{R}^n , $n = 1, 2$, où 3 , $[0, T]$ Est un intervalle de temps fini . Notez que Dans l'équation de Fisher entre non seulement comme un terme source inhomogène, mais dans la manière la plus compliquée indiquée dans (2.1).

Dans ce chapitre, Nous considérons que le problème que nous souhaitons étudier est une version multidimensionnelle de l'équation de Fisher (2.1) avec les condition aux limites de Dirichlet est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \mu u(1 - u) & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma =]0, T[\times \partial \Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans cette section, nous allons introduire des espaces fonctionnels et introduire de (2.2).

2.2 Problème par méthode de décompotion

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$ de frontière $\partial \Omega$

On cherche une fonction $u = u(x, t)$ solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(u) & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

telle que : $\mu > 0$ et $F(u) = \mu u(1 - u) > 0$, F est une fonction non linéaire , continue et bornée.

2.2.1 Existence de la solution

Théorème 2.1. *si $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u > 0$ dans $\Omega \times]0, T[$ et u vérifie les conditions initiales et aux limites et F est une fonction positive continues alors le problème (2.3) admet au moins une solution $u \in L^\infty(]0, T[, H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$.*

Démonstration. La preuve de ce théorème sera faite en trois sous-sections □

1.Approximation de Solutions

Pour établir l'existence de la solution du problème (2.3), nous utiliserons la méthode de décomposition exposée dans [7] et [16], qui décompose le problème (2.3) dans deux sous-problèmes comme suit : Soit $k = \Delta t$ l'intervalle de temps. Supposons que nous connaissons u à l'époque nk , notée u^n . On détermine la fonction u^{n+1} qui est l'approximation de la fonction u à l'instant $(n + 1)k$, on fait ceci en deux étapes Dans la première étape, nous décomposons le problème (2.3) en deux problèmes dont le premier est le suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu u(1 - u) = 0 \tag{2.4}$$

Avec les conditions initiales et aux limites relatives et on pose

$$L_1 = \frac{\partial u}{\partial t} - \mu u(1 - u)$$

Alors que le deuxième problème est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \tag{2.5}$$

Avec les conditions initiales et aux limites relatives et on pose

$$L_2 = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u$$

L'intérète de cette décomposition est que chacun des problèmes (2.4),(2.5) peut être résolut explicitement .Il est alors convenable que l'on puisse ainsi obtenir des estimations a priori ñ plus fine que celles que l'on pouvait obtenir directement (sans décomposition). La semi-discrétisation conduit en fin de compte à « l'approximation » suivant du problème supposons u_n « l'approxi-

mation » à l'instant nk on détermine $u^{n+\frac{1}{2}}$ et u^{n+1} par :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k\mu[u^{n+\frac{1}{2}} - (u^{n+\frac{1}{2}})^2] \quad (2.6)$$

Alors que la demi-discrétisation du problème (2.4) est :

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = k\Delta u^{n+1} \quad (2.7)$$

Ceci a bien un sens en effet le problème (2.6) admet une solution unique donnée explicitement par :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k\mu[u^{n+\frac{1}{2}} - (u^{n+\frac{1}{2}})^2]$$

donc

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = k\mu u^{n+\frac{1}{2}} - k\mu(u^{n+\frac{1}{2}})^2$$

On pose : $Z = u^{n+\frac{1}{2}}$

Alors

$$\begin{aligned} Z - u^n &= k\mu Z - k\mu Z^2 \\ \Rightarrow k\mu Z^2 + (1 - k\mu)Z - u^n &= 0 \end{aligned}$$

L'équation de deuxième degré on se trouve les solutions :

$$Z = \frac{\mu k - 1 \pm \sqrt{(\mu k - 1)^2 + 4\mu k u^n}}{2\mu k}$$

on cherchons des solutions positives $Z = u^{n+\frac{1}{2}} > 0$

Alors :

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu k - 1 + \sqrt{(\mu k - 1)^2 + 4\mu k u^n}}{2\mu k} > 0$$

2. Estimation à priori

On prend k sous la forme $k = \Delta t$ et l'on introduit les fonctions

$$\begin{cases} u_{ik}(t) = u^{n+\frac{i}{2}} & i = 1, 2 \\ \text{pour } t \in [nk, (n+1)k[; n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.8)$$

et

$$\begin{cases} \tilde{u}_k(t) \text{ linéaire dans } [nk, (n+1)k] \\ \tilde{u}_k(nk) = u^n ; 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Lemme 2.1.

lorsque, $k \rightarrow 0$, les fonctions $u_{ik}(i = 1; 2)$ \tilde{u}_k ; demeurent dans un borné de $L^\infty(]0, T[, H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ et sont à valeurs positives(p.p).

Nous allons diviser la démonstration de ce lemme en trois étapes ,on vérifiera en cours que les fonctions $u_{ik}...$ sont bien à valeurs dans $H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ Nous allons montrer que la suite (u^n) est bornée dans H^1 on commence de montrer que la suite est bornée dans L^2

étap 1 :

Tout d'abord, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.2.

Si on pose $C_0 = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$; alors $\|u^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0$; $i = 1, 2$

Preuve :

. On montre que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \|u^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \|u^n\| \\ \text{et} \\ \|u^{n+1}\| \leq \|u^{n+\frac{1}{2}}\| \end{cases} \quad (2.10)$$

On va montrer que $C_0 = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$; $\|u^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0$

pour $i = 1, 2$ on pose $A^{n+\frac{i}{2}} = \|u^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)}$; $i = 1, 2$.

On multiplie (3.5) par u^{n+1} et on intègre sur Ω il vient :

$$\int_{\Omega} u^{n+1} u^{n+1} dx - \int_{\Omega} u^{n+1} u^{n+\frac{1}{2}} dx = k \int_{\Omega} \Delta u^{n+1} u^{n+1} dx$$

et comme

$$\int_{\Omega} \Delta u^{n+1} u^{n+1} dx = -\|\nabla u^{n+1}\|^2 \leq 0$$

donc

$$\|u^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (2.11)$$

de (3.9) on obtient $A^{n+1} \leq A^{n+\frac{i}{2}}$.

Il reste à vérifier que $A^{n+\frac{1}{2}} \leq A^n$.

Pour cela nous allons utiliser la proposition suivante :

Proposition 4.

Si $u^n \geq 1$ alors $A^{n+\frac{1}{2}} \leq A^n$

Démonstration.

