



N° d'ordre :

N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL OUED**

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

**Polynômes orthogonaux de Tchebychev et
ses applications**

Présenté par:

- DJARALLAH Nabil
- LAYAT Mokhtar

Sous la supervision de :

- DOCTEUR :REHOUMA Abdel hamid

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

Nous présentons à exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance à nous encadreur. Docteur REHOUMA Abdelhamid qui m'a proposé le sujet de ce mémoire.

Merci pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Mes remerciements vont également à .Mes amis et les étudiants $\mathfrak{Z}^{eme}math$ pour le grand honneur qu'ils me font le partie des membres de le jury de ce mémoire. Merci pour leurs remarques et toutes leurs idées.

Nous remercions également toutes les personnes qui nous ont aidé à réaliser ce travail.

Table des matières

1	Espaces de Hilbert	5
1.1	Définition d'un espace de Hilbert	5
1.1.1	Orthogonalisation de Gram–Schmidt	6
1.1.2	L'existence de l'orthogonalisation de Gram–Schmidt	7
1.1.3	L'unicité de l'orthogonalisation de Gram–Schmidt	7
1.2	Propriétés d'extrema	9
1.2.1	Théorème de la projection orthogonale	9
1.3	Projection sur un sous espace fermé	11
1.3.1	Supplémentaires orthogonaux	11
1.4	Bases orthonormales d'un espace de Hilbert. Analyse de Fourier	12
2	Polynômes orthogonaux sur le segment et relativement à une fonction poids	16
2.1	Construction d'un système des polynômes orthogonaux sur le segment et relativement à une fonction poids	16
2.2	Relation de récurrence à 3 termes	17
2.3	Propriété d'extrema des polynômes orthogonaux	19
3	Polynômes orthogonaux de Tchebychev et leurs applications	21
3.1	Expressions des Polynômes orthogonaux de Tchebychev	21
3.1.1	Polynômes orthogonaux de Tchebychev de 1 ^{ère} espèce	21
3.1.2	Polynômes orthogonaux de Tchebychev de 2 ^{ème} espèce	22
3.1.3	Relation entre T_n et U_n	23

3.2	Orthogonalité des polynômes de Tchebychev	24
3.2.1	Orthogonalité des polynômes orthogonaux de Tchebychev de 1 ^{ère} espèce	24
3.2.2	Orthogonalité des polynômes orthogonaux de Tchebychev de 2 ^{ème} espèce	24
3.3	Relation de récurrence des polynômes orthogonaux de Tchebychev	25
3.3.1	Relation de récurrence des polynômes orthogonaux de Tchebychev de 1 ^{ère} espèce	25
3.3.2	Degré de coefficient dominant des polynômes orthogonaux de Tcheby- chev	26
3.3.3	Parité des polynômes orthogonaux de Tchebychev	28
3.3.4	Equation différentielle vérifiée par les polynômes orthogonaux de Tchebychev	29
3.3.5	Racines de T_n et factorisation des polynômes orthogonaux de Tchebychev	30
3.3.6	Diverses expressions des polynômes orthogonaux de Tchebychev. . . .	31
3.4	Polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique.Applications	34
3.4.1	Polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 1 ^{ère} espèce	34
3.4.2	Transformations logarithmiques entre les polynômes orthogonaux d' Aérodynamique	35
3.4.3	Diverses expressions des intégrales indéfinies des polynômes orthogo- naux d'Aérodynamique.	36
3.4.4	Relations des polynômes orthogonaux d'Aérodynamique et polynômes orthogonaux de Tchebychev de 1 ^{ère} espèce	37
3.4.5	Relations des polynômes orthogonaux d'Aérodynamique et polynômes orthogonaux de Tchebychev de 2 ^{ème} espèce	38

RESUME

Soit $\{L_n\}$ le système de polynômes orthogonaux sur le segment $[a, b]$ et par rapport le point $w(x)$ i.e. $L_n(z)$ vérifie les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\int_a^b L_n(x) x^k w(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1..$$

Soit $[a, b] = [-1, 1], w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ que nous appellerons polynômes orthogonaux de Tchebychev, On étudie dans cette mémoire les propriétés des polynômes orthogonaux de Tchebychev.

ABSTRACT

Let μ be a finite positive measure defined on the Borelian σ -algebra of $\mathbb{C}$, μ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure dx on $[a, b]$. Let us consider $\{L_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$, the system of monic orthogonal polynomial with respect to $w(x)dx$. Such that

$$\int_a^b L_n(x) x^k w(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

We choose $[a, b] = [-1, 1]$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ which called Tchebychev orthogonal polynomials.

We study algebraic and asymptotic properties of the Tchebychev orthogonal polynomials.

Introduction générale

La théorie des polynômes orthogonaux constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines des mathématiques. Les polynômes orthogonaux par rapport à une fonction poids $\rho(x)$ continue et sur un segment $[a, b]$ vérifient les conditions d'orthogonalité suivant:

$$L_n(x) = x^n + k_{n,n-1}x^{n-1} + \dots k_{n,0} \quad (0.1)$$

et

$$\int_a^b L_n(x) L_m(x) \rho(x) dx = k_n \delta_{n,m}; \quad k_n \neq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (0.2)$$

Les polynômes orthogonaux de Tchebychev forment une classe assez particulière de polynômes orthogonaux sur un segment. Ils doivent cette particularité au fait que Les polynômes orthogonaux de Tchebychev unitaires (moniques) soient solutions de certains problèmes extrémaux posés dans $L^2([-1, 1], \rho(x))$. Les polynômes orthogonaux de Tchebychev vérifient les conditions d'orthogonalité suivant:

$$T_n(x) = x^n + k_{n,n-1}x^{n-1} + \dots k_{n,0} \quad (0.3)$$

et

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = k_n \delta_{n,m}; \quad k_n \neq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (0.4)$$

En explicitant la mesure $\rho(x) dx$ et son support $[a, b]$, on retrouve beaucoup de systèmes de polynômes orthogonaux (polynômes orthogonaux sur le segment, polynômes orthogonaux de Hermite, polynômes orthogonaux de Jacobi ,....).

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des polynômes orthogonaux est celui qui étudie comportement asymptotique lorsque $n \rightarrow \infty$. Ce problème dépend essentiellement de la mesure $\rho(x) dx$ et de son support .

L'étude des polynômes orthogonaux ou L_p extrémaux intervient de façon significative dans la résolution de problèmes mathématiques suivants:

1. Analyse de la distribution des zéros des polynômes orthogonaux .
2. Etude de la convergence des approximants de Padé .
3. Théorie spectrale .

Ce travail est composé de 3 chapitres :

- Le premier chapitre est consacré au rappel sur les espaces de Hilbert des fonctions , orthogonalité, décompositions orthogonales d'un espace de Hilbert.
- Le deuxième chapitre est la suite du premier car il examine l'utilisation Des polynômes orthogonaux sur un segment et par rapport à une fonction poids continue.
- Le troisième chapitre est la suite du premier car il examine l'utilisation Des polynômes orthogonaux de Tchebychev et s'occupe aussi de la transformation des polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique.

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Résumé : Ce chapitre un est consacré au rappel sur les espaces de Hilbert , l'espace de Hilbert des fonctions continues sur le segment,orthogonalité,décompositions orthogonales d'un espace de Hilbert,théorème de la projection orthogonale et analyse de Fourier.

1.1 Définition d'un espace de Hilbert

Définition 1.1.1 ([3]) Soit X un espace linéaire sur le corps k . un produit scalaire sur X est une application $\varphi: X \wedge X \rightarrow k$ telle que pour tout $x, x_1, x_2, y \in X$, et $\lambda \in k$, on a:

1. $\varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0$ si seulement si $x = 0$
2. $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$
3. $\varphi(x + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$
4. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$.

