N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

La somme des opérateurs normaux

Présenté par: **TOUATI BRAHIM noureddine**
Dogga Azzeddine

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Said Beloul	MCA	Président	Univ. El Oued
Messaoud Guesba	MC	Rapporteur	Univ. El Oued
Hefouda Belhadi	MC	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Dédicaces

Je dédie ce travail tout d’abord à mes parent
et à cher frère décédé Abdelhak et à
ma chère femme.
Je le dédie également à mes frères et soeurs :
Lalmi ,Belgacem , Abdelchafi, Maria, zeineb à mes ancles
et mes tantes, à mes enseignant et mes
collègues dans le dépendant de

l’informatique et des mathématique

Noureddine

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes parent :Med Lazhar
et Souid Souad à qui je souhaite la
santé et la bénissement.
Je dédie ce travail aussi à tous mes frères et soeurs :
Maroi, CHaima, Sounia, Aymen et Ahmed
et tous les membre de la famille et surtout
mon cher grand-père Salem Souid

et à mes ancles et mes tantes.

Azzeddine

Remerciement

Avant tout, nous remercions ALLAH qui nous a donné la force pour terminer ce mémoire .

Nous remercions notre cher encadreur le docteur Messaoud Guesba.

Nous remerciements aussi à nos collègues : Maamra Ali,Chouia Abdellah et Touil Fayçal pour les efforts qu'ils nous ont fournis .

Nous remercions également tous nos enseignants durant notre cursus scolaire .

Nous n'oublions pas tous les cadre de l'université d'el-oued qui ont taché pour le bon déroulement de notre étude

Table des matières

Introduction

L'analyse fonctionnelle est définie aux début du XX^e siècle Malgré sa naissance récent, elle occupe aujourd'hui une place privilégiée entre les sciences mathématiques actuelles . Le concept de l'opérateur occupe la première place dans l'analyse fonctionnelle et il est une généralisation du concept de fonction dans l'analyse fonctionnelle . L'étude de la théorie générale des opérateurs se trouve au centre de l'analyse fonctionnelle et parmi ces opérateurs.

La théorie des opérateurs linéaires trouve ses origines d'une part dans l'étude des systèmes finis d'équations linéaires à un nombre fini d'inconnues et d'autres part dans des équations linéaires différentielles et intégrales. En effet, c'est l'analogie entre les systèmes d'équations linéaires en dimension finie et les équations intégrales, qui a permis à quelques mathématiciens du début du siècle tels que I. Fredholm ou J. Volterra de dégager les éléments essentiels de la théorie qui porte aujourd'hui le nom de la théorie des équations de Fredholm.

Dans un effort pour compléter les travaux de I. Fredholm, Hilbert parvient à des conceptions plus générales. En particulier il découvre que le succès de la méthode de I.Fredholm repose sur la notion de « complète continuité » qu'il dégage en la formulant pour les formes bilinéaires et qu'il étudie de façon approfondie. Puis juste après, E. Schmidt et M. Frechet introduisent délibérément le langage de la géométrie euclidienne dans l'espace de Hilbert.

La notion d'application linéaire complètement continue se trouve pour la première fois définie de façon générale dans le célébré mémoire de F. Riesz 1918 sur la théorie de I. Fredholm. Vers les années vingt de ce ciècle, S. Banach ajoute une étude poussée des relations entre une application linéaire continue et sa transposée, étendue aux espaces normés. Cette période verra naitre de grands théorèmes tels que le théorème du graphe fermé ou le théorème de Banach-Steinhaus.

Il y a l'opérateur normal qui sera l'objet de notre étude qui s'intéresse à la somme des deux opérateur normaux, cette étude utilisera une théorie de Fuglede[6] . Pour faire cette étude , nous avons divisé notre mémoire en trois chapitres auxquels s'ajoutent une introduction et une conclusion.

Le premier chapitre contient un rappel sur certaines notions utilisées tout au long de ce mémoire, comme le espace de Hilbert, l'opérateur linéaire, le spectre d'opérateur .

Le deuxième chapitre contient deux sections dont nous avons discuté dans la première section à certains types d'opérateurs normaux tels que l'opérateur auto-adjoint , l'opérateur positif, l'opérateur unitaire. Dans la deuxième section, nous avons traité des propriétés d'un opérateur normal .

