



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Résolution numérique de L'équation de Poisson

Présenté par: Abdellaoui Marwa
Hachia Kenza

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Aissaoui Adel	MCA	Président	Univ. El Oued
Beggas Mohammed	MCB	Rapporteur	Univ. El Oued
Moumen Bekkouche Mohammd	MAA	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier « **Allah** » le tous puissant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements :

À notre encadreur de mémoire **Dr. Beggas Mohammed** Maître de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements, sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également à nos camarades de la promotion 2018 de Mathématiques et nos amis surtout **Fatima, Farida, Safa, Samira, Tofaha, Nacira, Oum El Fadel, Hadda, Hana** pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Finalement, Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Notations

$L^p(\Omega)$	espaces des Lebesgue.
A	matrice.
A^t	matrice transposée.
A^{-1}	matrice inverse.
I	matrice unité.
λ	valeur propre.
$\sigma(A)$	rayon spectrale de la matrice A .
$M_n(\mathbb{K})$	ensemble de matrices carrées.
P_h	problème discret.
P_c	problème continu.
A_h	matrice de problème discret.
u_h	solution de problème discret.
u	solution de problème continu.
R_h	l'erreur de consistance de P_h .
Δx	le pas dans la direction de x .
Δy	le pas dans la direction de y .
E.D.P	des équations aux dérivées partielles.
C.I	condition initiale.
C.L	condition aux limite.
D.F	différence finies.

Table des figures

2.1	Membrane élastique	20
4.1	Maillage uniforme de $]0,1[$	37
4.2	Schéma à 5 points pour le Laplacien	44
4.3	Numérotation des noeuds dans l'ordre "naturel"	44

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaire	4
1.1 Espaces fonctionnels	4
1.1.1 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$	4
1.1.2 Espace $C^k([a, b])$	5
1.2 Formules de Taylor et développements limités	5
1.2.1 Dérivation d'une fonction	5
1.2.2 Dérivées successives	6
1.2.3 Diverses formules de Taylor	6
1.3 Espace vectoriel	9
1.4 Espace vectoriel normé	9
1.5 Définition et quelques exemples	10
1.5.1 Divergence de vecteur V	10
1.5.2 Laplacien	10
1.5.3 La fonction harmonique	10
1.6 Rappel sur les matrices	10
1.6.1 Norme matricielle	10
1.6.2 Valeur propre	11
1.6.3 Rayon spectrale	11
1.6.4 Matrices particuliers	12
2 Généralité Sur les équations aux dérivées partielles	15

2.1	Généralités	15
2.1.1	E.D.P linéaire d'ordre deux à coefficients constants en dimension 2 . .	16
2.1.2	Classification	16
2.1.3	Le problème aux limite	17
2.1.4	Condition initiale	17
2.1.5	Problème bien posé	18
2.1.6	Problème mal posé	18
2.2	Quelques modèles tirés de la physique	19
2.2.1	Problème parabolique	19
2.2.2	Problème hyperbolique	19
2.2.3	Problème elliptique	20
3	Principe de discrétisation et résolution numérique	22
3.1	Principe de la méthode de différence finies	22
3.1.1	Maillage :	23
3.2	Cas D1 :	23
3.2.1	Dérivée d'ordre 1 :	23
3.2.2	L'erreur de Troncature	23
3.2.3	Schéma d'ordre supérieur	24
3.2.4	Dérivée d'ordre supérieur :	24
3.3	Cas D2 :	25
3.3.1	Dérivée première	26
3.3.2	Dérivée d'ordre supérieur	27
3.4	Résolution des systèmes linéaires	28
3.4.1	Systèmes linéaires	28
3.4.2	Système linéaire a matrice A particulière	28
3.4.3	Les méthodes directes	30
3.4.4	Les méthode iteratives	31
3.4.5	Critère de convergence	33

4	Résolution par D.F de l'équation de Poisson	35
4.1	Introduction du modèle	36
4.2	Problème continu en D1	36
4.2.1	L'existence et l'unicité de la solution continue	36
4.2.2	Principe de maximum continu	36
4.3	Problème discret en D1	36
4.3.1	Consistance :	40
4.3.2	Principe de maximum discret	40
4.3.3	Stabilité	41
4.3.4	Convergence	41
4.4	Problème continu en D2	42
4.4.1	L'existence et l'unicité de la solution continue	42
4.4.2	Principe de maximum continu	43
4.5	Problème discret en D2	43
4.5.1	Consistance	46
4.5.2	Stabilité	47
4.5.3	Convergence	47
5	<i>Applications</i>	50
5.1	Première application	50
5.2	Deuxième application	53
	Bibliographie	62

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé E.D.P dans la suite . C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'E.D.P que l'on a pu comprendre le rôle de tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises.

Quand sont apparues les E.D.P ? Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17^{ème} siècle (Newton, Leibniz ...). Ensuite le "catalogue" des E.D.P s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique . S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la théorie de la relativité.

L'une des choses qu'il faut avoir à l'esprit à propos des E.D.P, c'est qu'il n'est en général pas question d'obtenir leurs solutions explicitement ! Ce que les mathématiciens peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions.

L'apparition d'ordinateurs extrêmement puissants permet néanmoins aujourd'hui d'obtenir des solutions approchées pour des équations aux dérivées partielles, même très compliquées. C'est ce qui s'est passé par exemple lorsque vous regardez les prévisions météorologiques, ou bien lorsque vous voyez les images animées d'une simulation d'écoulement d'air sur l'aile d'un avion. Le rôle des mathématiciens est alors de construire des schémas d'approximation,

et de démontre la pertinence des simulations en établissant des estimations a priori sur les erreurs commises.

En vue de passage d'un problème exacte (continu) au problème approché (discrét) on dispose plusieurs techniques : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

Nous nous limiterons ici à l'exposé des techniques des différences finies.

La méthode de différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans les problèmes continus par des différences divisées ou un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage

Avantage : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénient : limitation de la géométrie des domaines de calculs (Simple, non complexe), difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

Dans de nombreux domaines de la physique et en particulier dans le cas de la mécanique de fluides, on rencontre une équation aux dérivées partielles très simple modélisant le déplacement d'une grandeur, déplacement d'une quantité de matière, d'une quantité de mouvement ou d'une onde. Ce qui nous permettra d'en déduire des schémas numériques adéquats. C'est l'équation de Poisson.

Le travail présent se décompose en 5 chapitres. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques résultats généraux sur les équations aux dérivées partielles et la classification des E.D.P du deuxième ordre avec des exemples tirés de la physique.

Quant au deuxième chapitre, il est consacré à la méthode de différences finies. Nous exposons le principe de cette méthode, finalement, nous citons quelques méthodes de résolution du système linéaire (Cholesky, Jacobi et Gauss-Seidel) dû à la discrétisation du problème par D.F.

L'objectif du troisième chapitre est la résolution de l'équation de Poisson par la méthode de D.F qui transforme le problème d'E.D.P à un système d'équation linéaire, sa forme matricielle est la suivante :

$$A_h u_h = f$$

en tenant compte de l'analogie de résolution entre le problème continu et le problème discret.

En finissons par des applications numériques au quatrième chapitre où les résultats obtenus

valident le contenu du chapitre 3.

Chapitre 1

Préliminaire

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales d'analyse et un rappel sur les matrices que nous utiliserons pas la suite.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1.

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $1 \leq p < +\infty$

$L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions mesurables de puissance p -ème intégrable, i.e :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Pour $p = 1$

$L^1(\Omega)$ est un espace de toute le fonction intégrable sur Ω

- Pour $p = +\infty$

$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que : } \exists C > 0 |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega \right\}$. muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ C, \text{ tell que } |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega \right\} = \sup \text{ ess } f$$

1.1.2 Espace $C^k([a, b])$

Définition 1.1.2.

$(f \in C^k[a, b]) \Leftrightarrow (f \text{ est dérivable jusqu'à l'ordre } k \text{ et la dérivée d'ordre } k \text{ est continue}).$

1.2 Formules de Taylor et développements limités

Nous avons vu précédemment que la dérivation est essentielle dans l'étude des fonctions. On va voir que les développements limités fournissent encore plus de précision dans l'allure et le comportement d'une fonction au voisinage d'un point donné. Une autre application importante de cette notion est le calcul approché de la valeur d'une fonction en un point, en particulier pour celles qui ne sont pas de type polynomial.

1.2.1 Dérivation d'une fonction

Définition 1.2.1.

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I est un intervalle ouvert) est dérivable en un point $x_0 \in I$ si le taux

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

défini sur $I \setminus x_0$, admet une limite finie lorsque $x \rightarrow x_0$. Ainsi, cette limite est dite la dérivée de f au x_0 et notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

De même ici, on peut définir une dérivée à gauche et une dérivée à droite au point x_0 : par exemple la dérivée à gauche est, quand elle existe,

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \xrightarrow{\leq} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

et la dérivée à droite est, quand elle existe,

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \xrightarrow{\geq} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

Si f est dérivable en x_0 alors

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

1.2.2 Dérivées successives

Définition 1.2.2.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Si la fonction f' est dérivable, on dira que f est deux fois dérivable et on note

$$f''(x) = (f')'(x)$$

En réitérant, on définit de même la dérivée à l'ordre n de f notée $f^{(n)}$ par

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

On peut montrer par récurrence la formule dite de Leibnitz :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

où $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

1.2.3 Diverses formules de Taylor

Dans toute cette section, on se donne une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ fois dérivable.