On va montrer que $u^{n+\frac{1}{2}} - u^n \leq 0$

par absurde : on pose que $u^{n+\frac{1}{2}} - u^n \geq 0$ on pose que $Y = u^n$ et $\varphi(Y) = u^{n+\frac{i}{2}}$. D'après (3.6) on obtient

$$\varphi(Y) - Y = \frac{\mu k - 1 + \sqrt{(\mu k - 1)^2 + 4\mu k Y}}{2\mu k} - Y \geq 0 \quad (2.12)$$

ce qui donne

$$\mu k - 1 + \sqrt{(\mu k - 1)^2 + 4\mu k Y} \geq 2\mu k Y$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\mu k - 1)^2 + 4\mu k Y} \geq 2\mu k Y + 1 - \mu k$$

$$\Rightarrow (\mu k - 1)^2 + 4\mu k Y \geq (2\mu k Y)^2 + 4\mu k Y(1 - \mu k) + (1 - \mu)^2$$

$$\Rightarrow (\mu k - 1)^2 + 4\mu k Y \geq (2\mu k Y)^2 + 4\mu k Y(1 - \mu k) + (1 - \mu)^2$$

$$\Rightarrow 4Y^2\mu^2k^2(Y - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow Y \leq 1$$

$$\|u^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \|u^n\| \quad (2.13)$$

donc

$$A^{n+\frac{1}{2}} \leq A^n$$

De (3.9) et (3.11) on obtient :

$$\|u^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ et } \|u^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \|u^n\|.$$

Donc :

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \|u^n\| \leq \dots \leq \|u_0\|.$$

Par récurrence on aura :

$$\|u^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0; \quad i = 1, 2$$

Ceci complète la démonstration du lemme 2.

D'après le lemme 2, on déduit que : Lorsque k tend vers zéro, les fonctions $u_k, u_{ik}, i = 1, 2$, restent, dans domaine bornée dans $L^\infty(0; T; L^\infty(\Omega))$.

étape 2 :

Pour montrer que quand k tend vers zéros, les fonctions $u_k; u_{ik}; i = 1; 2$ demeurent dans un borné de $L^\infty(0; T; H^1(\Omega))$, on utilise le lemme suivante : \square

Lemme 2.3.

Il existe une constante $C_1 \geq 0$ tq

$$\left\| \frac{\partial u^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x} \right\| \leq C_1, \quad i = 1, 2 \quad (2.14)$$

Démonstration.

Il suffit établir l' inégalité suivante :

$$\left\| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\| \leq \left\| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \right\| \quad (2.15)$$

On calcule la dérivée de l'équation (3.5) par rapport à la variable x , On obtient l'expression suivante :

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} (\Delta u^{n+1}) \quad (2.16)$$

cette dérivation est justifiée puisque $\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \in L^\infty(\Omega)$

Prenant le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}$ les deux membres ce qui donne

$$\left\langle \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x}, \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\rangle = k \left\langle \frac{\partial}{\partial x} (\Delta u^{n+1}), \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\rangle \quad (2.17)$$

Selon

$$\left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, w \right\rangle \leq 0; \quad w = \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}$$

qui donne

$$\left\| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\|^2 \leq \left\| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\|$$

donc

$$\left\| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\| \leq \left\| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \right\|$$

pour compléter la preuve du lemme nous avons besoin de cette lemme □

Lemme 2.4.

Si : $k\mu(2C_0 + 1) < 1$, alors il existe un constant $C_2 > 0$; tel que :

$$\left\| Du^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq C_2 \left\| Du^n \right\|$$

ou $D = \frac{\partial}{\partial x}$

on calcule la dérivé d'équation (3.4) par rapport au x_j ; $j = 1, 2$ on obtient

$$Du^{n+\frac{1}{2}} - Du^n = k\mu \left(Du^{n+\frac{1}{2}} + 2u^{n+\frac{1}{2}}.Du^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

on déduire

$$\left\| Du^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq \left\| Du^n \right\| + k\mu(2|u^{n+\frac{1}{2}}| + 1) \left\| Du^{n+\frac{1}{2}} \right\|$$

pour

$$\left\| u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq \left\| u^n \right\| \leq C_0$$

donc

$$\left\| Du^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq \left\| Du^n \right\| + k\mu(2C_0 + 1) \left\| Du^{n+\frac{1}{2}} \right\| \tag{2.18}$$

on pose

$$X = \left\| Du^{n+\frac{1}{2}} \right\| ; A = \left\| Du^n \right\|$$

alors

$$X \leq A + k\mu(2C_0 + 1)X$$

donc

$$[1 - k\mu(2C_0 + 1)]X \leq A \text{ et } k\mu(2C_0 + 1) < 1$$

ce qui donne

$$X \leq \frac{A}{[1 - k\mu(2C_0 + 1)]}$$

donc

$$\left\| Du^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq C_2 \left\| Du^n \right\| \quad (2.19)$$

et

$$C_2 = \frac{1}{[1 - k\mu(2C_0 + 1)]}.$$

Alors

$$\left\| Du^{n+1} \right\| \leq \left\| Du^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq C_2 \left\| Du^n \right\|.$$

Par récurrence n on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\| Du^n \right\| \leq \text{constante}$$

donc la complète de lemme 3.

Ce qui donne enfin que la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ demeure dans un borné dans $H^1(\Omega)$.

étape 3 : Régularité On peut par la même procédure montrer que la suite (u^n) demeure dans un borné de $H^2(\Omega)$ pour ceci on utilise la même procédure , pour montrer le lemme suivant.

nous allons prouver que le théorème 1, est également valable pour des fonctions u définies dans des fonctions plus lisses les espaces. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 2.2.

Si $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u \geq 0$ dans Σ , et u vérifiant les conditions initiales et aux limites contenues dans (1.1) et F est une fonction positive donnée dans $L^\infty(\Omega)$. Alors le problème (1.1) admet au moins une solution $u \in (0, T, H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$

Nous allons étendre la preuve du théorème 1 à l'espace $H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ Nous montrerons que : Lorsque k tend vers zéro les fonctions u_k, u_{ik} , restent bornées dans $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$, nous utiliserons le lemme Suivante :

Lemme 2.5.

Il existe un constante C_3 tel que :

$$\left\| \frac{\partial^2 u^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x^2} \right\|^2 \leq C_3; \quad i = 1, 2.$$

Démonstration.

Premièrement, nous établissons l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \right\| \leq \left\| \frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2} \right\|$$

On calcule la dérivée seconde de l'équation (3.5) par rapport à la variable x , on obtient l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} - \partial^2 u^{n+\frac{1}{2}} \partial x^2 = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Delta u^{n+1} \right)$$

Après, on calcule le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, des formules précédent avec $\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}$ il devient

$$\left\langle \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \right\rangle - \left\langle \partial^2 u^{n+\frac{1}{2}} \partial x^2, \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \right\rangle = k \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Delta u^{n+1} \right), \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \right\rangle$$

puisque $\langle \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z \rangle \leq 0$ alors :

$$\left\| \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \right\|^2 \leq \left\| \frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2} \right\| \left\| \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \right\|$$

ce qui donne

$$\left\| \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \right\| \leq \left\| \frac{\partial^2 u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2} \right\|$$

Pour compléter la démonstration du lemme 5, nous avons besoin du lemme suivant □

Lemme 2.6.