Définition 1.1.2 un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots Un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

Exemple 1.1.1 L'espaces des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ constituent un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx = k_n \delta_{n,m}; \quad k_n \neq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

pour toutes fonctions f, g définies et continues sur le segment $[a, b]$.

Théorème 1.1.1 [1] (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit X un espace préhilbertien. Alors pour tout $x, y \in X$

$$|(x, y)| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2} \quad (1.1)$$

Remarque 1.1.1 Dans un espace préhilbertien X , l'application $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

pour tout $x \in X$, est norme pour X .

Définition 1.1.3 Soit X un espace de Banach. X est un espace de Hilbert (i.e. sa norme est induite par un produit scalaire) si et seulement si pour tout $x, y \in X$, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.3)$$

le produit scalaire est unique, et on a

$$(x, y) = 1/4 (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \quad (1.4)$$

1.1.1 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit E désigne un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire (x, y) .

Pour tout $x \in E$, on pose

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

On rappelle que $\|\cdot\|$ est une norme.

On dit que les deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux lorsque

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Une famille $F = (v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de E est dite orthonormée si et seulement si :

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (1.5)$$

Rappelons enfin que la relation $\langle x, y \rangle \geq 0$ peut s'interpréter géométriquement en disant que les vecteurs x et y forment un angle aigu. En effet

$$\cos(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} \quad (1.6)$$

et

$$\cos(x, y) = \frac{\det(x, y)}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} \quad (1.7)$$

1.1.2 L'existence de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Quand on énonce le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on ne connaît pas toujours la notion de projection orthogonale. Pourtant, cette notion rend la démonstration du théorème de Gram-Schmidt beaucoup plus facile à comprendre. Aussi, on va commencer par une lemme qui présente de façon minimaliste la notion de projection orthogonale. Ce lemme se comprend et se mémorise grâce au dessin fourni.

Soit $F = (v_1, \dots, v_n)$ une famille orthonormée de vecteurs de E . Soit $u \in E$. On pose:

$$P_F(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, v_i \rangle v_i \quad (1.8)$$

et

$$Q_F(u) = u - P_F(u) \quad (1.9)$$

Théorème 1.1.2 [1] Soit $F = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille libre. Alors il existe une famille $G = (v_1, \dots, v_n) \in E^n$ telle que:

1. G est orthonormée.
2. $\forall k \in [1, n], \text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.
3. $\forall k \in [1, n], \langle v_k, u_k \rangle \geq 0$.

1.1.3 L'unicité de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Théorème 1.1.3 [1] La famille G du théorème(1) est unique.

On raisonne par récurrence sur n . L'énoncé est évident lorsque $n = 0$. Supposons l'énoncé vrai pour un certain entier naturel n , et soit $F = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$ une famille libre. Soient $G_1 = (v_1, \dots, v_{n+1})$ et $G_2 = (z_1, \dots, z_{n+1})$ deux familles de vecteurs vérifiant les trois conditions du théorème (1) vis à vis de F . Alors l'hypothèse de récurrence s'applique aux sous-familles $(u_1, \dots, u_n)$, $(v_1, \dots, v_n)$ et $(z_1, \dots, z_n)$: $v_i = z_i$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. Il ne reste plus qu'à montrer que $v_{n+1} = z_{n+1}$. Comme $\text{Vect}(G_1) = \text{Vect}(G_2)$, on peut écrire:

$$v_{n+1} = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n + \lambda_{n+1} z_{n+1} \quad (\text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}) \quad (1.10)$$

Théorème 1.1.4 [1] Soit $\{f_1, \dots, f_n\}$ un système fini ou non d'éléments linéairement indépendants dans un préhilbertien. On peut alors définir un système orthonormal, $\{g_1, \dots, g_n\}$, tel que pour chaque k , g_k soit une combinaison linéaire de $\{f_1, \dots, f_k\}$.

$$u = f_n - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, g_i) g_i.$$

Alors pour $k = 1, \dots, n-1$. On a

$$(g_k, u) = (g_k; f_n) - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, g_i) \delta_{ki} = 0$$

$u \neq 0$ sinon f_n serait une combinaison linéaire de $g_1, \dots, g_{n-1}$ ce qui contredit que $f_1, \dots, f_n$ sont linéairement indépendants. Pour définir on pose

$$g_n = \frac{f_n - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, g_i) g_i}{\left\| f_n - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, g_i) g_i \right\|}, n = 0, 1, 2, \dots$$

ce qui fait du système $g_1, \dots, g_n$ un système orthonormal.

1) Si $f \in \text{Vect}\{g, \dots, g_n\}$, alors

$$f = \sum_{i=1}^n (f, g_i) g_i$$

ou $\text{Vect}\{g, \dots, g_n\}$ est l'espace vectoriel, sur $\mathbb{R}$, engendré par le système considéré. D'où le point (1.10).

1.2 Propriétés d'extrema

1.2.1 Théorème de la projection orthogonale

Soit V un espace normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle les définitions suivantes

Définition 1.2.1 1) On appelle segment d'extrémités $a, b \in V$, le sous ensemble de V défini par :

$$[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \in V; 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad (1.11)$$

2) un sous ensemble $A \subset V$ est convexe si pour tous $a, b \in A$, on a : $[a, b] \subset A$.

Théorème 1.2.1 [1] Soit A un sous ensemble convexe fermé (et non vide) de H . Alors pour tout $y \in H$, il existe un unique $x_0 \in A$

tel que

$$\inf_{y \in A} \|x_0 - y\| = \|x_0 - y\|$$

Démonstration. Autrement dit il existe un unique point $y \in A$ qui est à une distance de x la plus petite possible. Ce point y s'appelle la projection de x sur A .

a) Montrons d'abord l'existence de y_0 . Soit

$$d = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\| > 0$$

Choisissons une suite $\left\{ y_n; \|x_0 - y_n\| \leq d + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} \subset A$. D'après la loi du parallélogramme, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x_0) - (y_n - x_0)\|^2 = 2\|y_m - x_0\|^2 + 2\|y_n - x_0\|^2 - 4\left\| \frac{y_m + y_n}{2} - x_0 \right\|^2 \\ &\leq 2(d + 1/m)^2 + 2(d + 1/n)^2 - 4d^2 = \frac{4}{m}d + \frac{2}{m^2} + \frac{4}{n}d + \frac{2}{n^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

■

si $m, n > n_0(\varepsilon)$. Puisque A est ensemble convexe, $\frac{y_m + y_n}{2} \in A$ et $\left\| \frac{y_m + y_n}{2} - x_0 \right\|^2 \geq d^2$, donc $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$ est une suite de Cauchy et il existe un $y_0 \in H$ tel que

$y_n \rightarrow y_0$. parce que A est fermé, alors que $y_0 \in A$.

b) Montrons que $\|x_0 - y_0\| = d$.

nous avons $d \leq \|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y_n\| + \|y_n - y_0\| < d + 1/n + \varepsilon$ si $n > n(\varepsilon)$,

d'où

$$\|x_0 - y_0\| = d$$

c) Il nous reste à montrer l'unicité de y_0 . soit $z_0 \in A$, tel que $\|z_0 - x_0\| = d$. En utilisant la loi du parallélogramme (1.4)

on a

$$\begin{aligned} \|z_0 - y_0\|^2 &= \|(z_0 - x_0) - (y_0 - x_0)\|^2 = 2\|z_0 - x_0\|^2 + 2\|y_0 - x_0\|^2 - \|z_0 + y_0 - 2x_0\|^2 \\ &= 4d^2 - 4\left\|\frac{z_0 + y_0}{2} - x_0\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0 \end{aligned}$$

d'où $z_0 = y_0$. Ce qui achève la démonstration.