Le troisième chapitre contient deux sections, où la premiére section parle d'opérateur non borné, par aillieurs dans la deuxième section on étudie la normalité d'une somme de deux opérateurs normaux .

0.1 Terminologie

1. On désigne par H un espace de Hilbert (complexe), $L(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaire sur H. $\mathscr{L}$ (H) désigne l'ensemble des opérateurs linéaire bornés sur H.
2. Si $T \in \mathscr{L}$ (H), $R(T)$ (resp. $Ker(T)$) désigne limage (resp. le noyau) de T.
3. Le spectre d'un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$, noté $\sigma(A)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :
$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \; non \; inversible \; \}.$$
4. Si $T \in \mathscr{L}(H)$, le spectre ponctuel de T noté $\sigma_p(T)$ est défini par :
$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \; ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$
5. Le spectre résiduel de T, on note par $\sigma_r(T)$ est défini par :
$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T)/\sigma_P(T) : \overline{R(T - \lambda I)} \neq H\}.$$
6. Si $T \in \mathscr{L}(H)$, le spectre continu de T noté $\sigma_c(T)$ est défini par :
$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T)/\sigma_P(T) : \; R(T - \lambda I) \neq \overline{R(T - \lambda I)} = H.$$
7. On a toujours
$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$
8. Si $T \in \mathscr{L}(H)$, Le rayon spectral de T noté $r(T)$ défini par :
$$r(T) = sup\{\mid \lambda \mid, \lambda \in \sigma(T)\}.$$
9. On va rappeler quelques classes des opérateurs, soit $T \in \mathscr{L}(H)$ est dit notions :

a) Auto-adjoint ou hermitien si $T^* = T$, où T^* est l'adjoint de T.
b) Positif si $< Tx, x >\geq 0$; pour tout $x \in H$, ce qui est noté $T \geq 0$.
c) Normal si $TT^* = T^*T$.
d) Unitaire si $TT^* = T^*T = I$.
e) Isométrie si $TT^* = I$.
f) Idempotent ou projection si $T^2 = T$.
g) Projection orthogonale si $T^2 = T$ et $T = T^*$.

Chapitre 1

Généralités sur les opérateurs bornés

1.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Dans tout ce qui suit, on travaillera sur un corps $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C})$.

Définition 1.1.1. Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel H est une application $< \cdot, \cdot >$ variant.

$$
\begin{array}{rccc}
< \cdot, \cdot >: & H & \to & H \\
 & (g; h) & \mapsto & < g, h >
\end{array}
$$

1. Pour tout $h \in H$, l'application $g \to < g, h >$ est linéaire.
2. Pour tous $g; h \in H$, $< g, h >= \overline{< h, g >}$.
3. Pour tout $g \in H - \{0\}$, $< g, g >> 0$.

On note alors $\|g\| = \sqrt{< g, g >}$ et on vérifie que c'est une norme sur H . Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est de plus complet pour la norme$\| \cdot \|$. Tous les espaces de Hilbert que nous considèrerons seront supposés **séparables**, c'est-à-dire admettant un sous-ensemble dénombrable dense.

Une inégalité fondamentale, c'est **l'inégalité de Cauchy Schwarz**

$$|< g, h >| \leq \|g\|\|h\|; \forall g, h \in H.$$

On en déduit immédiatement la formule suivante :

$$\|g\| = \sup_{h\in H, \|h\|\leq 1} |< g, h >|$$

Définition 1.1.2. Si $g; h \in H$, on dit que g et h sont **orthogonaux**, et on écrit $g \perp h$ si $< g, h >= 0$. Si M est une partie de H, **l'orthogonal** de M est défini par

$$M^{\perp} = \{h \in H \ tq \ \forall g \in M, g \perp h\}$$

La remarque suivante est souvent utile : un sous-espace $M \subset H$ est dense si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$. De plus, si M est un sous-espace fermé, alors H se décompose en somme directe $H = M \oplus M^{\perp}$. On peut énoncer le **théorème de Pythagore**, si $f_1, \ldots, f_n \in H$ sont deux à deux orthogonaux, alors

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2.$$

Une identité à retenir est l'identité du parallélogramme : si $f; g \in H$,

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right).$$

Si $M \subset H$ est un sous-espace fermé, on peut définir la **projection orthogonale** sur M, notée P_M, de la manière suivante : pour $h \in H$, $P_M h$ est l'unique élément de M tel que $h - P_M h \in M$. Alors P_M est une application linéaire telle que $P_M^2 = P_M$,$\|P_M\| \leq \|h\|$ pour tout $h \in H$, $kerP_M = M^{\perp}$ et $ImP_M = M$.