Formule de Mac-Laurin

On se place dans le cas où l'intervalle $[a, b]$ est de la forme $[0, x]$, x étant une variable positive réelle quelconque. Alors la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n devient :

$$f(x) - f(0) = xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2f''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}f^{(n+1)}(c)$$

où $c \in]0, x[$.

Formule de Taylor-Young

Considérons maintenant le cas où f est une application d'un intervalle I vers \mathbb{R} , et soit a

et x deux points de I . Alors on montre qu'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec

$$\varepsilon(x) \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad x \longrightarrow a.$$

Le terme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelé reste d'ordre n pour $x \longrightarrow a$.

Noter qu'à l'opposé des autres formules données précédemment, cette dernière précise le comportement du reste d'ordre n pour x tendant vers a .

Dans le cas particulier où $a = 0$, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x)^k}{k!} f^{(k)}(0) + (x)^n \varepsilon(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) + (x)^n \varepsilon(x)$$

On peut noter, en utilisant les notations de Landau

$$(x)^n \varepsilon(x) = O(x^n) \quad (x \longrightarrow 0)$$

et

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) + O(x^n)$$

On dira que

$$f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0),$$

est le développement limité (en abrégé D.L.) d'ordre n de f au voisinage de 0.

Les D.L. sont très utiles pour l'étude locale des fonctions puisqu'ils permettent :

- une expression plus simple de f , (au voisinage du point)
- une recherche facile de limites
- un tracé plus précis de la courbe (recherche d'asymptotes, position de la courbe par rapport à celles-ci,...).

Généralisation

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in C^p(\Omega)$$

Pour $p = 1$:

$$Df(x_0)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i$$

Pour $p = 2$:

$$D^2f(x_0)(h^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(h_{i_1}, h_{i_2})$$

si on pose :

$$p = n = 2, \quad x_{i_1} = x, \quad x_{i_2} = y, \quad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$D^2f(x_0)(h^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1h_2$$

Formule de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} D^k f(x_0) h^k + O(\|h\|^p)$$

Si $n = p = 2$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1h_2 \right]$$

Si $p = 1, n = 3, h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)h_3 + O(\|h\|),$$

1.3 Espace vectoriel

Définition 1.3.1.

On définit sur un ensemble non vide E deux opérations, l'addition l'intérieur $(+)$ et la multiplication l'extérieur (\cdot) et soit les conditions suivantes :

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. $\forall (x, y) \in E \times E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a :
 - * $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
 - * $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
 - * $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
 - * $1 \cdot x = x$

Si les conditions sont vérifiées on dit que E est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} , $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et noté par $(E, +, \cdot)$.

1.4 Espace vectoriel normé

Définition 1.4.1.

Soit E un espace vectoriel. Une norme sur E est une application de E dans \mathbb{R}_+ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tout x, y dans E et tout α dans \mathbb{K} :

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité),
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.4.2.

Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} et $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

1.5 Définition et quelques exemples

Définition 1.5.1.

$$\vec{grad}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}_{(i,j,k)}$$

1.5.1 Divergence de vecteur V

Soit V une fonction vectorielle de 3 variables (x, y, z) définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^3 et à valeurs V_1, V_2, V_3 dans \mathbb{R} . On appelle divergence du vecteur V et on note $div(V)$ ou $\nabla \cdot V$, le scalaire :

$$div(V) = \nabla \cdot V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

1.5.2 Laplacien

On appelle Laplacien de u , et on note Δu ou $\nabla^2 u$, le scalaire :

$$\Delta u = div(\vec{grad} u) = \nabla \cdot \nabla(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

1.5.3 La fonction harmonique

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit f une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est harmonique sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f \equiv 0$ sur Ω , où Δf est le Laplacien de f défini par $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1.6 Rappel sur les matrices

1.6.1 Norme matricielle

Définition 1.6.1.

On appelle norme matricielle $\| \cdot \|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) vérifiant de plus propriété

suivante :

1. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K})$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ (*inégalité triangulaire*)
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$

Par exemple :

$$\|\cdot\|_1 = \max_{j=1 \dots n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

$$\|\cdot\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

1.6.2 Valeur propre

Définition 1.6.2.

- Soit A une matrice carrée d'ordre n . Un vecteur propre de A est un vecteur non nul \vec{X} tel que $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$, pour un certain scalaire λ .
- Un scalaire λ est appelé une valeur propre de A si l'équation $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$ admet une solution non triviale \vec{X} ; \vec{X} est appelé le vecteur propre associé à λ .

Remarque 1.6.1.

- λ est une valeur propre de A si et seulement si l'équation

$$(A - \lambda I)\vec{X} = 0 \quad (\star)$$

- L'espace solution de (\star) n'est pas autre que $\ker(A - \lambda I)$. Cet espace est appelé l'espace propre de A associé à valeur propre λ .

1.6.3 Rayon spectrale

Spectre

Le spectre $A \in M_n(\mathbb{K}), n \geq 1$, est l'ensemble des valeurs propres de A :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \quad A - \lambda I \quad \text{singulière} \}.$$

Le rayon spectrale de A est le plus grand des modules des valeurs propres de A :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \quad \lambda \in \sigma(A)\}$$

1.6.4 Matrices particuliers

- **Transposée d'une matrice**

On appelle transposée d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $p \times q$. La matrice $B = (b_{ij})$ de type $q \times p$. Obtenue en échangeant lignes et colonnes de A : $b_{ij} = a_{ij}$.

- **Matrice symétrique**

C'est une matrice A carrée telle que : $A = A^t$

- **Matrice définie positive (forme quadratique)**

On appelle forme quadratique associée à la matrice A la forme :

$$Q(x) = X^t A X$$

Une forme quadratique est dite définie positive si :

$$X^t A X > 0 \quad \forall X \neq 0$$

Remarque 1.6.2.

Si $X^t A X \geq 0 \quad \forall X \neq 0$

La matrice est positive mais non définie.

Une matrice carrée est définie positive si la forme quadratique qui lui est associée est définie positive.

- **Matrice unité**

La matrice unité noté I est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- **Matrice diagonale**

C'est une matrice carrée telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- **Matrice par blocs**

Une matrice par blocs $A = (A_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ est une matrice dont les entrées (A_{ij} sont des matrices au lieu d'être des scalaire.

On doit toutefois respecter les deux règles suivants :

1. Toutes les matrices d'un même ligne (A_{ij} avec $1 \leq j \leq n$) ont même nombre de ligne.
2. Toutes les matrices d'un même colonne (A_{ij} avec $1 \leq i \leq m$) ont même nombre de colonnes. Ainsi, il existe des nombre entiers m_i et n_j tel que $A_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times n_j}$.

- **Matrice bande (tridiagonale)**

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (ou $\mathbb{C}^{m \times n}$) est une matrice bande si elle n'admet des éléments non nuls que sur un "certain nombre" de diagonales autour de la diagonale principale.

Plus précisément, on dit que A est une matrice bande- p inférieure si $a_{ij} = 0$ quand $i < j + p$ et bande- q supérieure si $a_{ij} = 0$ quand $j > i + q$.

On appelle simplement matrice bande- p une matrice qu'est bande- p inférieure et supérieure.

- **Matrice tridiagonale par blocs**

Soit la matrice A tridiagonale tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On définit la matrice tridiagonale par blocs tel que :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & 0 \\ A_{21} & & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & A_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

où les A_{ij} sont de sous-matrices de A

- **Matrices monotones**

Définition 1.6.3.

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est dite monotone si A est inversible et si $A^{-1} \geq 0$ i.e. tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

Proposition 1.6.1.

Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ telle que

- $a_{ij} \leq 0$ pour tous $i \neq j$
- $\sum_{1 \leq j \leq N} a_{ij} > 0$ pour $i = 1, \dots, N$

Alors A est une M -matrice.

Chapitre 2

Généralité Sur les équations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, on va citer quelques définitions qui concerne les équations aux dérivées partielles, ainsi des phénomènes physiques modéliser par des équations aux dérivées partielles (en abrégé E.D.P).

2.1 Généralités

Une équation aux dérivées partielles est une relation entre une fonction de plusieurs variables u et ses dérivées partielles et une fonction f donnée :

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = f \quad (2.1)$$

Ω est une ouvert de \mathbb{R}^n , F est une fonction de plusieurs variable réelles. L'ordre de dérivation le plus élève est appelé l'ordre de l'E.D.P.

Remarque 2.1.1.

1. Notons que si $n = 1$, alors l'E.D.P est une équation différentielle ordinaire (E.D.O).
2. Si dans (1.1) f est nulle, on dit que l'équation est homogène.

Définition 2.1.1.

Si u est ses dérivées apparaissent séparément dans l'E.D.P, celle ci est dit linéaire.

Exemple 2.1.1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

1^{er} ordre linéaire et homogène.

Définition 2.1.2.

Si u n'est pas linéaire en au moins une dérivée dans l'E.D.P, alors l'E.D.P est non linéaire.

Exemple 2.1.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

2^{eme} ordre non linéaire, alors l'EDP est non linéaire.

Exemple 2.1.3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f$$

3^{eme} ordre linéaire

La forme la plus générale pour une E.D.P linéaire du 1^{er} ordre est :

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y)$$

2.1.1 E.D.P linéaire d'ordre deux à coefficients constants en dimension 2

Elles sont de la forme :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (2.2)$$

les trois premier termes A, B, C sont des constantes.

2.1.2 Classification

Le type de l'E.D.P (1.2) dépend de signe de $B^2 - 4AC$

- Si $B^2 - 4AC > 0$, alors l'E.D.P est dit hyperbolique .
- Si $B^2 - 4AC = 0$, alors l'E.D.P est dit parabolique.