Théorème 1.2.2 [1] A est un sous-espace linéaire fermé de H . $A^\perp$ s'appelle le complément orthogonal de A . Soient H un espace de hilbert, $A \subset H$ un ensemble non vide convexe et fermé et $x_0 \in H \setminus A$. Alors il existe un et seulement un $y_0 \in A$, tel que

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\| \quad (1.12)$$

a) Montrons d'abord l'existence de y_0 . soit $d = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\| > 0$. choisissons une suite $\{y_n; \|x_0 - y_n\| \leq d + 1/n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$. D'après la loi du parallélogramme, nous obtenons

$$\|y_m - y_n\|^2 = \|(y_m - x_0) - (y_n - x_0)\|^2 = 2\|y_m - x_0\|^2 + 2\|y_n - x_0\|^2 - 4\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x_0\right\|^2$$

Il vient alors

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2(d + 1/m)^2 + 2(d + 1/n)^2 - 4d^2$$

si $m, n > n_0(\varepsilon)$, puisque A est ensemble convexe, $\frac{y_m + y_n}{2} \in A$ et $\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x_0\right\|^2 \geq d^2$, donc $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$ est une suite de cauchy et il existe un $y_0 \in H$ tel que $y_n \rightarrow y_0$. parce que A est fermé, $y_0 \in A$.

b) Montrons que

$$\|x_0 - y_0\| = d \quad (1.13)$$

Nous avons $d \leq \|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y_n\| + \|y_n - y_0\| < d + 1/n + \varepsilon$ si $n > n(\varepsilon)$, d'où le point (1.13).

c) Il nous reste à montrer l'unicité de y_0 . Soit $z_0 \in A$, tel que $\|z_0 - x_0\| = d$. En utilisant la loi du parallélogramme (1.4) on a

$$\begin{aligned} \|z_0 - y_0\|^2 &= \|(z_0 - x_0) - (y_0 - x_0)\|^2 \\ &= 2\|z_0 - x_0\|^2 + 2\|y_0 - x_0\|^2 - \|z_0 + y_0 - 2x_0\|^2 \\ &= 4d^2 - 4\left\|\frac{z_0 + y_0}{2} - x_0\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0 \end{aligned}$$

d'où $z_0 = y_0$.

1.3 Projection sur un sous espace fermé

Le cas particulier le plus important du théorème précédent est la projection

sur un sous espace vectoriel fermé F de H . Soit alors $x \in H$.

Corollaire 1.3.1 [1/1) soit $y \in F$ tel que $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$. Alors $x - y$ est orthogonal à F (i.e. orthogonal à tous les vecteurs $z \in F$).

2) Réciproquement si $y \in F$ est tel que $x - y \perp F$, alors $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ i.e. y est la projection de x sur F .

) La projection orthogonale $P_F : H \rightarrow F$ est une contraction linéaire (i.e. une application linéaire telle que :

pour tout $x \in H$,

$$\|P_F(x)\| \leq \|x\| \quad (1.14)$$

1.3.1 Supplémentaires orthogonaux

Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$, $A \neq \emptyset$ un sous ensemble quelconque.

Définition 1.3.1 [1] On appelle orthogonal de A , l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in H; \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$$

Proposition 1.3.1 $A^\perp$ est toujours un sous espace vectoriel fermé de H .

Théorème 1.3.1 Soit F un sous espace vectoriel fermé de H . Alors

$$H = F \oplus F^\perp \quad (\text{somme directe orthogonale}) \quad (1.15)$$

Autrement dit :

$$\forall x \in H, \exists! y \in F, \exists! z \in F^\perp : x = y + z$$

(ou le quantificateur $\exists!$ signifie «il existe un unique»).

1.4 Bases orthonormales d'un espace de Hilbert. Analyse de Fourier

Définition 1.4.1 un ensemble $E = \{e_j; j \in I\}$ d'un espace de Hilbert H est un système orthonormal si

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad , i, j = 0, 1, \dots$$

Définition 1.4.2 où

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i = j$$

et

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Remarque 1.4.1 un système orthonormal d'un espace de Hilbert est linéairement indépendant. En effet, si $E = \{e_i; i \in I\}$ est un système orthonormal dans H , et si $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{j_k} = 0$,

alors, nous avons, pour tout $p = 1, \dots, n$,

$$0 = (o, e_{j_p}) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{j_k}, e_{j_p} \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_{j_k}, e_{j_p}) = \lambda_k$$

Soit $(e_n)_{n \in D}$ est un système orthonormal dans H qu'on suppose fixé pour les définitions et les résultats qui suivent.

Définition 1.4.3 [1] Pour tout $x \in H$, on appelle le coefficient de Fourier d'ordre $n \in D$ (où n -ième coefficient de Fourier) le nombre

$$C_n(x) = \langle x, e_n \rangle$$

[1] la série de Fourier de x la série :

$$\sum_{n \in D} \langle x, e_n \rangle e_n \quad (1.16)$$

Théorème 1.4.1 [1] Pour tout $x \in H$, la série de Fourier de x est convergente dans H et sa somme est telle que :

$$\left\| \sum_{n \in D} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n \in D} \|\langle x, e_n \rangle\|^2 \quad (1.17)$$

les énoncées suivants sont équivalents :

- i) E est une base orthonormale.
- ii) $[E]$ i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires finies sur E , est dense dans H , c-à-d, $[E] = H$
- iii) chaque $x \in H$ possède une représentation unique $x = \sum_{i \in I} C_i(x) e_i$, qui converge en norme, c-à-d. $H = H_e$ et

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |C_i(x)|^2 \quad (1.18)$$

a) i) $\implies$ ii). Soit $[E] \neq H$. Montrons qu'il existe un $e \perp [E]$, $e \neq 0$, tel que E ne serait pas une base orthonormale. En effet, il existe $x \in H \setminus [E]$, tel que $(I - P)x \neq 0$ est prenons

$$e = \frac{(I - P)x}{\|(I - P)x\|} \quad (1.19)$$

où P est la projection orthogonale de H sur $[E]$.

b) ii) $\implies$ iii). Soit $x \in H$. Alors il existe $\{x_n \in [E]; n \in \mathbb{N}\}$ qui converge vers x . Mais $x_n \in H_e$; donc d'après (Théo) $x \in H_e$. L'unicité de la représentation vient du fait que si

$$x = \sum_{i \in I} \xi_i e_i$$

alors

$$\xi_i = C_i(x)$$

pour tout $i \in I$. (voir démonstration du Théorème [1]).

c) iii) $\implies$ i). Soit $x \in H = H_e$. Alors

$$x = \sum_{i \in I} C_i(x) e_i = \sum_{q=1}^{\infty} C_{i_q}(x) e_{i_q}$$

dont les sommes partielles convergent en normes.