Si $k\mu(4C_0 + 1) < 1$ il existe $C_4 > 0$ tel que :

$$\left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq C_4 \left\| D^2 u^n \right\|.$$

Où $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Pour prouver ce lemme, nous utiliserons la proposition suivante :

Proposition 5.

Il existe $C_5 > 0$ tel que :

$$\left\| D u^{n+\frac{i}{2}} \right\|^2 \leq C_5 \left\| D^2 u^{n+\frac{i}{2}} \right\|, \quad i = 1, 2.$$

Démonstration.

On pose $v = u^{n+\frac{i}{2}}$ Nous observons que :

$$\|Dv\|^2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 dx = v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\Gamma} - \int_{\Omega} v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx$$

on a $v \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} |_{\Gamma} = 0$ alors

$$\|Dv\|^2 = \int_{\Omega} v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \leq \int_{\Omega} |v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}| dx \leq \|v\| \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\| \leq C_0 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\| = C_5 \|D^2 v\|$$

donc

$$\left\| Du^{n+\frac{i}{2}} \right\|^2 \leq C_0 \left\| D^2 u^{n+\frac{i}{2}} \right\|, \quad i = 1, 2.$$

Maintenant, nous prouvons le lemme 6. Pour cela, nous calculons la dérivée seconde de l'équation de (3.4), comparée à Variable x , on obtient :

$$D^2 u^{n+\frac{1}{2}} - D^2 u^n = k\mu \left[D^2 u^{n+\frac{1}{2}} + 2(Du^{n+\frac{1}{2}})^2 + 2u^{n+\frac{1}{2}} \cdot D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

Nous en déduisons que :

$$\left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq \left\| D^2 u^n \right\| + k\mu \left[\left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| + 2|(Du^{n+\frac{1}{2}})|^2 + 2C_0 \left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \right]$$

En appliquant la proposition 2, nous obtenons :

$$\left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq \left\| D^2 u^n \right\| + k\mu(4C_0 + 1) \left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\|$$

cette inégalité donne :

$$[1 - k\mu(4C_0 + 1)] \left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq \left\| D^2 u^n \right\|$$

alors

$$\left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq \frac{1}{[1 - k\mu(4C_0 + 1)]} \left\| D^2 u^n \right\|$$

Où $C_4 = \frac{1}{[1 - k\mu(4C_0 + 1)]}$ donc

$$\left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq C_4 \left\| D^2 u^n \right\|$$

donc

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq C_4 \left\| D^2 u^n \right\| \\ \text{et} \\ \left\| D^2 u^{n+1} \right\| \leq \left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \end{cases} \quad (2.20)$$

Par récurrence

$$\left\| D^2 u^{n+1} \right\| \leq \left\| D^2 u^{n+\frac{1}{2}} \right\| \leq C_4 \left\| D^2 u^n \right\| \leq \dots \leq C \cdot C_0$$

$$\left\| D^2 u^n \right\| \leq \text{constante}$$

Ceci complète la démonstration du lemme. Ainsi, la preuve du lemme 2 est terminée. La preuve du lemme 1 est donc terminée. \square

3. Passage à la limite :

Selon le lemme 1, on peut extraire les sous suites $\tilde{u}_k, u_{ik}, i = 1, 2$ tels que : $u_k \rightarrow u, u_{ik} \rightarrow u_i$ étoile faible dans $L^\infty(0, T, H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$. Mais cette convergence n'est pas suffisante pour prendre la limite dans le terme non linéaire dans (1.1), puis Nous aurons besoin d'un autre résultat, il est donné par le lemme suivant :

Lemme 2.7.

Lorsque k tend à zéro, la fonction $\frac{\partial u_k}{\partial t}$ demeurent dans un borné dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$

Démonstration.

En additionnant les équations contenues dans (3.4), (3.5), on obtient :

$$u^{n+1} - u^n = k(\Delta u^{n+1}) + k\mu[u^{n+\frac{1}{2}} - (u^{n+\frac{1}{2}})^2] \quad (2.21)$$

cela équivaut à :

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \Delta u^{n+1} + \mu[u_{1k} - (u_{1k})^2] \quad (2.22)$$

Avec le lemme 1, ce résultat complète la démonstration du lemme 7.

Selon l'injection de $H^1(\Sigma)$ dans $L^2(\Sigma)$ est compacte [L.M], et selon les estimations sur \tilde{u}_k , on peut supposer que $\tilde{u}_k \rightarrow u$ fortement dans $L^2(\Sigma)$, et nous avons : mais, d'après la définition des fonctions \tilde{u}_k et u_{1k} on a :

$$\|\tilde{u}_k - u_{1k}\|_\infty \leq \sup_{1 \leq n \leq N-1} \|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n\|_\infty$$

et de même pour les fonctions \tilde{u}_k et u_{2k} , on a :

$$\|\tilde{u}_k - u_{2k}\|_\infty \leq \sup_{1 \leq n \leq N-1} \|u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}\|_\infty$$

En utilisant le lemme 7 et les formules (2.16), (2.17), on déduit que :

$$\|\tilde{u}_k - u_{2k}\|_\infty \leq kC_6. \quad (2.23)$$

$$\|\tilde{u}_k - u_{1k}\|_\infty \leq kC_7. \quad (2.24)$$

Selon la convergence forte des suites dans $L^2(\Sigma)$ Nous en déduisons que $u_{2k} \rightarrow \tilde{u}$ et $u_{1k} \rightarrow \tilde{u}$ fortement dans $L^2(\Sigma)$.

L'équation (3.5) donne :

$$u_{2k} - u_k - k\Delta u_{2k} = 0.$$

En utilisant le lemme 1, on déduit que $\|u_{2k} - u_{1k}\| \leq kC_8$. On peut alors supposer que $u_{1k} \rightarrow \tilde{u}$. Nous avons maintenant $(u_{1k})^2 \rightarrow (\tilde{u})^2$ faiblement dans $L^2(\Sigma)$. On peut maintenant prendre la limite dans l'équation (3.20). On voit donc que la fonction u satisfait le système (3.1). Selon le lemme 7, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)).$$

par conséquent $\tilde{u}_k(0) \rightarrow u(0)$ faiblement dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ et $u(0) = u_0$. \square

2.2.2 Unicité de la solution

Dans cette section, nous allons prouver un résultat de l'unicité, Ensuite, nous allons prouver que la solution du problème (3.1) défini dans Le théorème 2 est unique, on a alors le théorème suivant :

Théorème 2.3.

Si $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u \geq 0$ dans Σ et u vérifie les conditions initiales et aux limites contenues dans (3.1) et F est une fonction positive donnée en $L^\infty(\Omega)$. Alors le problème admet une solution unique $u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$.

Démonstration.

Soit u_1, u_2 deux solutions du problème (3.23), on pose $u = u_1 - u_2$, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \mu(u - u_1^2 - u_2^2) \quad (2.25)$$

On multiplie l'équation de (3.1) par u et on calcule l'intégrale on Ω de l'expression trouvée.