- Si $B^2 - 4AC < 0$, alors l'E.D.P est dit elliptique.

Exemple 2.1.4.

1) L'équation des ondes hyperbolique est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad C > 0$$

$$B^2 - 4AC = 4C^2$$

2) L'équation de la diffusion parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad d > 0$$

$$B^2 - 4AC = 0$$

3) L'équation de Laplace elliptique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2.1.3 Le problème aux limite

Soient u et une E.D.P valide sur un ouvert Ω , les trois principaux types de conditions aux frontières sont :

1. On impose la valeur de u sur $\partial\Omega$, c'est la condition de Dirichlet .
2. On impose la valeur de $\frac{\partial u}{\partial n}$; $\frac{\partial u}{\partial n} = (\vec{gradu}) \cdot \vec{n}$ c'est la condition de Neumann .
3. On impose ces deux condition sur $\partial\Omega$ c'est la condition de mixte .

Remarque 2.1.2.

Si l'E.D.P est valide dans tout l'espace, il n'y a pas de frontière, on impose souvent des conditions à l'infini .

2.1.4 Condition initiale

Si l'E.D.P modélise un problème d'évolution, on ajoute la condition initiale qui dépende du temps .

Remarque 2.1.3.

(E.D.P + condition aux limite) \Rightarrow problème aux limite

2.1.5 Problème bien posé

Soit (P) un problème aux limites.

Proposition 2.1.1.

On dit que (P) bien posé si :

1. Il existe une solution de (P) satisfaisant les conditions aux frontières .
2. la solution doit-être unique.
3. la solution doit-être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées

2.1.6 Problème mal posé

Un problème qui n'est pas bien posé est dit mal posé .

Exemple 2.1.5.

$$(P) \begin{cases} u''(x) = 0 \\ u'(a) = u_0 \\ u'(b) = v_0 \end{cases}$$

$$u'' = 0 \Rightarrow u' = C_1 \Rightarrow u = C_1x + C_2$$

$$u'(a) = u_0, u'(b) = v_0$$

cas 1 :

Si $u_0 \neq v_0$ le problème (P) n'admet aucune solution.

cas 2 :

Si $u_0 = v_0$ le problème (P) admet une infini de solution : $u(x) = u_0x + C$.

Donc le problème (P) est mal posé.

2.2 Quelques modèles tirés de la physique

2.2.1 Problème parabolique

L'équation de la chaleur

On considère une barre de longueur L dont la température est fixée à zéro aux extrémités.

L'équation de la température au cours du temps s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) & \forall x \in [0, L] \text{ et } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & C.I \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & C.L \end{cases}$$

2.2.2 Problème hyperbolique

L'équation des ondes

Proposition 2.2.1.

Considérons une membrane élastique de surface Ω , plan au repos et fixée sur son bord Γ . Lors de petites vibrations transversales, le déplacement normal au plan d'équilibre en tout point x, y de Ω et à chaque instant t est une fonction $u : (x, y, t) \rightarrow u(x, y, t)$ qui vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \Delta u + f \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T]$$

où C désigne la vitesse des ondes.

Ce problème du second ordre en temps est un modèle de problème hyperbolique. La détermination de la solution nécessite de fixer deux conditions initiales en temps.

En fixant les valeurs du déplacement transversal u et de sa dérivée partielle en temps, au temps

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = v^0(x, y) \end{cases}$$

on obtient un problème à valeur initiale ou problème de Cauchy.

Les conditions aux limites choisies, pour la membrane fixée sur son bord Γ , sont des conditions de Dirichlet homogènes mais on pourrait choisir d'autres types de conditions aux limites comme dans les cas stationnaires ou paraboliques.

Remarque 2.2.1. (Solution stationnaire)

Lorsque la solution ne dépend plus du temps (régime permanent ou stationnaire) on retrouve une équation déjà étudiée de forme :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \forall (x, y) \in \Omega \\ + & \text{Conditions aux limites sur } \Gamma \end{cases}$$

L'équation des ondes et l'équation de la chaleur ont les mêmes expressions dans le cas stationnaire. C'est pourquoi les solutions du problème de Poisson ci-dessus peuvent s'interpréter physiquement, à la fois comme des déplacements d'une membrane élastique ou des températures. (voir [11]).

2.2.3 Problème elliptique

L'équation de Poisson

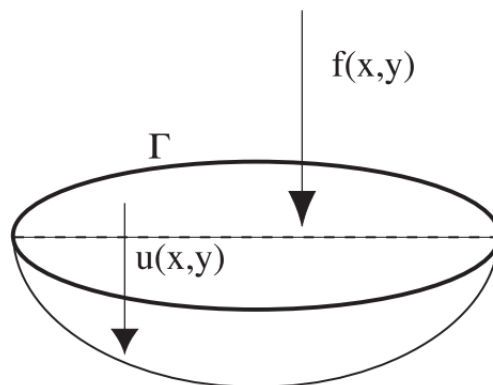


FIGURE 2.1 – Membrane élastique

On considère une membrane élastique plane Ω fixée sur son bord Γ . On suppose la membrane soumise en tout point (x, y) à une densité de forces f s'exerçant perpendiculairement au plan de la membrane.

Sous l'action de f chaque point de la membrane subit un petit déplacement le déplacement transversal, perpendiculaire au plan de Ω est l'inconnue u de ce problème et vérifie l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \forall x, y \in \Omega \\ u(x, y) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Chapitre 3

Principe de discrétisation et résolution numérique

Un problème elliptique linéaire posé sur un domaine continu n'est pas résoluble tel que par un ordinateur, qui ne peut traiter qu'un nombre fini d'inconnues.

Pour se ramener notre problème en dimension finie, on va utiliser la méthode de différences finie (en abrégé D.F) pour discrétiser l'espace, on obtient un système linéaire.

Dans ce chapitre, on va aborder le principe de la méthode de différences finies, et faire appel à des techniques de résolution du système linéaire.

3.1 Principe de la méthode de différence finies

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénient : limitation de la géométrie des domaines des calculs (simple, non complexe), difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

3.1.1 Maillage :

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur u ramène à constituer un maillage de l'intervalle de définition.

On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0, \dots, N$ régulièrement espacés avec un pas Δx . Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les noeuds du maillage. Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents noeuds du maillage.

3.2 Cas D1 :

3.2.1 Dérivée d'ordre 1 :

Développement de Taylor :

Pour $u \in C^2$ la formule de Taylor à l'ordre 2 aux points $u(x + h)$, et $u(x - h)$ nous donne :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^2)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^2)$$

3.2.2 L'erreur de Troncature

Définition 3.2.1.

La puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers 0 est appelée : d'ordre de la méthode

Notation :

On note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i , soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au noeud x_i , on note $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u'_i$.

Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u .

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Ce schéma est dit "avant" ou "décentré avant" ou upwind.

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé "arrière" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

3.2.3 Schéma d'ordre supérieur

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de x_i . On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^3)$$

La soustraction de ces deux relations donne :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(\Delta x^3)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs noeuds voisins de x_i . Le nombre de points nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle le stencil. Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + O(\Delta x^3)$$

3.2.4 Dérivée d'ordre supérieur :

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i . Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u , on écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Il existe aussi une formulation "avant" et "arrière" pour la dérivée seconde, toute deux d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc...

3.3 Cas D2 :

Dans le cas $D2$, considérons une grandeur $u(x, y)$ définie sur un certain domaine. Ce dernier est décomposé en $N \times P$ noeuds (x_i, y_j) répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx dans la direction x et Δy dans l'autre direction. On notera u_{ij} la valeur discrète de la grandeur $u(x, y)$ au noeud (x_i, y_j) .

Notation :

$$u_{i,j} = u(i\Delta x, j\Delta y) \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

$u(x, y)$: est dècomposè en $N \times P$ noeuds (x_i, y_j)

Δx : un pas dans la direction de x

Δy : un pas dans la direction de y

3.3.1 Dérivée première

De la même manière que dans le cas en dimension un, on obtient pour D2 les approximations suivants :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad \text{différences finies (D.F) centre}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \text{D.F avant}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \text{D.F arrière}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad \text{D.F centre}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad \text{D.F avant}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad \text{D.F arrière}$$

Remarque 3.3.1.

Pour optimir de ordres superieurs il faut utiliser plusieurs noeuds au voisinage de (x_i, y_j)

Exemple 3.3.1.

Un schémas aux D.F d'ordre 3 par la dérivée première est

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2,j} + 6u_{i+1,j} - 3u_{i,j} - 3u_{i-1,j}}{6 \Delta x} + O(\Delta x^3)$$

3.3.2 Dérivée d'ordre supérieur

Développement de Taylor

$$u(x_i + \Delta, j) = u_{i,j} + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

$$u(x_i - \Delta, j) = u_{i,j} - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

Par sommation on obtient

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad \text{D.F. centre d'ordre 2 par rapport à } x$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_i = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad \text{D.F. centre d'ordre 2 par rapport à } y$$

La méthode de différence finie repose sur les trois principes suivants :

1) Consistance :

Poson $L : u \longrightarrow -u''$ opérateur de (P_c)

$L_h \longrightarrow D_h(D_h u)$ opérateur de (P_h)

L'erreur de consistance de (P_h) par rapport à (P_c) est défini par :

$$R_h(u) = L(u(x)) - L_h(u(x))$$

La problème (P_h) est dit consistance par rapport à (P_c) si

$$R_h \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad h \longrightarrow 0$$

2) Stabilité :

On dit que le problème (P_h) est stable si pour toute fonction f . la solution correspondante u_h de (P_h) avec f est bornée par la donnée f .