Définition 1.1.3. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une **base orthonormale** d'un espace de Hilbert H si

1. $\|e_i\| = 1$.
2. L'espace engendré $Vect\{e_i\}$ est dense dans H .
3. $e_i \perp e_j, \forall i \neq j$.

Tout espace de Hilbert admet une base orthonormale, qui est finie si et seulement si l'espace est de dimension finie.

Les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert sont particulièrement simples à décrire

Théorème 1.1.4. *Soit H un espace de Hilbert et B_H sa boule-unité fermé. Alors B_H est compacte si et seulement si H est de dimension finie.*

Exemple 1.1.5. L'espace

$$l_2(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ tq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n \mid^2 < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$< u, v >= \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overline{v_n}$$

Pour $k \in N$, on note e_k la suite dont tous les termes sont nuls, à l'exception du $k-$ème qui vaut 1. Alors $(e_k)_{k\in N}$ est une base orthonormale de $l_2(\mathbb{N})$. On peut définir de manière identique l'espace $l_2(\mathbb{Z})$ des suites de carré sommables indexées par $\mathbb{Z}$.

1.2 Les opérateurs linéaires

Dans l'analyse fonctionnelle,la notion d'opérateur linéaire est une notion fondamentale,puisque en grande partie il étudie des opérateurs linéaires donner par certaines équations intégrales.

Nous donnons ici les définitions et propriétés de base des opérateurs linéaires.

Définition 1.2.1. Soient E et F deux espaces vectoriels, on appelle opérateur linéaire de $D(T) \subset E$ dans F, toute application $T : D(T) \subset E \rightarrow F$ qui vérifie :

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) ; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \left(\ \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathbb{C} \ \right) ; \forall x, y \in D(T)$$

Remarque 1.2.2. 1- Le vecteur $T(x)$ noté en général Tx.

2- On suppose que $D(T)(D_T)$ est une variété linéaire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \left(\ \mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{C} \ \right) ; \forall x, y \in D_T : \lambda x + \mu y \in D_T.$$

Exemple 1.2.3. Soit E et F deux espaces vectoriels :

1. On considéré l'opérateur $Ix = x, \forall x \in E$ l'opérateur I s'appelle opérateur identique.
2. L'opérateur $Ox = 0, \forall x \in E$ s'appelle opérateur nul.

1.2.1 Noyau et image d'opérateur

Définition 1.2.4. L'ensemble d'un

$$KerT = \{x \in D_T : Tx = 0\}$$

est appelé noyau de l'opérateur T, et aussi noté parfois $N(T)$.

Définition 1.2.5. Image d'un opérateur T définie par

$$ImT = \{Tx; x \in D_T\}$$

et aussi noté parfois $R(T)$.

Remarque 1.2.6. On note par $L(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de E vers F.

1.2.2 Somme d'opérateurs

Définition 1.2.7. ([1]) Soient T et S deux opérateurs linéaires de E dans F on définit l'opérateur $S + T$ par :

$$(S + T)x = Sx + Tx; x \in D_{A+B}; D_{A+B} = D_A \cap D_B.$$

1.2.3 Produit des opérateurs

Définition 1.2.8. ([1]) Soient Tet S deux opérateurs, tels que $T \in L(E, E_1)$et $S \in L(E_1, E_2)$ on définit l'opérateur ST comme l'opérateur linéaire de E dans E_2 par l'algébre :

$$(ST)x = S(Tx), \forall x \in D(ST)$$

tel que :

$$D(ST) = \{x \in D(T); Tx \in D(S)\}$$

.