On a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u dx = \int_\Omega u \cdot \Delta u dx + \mu \int_\Omega u^2 dx - \mu \int_\Omega (u_1^2 - u_2^2) \cdot u dx.$$

Il est clair que :

$$\int_{\Omega} u \cdot \Delta u dx \leq 0 \quad \text{et} \quad (u_1^2 - u_2^2)(u_1 - u_2) = (u_1 + u_2) \cdot u^2 \geq 0.$$

on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u \right\rangle \leq \mu \int_{\Omega} u^2 dx = \mu \|u\|^2. \quad (2.26)$$

Nous en déduisons

$$\frac{\partial}{\partial t} |u(t)|^2 \leq 2\mu |u(t)|^2. \quad (2.27)$$

En appliquant le lemme de Gronwall [1-4], nous en déduisons que :

$\|u\| = 0$ d'où $u = 0$ alors $u_1 = u_2$.

Donc la solution est unique. □

2.3 Exemple numérique

On a le problème de la relation diffusion suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu u(1 - u), & \Sigma = \Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R} \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{et} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

On utilise la méthode de décomposition : soit $k = \Delta t$ et $\Omega =]0, 1[$

décomposition en deux sous problèmes (2.4) et (2.5) on pose : $k = 1$ et $\mu = 1$ alors :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n = [u^{n+\frac{1}{2}} - (u^{n+\frac{1}{2}})^2] \quad (2.28)$$

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} = \Delta u^{n+1} \quad (2.29)$$

On pose $u^{\frac{1}{2}} = X \cdot u^0 = u_0$ ceci définit complètement la suite $\{u^n\}$

On pose : $u_0 = 1$

On va calculer $u^{\frac{1}{2}}$, la relation (2.28) donne :

$$u^{0+\frac{1}{2}} \cdot u^0 = [u^{0+\frac{1}{2}} \cdot (u^{0+\frac{1}{2}})^2]$$

alors :

$$X - 1 = X - X^2$$

$$X = 0 \text{ sur } \Omega =]0, 1[$$

$$X^2 = 1$$

alors :

$$X = \pm 1$$

Donc comme on cherche des solutions positive

$$X = u^{\frac{1}{2}} = 1$$

On va calculer $\{u^1\}$ dans (2.29) on pose $n = 0$ alors :

$$u^1 - u^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} \text{ dans }]0, 1[$$

$$u^1(0) = u^1(1) = 0 \text{ sur } \Gamma$$

On pose $Y = u^1$

$$Y - 1 = Y^n \text{ dans }]0, 1[$$

on va calculer l'équation différentielle suivante :

$$Y^n - Y = -1 \tag{2.30}$$

On va calculer la solution particulière

$$r^2 - 1 = 0 \text{ alors } r^2 = 1$$

donc $r = \pm x$

$$Y = Ae^{-x} + Be^x$$

la résolution de cette EDO est simple la solution générale est

$$Y(x) = Ae^{-x} + Be^x + 1$$

$$Y(0) = A + B + 1 = 0$$

donc $A = -(B + 1)$

$$Y(1) = \frac{A}{e} + Be + 1 = 0$$

donc $\frac{A}{e} + Be = -1$ deux equations à deux inconnues ce qui donne A et B

$$\frac{-(B+1)}{e} + Be = -1$$

Donc

$$B = \frac{(1-e)}{(e^2-1)}$$

Alors

$$Y = u^1 = \left[\frac{(1-e)}{(e^2-1)} - 1 \right] e^x + \frac{(1-e)}{(e^2-1)} e^x + 1$$

On va calcule $u^{\frac{3}{2}}$

le problème (2.28) donne

$$u^{1+\frac{1}{2}} - u^1 = u^{1+\frac{1}{2}} [1 - (u^{1+\frac{1}{2}})]$$

Alors

$$(u^{\frac{3}{2}})^2 = u^1$$

Donc

$$u^{\frac{3}{2}} = \pm \sqrt{u^1}$$

on trouve la solution positive $u^{\frac{3}{2}} = \sqrt{u^1} = \sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} \right] e^{-x} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)} e^x + 1}$

On calcule u^2 : le seconde problème (2.29) donne u^2 , Alors

$$u^2 - u^{\frac{3}{2}} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}$$

On pose $Z = u^2$

$$Z - u^{\frac{3}{2}} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

$$Z'' - Z = -u^{\frac{3}{2}} \text{ dans }]0, 1[$$

$$Z(0) = Z(1) = 0 \text{ sur } \Gamma$$

la résolution de cette EDO est simple la solution générale est :

$$Z(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \sqrt{u^1}$$

Pour : $Z(0) = C_1 + C_2 + \sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1\right] + \frac{(1-e)}{(e^2-1)} + 1} = 0$ donc $C_1 = -C_2$, donc on obtient

$$Z(1) = \frac{C_1}{e} - C_1 e + \sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1\right] \frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)} e + 1}$$

alors

$$C_1 = \frac{\sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1\right] \frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)} e + 1}}{\left(\frac{1}{e} - e\right)}$$

On va calculer $u^{\frac{5}{2}}$

la relation (2.28) donne :

$$u^{\frac{5}{2}} = \sqrt{u^2}$$

On va calculer u^3 : le second problème (2.29) donne u^3

$$u^3 - u^{\frac{5}{2}} = \frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2}$$

On pose $S = u^3$

$$S'' - S = u^{\frac{5}{2}} \quad \text{dans }]0, 1[$$

$$S(0) = S(1) = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

la résolution de cette EDO est simple la solution générale est :

$$S(x) = C_3 e^{-x} + C_4 e^x + \sqrt{u^{\frac{5}{2}}}$$

$S(0) = C_3 + C_4 = 0$ alors $C_3 = -C_4$

$$S(1) = C_3 \frac{1}{e} + C_4 e + \left(\sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1\right] \frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)} e + 1} + \sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1\right] \frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)} e + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$C_3 = \left(2 \sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1\right] \frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)} e + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e} - e \right)$$

On obtient :

$$S(x) = u^3 = \left(2\sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1 \right] \frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e} - e \right) (e^{-x} - e^x) + \sqrt{u^{\frac{5}{2}}}$$

finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^0 = 1 \\ u^{\frac{1}{2}} = 1 \\ u^1 = \left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1 \right] e^{-x} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e^x + 1 \\ u^{\frac{3}{2}} = \sqrt{u^1} = \sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1 \right] e^{-x} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e^x + 1} \\ \sqrt{u^1} = \sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1 \right] e^{-x} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e^x + 1} \\ u^2 = \frac{\sqrt{u^1}}{\left(\frac{1}{e} - e \right)} (e^{-x} - e^x) + \sqrt{u^1} \\ u^{\frac{5}{2}} = \sqrt{u^2} \\ u^3 = \left(2\sqrt{\left[\frac{(e-1)}{(e^2-1)} - 1 \right] \frac{1}{e} + \frac{(1-e)}{(e^2-1)}e + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e} - e \right) (e^{-x} - e^x) + \sqrt{u^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right.$$

Application 2

Nous appliquons la méthode de décomposition des opérateurs pour prouver l'existence de solutions oscillantes des équations de Carleman [4], [13],[15]

3.1 Position du problème

Dans l'ouvert $Q = \Omega \times]0, T[$, où $\Omega =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$. On cherche les fonctions $u(x, t)$ et $v(x, t)$, tels que $x \in \Omega, t \in]0, T[$ et vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 - v^2 = 0 \text{ avec } u(a_1, x_2, t) = 0 \\ \text{et } u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + v^2 - u^2 = 0 \text{ avec } v(x_1, a_2, t) = 0 \\ \text{et } v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

Relativement à ce système, nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 3.1.