La notion de stabilité dépend de la norme utilisées.

3) Convergence :

En générale : (Consistance + Stabilité) \Rightarrow Convergence

Le théorème de Lax :

Dans un problème bien posé. et avec un schéma numérique consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

3.4 Résolution des systèmes linéaires

3.4.1 Systèmes linéaires

Considérons un système d'équations linéaires de la forme $AX = b$, avec A une matrice inversible de dimension $n \times n$, b un vecteur connu et X le vecteur des inconnus.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si $b = 0$, on dit que le système est homogène

3.4.2 Système linéaire à matrice A particulière

- **A triangulaire inférieure**

Soit le système matricielle d'ordre n :

$$AX = b$$

où A est une matrice triangulaire inférieure.

Développons ce système :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1 \dots n$$

où $a_{ij} = 0$ quand $j > i$.

Il est équivalent donc à :

$$b_i = \sum_{j=1}^i a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j + a_{ii}x_i \quad i = 1 \dots n$$

si on connaît les $(i - 1)$ premiers éléments de X , le i -ième s'écrit :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \right] \quad i = 1 \dots n \quad (3.1)$$

- **A triangulaire supérieure**

Soit le système matricielle :

$$AX = b$$

Où A est une matrice triangulaire supérieure on a :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1 \dots n,$$

où $a_{ij} = 0$ quand $j < i$.

Il est équivalent donc à :

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j + a_{ii}x_i \quad i = 1 \dots n,$$

x_i s'obtient donc aisément par le calcul à rebours suivant :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right] \quad i = n, n - 1, \dots, 1. \quad (3.2)$$

- **A matrice diagonale**

soit le système :

$$AX = b$$

où A est une matrice diagonale. la solution X s'obtient immédiatement par :

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad i = 1, n$$

3.4.3 Les méthodes directes

Ces méthodes permettent de résoudre le système soit par triangularisation ou par factorisation de la matrice A , ces méthodes sont utilisées pour les matrices pleines et les petits systèmes (n peu élevé). Pour nous, on s'intéresse à la méthode de Choleski car note matrice de discrétisation est une matrice tridiagonale.

- **Méthode de Choleski Principe :**

Théorème de Choleski

Si A est matrice symétrique et définie positive, alors elle peut être décomposée en :

$$A = LL^t$$

où L est une matrice réelle triangulaire.

Décomposition de la matrice A

Développons l'équation :

$$A = LL^t$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik}L_{jk}$$

$$L_{ik} = 0 \quad \text{si } k > i$$

$$L_{jk} = 0 \quad \text{si } k > j$$

on obtient :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} L_{ik}L_{jk} \quad i = 1, n \quad j = 1, n$$

pour la partie triangulaire supérieure de A r -ième ligne s'écrit :

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^r L_{rk}L_{jk} \quad j = r, n$$

soit :

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r-1} L_{rk}L_{jk} + L_{rr}L_{jr} \quad j = r, n$$

Ce qui donne l'algorithme suivant :

$$L_{rr} = [a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} L_{rk}^2]^{1/2} \quad r = 1, n$$

$$L_{jr} = [a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} L_{rk}L_{jk}] / L_{rr} \quad j = r + 1, n$$

Résolution des système linéaire $AX = b$ par la méthode de Choleski

Après décomposition, on passe à la résolution du système $LL^t X = b$:

Poson $L^t X = Y$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} LY = b \\ L^t X = Y \end{cases}$$

et la résolution est immédiate par les algorithmes (2.1) et (2.2).

3.4.4 Les méthode iteratives

Ces méthodes induisent un processus itératif par construction d'une suite de vecteurs qui convergent vers la solution du système. A chaque itération $(k + 1)$, un vecteur $X^{(k+1)}$ est évalué à partir du vecteur de l'itération précédente $X^{(k)}$, ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$MX^{(k+1)} = NX^{(k)} + B$$

où les matrices M et N vérifent

$$M - N = A$$

De notre part, en s'interesse aux deux méthodes suivants :

-la méthode de Jacobi

-la méthode de Gauss-Seidel

Ces méthodes sont utilisées pour les matrices creuses et les grandes système.

- **Méthode de Jacobi**

Prencipe

1. Initialisation avec un vecteur $X^{(0)}$ arbitraire.
2. A l'itération $(k + 1)$, le vecteur $X^{(k+1)}$ est calculé par la relation :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j^{(k)} \right] \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j \neq 1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(k)} \right] \end{cases}$$

Forme matricielle

Sous forme matricielle, en décomposant la matrice A en trois matrices D, E et F respectivement diagonale, triangulaire inférieure et triangulaire supérieure :

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)X^{(k)} + D^{-1}B$$

3. Critère d'arrêt

Nous donne le nombre d'itération à effectuer pour avoir la solution approchée :

$$\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \| < \varepsilon$$

ε : donne

- **Méthode de Gauss-Seidel**

Principe

1. Initialisation avec un $X^{(0)}$ arbitraire.
2. A l'itération $(k + 1)$, le vecteur $X^{(k+1)}$ est calculé par la relation :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j^{(k)} \right] \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)} \right] \end{cases}$$

sous forme matricielle :

$$X^{(k+1)} = (D - E)^{-1} F X^{(k)} + (D - E)^{-1} B$$

3. Critère d'arrêt

Nous donne le nombre d'itération à effectuer pour avoir la solution approchée :

$$\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \| < \varepsilon$$

ε : donne

3.4.5 Critère de convergence

Théorème 3.4.1. [13]

Si l'un des conditions suivantes est vérifiée, alors les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent :

— *A est une matrice à diagonale dominante :*

$$| a_{ii} | > \sum_{i=1, i \neq j}^n | a_{ij} |$$

— $\|T\| < 1$ *norme matricielle*

Où $T_J = D^{-1}(E + F)$ et $T_G = (D - E)^{-1}F$

$$- \rho(T_J) < 1, \rho(T_G) < 1$$

Remarque 3.4.1.

- *Le choix du vecteur $X^{(0)}$, est arbitraire c-a-d si la méthode converge, quelque soit $X^{(0)}$, on obtient la solution approchée*

Chapitre 4

Résolution par D.F de l'équation de Poisson

Les équations elliptiques régissent les problèmes stationnaires, d'équilibre, généralement définis sur un domaine spatial borné Ω de frontière Γ sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites, le plus souvent de type Dirichlet ou Neumann.

Le problème elliptique type est celui fourni par l'équation de Laplace (ou de Poisson) soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Cas particulier : l'équation de Laplace

Si $f = 0$, on obtient une équation de Laplace :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

4.1 Introduction du modèle

Le problème modèle est le suivant :

L'équation de Poisson avec le condition de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x) & x \in \Omega \in \mathbb{R}^n \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

4.2 Problème continu en D1

$$(P_c) \begin{cases} -u''(x) = f(x) & a < x < b \\ u(a) = u(b) = g \end{cases}$$

4.2.1 L'existence et l'unicité de la solution continue

Pour $f \in C^0([0, 1])$, $\exists! u \in C^2([0, 1])$ (solution classique) de (P_c) (voir [2]).

4.2.2 Principe de maximum continu

Proposition 4.2.1. [2]

Soit $f \in C^0([0, 1])$, et $u \in C^2([0, 1])$ la solution de (P_c) , Alors :

- $f \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$ sur $\partial\Omega$
- $f \leq 0 \Rightarrow u \leq 0$ sur $\partial\Omega$
- $f = 0$ alors : $\inf_{\partial\Omega} u \leq u \leq \sup_{\partial\Omega} u$
- $f \geq 0$ et $\inf_{\partial\Omega} u \geq 0$ Alors $u \geq 0$ dans Ω

4.3 Problème discret en D1

On discrétise l'intervalle continue $[a, b]$, en un nombre finie des points x_i :

Déscretisation uniforme

$$x_i - x_{i-1} = h = x_{i+1} - x_i \quad (h : \text{le pas de discrétisation})$$

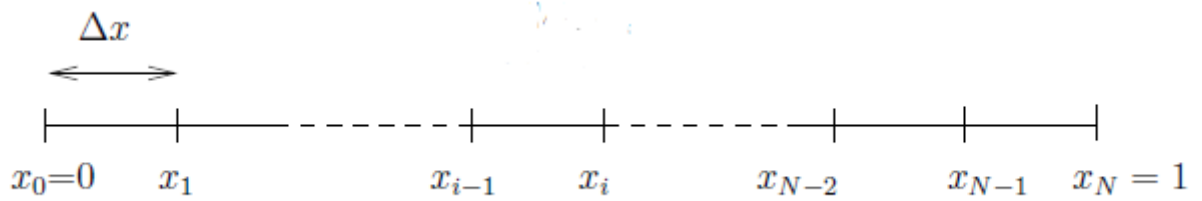


FIGURE 4.1 – Maillage uniforme de $]0,1[$

En utilisant le différence finie centrée, le problème approché (P_h) s'écrit dans ce cas de la façon suivant :

Trouver les u_i tel que :

$$(P_h) \begin{cases} -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} = f_i & i = 1 \dots N \\ u_0 = u_{N+1} = g \end{cases}$$

$$\Omega_h = \{x_i = ih; \quad 1 \leq i \leq N\}$$

on peut écrire le système précédent sous forme matricielle, où les inconnues sont regroupes dans le vecteur $u_h = (u_1, u_2 \dots u_N)^t \in \mathbb{R}^N$ qui vérifie :

$$A_h U_h = b$$

A_h matrice de taille $N \times N$ est donnée par :

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

A_h : matrice carrée tridiagonale.