Soit $\{g_n\}$ un système orthonormal donné, fini ou non. Pour une fonction à valeurs réelles, arbitraire il correspond le développement formel de Fourier:

$$f \sim a_1 g_1 + \dots + a_n g_n$$

Où les coefficients a_n , appelés coefficients de Fourier pour f respectivement au système donné, sont définis par :

$$a_n = (f, g_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Remarque 1.4.2 On a l'inégalité de **Bessel**

$$|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 \leq \|f\|^2$$

Théorème 1.4.2 [1] Etant donné un système orthonormal $\{g_1, \dots, g_n\}$ et un élément f dans un préhilbertien. L'expression

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i g_i - f \right\| \tag{1.20}$$

est minimum pour

$$c_i = (f, g_i) \quad \text{où} \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.21)$$

posons $g = \sum_{j=1}^n c_j g_j$ où $c_j = (f, g_j), j = 1, \dots, n$. $g - f$ est orthogonale à chaque g_i car :

$$(g - f, g_i) = (g, g_i) - f(g, g_i) = \sum_{j=1}^n c_j (g_j, g_i) - c_i = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{ji} - c_i = 0$$

Soit h une autre quelconque combinaison linéaire des g_j , alors $g - f$ est orthogonal à $h - g$. ($h - g$ est une c.l. des g_i),

$$\|h - f\|^2 = \|(h - g) + (g - f)\|^2 = \|h - g\|^2 + \|g - f\|^2 \geq \|g - f\|^2$$

Cette dernière inégalité étant stricte à moins que $h = g$ ce qui prouve l'unicité des coefficients c_i et établit la valeur du minimum.

Chapitre 2

Polynômes orthogonaux sur le segment et relativement à une fonction poids

2.1 Construction d'un système des polynômes orthogonaux sur le segment et relativement à une fonction poids

Résumé : Ce chapitre un est consacré au rappel sur les polynômes orthogonaux sur le segment $[a, b]$ et relativement à une fonction poids $w(x)$. On énonce la construction des polynômes orthogonaux sur le segment $[a, b]$ et relativement à une fonction poids $w(x)$ et leur propriété extréma. la relation de récurrence à 3 termes des polynômes orthogonaux est une bonne connaissance qui spécifie ces polynômes orthogonaux sur le segment.

Définition 2.1.1 : On suppose $\int_a^b |x|^n w(x) dx$ existent pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $E = C^0([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ muni du produit scalaire

$$\langle f; g \rangle_w = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx \quad (2.1)$$

et $\|\cdot\|_w$ la norme associée .

On dit que les deux fonctions f et g sont orthogonaux relativement à la fonction de poids $w(x)$ sur $[a, b]$ si

$$\int_a^b f(x) g(x) w(x) dx = 0 \quad (2.2)$$

Etant donné un système d'éléments linéairement indépendants $\{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ on sait, à l'aide du procédé de **Gram-Schmit** , construire un système $\{g_1, \dots, g_n, \dots\}$ orthonormal.

Dans cette partie on va s'intéresser au système $\{1, x, x^2, \dots\}$. on va commencer par donner un critère simple pour déterminer l'indépendance linéaire d'un système de polynômes.

Dans toute la suite on va supposer que:

$$\forall n, \int_a^b x^n w(x) dx = c_n(w) < \infty.$$

Notation 2.1.1 Le système $\{P_0, P_1, \dots, P_n, \dots\}$ de polynômes orthogonaux sur le segment et relativement à une fonction poids dont lequel P_n est de degré exact n possède les relations d'orthogonalités :

$$\int_a^b P_n(x) x^k w(x) dx = 0, \quad , k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

et

$$\int_a^b P_n(x) x^n w(x) dx = \|P_n\|^2, \quad , n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

2.2 Relation de recurrence à 3 termes

Théorème 2.2.1 .[3] Le système de polynômes orthogonaux $\{P_0, P_1, \dots, P_n, \dots\}$ satisfait la relation de recurrence à 3 termes :

$$xP_n = P_{n+1} + a_n P_n + b_n P_{n-1}, \quad n \geq 2 \quad (2.4)$$

et

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x - a_1$$

Dans ce cas

$$a_n = \frac{\int_a^b x P_{n-1}^2(x) w(x) dx}{\int_a^b P_{n-1}^2(x) w(x) dx}, \quad n \geq 1 \quad (2.5)$$

et

$$b_n = \frac{\int_a^b x P_{n-1}(x) P_{n-2}(x) w(x) dx}{\int_a^b P_{n-2}^2(x) w(x) dx}, \quad n \geq 1 \quad (2.6)$$

On voit, par les formules, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est unitaire donc de degré exact n , donc (P_{n-1}, P_{n-1}) et (P_{n-2}, P_{n-2}) sont non nuls ($n > 1$, le produit scalaire étant non dégénéré) ainsi a_n et b_n sont définis. On va montrer, par récurrence sur n , que

$$(P_n, P_i) = 0,$$

pour $i < n$. Pour $n = 0$ le système se réduit à $\{1\}$. Pour $n = 0$, $(P_1, P_0) = (xP_0 - a_1P_0, P_0) = (xP_0, P_0) - a_1(P_0, P_0)$,

mais

$$a_1 = \frac{(xP_0, P_0)}{(P_0, P_0)}, \text{ donc } (P_1, P_0) = 0.$$

Supposons que cela soit vrai pour $P_k, k \leq n-1$.

$$(P_n, P_{n-1}) = (xP_{n-1}, P_{n-1}) - a_n(P_{n-1}, P_{n-1}) = 0,$$

en explicitant a_n . De même

$$(P_n, P_{n-2}) = (xP_{n-1}, P_{n-2}) - b_n(P_{n-2}, P_{n-2}) = 0$$

en explicitant b_n . Supposons que $i < n-2$, on a :

$$(P_n, P_i) = (xP_{n-1}, P_i) - a_n(P_{n-1}, P_i) - b_n(P_{n-2}, P_i),$$

mais

$$(P_{n-1}, xP_i) = (P_{n-1}, P_{i+1} + a_{i+1}P_i + b_{i+1}P_{i-1}) = 0$$

d'où la relation de recurrence à 3 termes de polynômes orthogonaux $(P_n)_n$. Ce qui termine la démonstration.

Dans ce paragraphe on va étudier les propriétés des polynômes orthogonaux, lesquelles sont vérifiées pour des distributions du type Stieltjes, $dA(x)$, cependant, on se contentera quelquefois du cas particulier d'une distribution du type $\omega(x)dx$.

2.3 Propriété d'extrema des polynômes orthogonaux

Soit $f \in L^2([a, b], w(x))$ donnée et supposons $x^n \in L^2([a, b], w(x)) \forall n \in \mathbb{N}$. Alors il est évident que les intégrales :

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) x^n w(x) dx \quad , n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

existent, dans le sens de la mesure Lebesgue. Ensuite, en notant $\{P_n(x)\}$ le système orthonormal de polynômes associé à la mesure $w(x)dx$ sur $[a, b]$, on a le théorème suivant, qui n'est qu'un cas particulier du théorème 2.1 :

Théorème 2.3.1 .[3] *L'intégrale*

$$\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^2 w(x) dx \quad (2.8)$$

où $\rho(x)$ est un polynôme de degré n est minimum si et seulement si $\rho(x)$ est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle du développement, formel, de Fourier :

$$f(x) \sim f_0 P_0(x) + \dots + f_n P_n(x) + \dots \quad (2.9)$$

où

$$f_n = \int_a^b f(x) P_n(x) w(x) dx \quad (2.10)$$

le minimum vaut :

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx - \sum_{k=1}^n |f_k|^2 \quad (2.11)$$

La valeur du minimum étant positive, on a l'inégalité de Bessel,

$$|f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2 + \dots \leq \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx. \quad (2.12)$$