Soient u_0 et v_0 donnés avec :

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ u_0(a_1, x_2) = 0, v_0(x_1, a_2) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$u_0, v_0 \geq 0 \quad (p.p) \text{ dans } \Omega \quad (3.3)$$

Il existe alors un couple des fonctions u, v , et un seul tel que :

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)), \\ v \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)), \end{cases} \quad (3.4)$$

avec :

$$u, v \geq 0 \quad (p.p) \text{ dans } Q, \quad (3.5)$$

et u, v vérifiant (3.1) .

Remarque 9.

Il résulte de (3.1) et (3.4) que :

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$$

de sorte que u_0, v_0 ont un sens (en particulier dans $L^2(\Omega)$)

3.2 Etude de l'existence et l'unicité

3.2.1 Etude de l'existence

Reprenons le système (3.1). Essayons de le « décomposer » en les deux systèmes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 - v^2 = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v^2 - u^2 = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

L'intérêt de cette décompositions est que chacun des systèmes (3.6), (3.7) peut être intégré explicitement ;

Il est alors convenable que l'on puisse ainsi obtenir des estimations a priori « plus fine » que celles que l'on pourrait obtenir directement (sans décompositions) La semi-discrétisation conduit en fin de compte à " l'approximation " suivante du problème : supposons connue $\{u^n, v^n\}$ « approximation * à l'instant nk on détermine $\{u^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}\}$ et $\{u^{n+1}, v^{n+1}\}$ par :

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} - u^n + k \left[\left(u^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(v^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] = 0 \quad (A_1) \\ v^{n+\frac{1}{2}} - v^n + k \left[\left(v^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(u^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] = 0 \quad (B_2) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} + k \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} = 0, u^{n+1}(a_1, x_2, t) = 0 \\ v^{n+1} - v^{n+\frac{1}{2}} + k \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_2} = 0, v^{n+1}(x_1, a_2, t) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Cela a bien un sens : en effet le système (3.8) admet une solution unique donnée explicitement par :

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^n + k(\sigma^n)^2}{1+2k\sigma^n} \\ v^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v^n + k(\sigma^n)^2}{1+2k\sigma^n} \end{cases} \quad (3.10)$$

Où :

$$\sigma^n = u^n + v^n \quad (3.11)$$

Puisque : Si on ajoute (A_1) , (B_2) il vient :

$$u^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}} = \sigma^n$$

De (A_1) on a :

$$v^{n+\frac{1}{2}} - u^n + k\sigma^n \left[\left(u^{n+\frac{1}{2}} \right) - \left(v^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] = 0$$

D'où :

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^n + k\sigma^n v^{n+\frac{1}{2}}}{1 + k\sigma^n}$$

De (B_1) on a :

$$v^{n+\frac{1}{2}} - v^n + k\sigma^n \left[\left(v^{n+\frac{1}{2}} \right) - \left(u^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] = 0$$

Substituant $u^{n+\frac{1}{2}}$ dans cette égalité on trouve :

$$v^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v^n + k(\sigma^n)^2}{1 + 2k\sigma^n}$$

D'où :

$$\begin{aligned} u^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{u^n + k\sigma^n \left(\frac{v^n + k(\sigma^n)^2}{1+2k\sigma^n} \right)}{1 + k\sigma^n} \\ &= \frac{u^n + k(\sigma^n)^2}{1 + 2k\sigma^n} \end{aligned}$$

De même le système (3.9) admet une solution unique donnée explicitement par :

$$\begin{cases} u^{n+1}(x) = \frac{1}{k} \int_{a_1}^{x_1} u^{n+\frac{1}{2}}(\xi, x_2) \exp\left(\frac{\xi - x_1}{k}\right) d\xi, \\ v^{n+1}(x) = \frac{1}{k} \int_{a_2}^{x_2} v^{n+\frac{1}{2}}(x_1, \xi) \exp\left(\frac{\xi - x_2}{k}\right) d\xi. \end{cases} \quad (3.12)$$

Cela définit donc complètement la suite $\{u^n, v^n\}$. une fois choisie $\{u^0, v^0\}$; on prendra évidem-

ment :

$$u^0 = u_0, v^0 = v_0$$

Estimations a priori

On prend k sous la forme :

$$k = \frac{T}{N}, N \text{ entier}$$

Et l'on introduit les fonctions :

$$\begin{cases} u_{ik}(t) = u^{n+\frac{i}{2}}, v_{ik}(t) = v^{n+\frac{i}{2}}, i = 1, 2 \\ \text{pour } t \in [nk, (n+1)k[, n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Et

$$\begin{cases} \tilde{u}_k(t), \tilde{v}_k(t) \text{ linéaire dans } [nk, (n+1)k], 0 \leq n \leq N-1, \\ \tilde{u}_k(nk) = u^n, \tilde{v}_k(nk) = v^n. \end{cases} \quad (3.14)$$

On va démontrer le :

Lemme 3.1. *les fonctions $u_{ik}, v_{ik}, (i = 1, 2), \tilde{u}_k, \tilde{v}_k$ demeurent, lorsque $k \rightarrow 0$, dans un borné de $L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ et sont à valeurs positives (p.p.).*

Nous allons diviser la démonstration de ce lemme en plusieurs étapes ; on vérifiera en cours de route que les fonctions $u_{ik} \dots$ sont bien à valeurs dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

Lemme 3.2. *Si l'on pose*

$$c_0 = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (3.15)$$

On a :

$$\begin{cases} \left\| \left\| u^{n+\frac{i}{2}} \right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\| \left\| v^{n+\frac{i}{2}} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\| \leq c_0, \forall n = 0, \dots, N-1. \\ \text{et pour } i = 1, 2 \end{cases} \quad (3.16)$$

Et

$$\begin{cases} u^{n+\frac{i}{2}}, v^{n+\frac{i}{2}} \geq 0 \text{ p.p.} \\ \forall n \text{ et } i = 1, 2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Démonstration.