Proposition 4.3.1. [4]

Pour que le problème (P_h) admette une solution discrète unique il faut et il suffit que la matrice A_h soit symétrique et définie positive.

L'existence et l'unicité de la solution discrète du problème (P_h)

1- La matrice A_h est symétrique :

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & & -1 & 2 \end{pmatrix} = A_h^t$$

A_h est symétrique car $A_h^t = A_h$ (clair)

2- La matrice A_h est définie positive :

$$\forall X \in \mathbb{R}^N \quad X^t A_h X > 0$$

On pose $N=5$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ &= (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3 - x_4, -x_3 + 2x_4 - x_5, -x_4 + x_5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ &= (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2 - x_3)x_2 + (-x_2 + 2x_3 - x_4)x_3 + (-x_3 + 2x_4 - x_5)x_4 + (-x_4 + x_5)x_5 \\ &= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 - x_3x_4 - x_3x_4 + 2x_4^2 - x_4x_5 - x_4x_5 + 2x_5^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2 - 2x_4x_5 + 2x_5^2 \\
&= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_5)^2 + x_1^2 + x_5^2 > 0
\end{aligned}$$

donc A_h est définie positive.

Généralisation :

pour $A_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$; $X \in \mathbb{R}^N$

$$X^t A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, \cdots, -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}, \cdots, -x_{N-1} + 2x_N) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2 - x_3)x_2 + \cdots + (-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1})x_i + \cdots + (-x_{N-1} + 2x_N)x_N \\
&= 2 \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=1}^N x_{i+1}^2 \\
&= x_1^2 + \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N-1} x_i x_{i+1} + x_N^2 + \sum_{i=1}^{N-1} x_{i+1}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} (x_i^2 - 2x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_1^2 + x_N^2 > 0
\end{aligned}$$

Alors $X^t A_h X > 0$ donc A_h défini positive

A_h est symétrique et défini positive, alors d'après la proposition (3.3.1) le problème (P_h) admet le solution discrét unique.

4.3.1 Consistance :

Proposition 4.3.2. [2]

(P_h) est consistante par rapport à (P_c) et on a : si $u \in C^4([0, 1])$:

$$\|R_h U\|_{h,\infty} \leq \frac{1}{12} \|U^{(4)}\|_{\infty} h^2$$

$$\begin{aligned} \left| -u''(x) + \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} \right| &= \frac{h^2}{24} (u^{(4)}(\theta_1) + u^{(4)}(\theta_2)) \\ \|R_h U\|_{h,\infty} &\leq \frac{h^2}{24} \times 2 \max(u^{(4)}(\theta_1), u^{(4)}(\theta_2)) \\ &\leq \frac{h^2}{12} \|u^{(4)}\|_{\infty} \end{aligned}$$

Poson : $c = \frac{1}{12} \|u^{(4)}\|_{\infty}$

Alors : $\|R_h U\|_{h,\infty} \leq Ch^2$

Consistance d'ordre 2.

4.3.2 Principe de maximum discrét

Proposition 4.3.3. [2]

Une matrice A est monotone si et seulement si :

$$(AX \geq 0 \implies X \geq 0)$$

Proposition 4.3.4. [2]

Si $f \geq 0$, alors la solution U_h du problème (P_h) vérifie :

$$U_h \geq 0$$

Le monotone de la matrice A_h , nous assure le principe du maximum discrét :

$$A_h U_h = b$$

Si $b \geq 0 \implies A_h U_h \geq 0 \implies U_h \geq 0$

4.3.3 Stabilité

Soient u solution de $(P_c) : LU = f$ dans Ω et U_h solution de $(P_h) : L_h U_h = f$ dans Ω

on a : $LU - L_h U_h = 0$ dans Ω_h

Donc : $LU - L_h U + L_h U - L_h U_h = 0$

d'où : $R_h U + L_h(U - U_h) = 0$

où $R_h U$ est l'erreur de consistence on obtient :

$$R_h U = L_h(U_h - U) \text{ dans } \Omega_h$$

On a : $\|R_h\|_{h,\infty} \leq Ch^2$

Si U est suffisamment régulière on veut savoir si $U - U_h$ est petite quand R_h est petite ($h \rightarrow 0$) c'est la notion de stabilité.

On va montrer que le problème (P_h) est stable pour la norme discrète du maximum (la norme de convergence uniforme).

Proposition 4.3.5. [2]

Si la matrice A_h est monotone, alors la solution U_h du problème (P_h) vérifie :

$A_h U_h = b$ par conséquent on a :

$$\|U_h\|_{h,\infty} = \|U_h\|_\infty = \|A_h^{-1} b\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\| \|f\|_\infty$$

on a : $\|A_h^{-1}\| \leq \frac{1}{8}$

Donc : $\|U_h\|_{h,\infty} \leq \frac{1}{8} \|f\|_\infty$

4.3.4 Convergence

Théorème 4.3.1. [2]

Soit $f \in C^2([0, 1])$

on note U la solution de (P_c) et U_h la solution de (P_h) Alors il exist une constante $C > 0$ indépendant de h telle que :

$$\|U - U_h\|_{h,\infty} \leq C \|f^{(2)}\|_{\infty} h^2$$

Remarque 4.3.1.

En particulier, la matrice de discrétisation de $(-u'')$ avec conditions aux limites de Newman homogènes :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & a < x < b \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

donne une matrice A_h qui est symétrique et positive, mais non définie, d'où l'unicité n'est pas vérifiée.

4.4 Problème continu en D2

Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on considère le problème continu suivant :

Trouver $u(x, y)$ qui vérifie :

$$(P_c) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où f est une fonction donnée régulière dans Ω .

Le problème (P_c) admet une solution exacte unique.

On considère :

- un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (rectangulaire)
- une fonction $f \in C^1(\Omega)$ et une fonction $g \in C^0(\partial\Omega)$.

4.4.1 L'existence et l'unicité de la solution continue

Théorème 4.4.1. [8]

Pour $f \in C^1(\Omega)$ le problème (P_c) . Admet une solution unique u régulière .

4.4.2 Principe de maximum continu

Proposition 4.4.1. [6]

Soit $f \in C^0([0, 1])$, et $u \in C^2([0, 1])$ la solution de (P_c) , Alors :

- $f \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$ sur $\partial\Omega$
- $f \leq 0 \Rightarrow u \leq 0$ sur $\partial\Omega$
- $f = 0$ alors : $\inf_{\partial\Omega} u \leq u \leq \sup_{\partial\Omega} u$
- $f \geq 0$ et $\inf_{\partial\Omega} u \geq 0$ Alors $u \geq 0$ dans Ω

4.5 Problème discret en D2

Un schéma à 5 points pour le Laplacien :

choisissant : $\Omega =]0, a[\times]0, b[$

pas de discrétisation : $\Delta x = \frac{a}{N+1}$; $\Delta y = \frac{b}{M+1}$

tel que : $x_i = i\Delta x$, $i = 0 \dots N+1$

$y_j = j\Delta y$, $j = 0 \dots M+1$

on définit Ω_h le maillage intérieur à Ω par :

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \left\{ P_{i,j} = (x_i, y_j) \quad , i = 1 \dots N, j = 1 \dots M \right\} \\ \partial\Omega_h &= \left\{ P_{i,j} = (x_i, y_j) \quad , avec \quad i = 0 \text{ ou } N+1, j = 0 \text{ ou } M+1 \right\} \end{aligned}$$

Le problème approché (discret)

S'écrit alors : trouve $u_h = u_h(x_i, y_j)$ tel que :

$$(P_h) \begin{cases} -\Delta_h u_h = f(x_i, y_j) & \text{dans } \Omega \\ u_h = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Δ_h est le schéma de différence finie pour Δ :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{-u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

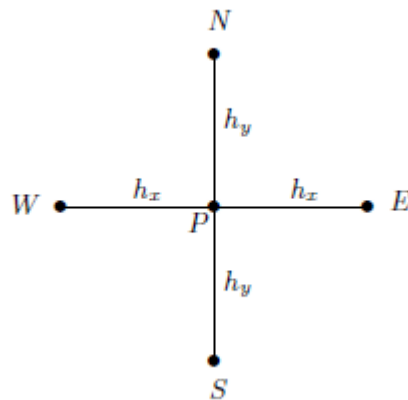


FIGURE 4.2 – Schéma à 5 points pour le Laplacien

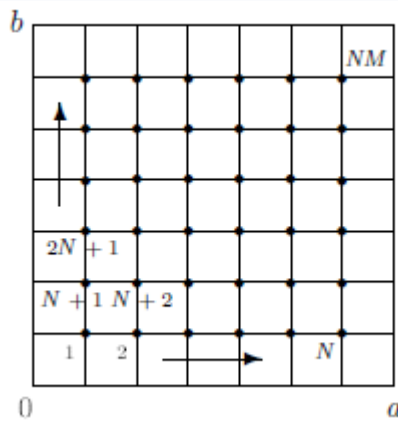


FIGURE 4.3 – Numérotation des noeuds dans l'ordre "naturel"

de gauche vers la droite et de bas en haut

Note problème divient :

$$\frac{-u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = f(x_i, y_j)$$

pour $1 \leq i \leq N$; $1 \leq j \leq M$

avec le conditions aux limites :

$$u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0; 0 \leq j \leq M + 1$$

$$u_{i,0} = u_{i,M+1} = 0; 0 \leq i \leq N + 1$$

Le système linéaire correspondant au problème (P_h) s'écrit :

$$A_h u_h = b$$

où $u_h \in \mathbb{R}^{N \times M}$; $b \in \mathbb{R}^{N \times M}$

$$u_h = (u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{N,1}, u_{N,2}, \dots, u_{N,M})^t$$

$$b = (f(x_1, y_1), \dots, f(x_N, y_M))^t$$

où $u_{i,j} = u_h(x_i, y_j)$

La matrice A_h est une matrice de taille $NM \times NM$ tridiagonale par blocs.