Théorème 2.3.2 [3] Le système $\{P_0, P_1, \dots, P_n, \dots\}$ de polynômes orthogonaux moniques dont lequel P_n est de degré exact n possède la propriété d'extréma suivante : L'intégrale :

$$\int_a^b |\rho(x)|^2 w(x) dx$$

où $\rho(x)$ est un polynôme de degré n unitaire, est minimum si et seulement si

$$\rho(x) = \text{const.} P_n(x) \quad (2.13)$$

On a :

$$\min_{\rho(x)=x^n+\dots} \int_a^b |\rho(x)|^2 w(x) dx = \min_{q(x)=x^{n-1}+\dots} \int_a^b |k_n^{-1} P_n(x) - q(x)|^2 w(x) dx \quad (2.14)$$

On obtient cela en écrivant :

$$\rho(x) = k_n^{-1} P_n(x) - a_0 P_{n-1}(x) - \dots - a_{n-1} P_0(x). \quad (2.15)$$

Notation 2.3.1 [3] Le système $\{P_0, P_1, \dots, P_n, \dots\}$ de polynômes orthogonaux moniques dont lequel P_n est de degré exact n possède la propriété d'extréma suivante :

$$\min_{a_k \in \mathbb{R}} \|x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n\|_w = \|P_n\|_w \quad (2.16)$$

où

$$\|P_n\|_w = \sqrt{\int_a^b P_n^2(x) w(x) dx}$$

Chapitre 3

Polynômes orthogonaux de Tchebychev et leurs applications

Resumé L'objectif de ce chapitre est de mettre la lumière sur quelques informations basiques au- tour des théorèmes des polynômes orthogonaux de **Tchebychev**. La propriété extrémale des polynômes orthogonaux de **Tchebychev** est parmi les points programmés. Les relations de récurrence des polynômes orthogonaux de Tchebychev est une bonne description de ces polynômes orthogonaux nous exposons dans ce cadre ce type des relations de recurrences. Dans ce chapitre. L'utilisation du développement en séries de Fourier des polynômes orthogonaux de **Tchebychev** et de résoudre les problèmes minimisation associés à ce développement contribue aussi dense l'étude des polynômes orthogonaux de **Tchebychev** de premier et de seconde espèce. Polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique seront l'application choisie dans notre travail.

3.1 Expressions des Polynômes orthogonaux de Tchebychev

3.1.1 Polynômes orthogonaux de Tchebychev de 1^{ère} espèce

Soit n un entier naturel .Il existe un et un seul polynôme noté T_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad (3.1)$$

T_n s'appelle polynôme de **Tchebychev**.

Unicité : T_n est déterminé sur $[-1, 1]$ qui est infini et donc uniquement déterminé.

Proposition 3.1.1 [3] $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p} (1 - X^2)^p \quad (3.2)$$

Preuve. Existence Soient n un entier naturel et θ un réel.

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^n) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^{n-k} (i \sin \theta)^k\right) \\ &= \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} (\cos \theta)^{n-2p} (\sin \theta)^{2p} = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} (\cos \theta)^{n-2p} (1 - \cos^2 \theta)^p \end{aligned}$$

et le polynôme $\sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p} (1 - X^2)^p$ convient.

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p} (1 - X^2)^p.$$

D'où la formule (3.2). ■

3.1.2 Polynômes orthogonaux de Tchebychev de 2^{ème} espèce

Soit n un entier naturel non nul. Il existe un et un seul polynôme noté U_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\sin \theta * U_n(\cos \theta) = \sin(n\theta) \quad (3.3)$$

Unicité : U_n est déterminé sur $] -1, 1[$ qui est infini et donc uniquement déterminé.

Proposition 3.1.2 [3] Soient n un entier naturel et θ un réel. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} X^{n-2p-1} (1 - X^2)^p \quad (3.4)$$

Preuve. Existence Soient n un entier naturel et θ un réel.

$$\sin(n\theta) = \operatorname{Im}(e^{in\theta}) = \operatorname{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} (\cos\theta)^{n-(2p+1)} (\sin\theta)^{2p+1}$$

$$= \sin\theta \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} (\cos\theta)^{n-2p-1} (1 - \cos^2\theta)^p$$

et le polynôme $\sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} X^{n-2p-1} (1 - X^2)^p$ convient.

$$U_n = \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} X^{n-2p-1} (1 - X^2)^p$$

D'où la formule (3.4). ■

3.1.3 Relation entre T_n et U_n

Théorème 3.1.1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n(X) = \frac{1}{n} T_n'(X) \quad , -1 \leq X \leq 1 \quad (3.5)$$

Preuve. Soit n un entier naturel non nul . Pour tout réel θ , on a

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

En dérivant cette relation , pour tout réel θ on obtient

$$-\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n \sin(n\theta)$$

ou encore $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin\theta \left(\frac{1}{n} T_n'\right)'(\cos\theta) = \sin(n\theta)$$

par unicité de U_n ,on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \frac{1}{n} T_n'$$

D'où la formule (3.5). ■

3.2 Orthogonalité des polynômes de Tchebychev

3.2.1 Orthogonalité des polynômes orthogonaux de Tchebychev de 1^{ère} espèce

Proposition 3.2.1 [3] Les polynômes orthogonaux de Tchebychev de 1^{ère} espèce vérifient les conditions d'orthogonalité suivant:

$$(T_n, T_m) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t) T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \delta_{n,m} \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

i-e si $n \neq m$ on a

$$(T_n, T_m) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t) T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \quad (3.7)$$

Soient n et m deux entiers naturels. En posant $t = \cos \theta$ pour $\theta \in [0, \pi]$, on a $dt = -\sin \theta d\theta$ ou encore $d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ car $\sin \theta \geq 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$. On obtient

$$\begin{aligned} (T_n, T_m) &= \int_{-1}^1 \frac{T_n(t) T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^0 T_n(\cos \theta) T_m(\cos \theta) (-d\theta) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)) d\theta \end{aligned}$$

Anisi, Si $n \neq m$,

$$(T_n, T_m) = 0$$

Et si $n = m$

$$(T_n, T_m) = 1$$

D'où les deux formules (3.6), (3.7).

3.2.2 Orthogonalité des polynômes orthogonaux de Tchebychev de 2^{ème} espèce

Proposition 3.2.2 [3] Les polynômes orthogonaux de Tchebychev de 2^{ème} espèce vérifient les conditions d'orthogonalité suivant:

$$(U_n, U_m) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(t) U_m(t) \sqrt{1-t^2} dt = \delta_{n,m} \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

i-e si $n \neq m$ on a

$$(U_n, U_m) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(t) U_m(t) \sqrt{1-t^2} dt = 0 \quad (3.9)$$

Preuve. Soient n et m deux entiers naturels. En posant $t = \cos \theta$ pour $\theta \in [0, \pi]$, on a $dt = -\sin \theta d\theta$ ou encore $d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ car $\sin \theta \geq 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$. On obtient de fait que :

$$\sin \theta U_n(\cos \theta) = \sin(n\theta)$$

Et

$$U_n = \frac{1}{n} T'_n$$

alors

$$(U_n, U_m) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(t) U_m(t) \sqrt{1-t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{nm} T'_n(t) T'_m(t) \sqrt{1-t^2} dt$$

il s'ensuit directement si $n \neq m$ on a

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(t) U_m(t) \sqrt{1-t^2} dt = 0$$

D'où les deux formules (3.8), (3.9). ■

3.3 Relation de récurrence des polynômes orthogonaux de Tchebychev

3.3.1 Relation de récurrence des polynômes orthogonaux de Tchebychev de 1^{ère} espèce

Théorème 3.3.1 [3] On a : $T_0(x) = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1]$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \quad (3.10)$$

Preuve. Il est évident que, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = \cos(1 \arccos x) = \cos(\arccos x) = x$. En plus on utilise la relation trigonométrique suivante: $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(m\theta)$$

il vient alors:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) + T_{n-1}(x)$$