Les propriétés (3.17) résultent des formules (3.10), (3.12). Pour simplifier l'écriture, posons :

$$\lambda^{n+\frac{i}{2}} = \left\| \left\| u^{n+\frac{i}{2}} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\|, \mu^{n+\frac{i}{2}} = \left\| \left\| v^{n+\frac{i}{2}} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\|$$

D'après les formules (3.12) on a :

$$\lambda^{n+1} \leq \lambda^{n+\frac{1}{2}}, \mu^{n+1} \leq \mu^{n+\frac{1}{2}}$$

Et on aura donc (3.16) si l'on montre que :

$$\lambda^{\frac{n+1}{2}} + \mu^{\frac{n+1}{2}} \leq \lambda^n + \mu^n \quad (3.18)$$

On observe pour cela que, comme $\sigma^n \leq \lambda^n + \mu^n$ et comme la fonction :

$$\sigma \longmapsto \frac{a + k\sigma^2}{1 + 2k\sigma}$$

est croissante au moins pour $\sigma \leq a$, on a (d'après (3.10)) :

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}}(x) \leq \frac{u^n(x) + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)} \text{ p.p.} \\ v^{n+\frac{1}{2}}(x) \leq \frac{v^n(x) + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)} \text{ p.p.} \end{cases} \quad (3.19)$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} \lambda^{n+\frac{1}{2}} &\leq \frac{\lambda^n + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)} \\ \mu^{n+\frac{1}{2}} &\leq \frac{\mu^n + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)} \end{aligned}$$

D'où (3.18) par addition de ces inégalités. Du lemme (3.2) résulte aussitôt que u_{ik}, v_{ik} , ($i = 1, 2$), \tilde{u}_k, \tilde{v}_k demeurent dans un borné de $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$. Il reste maintenant à montrer que ces fonctions demeurent dans un borné de $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$. On va montrer le : \square

Lemme 3.3. *Si $4c_0k < 1$, il existe une constante c_1 telle que :*

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_j} \right|, \left| \frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_j} \right| \leq c_1, \\ i, j = 1, 2, 0 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \quad (3.20)$$

Remarque 10.

Naturellement les inégalités (3.20) donnent le résultat désiré et leur démonstration achèvera donc la démonstration du lemme (3.1).

Démonstration. de Lemme (3.3)

1) Montrons d'abord que :

$$\left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} \right| \leq \left| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2} \right| \quad (3.21)$$

$$\left| \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_1} \right| \leq \left| \frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1} \right| \quad (3.22)$$

D'après la première équation (3.9), que l'on dérive en x_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} - \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2} + k \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} \right) = 0 \\ \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} (a_1, x_2, t) = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Cette dérivation est justifiée si, par exemple, $\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$: prenant alors le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}$, il vient, comme :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} \right), \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} \right) &\geq 0 \\ \left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} \right|^2 &\leq \left| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} \right| \end{aligned}$$

D'où (3.21). On établit de la même façon (3.22) en dérivant en x_1 la deuxième équation (3.15).

2) Admettons un instant les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \left| D_i u^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + \left| D_i v^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 \leq \xi (|D_i u^n|^2 + |D_i v^n|^2), \\ D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \xi = \frac{1}{(1-4kc_0)^2}, i = 1, 2. \end{cases} \quad (3.24)$$

Et

$$\left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_2} \right|^2 \leq kc_2 + \left(\left| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2} \right|^2 \right) \quad (3.25)$$

Vérifions que le lemme en résulte.

Posons :

$$\begin{cases} \beta_{n+\frac{i}{2}} = \left| D_1 u^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 + \left| D_2 u^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 + \left| D_1 v^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 + \left| D_2 v^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 \\ i = 1, 2. \end{cases} \quad (3.26)$$

On déduit de (3.21), (3.22), (3.25) que :

$$\beta_{n+1} \leq kc_2 + \beta_{n+\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

Et de (3.24) on déduit (par addition des inégalités pour $i = 1, 2$) :

$$\beta_{n+\frac{1}{2}} \leq \xi \beta_n \quad (3.28)$$

Donc

$$\beta_{n+1} \leq kc_2 + \xi \beta_n$$

D'où :

$$\beta_{n+1} \leq \frac{c_2(1-4kc_0)^2}{8c_0(1-2kc_0)} (\xi^{n+1} - 1) + \xi^{n+1} \beta_0 \leq \text{constante.}$$

Utilisant alors (3.28), on a finalement :

$$\beta_{n+1}, \beta_{n+\frac{1}{2}} \leq \text{constante.}$$

Ce qui démontre le lemme, sous réserve de la vérification de (3.24), (3.25).

3) Vérification de (3.24), on déduit de (3.8) que :

$$D_i u^{n+\frac{1}{2}} = D_i u^n - 2ku^{n+\frac{1}{2}} D_i u^{n+\frac{1}{2}} + 2kv^{n+\frac{1}{2}} D_i v^{n+\frac{1}{2}}$$

D'où :

$$\left| D_i u^{n+\frac{1}{2}} \right| \leq |D_i u^n| + 2kc_0 \left(\left| D_i u^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| D_i v^{n+\frac{1}{2}} \right| \right) \quad (3.29)$$

Et de même :

$$\left| D_i v^{n+1} \right| \leq |D_i v^n| + 2kc_0 \left(\left| D_i u^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| D_i v^{n+\frac{1}{2}} \right| \right) \quad (3.30)$$

Pour simplifier, posons un instant :

$$\left| D_i u^{n+\frac{1}{2}} \right| = x, \left| D_i v^{n+\frac{1}{2}} \right| = y, |D_i u^n| = a, |D_i v^n| = b, 2kc_0 = \gamma;$$

Alors (3.29), (3.30) s'écrivent :

$$x \leq a + \gamma(x + y), y \leq b + \gamma(x + y)$$

D'où par addition :

$$(1 - 2\gamma)(x + y) \leq a + b$$

D'où :

$$x \leq a + \gamma \frac{a + b}{1 - 2\gamma}, y \leq b + \gamma \frac{a + b}{1 - 2\gamma}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &\leq a^2 + b^2 + \frac{2\gamma}{1-2\gamma}(a+b)^2 + \frac{2\gamma^2}{(1-2\gamma)^2}(a+b)^2 = \\
&= a^2 + b^2 + \frac{2\gamma(1-\gamma)}{(1-2\gamma)^2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2 + \frac{4\gamma(1-\gamma)}{(1-2\gamma)^2}(a^2 + b^2) \\
&= \frac{1}{(1-2\gamma)^2}(a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

d'où (3.24)

4) Vérification de (3.25). Dérivons (formellement d'abord) la 1^{re} équation (3.9) en x_1 ; il vient :

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} - \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1} + k \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (3.31)$$

Et l'équation (3.9) donne :

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}(a_1, x_2) = \frac{1}{k} u^{n+\frac{1}{2}}(a_1, x_2) \quad (3.32)$$

Prenant le produit scalaire de (3.31) avec $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}$ il vient :

$$\left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} \right|^2 - \left(\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}, \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} \right) \leq \frac{k}{2} \int_{a_2}^{b_2} \left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}(a_1, x_2) \right]^2 dx_2$$