Donnons défini la forme de la matrice ce A_h (pour simplifier) dans le cas

d'un maillage uniforme :

où $\Delta x = \Delta y = h$ on a :

$$\frac{1}{h^2}(4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = f_{i,j}$$

$$j = 1, \quad i = 1 \dots N$$

$$\begin{cases} i = 1 & \frac{1}{h^2}(4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0}) = f_{1,1} \\ i = 2 & \frac{1}{h^2}(4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0}) = f_{2,1} \\ \vdots & \\ i = N & \frac{1}{h^2}(4u_{N,1} - u_{N+1,1} - u_{N-1,1} - u_{N,2} - u_{N,0}) = f_{N,1} \end{cases}$$

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} D_N & -I_N & & \\ -I_N & & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -I_N \\ & & & -I_N & D_N \end{pmatrix}$$

I_N : la matrice identité de taille $N \times N$

D_N : matrice carrée ($N \times N$) donnée par :

$$D_N = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad I_N = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

A_h est une matrice tridiagonale par blocs, puisque la matrice D_N est une matrice symétrique définie positive donc inversible. alors la matrice A_h est inversible donc le système $A_h u_h = b$ admet une solution unique.

4.5.1 Consistence

Pour $u \in C^4(\Omega)$ on obtient au point $P_{i,j} = (x_i, y_j) \in \Omega_h$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\Delta x^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_1, y_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_2, y_j) \right]$$

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) + \frac{\Delta y^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \theta_3) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \theta_4) \right]$$

$$x_i \leq \theta_1 \leq x_{i+1}, x_{i-1} \leq \theta_2 \leq x_i, y_j \leq \theta_3 \leq y_{j+1}, y_{j-1} \leq \theta_4 \leq y_j$$

$$\text{on a : } R_h u = \Delta u(x_i, y_j) - \Delta_h u(x_i, y_j)$$

$$\text{donc } \| R_h u \|_{h,\infty} \leq \frac{h^2}{6} M_4(u)$$

$$\text{où } M_4(u) = \max \left(\left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\|_{\infty} \right)$$

L'erreur de consistence est donc d'ordre 2.

4.5.2 Stabilité

Proposition 4.5.1. [6]

A_h est une matrice symétrique définie positive et de plus monotone alors :

$$A_h^{-1} \geq 0 \text{ et } \|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{16}(a^2 + b^2)$$

donc

$$A_h u_h = b \Rightarrow u_h = A_h^{-1} b$$

$$\begin{aligned} \|u_h\|_\infty &\leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|b\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{16}(a^2 + b^2) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

4.5.3 Convergence

On note u la solution de (P_c) ($u \in C^4(\Omega)$) et u_h la solution de (P_h) . Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que :

$$\|u - u_h\|_{h,\infty} \leq CM_4(u)h^2$$

avec $M_4(u) = \max(\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ et $C = \frac{a^2 + b^2}{96}$

Remarque 4.5.1.

Maillage non uniforme $\Delta x \neq \Delta y$

Note problème (P_h) devient :

$$\frac{-u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = f(x_i, y_j)$$

pour $1 \leq i \leq N$; $1 \leq j \leq M$

avec les conditions aux limites :

$$u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0; \quad 0 \leq j \leq M + 1$$

$$u_{i,0} = u_{i,M+1} = 0; \quad 0 \leq i \leq N + 1$$

Le système linéaire correspondant au problème (P_h) s'écrit :

$$A_h u_h = b$$

où $u_h \in \mathbb{R}^{N \times M}$; $b \in \mathbb{R}^{N \times M}$

$$u_h = (u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{N,1}, u_{N,2}, \dots, u_{N,M})^t$$

$$B = (f(x_1, y_1), \dots, f(x_N, y_M))^t$$

où $u_{i,j} = u_h(x_i, y_j)$

La matrice A_h est une matrice de taille $NM \times NM$ tridiagonale par blocs.

Donnons défini la forme de la matrice ce A_h (pour simplifier) dans le cas

d'un maillage non uniforme :

où $\Delta x \neq \Delta y$

on pose $\Delta x = h$ et $\Delta y = k$ on a :

$$\frac{1}{h^2}(2u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{1}{k^2}(2u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = f_{i,j}$$

$$j = 1, i = 1 \dots N$$

$$\begin{cases} i = 1 & \frac{1}{h^2}(2u_{1,1} - u_{2,1} - u_{0,1}) + \frac{1}{k^2}(2u_{1,1} - u_{1,2} - u_{1,0}) = f_{1,1} \\ i = 2 & \frac{1}{h^2}(2u_{2,1} - u_{3,1} - u_{1,1}) + \frac{1}{k^2}(2u_{2,1} - u_{2,2} - u_{2,0}) = f_{2,1} \\ \vdots & \\ i = N & \frac{1}{h^2}(2u_{N,1} - u_{N+1,1} - u_{N-1,1}) + \frac{1}{k^2}(2u_{N,1} - u_{N,2} - u_{N,0}) = f_{N,1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i = 1 & (\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2})u_{1,1} - \frac{1}{h^2}u_{2,1} - \frac{1}{h^2}u_{0,1} - \frac{1}{k^2}u_{1,2} - \frac{1}{k^2}u_{1,0} = f_{1,1} \\ i = 2 & (\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2})u_{2,1} - \frac{1}{h^2}u_{3,1} - \frac{1}{h^2}u_{1,1} - \frac{1}{k^2}u_{2,2} - \frac{1}{k^2}u_{2,0} = f_{2,1} \\ \vdots & \\ i = N & (\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2})u_{N,1} - \frac{1}{h^2}u_{N+1,1} - \frac{1}{h^2}u_{N-1,1} - \frac{1}{k^2}u_{N,2} - \frac{1}{k^2}u_{N,0} = f_{N,1} \end{cases}$$

$$\frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} D_N & -I_N & & \\ -I_N & & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -I_N \\ & & & -I_N & D_N \end{pmatrix}$$

I_N : la matrice identité de taille $N \times N$

D_N : matrice carrée ($N \times N$) donnée par :

$$D_N = \begin{pmatrix} \frac{2h^2}{k^2} + 2 & -\frac{h^2}{k^2} & & & \\ -\frac{h^2}{k^2} & & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & -\frac{h^2}{k^2} \\ & & & -\frac{h^2}{k^2} & \frac{2h^2}{k^2} + 2 \end{pmatrix} \quad I_N = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \\ 0 & & & & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

A_h est une matrice tridiagonale par blocs, puisque la matrice D_N est une matrice symétrique définie positive donc inversible. alors la matrice A_h est inversible donc le système $A_h u_h = b$ admet une solution unique.

Chapitre 5

Applications

Pour montrer l'analogie entre le problème continue et son analogie discret, on va donner deux applications, la première application concerne un problème mal posé au cas continue ou on va avoir la même résultat au cas discret.

La deuxième concerne la résolution numérique de l'équation de Poisson en dimension deux, en appliquant le schéma à 5 points.

5.1 Première application

Soit le problème (P) :

$$(P) \begin{cases} -u'' = 1 & \text{dans }]0, 1[\\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

1) (P) est mal posé.

$$-u'' = 1 \implies u'' = -1 \implies u' = -x + c_1 \implies u = \frac{-x^2}{2} + c_1x + c_2$$

$$u'(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

$$u'(1) = 0 \implies -1 + c_1 = 0 \implies c_1 = 1$$

donc le problème (P) admet une infinité de solutions.

donc le problème (P) est mal posé.

On va montrer que le problème (P_h) est aussi mal posé numériquement.

$$(P_h) \begin{cases} -\left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\right) = 1 & \text{dans }]0, 1[\\ u'(0) = u'(N+1) = 0 \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq 4$

avec le condition aux limites :

Nous utilisons :

- $u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \implies u'_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} = 0 \implies (u_1 - u_0)4 = 0 \implies u_0 = u_1$
- $u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \implies u'_{N+1} = \frac{u_N - u_{N-1}}{h} = 0 \implies (u_N - u_{N-1})4 = 0 \implies u_3 = u_4$

le système linéaire correspondant au problème (P_h) s'écrit :

$$A_h u_h = b$$

où $u_h \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, b \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$u_h = (u_1, u_2, u_3)^t$$

$$b = (f(x_1), f(x_2), f(x_3))$$

où $u_i = u(x_i)$

- $-(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) = h^2 \implies -(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) = \frac{1}{16}$

la forme matricielle :

$$1 \leq i \leq N$$

$$\begin{cases} i = 1 & -u_2 - u_0 + 2u_1 = \frac{1}{16} \\ i = 2 & -u_3 - u_1 + 2u_2 = \frac{1}{16} \\ i = 3 & -u_4 - u_2 + 2u_3 = \frac{1}{16} \end{cases} \implies \begin{cases} i = 1 & -u_2 - u_1 + 2u_1 = \frac{1}{16} \\ i = 2 & -u_3 - u_1 + 2u_2 = \frac{1}{16} \\ i = 3 & -u_3 - u_2 + 2u_3 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} i = 1 & u_1 - u_2 = \frac{1}{16} \\ i = 2 & -u_3 - u_1 + 2u_2 = \frac{1}{16} \\ i = 3 & -u_2 + u_3 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

le système linéaire :

$$A_h U_h = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Existence et unicité

Pour que le problème P_h admette une solution

- A_h symétrique :

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A_h^t$$

donc A_h symétrique

- A_h n'est pas définie car :

$$X^t A X = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \geq 0$$

pour $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0$: $X^t A X = 0$

Donc : la matrice A_h est symétrique et positive mais non définie.