Ainsi, les polynômes $T_{n-1} + T_{n+1}$ et $2XT_n$ coïncident en une infinité de valeurs et sont donc égaux. Cette relation de récurrence des polynômes orthogonaux de Tchebychev permet de calculer $T_2, T_3, \dots$. D'où la formule (3.10). ■

Exemple 3.3.1 calcul de T_2 : si $n = 1$

$$T_2(x) + T_0(x) = 2xT_1(x)$$

$$\implies T_2(x) = -T_0(x) + 2xT_1(x)$$

$$\implies T_2(x) = -1 + 2x \cdot x = 2x^2 - 1$$

Exemple 3.3.2 calcul de U_2 : De même, à partir de l'égalité

$$U_2(x) = \frac{1}{n} T'_n(x),$$

on obtient

$$\implies U_1(x) = \frac{1}{1} T'_1(x) = 1$$

$$\implies U_2(x) = \frac{1}{2} T'_2(x) = 2x$$

3.3.2 Degré de coefficient dominant des polynômes orthogonaux de Tchebychev

Corollaire 3.3.1 [3]

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots + xT'_n(0) + T_n(0) \quad (3.11)$$

Et

$$U_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots + xU'_n(0) + U_n(0) \quad (3.12)$$

Preuve. 1^{ère} solution: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que

$$T_n(x) = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} x^{n-2p} (1-x^2)^p.$$

Puisque pour tout entier naturel $p \in [[0, E(n/2)]]$, on a $n - 2p + 2p = n$, T_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n . De plus, le coefficient de x^n dans T_n vaut.

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots &= \\ \frac{1}{2} ((C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + \dots) + (C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - \dots)) \\ &= \frac{1}{2} ((1+1)^n + (1-1)^n) = 2^{n-1} \end{aligned}$$

D'où la formule (3.11).

2^{ème} solution: Montrons par récurrence que $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et

$$\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}.$$

• On a déjà $\deg(T_1) = 1$, $\deg(T_2) = 2$, $\text{dom}(T_1) = 2^{1-1} = 1$ et $\text{dom}(T_2) = 2^{2-1} = 2$. Le résultat est donc vrai pour $n = 1$ et $n = 2$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $\deg(T_n) = n$, $\deg(T_{n+1}) = n+1$,

$$\text{dom}(T_n) = 2^{n-1} \text{ et } \text{dom}(T_{n+1}) = 2^n$$

alors

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(XT_{n+1}) = 1 + n + 1 = n + 2,$$

et

$$\text{dom}(T_{n+2}) = \text{dom}(2XT_{n+1}) = 2 * 2^n = 2^{n+1}.$$

Le résultat est démontré par récurrence. $T_0 = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(T_n) = n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{dom}(T_n)$

Par dérivation, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(U_n) = n - 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{dom}(U_n) = 2^{n-1}$$

D'où les deux formules (3.11), (3.12). ■

3.3.3 Parité des polynômes orthogonaux de Tchebychev

Proposition 3.3.1 [3]

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \quad (3.13)$$

Coefficients constants

$$T_n(1) = 1 \quad (3.14)$$

et

$$T_n(-1) = (-1)^n \quad (3.15)$$

et

$$T_{2n+1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad T_{2n}(0) = (-1)^n \quad (3.16)$$

Preuve. Pour tout naturel n , T_n a la parité de n . En effet,

$$T_n(-x) = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} (-x)^{n-2p} (1 - (-x)^2)^p.$$

implique

$$(-1)^n \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} x^{n-2p} (1 - x)^p = (-1)^n T_n(x)$$

D'où la formule (3.5). On peut encore utiliser la relation de récurrence du 3). Tout d'abord, $T_0(-x) = (-1)^0 T_0$ et $T_1(-x) = (-1)^1 T_1(x)$.

Ensuite, si pour $n \geq 0$ $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ et $T_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(x)$ alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-x) &= 2(-x) T_{n+1}(-x) - T_n(-x) \\ &= 2(-1)^{n+2} x T_{n+1} - (-1)^n T_n = (-1)^{n+2} (2x T_{n+1} - T_n) = (-1)^{n+2} T_{n+2}. \end{aligned}$$

Pour tout naturel n , T_n a la parité de n . Par dérivation, on obtient encore pour tout naturel non nul n , U_n a la parité contraire de n .

Coefficient constant $(T_n(1), T_n(0), T_n(-1))$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n * 0) = 1$$

et

$$T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n$$

aussi

$$T_{2n+1} \text{ est impair et donc } T_{2n+1}(0) = 0. \text{ Puis } T_{2n}(0) = T_{2n}\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

Ce qui termine la démonstration. ■

3.3.4 Equation différentielle vérifiée par les polynômes orthogonaux de Tchebychev

Théorème 3.3.2 [7] $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(1 - x^2) T_n'' - x T_n' + n^2 T_n = 0 \quad (3.17)$$

Preuve. Pour trouver les coefficients de T_n , on cherche d'abord une équation différentielle linéaire dont T_n est solution. Soit $n \in \mathbb{N}$, En dérivant l'égalité

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta),$$

on obtient $\forall \theta \in \mathbb{R}$:

$$-\sin \theta T_n'(\cos \theta) = -n \sin(n\theta),$$

■

Preuve. puis en redérivant $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$-\cos \theta T_n'(\cos \theta) + \sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) = -n^2 \cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos \theta),$$

,ou encore, $\forall x \in [-1, 1]$,

$$-x T_n'(x) + (1 - x^2) T_n''(x) = -n^2 T_n(x).$$

Ainsi, puisque $[-1, 1]$ est infini, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(1 - x^2) T_n'' - x T_n' + n^2 T_n = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

3.3.5 Racines de T_n et factorisation des polynômes orthogonaux de Tchebychev

Théorème 3.3.3 [7] Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right) \quad (3.18)$$

Preuve. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$$

Pour $k \in [[0, n-1]]$, posons alors

$$\theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

puis

$$x_k = \cos \theta_k.$$

On a d'une part

$$0 < \frac{\pi}{2n} = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} = \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi,$$

et donc, par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \cos x$ sur $[0, \pi]$,

$$1 > x_0 > x_1 > \dots > x_{n-1} > -$$

En particulier, les n nombres (x_k) , $0 \leq k \leq n-1$, sont deux à deux distincts. Mais d'autre part, pour $k \in [[0, n-1]]$,

$$T_n(\cos \theta_k) = \cos(n\theta_k) = 0.$$

et les n nombres x_k , $0 \leq k \leq n-1$ sont n racines deux à deux distinctes du polynôme T_n qui est degré n . Ce sont donc toutes les racines de T_n , toutes réelles simples et dans $] -1, 1[$.

En tenant compte de $\deg(T_n) = 2^{n-1}$, on a montré que

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, T_n a n racines réelles deux à deux distinctes, toutes dans $] -1, 1[$.

Et

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right)$$

Ce qui achève la démonstration. ■

3.3.6 Diverses expressions des polynômes orthogonaux de Tchebychev.

Théorème 3.3.4 [3] Pour x dans $[-1, 1]$. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.19)$$

et

$$T_n(ch\theta) = ch(n\theta) \quad (3.20)$$

aussi $\forall x \in [-1, 1]$,

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left(\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right) \quad (3.21)$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[$,

$$U_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \left(\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n - \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right) \quad (3.22)$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x \in [-1, 1]$ puis $\theta = \arccos x$. On a alors $\theta \in [0, \pi]$ et $\cos \theta = x$. L'égalité

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

s'écrit encore $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1]$:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

.De même, l'égalité

$$\sin \theta U_n(\cos \theta) = \sin(n\theta)$$

s'écrit encore $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[$:

$$U_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel θ , on a

$$T_n(ch\theta) = ch(n\theta)$$

.C'est clair pour $n = 0$ et $n = 1$.