D'où, d'après (3.32) :

$$\left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} \right|^2 \leq \left| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} \right| + \frac{1}{2k} \int_{a_2}^{b_2} \left| u^{n+\frac{1}{2}}(a_1, x_2) \right|^2 dx_2,$$

D'où :

$$\left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} \right|^2 \leq \left| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1} \right|^2 + \frac{1}{k} \int_{a_2}^{b_2} \left| u^{n+\frac{1}{2}}(a_1, x_2) \right|^2 dx_2 \quad (3.33)$$

Mais d'après (3.10) :

$$u^{n+\frac{1}{2}}(a_1, x_2) = \frac{k(\sigma^n(a_1, x_2))^2}{1+2k\sigma^n(a_1, x_2)} \leq (\text{d'après le lemme (3.2)}) kc_0^2$$

Et donc :

$$\frac{1}{k} \int_{a_2}^{b_2} \left| u^{n+\frac{1}{2}}(a_1, x_2) \right|^2 dx_2 \leq k(b_2 - a_2) c_0^4$$

De sorte que (3.33) donne :

$$\left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} \right|^2 \leq \left| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1} \right|^2 + k (b_2 - a_2) c_0^4 \quad (3.34)$$

Partant de la deuxième équation (3.9) (que l'on dérive en x_2), on en déduit une inégalité analogue à (3.14) avec v et x_2 au lieu de u et x_1 d'où (3.25). \square

Passage à la limite

D'après le lemme (3.1), on peut extraire des sous-suites, encore notées

$$\begin{aligned} & u_{ik}, v_{ik}, \bar{u}_k, \bar{v}_k, \text{ telles que :} \\ & \left\{ \begin{array}{l} u_{ik} \rightarrow u_i, v_{ik} \rightarrow v_i, \bar{u}_k \rightarrow \bar{u}, \bar{v}_k \rightarrow \bar{v} \\ \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{array} \right. \quad (3.35) \end{aligned}$$

Ce type de convergence n'est pas suffisant pour passer à la limite dans les termes non linéaires, mais on a une estimation supplémentaire pour \bar{u}_k et \bar{v}_k :

Lemme 3.4. *lorsque $k \rightarrow 0$,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t}, \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} \text{ demeurent} \\ \text{dans un borné } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Démonstration. Ajoutant les égalités correspondantes de (3.8), (3.9), on a :

$$u^{n+1} - u^n + k \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} + k \left[\left(u^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(v^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.37)$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial u_{2k}}{\partial x_1} + (u_{1k})^2 - (v_{1k})^2 = 0 \quad (3.38)$$

De même :

$$\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \frac{\partial v_{2k}}{\partial x_2} + (v_{1k})^2 - (u_{1k})^2 = 0 \quad (3.39)$$

Cela extraire (3.36), grâce au Lemme(3.1) . On peut alors supposer, grâce aux estimations sur

\tilde{u}_k, \tilde{v}_k et la compacité de l'injection de $H^1(Q) \longrightarrow L^2(Q)$, que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u}, \tilde{v}_k \rightarrow \tilde{v} \\ \text{dans } L^2(Q) \text{ fort et p.p.} \end{cases} \quad (3.40)$$

Mais, d'après la définition des fonctions \tilde{u}_k et u_{2k} , on a :

$$\|\tilde{u}_k - u_{2k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \sup_{0 \leq n \leq N-1} |u^{n+1} - u^n|$$

Et avec (3.37) et le lemme (3.1), il en résulte que :

$$\|\tilde{u}_k - u_{2k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_3 \quad (3.41)$$

De même :

$$\|\tilde{v}_k - v_{2k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_3 \quad (3.42)$$

Donc, avec (3.40), on en déduit que l'on peut supposer que :

$$\begin{cases} u_{2k} \rightarrow \tilde{u}, v_{2k} \rightarrow \tilde{v} \\ \text{dans } L^2(Q) \text{ fort et p.p.} \end{cases} \quad (3.43)$$

Mais la première égalité (3.9) s'écrit

$$u_{2k} - u_{1k} + k \frac{\partial u_{2k}}{\partial x_1} = 0$$

□

D'où, avec le lemme (3.1)

$$\|u_{2k} - u_{1k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_4 \quad (3.44)$$

Et de même :

$$\|v_{2k} - v_{1k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_4 \quad (3.45)$$

On peut donc supposer, d'après (3.43), que :

$$\begin{cases} u_{1k} \rightarrow \tilde{u}, v_{1k} \rightarrow \tilde{v} \\ \text{dans } L^2(Q) \text{ fort et p.p.} \end{cases} \quad (3.46)$$

Alors (avec les notations (3.35)) :

$$u_i = \tilde{u}(= u), \quad v_i = \tilde{v}(= v)$$

Et l'on a maintenant :

$$(u_{1k})^2 \rightarrow u^2 \quad \text{dans } L^2(Q) \text{ faible}$$

et, au même sens, $(v_{1k})^2 \rightarrow v^2$, et on peut passer à la limite dans (3.38), (3.39) ;

Comme, d'après le lemme 3.4, on peut aussi supposer que :

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \text{ faible étoile}$$

On a :

$$\tilde{u}_k(0) \rightarrow u(0), \quad \tilde{v}_k(0) \rightarrow v(0) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et par conséquent :

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0$$

on voit ainsi que u et v satisfont au système (3.1).

3.2.2 L'unicité

Soient $\{u_1, v_1\}$ et $\{u_2, v_2\}$ deux solutions du problème. Posant :

$$u = u_1 - u_2, \quad v = v_1 - v_2$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1^2 - v_1^2 &= \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2^2 - v_2^2 = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_1^2 - u_1^2 &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2^2 - u_2^2 = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_1^2 - u_2^2 &= v_1^2 - v_2^2 \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_1^2 - v_2^2 &= u_1^2 - u_2^2 \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 - v^2 = v_1^2 - v_2^2 \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + v^2 - u^2 = u_1^2 - u_2^2 \quad (3.48)$$

Multiplions (3.47) par u , (3.48) par v puis intégrons sur Ω , on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} u (u_1^2 - u_2^2) dx &= \int_{\Omega} u (v_1^2 - v_2^2) dx \\ \int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial t} dx + \int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial x_2} dx + \int_{\Omega} v (v_1^2 - v_2^2) dx &= \int_{\Omega} v (u_1^2 - u_2^2) dx \end{aligned}$$

Posons :

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \psi dx, |\varphi| = (\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, u \right) + \int_{\Omega} u (u_1^2 - u_2^2) dx &= \int_{\Omega} u (v_1^2 - v_2^2) dx \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}, v \right) + \int_{\Omega} v (v_1^2 - v_2^2) dx &= \int_{\Omega} v (u_1^2 - u_2^2) dx \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right) &= \int_{\Omega} u (v_1^2 - v_2^2) dx - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, u \right) - \int_{\Omega} u (u_1^2 - u_2^2) dx \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v \right) &= \int_{\Omega} v (u_1^2 - u_2^2) dx - \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}, v \right) - \int_{\Omega} v (v_1^2 - v_2^2) dx \end{aligned}$$