Alors : d'après la proposition (3.3.1) le problème P_h n'admet pas une solution discrète unique d'où : le problème (P_h) est aussi mal posé.

5.2 Deuxième application

Soit l'équation de Laplace en D2 avec les conditions de Dirichlet

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 9 \\ u(x, 1) = x ; u(1, y) = y \\ u(0, y) = u(y, 0) = 0 \end{cases}$$

Choisissant $n = m = 3$ et $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{3}$

- **La matrice de discrétisation :**

Note problème divient :

$$-\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{\Delta y^2} = 9$$

$$u_{i,m+1} = i, u_{n+1,j} = j \quad 0 \leq i \leq n$$

$$u_{0,j} = u_{j,0} = 0 \quad 0 \leq j \leq m$$

on a $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{3}$ et $m = n = 3$ où $\Delta x = h$ et $\Delta y = k$

$$\Omega_{h,k} = \begin{cases} x_i = ih & 0 \leq i \leq 3 \\ y_j = jk & 0 \leq j \leq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} = 9\Delta x^2$$

$$\Rightarrow -u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} = 1$$

La forme matricielle :

$$\begin{cases} i = 1, j = 1 & -u_{2,1} - u_{0,1} - u_{1,2} - u_{1,0} + 4u_{1,1} = 1 \\ i = 1, j = 2 & -u_{2,2} - u_{0,2} - u_{1,3} - u_{1,1} + 4u_{1,2} = 1 \\ i = 2, j = 1 & -u_{3,1} - u_{1,1} - u_{2,2} - u_{2,0} + 4u_{2,1} = 1 \\ i = 2, j = 2 & -u_{3,2} - u_{1,2} - u_{2,3} - u_{2,1} + 4u_{2,2} = 1 \end{cases}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} -u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{1,1} = 1 \\ -u_{2,2} - u_{1,1} + 4u_{1,2} = 1 \\ -u_{1,1} - u_{2,2} + 4u_{2,1} = 1 \\ -u_{1,2} - u_{2,1} + 4u_{2,2} = 1 \end{cases}$$

Le système linéaire :

$$A_h u_h = b$$

Où

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'existence et unicité de la solution discrète du (P_h :

1) La matrice A_h est symétrique :

$$A_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = A_h^t$$

Donc A_h symétrique car : $A_h^t = A_h$

2) La matrice A_h est définie positive :

$$\forall X \in \mathbb{R}^N \quad X^t A_h X > 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2$$

Donc A_h est défini positive, alors (P_h) admet la solution unique.

• Méthode de Choleski

On a

$$A_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad u_h = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Décomposition : $LL^t = A_h$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} & 0 \\ l_{14} & l_{24} & l_{34} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul des l_{1j} :

$$l_{11}^2 = a_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{12} = a_{12}/l_{11} = -\frac{1}{2}$$

$$l_{13} = a_{13}/l_{11} = -\frac{1}{2}$$

$$l_{14} = a_{14}/l_{11} = 0$$

Calcul des l_{2j} :

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{12}^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$l_{23} = [a_{23} - l_{12}l_{13}]/l_{22} = [-\frac{1}{4}]/\frac{\sqrt{15}}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{15}}$$

$$l_{24} = [a_{24} - l_{12}l_{14}]/l_{22} = [-1]/\frac{\sqrt{15}}{2} = -\frac{2}{\sqrt{15}}$$

Calcul des l_{3j} :

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{k=1}^2 l_{k3}^2} = \sqrt{a_{33} - (l_{13}^2 + l_{23}^2)} = \sqrt{4 - ((-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2\sqrt{15}})^2)} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$$

$$l_{34} = [a_{34} - (l_{13}l_{14} + l_{23}l_{24})]/l_{33} = [-1 - ((-\frac{1}{2})(0) + (-\frac{1}{2\sqrt{15}})(-\frac{2}{\sqrt{15}})]/\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{15}} = -\frac{16}{15} \cdot \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{15}} = -\frac{8\sqrt{15}}{15\sqrt{14}}$$

Calcul des l_{4j} :

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - \sum_{k=1}^3 l_{k4}^2} = \sqrt{a_{33} - (l_{14}^2 + l_{24}^2 + l_{34}^2)} = \sqrt{4 - (0 + (-\frac{2}{\sqrt{15}})^2 + (-\frac{8\sqrt{15}}{15\sqrt{14}})^2)} =$$

$$\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{15}} & -\frac{8\sqrt{15}}{15\sqrt{14}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \quad L^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{15}} & -\frac{8\sqrt{15}}{15\sqrt{14}} & \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$

Résolution : Le système devient $LL^t u_h = b$

Posons $L^t u_h = y$ et résolvons $Ly = b$ et calculons y par substitution avant.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{15}} & -\frac{8\sqrt{15}}{15\sqrt{14}} & \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nous trouvons
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2\sqrt{15}} \\ \frac{6\sqrt{15}}{5\sqrt{14}} \\ \frac{44\sqrt{7}}{14\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Ensuite résolvons : $Lu_h = y$ et calculons u_h

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{15}} & -\frac{8\sqrt{15}}{15\sqrt{14}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2\sqrt{15}} \\ \frac{6\sqrt{15}}{5\sqrt{14}} \\ \frac{44\sqrt{7}}{14\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Nous trouvons
$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.833 \\ 1.166 \\ 1.166 \\ 1.833 \end{pmatrix}$$

• **Jacobi :**

```
%function [xsol]=MethJacobi(A,b,max1,tol)

clc
clear

A=[ 4 -1 -1 0
    -1 4 0 -1
    -1 0 4 -1
    0 -1 -1 4];

b=[ 1
    2
    2
    5];

max1=20;
tol=1e-3;
[n, m]=size(A);
D=diag(diag(A));
Aoff=A-D;
x=zeros(n,1);
i=1; dx=tol+rand;
while dx > tol i <= max1
x(:,i+1)=inv(D)*(B-Aoff*x(:,i));
dx=max(abs(x(:,i)-x(:,i+1))));
disp(['itérations :',num2str(i), mat2str(x(:,i+1))])
x(:,i)=x(:,i+1);
i=i+1;
```

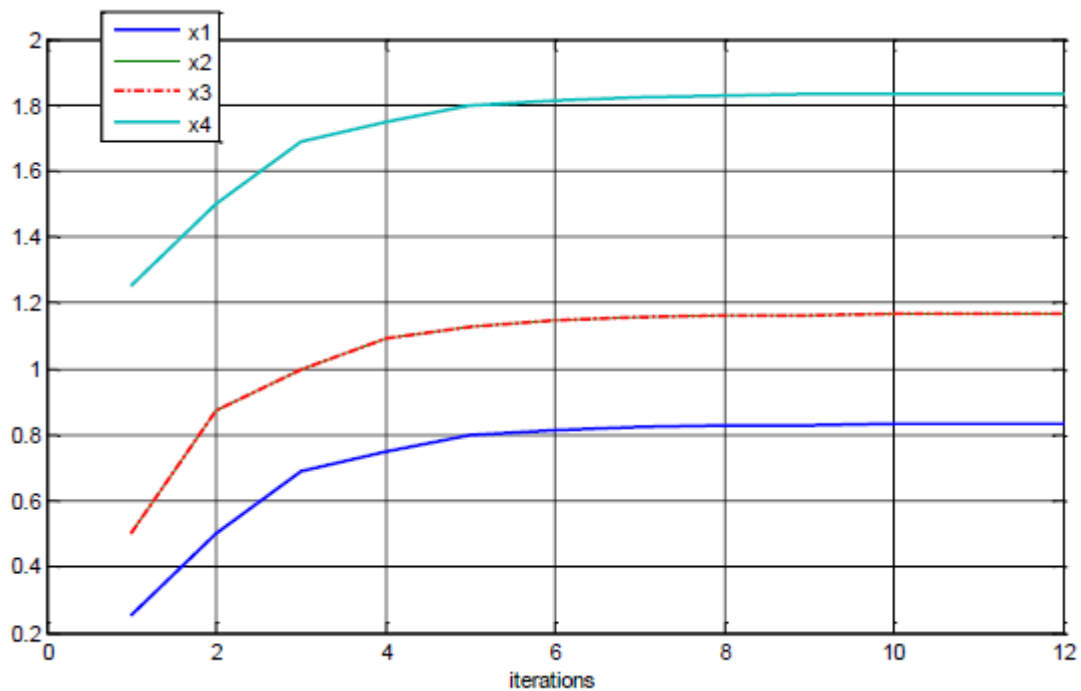
```

end
xsol=x(:,i);
disp(['fin de l itérations :',num2str(i-1), mat2str(xsol)])

iterations :1[0.25;0.5;0.5;1.25]
itérations :2[0.5;0.875;0.875;1.5]
itérations :3[0.6875;1;1;1.6875]
itérations :4[0.75;1.09375;1.09375;1.75]
itérations :5[0.796875;1.125;1.125;1.796875]
itérations :6[0.8125;1.1484375;1.1484375;1.8125]
itérations :7[0.82421875;1.15625;1.15625;1.82421875]
itérations :8[0.828125;1.162109375;1.162109375;1.828125]
itérations :9[0.8310546875;1.1640625;1.1640625;1.8310546875]
itérations :10[0.83203125;1.16552734375;1.16552734375;1.83203125]
itérations :11[0.832763671875;1.166015625;1.166015625;1.832763671875]
fin de l iterations :11[0.832763671875;1.166015625;1.166015625;1.832763671875]

0.2500000000000000 0.5000000000000000 0.5000000000000000 1.2500000000000000
0.5000000000000000 0.8750000000000000 0.8750000000000000 1.5000000000000000
0.6875000000000000 1.0000000000000000 1.0000000000000000 1.6875000000000000
0.7500000000000000 1.0937500000000000 1.0937500000000000 1.7500000000000000
0.7968750000000000 1.1250000000000000 1.1250000000000000 1.7968750000000000
0.8125000000000000 1.1484375000000000 1.1484375000000000 1.8125000000000000
0.8242187500000000 1.1562500000000000 1.1562500000000000 1.8242187500000000
0.8281250000000000 1.1621093750000000 1.1621093750000000 1.8281250000000000
0.8310546875000000 1.1640625000000000 1.1640625000000000 1.8310546875000000
0.8320312500000000 1.1655273437500000 1.1655273437500000 1.8320312500000000
0.8327636718750000 1.1660156250000000 1.1660156250000000 1.8327636718750000
0.8327636718750000 1.1660156250000000 1.1660156250000000 1.8327636718750000

```



Les graphes représentent la convergence de la solution par la méthode de Jacobi on a bien la solution approchée après 12 étapes avec une erreur de 10^{-2} .