· Soit $n \geq 0$. Supposons que

$$T_n(ch\theta) = ch(n\theta)$$

et que

$$T_{n+1}(ch\theta) = ch((n+1)\theta).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} T_{n+2}(ch\theta) &= 2(ch\theta)T_{n+1}(ch\theta) - T_n(ch\theta) = \\ &= 2(ch\theta)(ch(n+1)\theta) - ch(n\theta) = ch((n+2)\theta) - ch(n\theta) + ch(n\theta) \\ &= ch((n+2)\theta) \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(ch\theta) = ch(n\theta)$$

En dérivant, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$sh\theta * T'_n(ch\theta) = nsh(n\theta)$$

et, en tenant compte de

$$T'_n = nU_n$$

on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$sh\theta U_n(ch\theta) = sh(n\theta)$$

Soient alors x réel supérieur ou égal à 1 puis

$$\theta = \arg chx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

en effet

$$\begin{aligned} T_n(x) &= T_n(ch\theta) = ch(n\theta) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{n \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} + e^{-n \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^n + \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{-n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)^n \right) \left(\text{car } \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right) = 1 \right) \end{aligned}$$

$\forall x \in [1, +\infty[$,

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left(\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)^n \right)$$

.Par parité , on peut obtenir les valeurs de T_n pour $x \leq -1$.

En dérivant , on obtient pour $x > 1$:

$$\begin{aligned}
 U_n(x) &= \frac{1}{n} T'_n(x) \\
 &= \frac{1}{2} * \frac{1}{n} * n * \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) (x + \sqrt{x^2 + 1})^{n-1} \\
 &\quad + \frac{1}{2} * \frac{1}{n} * n * \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n-1} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \left((x + \sqrt{x^2 - 1})^n - (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right) \\
 \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[\\
 U_n(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \left((x + \sqrt{x^2 - 1})^n - (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right)
 \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. $\blacksquare$

Proposition 3.3.2 [3] Pour z complexe non nul. $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$T_n \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) \quad (3.23)$$

Preuve. L'égalité

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta),$$

valable pour tout réel θ , s'écrit encore

$$T_n \left(\frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right) = \frac{1}{2} (e^{in\theta} + e^{-in\theta}),$$

ou encore ,pour tout nombre complexe z de module 1 ,

$$T_n \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right),$$

Par suite, les polynômes

$$X^n T_n \left(\frac{1}{2} \left(X^n + \frac{1}{X^n} \right) \right) = \frac{1}{2} (X^{2n} + 1)$$

coincident en une infinité de valeurs et sont donc égaux. On en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad T_n \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

D'où la propriété voulue (3.23). $\blacksquare$

3.4 Polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique.Applications

3.4.1 Polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 1^{ère} espèce

Définition 3.4.1 [7] Soit n un entier naturel .Il existe un et un seul polynôme noté $t_n(x)$ tel que :

$$t_n(x) = \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos x \right]}{\cos \left(\frac{1}{2} \arccos x \right)} \quad (3.24)$$

$t_n(x)$ s'appelle polynôme de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 1^{ère} espèce.

$$u_n(x) = \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos x \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} \arccos x \right)} \quad (3.25)$$

$u_n(x)$ s'appelle polynôme de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 2^{ème} espèce.

Relations des polynômes orthogonaux d'Aérodynamique avec les polynômes orthogonaux de Tchebychev

Théorème 3.4.1 [7] Polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 1^{ère} espèce vérifient :

$$t_n(x) \sqrt{\frac{2}{1+x}} T_{2n+1} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} \right) \quad (3.26)$$

Polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 2^{ème} espèce vérifient :

$$u_n(x) = U_{2n} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} \right) \quad (3.27)$$

Aussi

$$t_n(x) \sqrt{\frac{2}{1+x}} T_{2n+1} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} \right) \quad (3.28)$$

Et

$$u_n(x) = U_{2n} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} \right) \quad (3.30)$$

3.4.2 Transformations logarithmiques entre les polynômes orthogonaux d' Aérodynamique

Théorème 3.4.2 [7] Transformation logarithmique entre les polynômes orthogonaux d'Aérodynamique de 1^{ère} espèce

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} t_n(x) \ln|x-y| dx = \int u_n(y) dy \quad (3.31)$$

Transformation logarithmique entre les polynômes orthogonaux d'Aérodynamique de 2^{ème} espèce

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} u_n(x) \ln|x-y| dx = \int t_n(y) dy \quad (3.32)$$

Preuve. On a [7], l'identité de la transformation logarithmique entre les polynômes orthogonaux d'Aérodynamique de 1^{ère}

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} t_n(x) \ln|x-y| dx = \\ &= \frac{u_{n-1}(y) - u_n(y)}{2n} + \frac{u_n(y) - u_{n+1}(y)}{2(n+1)} \quad (n \neq 0) \end{aligned}$$

si $n = 0$, vaut $-\ln 2 - y$. Il s'ensuit,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} t_n(x) \ln|x-y| dx = \\ &= -\frac{T_{n+1}(y)}{n+1} - \frac{T_n(y)}{n} = \int u_n(y) dy \end{aligned}$$

Dans le même contexte, la transformation logarithmique entre les polynômes orthogonaux d'Aérodynamique de 2^{ème} espèce

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} u_n(x) \ln|x-y| dx = \\ &= -\frac{t_{n-1}(y) + t_n(y)}{2n} + \frac{t_n(y) + t_{n+1}(y)}{2(n+1)} \end{aligned}$$

si $n = 0$, vaut $-\ln 2 - y$. Il s'ensuit,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} u_n(x) \ln|x-y| dx \\ &= \frac{T_{n+1}(y)}{n+1} - \frac{T_n(y)}{n} = \int t_n(y) dy \end{aligned}$$

D'où les deux propriétés voulues de la transformation logarithmique entre les polynômes orthogonaux d'Aérodynamique: (3.31), (3.32). ■

3.4.3 Diverses expressions des intégrales indéfinies des polynômes orthogonaux d'Aérodynamique.

Corollaire 3.4.1 [7] Pour $n > 0$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} t_n(x) dx = -\sqrt{1-x^2} \left[\frac{U_n(x)}{n+1} + \frac{U_{n-1}(x)}{n} \right] \quad (3.34)$$

Pour $n = 0$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} t_0(x) dx = -\arccos(x - \sqrt{1-x^2})$$

Aussi

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} u_n(x) dx = \sqrt{1-x^2} \left[\frac{U_n(x)}{n+1} - \frac{U_{n-1}(x)}{n} \right] \quad (3.35)$$

Pour $n = 0$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} u_0(x) dx = \arccos(x + \sqrt{1-x^2})$$

Preuve. Observons,[7]

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} t_n(x) dx &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2n(n+1)} [t_n(x) - (2n+1)u_n(x)] \\ &= -\sqrt{1-x^2} \left[\frac{U_n(x)}{n+1} + \frac{U_{n-1}(x)}{n} \right] \quad (n > 0) \end{aligned}$$

Dans le même contexte,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} u_n(x) dx &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{2n(n+1)} [-u_n(x) + (2n+1)t_n(x)] \\ &= \sqrt{1-x^2} \left[\frac{U_n(x)}{n+1} - \frac{U_{n-1}(x)}{n} \right] \end{aligned}$$

Si $n = 0$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} t_n(x) dx = -\arccos(x - \sqrt{1-x^2})$$

et

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} u_n(x) dx = -\arccos(x + \sqrt{1-x^2})$$

D'où les deux propriétés entre les polynômes orthogonaux d'Aérodynamique: (3.34),(3.35).