Notons que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, u \right) &= \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x_1} dx = \int_{|a_2, b_2|} \int_{|a_1, b_1|} u \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{|2, b_2|} \left[\lim_{x_1 \rightarrow b_1} u^2(x_1, x_2) \right] dx_2 \geq 0 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}, v \right) &= \int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial x_2} dx = \int_{|2, b_2|} \int_{|1, b_1|} v \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{|1, b_1|} \left[\lim_{x_2 \rightarrow b_2} u^2(x_1, x_2) \right] dx_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Et grâce à (3.5) on a :

$$\begin{aligned} (u_1^2 - u_2^2)(u_1 - u_2) &= (u_1 + u_2)(u_1 - u_2)^2 \geq 0 \\ (v_1^2 - v_2^2)(v_1 - v_2) &= (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

De sorte que :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right) \leq \int_{\Omega} (v_1^2 - v_2^2)(u_1 - u_2) dx \quad (3.49)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v \right) \leq \int_{\Omega} (u_1^2 - u_2^2)(v_1 - v_2) dx \quad (3.50)$$

Mais :

$$u_i, v_i \in L^{\infty}(Q)$$

Donc si :

$$\text{Max} \left(\|u_i\|_{L^\infty(Q)}, \|v_i\|_{L^\infty(Q)} \right) = \mu$$

On a : Et

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (v_1^2 - v_2^2) (u_1 - u_2) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (v_1 + v_2) (v_1 - v_2) (u_1 - u_2) dx \right| \\ &\leq 2\mu \int_{\Omega} |(v_1 - v_2)(x, t)| |(u_1 - u_2)(x, t)| dx = 2\mu |(u, v)| \\ &\leq 2\mu (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}} = 2\mu |v| |u| \\ \left| \int_{\Omega} (u_1^2 - u_2^2) (v_1 - v_2) dx \right| &\leq 2\mu |u| |v| \end{aligned}$$

Et d'après (3.49), (3.50) on obtient :

$$\frac{d}{dt} |u(t)|^2 = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right) \leq 4\mu |v(t)| |u(t)| \quad (3.51)$$

$$\frac{d}{dt} |v(t)|^2 = 2 \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v \right) \leq 4\mu |u(t)| |v(t)| \quad (3.52)$$

Ajoutant (3.51), (3.52) il vient :

$$\frac{d}{dt} (|u(t)|^2 + |v(t)|^2) \leq 4\mu (2|v(t)| |u(t)|)$$

On a :

$$A^2 + B^2 - 2AB = (A - B)^2 \geq 0$$

Donc :

$$2AB \leq A^2 + B^2$$

Alors :

$$\frac{d}{dt} (|u(t)|^2 + |v(t)|^2) \leq 4\mu [|u(t)|^2 + |v(t)|^2]$$

Et donc d'après le lemme de Gronwall [8] :

$$|u(t)|^2 + |v(t)|^2 = 0$$

C'est à dire : $|u(t)| = |v(t)| = 0$ D'où : $u_1 = u_2, v_1 = v_2$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode de décomposition pour prouver l'existence et l'unicité de certains problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Cette méthode est basée sur les étapes suivantes :

1. On construit des solutions approchées par réduction à la dimension finie.

Cette solution approchée dans l'espace finie muni d'une base des fonctions, en générale elle est une solution d'un système d'équations ordinaires non linéaire où on peut utiliser le théorème d'existence locale des équations différentielles ordinaires. Solution approchée est donnée par une suite pour le problème approché.

2. On établi une estimation à priori pour la solution approchée qui nous l'existence global.

3. Enfin, on passe à la limite sur la dimension grâce au lemme de compacité.

Où nous avons appliqué cette méthode pour deux problèmes : le premier inclut l'équation de Fisher et le second est un problème qui contient l'équation de Carleman . Cette méthode s'est avérée efficace pour résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Bibliographie

- [1] **H.BRESIS**. Analyse Fonctionnelle Masson Paris 1983.
- [2] **EINHARD H**, Equations différentielles ordinaires, Dunod Paris 1981.
- [3] **R.A.FISHER**, The advance of advantageouse genes,Ann.Eugenics 7(1937), pp (335-369).
- [4] **KOLODNER** - On Carleman's model for the Boltzman equation. Non linear problems. The Univ. Of wisconsin Press, (1963) 285-287.
- [5] **J.-L. LIONS, R. TEMAM**- Eclatement et décentralisation en calcul des va-riations, 3eme Colloque International d'optimisation, Nice (1969), Springer-Verlag, Lecture Notes..
- [6] **LIONS. J.L. MAGENES E.** Problèmes aux limites non homogènes et applications Tome 1, Dunod Paris 1968.
- [7] **LIONS J.L.** Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.
- [8] **PARODI Maurice**, Mathématiques appliquées à l'Art de l'Ingénieur Equations Différentielles Tome 4, SESES Sorbonne, Paris IV 1966.
- [9] **L.ROQUES**. équations de réaction-diffusion non-linéaires et modélisation en écologie.
- [10] **SAID M.S** Résolution d'un système non linéaire intervenant en dynamique des Gaz par la méthode de compacité Actes du CNAMA université de Jijel Algérie Novembre 2004 pp 165 – 174.
- [11] **M. SAMUELIDES, L. TOUZILLIER** - Aalyse fonctionnelle, Cepadues-éditions, $n^{\circ}255$ (1989).
- [12] **B.SEBBAR** Résolution d'un problème de réaction diffusion par la méthode des approximations successives faisant intervenir des équations intégrales Mémoire de Master Université Kasdi Merbah Ouargla 2014
- [13] **L.TARTAR** - Solutions oscillantes des équations de Carleman. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz. (1980-1981), exp. $n - 12$, p. 295-303.

- [14] **TARTAR L.** Topics in non linear analysis Publications mathématiques d'Orsay 1978 N°13.
- [15] **TEMAM R-** Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition. Séminaire N.Bourbaki. (1969-1970), exp. n381, p. (1-15).
- [16] **TEMAM R.** Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, Annali di Mat. Pur. ad Applic., LXXIV (1968),p.191-380.
- [17] **C.ZUILLY**, Distribution et transformation de Fourier, Dunod 1999.

Résumé

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode de décomposition pour prouver l'existence et l'unicité de certains problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Où nous avons appliqué cette méthode pour deux problèmes : le premier inclut l'équation de Fisher et le second est un problème qui contient l'équation de Carleman .

Cette méthode s'est avérée efficace pour résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Abstract

In this work, we used the decomposition method to prove the existence and uniqueness of certain partial differential equation problems.

Where we applied this method for two problems : the first includes the Fisher equation and the second is contains the Carleman equation .

This method has proven effective in solving partial differential equation problems.