- **Gauss-Seidel :**

```
clear;clc
format compact
A=[ 4 -1 -1  0
    -1  4  0 -1
    -1  0  4 -1
     0 -1 -1  4];
C = [1;2;2;5];
n = length(C);
X = zeros(n,1);
Error_eval = ones(n,1);

%% Check if the matrix A is diagonally dominant
for i = 1:n
    j = 1:n;
```

```

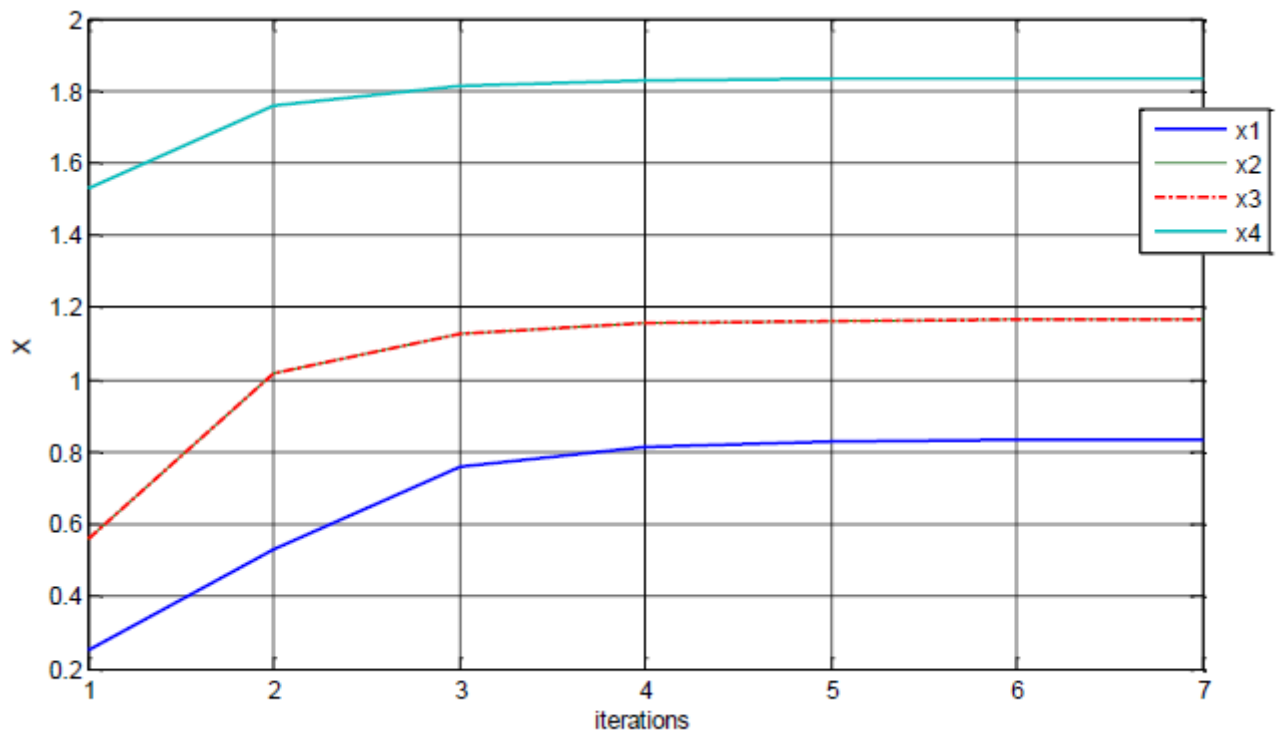
j(i) = [];
B = abs(A(i,j));
Check(i) = abs(A(i,i)) - sum(B); % Is the diagonal value greater than the remain
if Check(i) < 0
fprintf('The matrix is not strictly diagonally dominant at row %2i\n\n',i)
end
end

%% Start the Iterative method
iteration = 0;
while max(Error_eval) > 0.001
iteration = iteration + 1;
Z = X; % save current values to calculate error later
for i = 1:n
j = 1:n; % define an array of the coefficients' elements
j(i) = [ ]; % eliminate the unknow's coefficient from the remaining coefficients
Xtemp = X; % copy the unknowns to a new variable
Xtemp(i) = [ ]; % eliminate the unknown under question from the set of values
X(i) = (C(i) - sum(A(i,j) * Xtemp)) / A(i,i);
end
Xsolution(:,iteration) = X;
Error_eval = sqrt((X - Z).^2);
end

%% Display Results
GaussSeidelTable = [1:iteration;Xsolution]

GaussSeidelTable =
0.2500000000000000  0.5625000000000000  0.5625000000000000  1.5312500000000000
0.8144531250000000  1.1572265625000000  1.1572265625000000  1.8286132812500000
0.8286132812500000  1.1643066406250000  1.1643066406250000  1.8321533203125000
0.8321533203125000  1.1660766601562500  1.1660766601562500  1.8330383300781250
0.8330383300781250  1.1665191650390630  1.1665191650390630  1.8332595825195310

```



Les graphes représentent la convergence de la solution par la méthode de Gauss-Seidel on a bien la solution approchée après 7 étapes avec une erreur de 10^{-2} , où nous notons qu'il est plus rapide que Jacobi.

Bibliographie

- [1] G. Allaire, S.M. Kaber, *Algèbre linéaire numérique. Cours et exercices*, Editions Ellipses, Paris (2002).
- [2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*, Masson, Paris (1983).
- [3] P.G. Ciarlet *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.*, Masson (1982).
- [4] N.Champagnat , *Différences finies et analyse numérique matricielle*. Master, France.2010, pp.51.
- [5] I.Danaila, Joly, S.M. Kaber, M. Postel *Introduction au calcul scientifique par la pratique*, Dunod, Paris (2005).
- [6] R.Herbin, *Cours d'analyse numérique Licence de mathématiques : Université Aix Marseille*. 20 août 2010.
- [7] P. Laurent-Gengoux, *Analyse des équations aux dérivées partielles*. École Centrale Paris,2007-2008.
- [8] B. Lucquin, *Equations aux dérivées partielles et leurs approximations*, Ellipse (2004).
- [9] B. Mohammadi, J-H.Saiac, *Pratique de la simulation numérique*, Dunod, Paris(2003).
- [10] M. Picasso AND J. Rappaz , *Introduction a l'analyse numérique. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, Lausanne, 1998.
- [11] P.A. Raviart and J.M. Thomas , *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*.
- [12] J.F. Scheid, *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides*. Université de Lorraine, 2011-2012.

- [13] E.G. Silva, *Méthodes et Analyse Numériques*. Engineering school, Institut Polytechnique de Grenoble , 2007, pp.99.
- [14] M.Zitouni, *Elements D'algebre*.O.P.U 1993.

Résumé

Dans cette thèse, les problèmes aux limites elliptiques (L'équation de Poisson), avec différents types de conditions aux limites seront résolus numériquement, en utilisant la méthode des différences finies.

La procédure de discrétisation transforme le problème aux limites en un système linéaire de n équations algébriques.

Certaines techniques, à savoir : Cholesky, Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel seront utilisées pour résoudre un tel système linéaire.

Mots clés :

équation de Poisson - méthode différences finies - système linéaire - méthodes itératives.

Abstract

In this thesis, boundary value problems involving Poisson is equations with different types of boundary conditions will be solved numerically using the finite differences method.

The discretizing procedure transforms the boundary value problem into a linear system of n algebraic equations.

Some techniques, namely : the Cholesky, the Jacobi, and the Gauss-Seidel method will be used to solve such linear system.

Keys words :

Poisson equation - finite differences method - linear system - iterative methods.

ملخص

في هذه المذكرة سيتم حل مسائل القيم الحدودية التي تتضمن معادلة بواسون مع اختلاف الشروط الحدودية عددياً باستخدام طريقة الفروق المتناهية. من خلال التقسيمات يتم تحويل مسألة القيم الحدودية إلى جملة خطية من n معادلة جبرية .

سيتم استخدام بعض التقنيات : شوليسكي، جاكوبي و غوص صيدال لحل الجملة الخطية.

الكلمات المفتاحية :

معادلة بواسون - طريقة الفروق المتناهية - الجملة الخطية - الطرق التكرارية.