■

Corollaire 3.4.2 [7] *Intégrales indéfinies des polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 1^{ère} espèce vérifient :*

$$\int t_n(x) dx = -\frac{T_n(x)}{n} + \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} \quad (3.36)$$

Intégrales indéfinies des polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 2^{ème} espèce

$$\int u_n(x) dx = -\frac{T_n(x)}{n} - \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} \quad (3.37)$$

Preuve. [7],

$$\begin{aligned} \int t_n(x) dx &= \frac{t_{n-1}(x) + t_n(x)}{2n} + \frac{t_n(x) + t_{n+1}(x)}{2(n+1)} = \\ &= -\frac{T_n(x)}{n} + \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int u_n(x) dx &= \frac{u_{n-1}(x) - u_n(x)}{2n} + \frac{u_n(x) - u_{n+1}(x)}{2(n+1)} \\ &= -\frac{T_n(x)}{n} - \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} \end{aligned}$$

enfin

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{x-y} dx = \\ &\arccos x - \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \left(\ln \left| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \right| - \ln \left| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \right| \right) \end{aligned}$$

D'où les deux propriétés entre les polynômes orthogonaux d'Aérodynamique: (3.36), (3.37).

■

3.4.4 Relations des polynômes orthogonaux d'Aérodynamique et polynômes orthogonaux de Tchebychev de 1^{ère} espèce

Théorème 3.4.3 [7] *Les polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 1^{ère} espèce vérifient :*

$$t_n(x) = \frac{T_n(x) + T_{n+1}(x)}{1+x} \quad (n \neq 0) \quad (3.38)$$

Les polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 2^{ème} espèce vérifient :

$$u_n(x) = \frac{T_n(x) - T_{n+1}(x)}{1-x} \quad (n \neq 0) \quad (3.39)$$

il vient alors que,

$$t_n(x) = T_n(x) - (1-x)U_{n-1}(x) \quad (n \neq 0) \quad (3.40)$$

et

$$u_n(x) = T_n(x) + (1+x)U_{n-1}(x) \quad (n \neq 0) \quad (3.41)$$

Preuve. On a

$$t_n(x) + t_{n-1}(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x) = 2T_n(x) \quad (n \neq 0)$$

implique

$$t_n(x) = \frac{T_n(x) + T_{n+1}(x)}{1+x}$$

et

$$u_n(x) = \frac{T_n(x) - T_{n+1}(x)}{1-x}$$

et

$$t_n(x)u_n(x) - t_{n-1}(x)u_{n-1}(x) = 2T_{2n}(x) \quad (n \neq 0)$$

alors

$$t_n(x) = \sqrt{\frac{2}{1+x}} T_{2n+1} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} \right)$$

ce qui termine la preuve .D'où les quatre propriétés entre les polynômes orthogonaux d'Aérodynamique: (3.38)-(3.41). ■

3.4.5 Relations des polynômes orthogonaux d'Aérodynamique et polynômes orthogonaux de Tchebychev de 2^{ème} espèce

Corollaire 3.4.3 [7] Les polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique de 1^{ère} espèce vérifient :

$$t_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x) \quad (n \neq 0) \quad (3.42)$$

Théorème 3.4.4 *Les polynômes orthogonaux de Tchebychev associés d'Aérodynamique de de 2^{ème} espèce vérifient :*

$$u_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x) \quad (n \neq 0) \quad (3.43)$$

il vient alors que,

$$t_n(x) = T_n(x) - (1-x)U_{n-1}(x) \quad (n \neq 0) \quad (3.44)$$

et

$$u_n(x) = U_{2n}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) \quad (n \neq 0) \quad (3.45)$$

Preuve. On a

$$t_n(x) + u_n(x) = -t_{n+1}(x) + u_{n+1}(x) = 2U_n(x)$$

et

$$t_n(x)u_n(x) = U_{2n}(x)$$

et

$$t_n(x) = T_n(x) - (1-x)U_{n-1}(x)$$

encore

$$u_n(x) = T_n(x) + (1+x)U_{n-1}(x)$$

enfin

$$\frac{t_n(x) - t_{n+1}(x)}{1-x} = \frac{u_n(x) + u_{n+1}(x)}{1+x} = 2U_n(x)$$

.

■

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons apporté une contribution à un problème n'est pas facile dans le domaine de la théorie constructive des polynômes orthogonaux et leur propriété des relations de récurrences, la propriété des relations de récurrences des polynômes orthogonaux de Tchebychev joue un rôle important.

Il est très possible que les formules des propriétés des relations de récurrences des polynômes orthogonaux de Tchebychev obtenues trouveront leurs applications dans plusieurs domaines des physiques- mathématiques. Et autre problèmes des relations de récurrences des polynômes orthogonaux associés aux polynômes orthogonaux de Tchebychev.

Bibliographie

- [1] **Lambert rnov** , cour de mathématiques supérieures,(Reçu le 22 Septembre 1956)
Caen
- [2] **R. Campbell**, Sur les polynomes orthogonaux dont les dérivés sont orthogonaux, edition
mir moscou 1977
- [3] **Ana Maria Acu** ,New results in extremal problems with polynomials ,General Math-
ematics Vol. 12, No. 1 (2004), 53–60.
- [4] **IOAN POPA** , EXTREMAL PROBLEMS OF TURAN TYPE,STUDIA UNIV.
BABES_BOLYAI, MATHEMATICA, Volume L, Number 1, March 2005.
- [5] **Ana Maria Acu and Mugur Acu** .Gauss-Lobatto Formulae and Extremal Problems
with Polynomials, Journal of Inequalities and Applications,Volume 2008, Article ID
624989, 10 pages.
- [6] **Maslove** , méthode opérationnelle , edition mir moscou , 1973.
- [7] **NATO Publications**.Polynômes orthogonaux d'Aérodynamique .

RESUME

Soit $\{L_n\}$ le système de polynômes orthogonaux sur le segment $[a, b]$ et par rapport le point $w(x)$ i. e. $L_n(z)$ vérifie les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\int_a^b L_n(x) x^k w(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \dots$$

Soit $[a, b] = [-1, 1]$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ que nous appellerons polynômes orthogonaux de Tchebychev, On étudie dans cette mémoire les propriétés des polynômes orthogonaux de Tchebychev.

ABSTRACT

Let μ be a finite positive measure defined on the Borelian σ -algebra of $\mathbb{C}$, μ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measured $d(x)$ on $[a, b]$. Let us consider $\{L_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$, the system of monic orthogonal polynomial with respect to $w(x)dx$. Such that:

$$\int_a^b L_n(x) x^k w(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \dots$$

We choose $[a, b] = [-1, 1]$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ which called Tchebychev orthogonal polynomials. We study algebraic and asymptotic properties of the Tchebychev orthogonal polynomials.

ملخص

ليكن $\{L_n\}$ شكل كثيرات حدود تشيبيشاف على القطعة $[a, b]$ أكثر من نقطة $L_n(z)$ أي $w(x)$ تحقق علاقات التعمد التالية:

$$\int_a^b L_n(x) x^k w(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \dots$$

لتكن $[a, b] = [-1, 1]$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ في تعريف كثير حدود تشيبيشاف، قمنا في مذكرتنا هذه بدراسة خصائص كثيرات حدود تشيبيشاف.