Définition 1.2.9. ([1])On dit que Tet S commutent et on écrit $TS = ST$ si

$$(TS)x = (ST)x; \forall x \in D_{TS} \cap D_{ST}.$$

1.3 Les opérateurs entre espace normés

Définition 1.3.1. Soient Eet F deux espace normés, $T \in L(E, F)$est dit continu si :

$$\forall (x_n) \subset E; x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_F} Tx.$$

Exemple 1.3.2. Considérons l'opérateur de dérivation

$$\begin{array}{rcl} T : C[a,b] & \rightarrow & C[a,b] \\ f(t) & \mapsto & f'(t) \end{array}$$

L'opérateur T est linéaire, mais pas continu cela résulte par exemple, du fait que la suite $x_n = \frac{\sin(nt)}{n}$ converge vers 0 par $\|.\|_\infty$. Tendis que la suite

$Tx_n \nrightarrow 0$ $(Tx_n(t) = \cos(nt))$. Mais il est clair que la dérivation est un opérateur linéaire dans l'espace des distributions et continue.

Définition 1.3.3. Un opérateur $T \in L(E,F)$ est dit borné, s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que :

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \forall x \in E.$$

Exemple 1.3.4. Soit l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} T : C[a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f(t) & \mapsto & \int_a^\zeta f(t)\,dt. \end{array}$$

T est borné,

car : $\mid \int_a^\zeta f(t)\,dt \mid \leq (\zeta - a)\|f\|_\infty$.

1.3.1 Norme d'un opérateur

Définition 1.3.5. Le plus petit des nombres C vérifiant (1.3.3) s'appelle norme de l'opérateur T et se noté $\|T\|$.

Théorème 1.3.6. *([5])Pour tout opérateur borné $T \in L(E,F)$, on a*

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_F.$$

Démonstration. Posons

$$\alpha = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_F.$$

En vertu de la linéarité de T, on a l'égalité

$$\alpha = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Donc, $\forall x \in E - \{0\}$, on a :

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \alpha,$$

ou

$$\|T_x\|_F \leq \alpha\|x\|_E.$$

D'autre part, $\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \neq 0$ tel que :

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\|Tx_\varepsilon\|_F}{\|x_\varepsilon\|_E},$$

ou

$$(\alpha - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|_E \leq \|Tx_\varepsilon\|_F \leq C\|x_\varepsilon\|_E$$

$$\alpha - \varepsilon \leq \inf C = \|T\|$$

et , comme ε est arbitraire, on a

$$\alpha \leq \|T\|.$$

Par conséquent

$$\|T\| = \alpha.$$

□

Exemple 1.3.7. Soit

$$\begin{aligned} T : C[a,b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(t) &\mapsto f(1) + f(2) \end{aligned}$$

On a [1]

$$\|Tf\|_{\mathbb{R}} = | f(1) + f(2) | \leq 2\|f\|_\infty$$

donc

$$\|T\| \leq 2.$$

Montrons que

$$\|T\| \geq 2$$

On

$$g(x) = 1; \forall x \in [a;b],$$

1. $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} | f(x) |$

Alors
$$Tg = g(1) + g(2) = 2,$$

d'où
$$\|Tg\| = 2$$

et
$$\|Tg\| \leq \sup_{\|f\|=1} \|Tf\| \Rightarrow \|T\| \geq 2$$

Donc
$$\|T\| = 2.$$

Corollaire 1.3.8. *On déduit du théorème précédent*

$$\forall x \in E, \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Remarque 1.3.9. On note par $\mathscr{L}$ (E,F) l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans F.

Définition 1.3.10. ([5]) Soient E et F deux espaces normés, l'ensemble $\mathscr{L}$ (E,F) muni de la norme $\|T\| est$ un espace normé.

Démonstration. 1- Soient $T \in \mathscr{L}$ (E,F) avec $\|T\| = 0$. On a

$$\forall x \in E, \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|,$$

d'où $\|Tx\| = 0$, donc $Tx = 0, \forall x \in E$ c'est à dire $T = 0$.

2- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a
$$\begin{aligned} \|\lambda Tx\| &= \mid \lambda \mid \|Tx\| \\ &\leq \mid \lambda \mid \|T\|\|x\|. \end{aligned}$$

D'où
$$\|\lambda T\| \leq \mid \lambda \mid \|T\|.$$

D'autre part, on a
$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \tfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda Tx\|; \lambda \neq 0 \\ &\leq \tfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda T\|\|x\|. \end{aligned}$$

D'où
$$\|T\| \leq \frac{1}{\mid \lambda \mid}\|\lambda T\| \Rightarrow \mid \lambda \mid \|T\| \leq \|\lambda T\|$$

donc
$$\|\lambda T\| = \mid \lambda \mid \|T\|.$$

3- Soient $T, S \in \mathscr{L}$ (E,F) on a :

$$\|(T + S)x\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|.$$

D'où

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|.$$

□

Théorème 1.3.11. *([1]) Soient $T, S \in \mathscr{L}(E,F)$et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors*

$$\lambda T, T + S, TS \in \mathscr{L}(E,F)$$

et on a

1. $\|\lambda T\| =\mid \lambda \mid \|T\|$.
2. $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.
3. $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.

Théorème 1.3.12. *([13])Soient E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace de Banach.*

Définition 1.3.13. Le graphe $G(A)$ d'un opérateur $T \in \mathscr{L}$ (E,F) est un sous-espace de $E \times F$ définie par :

$$G(T) = \{(x, Tx) ; x \in D_T\} \subset E \times F.$$

Théorème 1.3.14. *([13]) Soient E et F deux espace de Banach et Tun opérateur linéaire, si F compacte, alors*

$$G(T) \ est \ ferme \ dans \ E \times F \Leftrightarrow T \in \mathscr{L}(E,F)$$

Théorème 1.3.15. *([2]) Soient E, F deux espace normés et $T \in L(E, F)$.les assertions suivantes équivalence*

a) L'opérateur T est continu.
b) L'opérateur T est continu en 0.
c) L'opérateur T est continu en un point.
d) L'opérateur T est borné.

Théorème 1.3.16. *([12]) Soit $T \in \mathscr{L}(H)$.H est espace de Hilbert complexe .*

$$Si \ \ < Tx, x >= 0; \forall x \in H \ . \ Alors \ T = 0$$

Démonstration. Pour touts $x, y \in H$ on a

$$< T(x + y), x + y >= 0,$$

d'où

$$< Tx, y > + < Ty, x >= 0. \tag{1.3.1}$$

D'outre part, on remplace y par iy dans (1.3.1) on trouve :

$$-i < Tx, y > +i < Ty, x >= 0, \tag{1.3.2}$$

par multipliant (1.3.2) avec i et recueillies avec (1.3.1), alors

$$< Tx, y >= 0; \forall x, y \in H.$$

On pose $y = Tx$;

$$< Tx, Tx >= 0 \Longrightarrow \|Tx\|^2 = 0 \Longrightarrow T = 0.$$

□

Remarque 1.3.17. Si H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, le théorème précédent n'a pas été vérifie.

Exemple 1.3.18. $E = \mathbb{R}^2$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $< Tx, x >= 0; \forall x \in \mathbb{R}^2$, mais $T \neq 0$.

Corollaire 1.3.19. *Soit H un espace de Hilbert complexe et $T, S \in \mathscr{L}(H)$*

$$\{< Tx, x >=< Sx, x >; \forall x \in H\} \Rightarrow S = T$$

Démonstration. En appliquant le théorème précédent pour $S - T$. □

1.3.2 Inverse d'un opérateur

Définition 1.3.20. Soient E, F deux espace normé, et $T \in L(E, F)$. L'opérateur T est dit inversible si pour tout $y \in F$, l'équation $Tx = y$ a une solution et une seule .

Définition 1.3.21. On dit que $T \in L(E, F)$ est inversible s'il existe $S \in L(F, E)$ tel que $ST = I_E$ et $TS = I_F$.

On appelle l'opérateur S l'inverse de T et noté par T^{-1}.

Remarque 1.3.22. ([13])Soient E, F deux espaces normés, et $T, S \in \mathscr{L}(E, F)$.

a) Si $ST = I_E$ alors $S = T_g^{-1}$.
b) Si $TS = I_F$ alors $S = T_d^{-1}$.

Théorème 1.3.23. *([5]) L'opérateur inverse T^{-1} d'un opérateur linéaire T est aussi linéaire.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le domaine des valeurs R_T de l'opérateur T , c'est-à-dire $D_{T^{-1}}$, est une vérité linéaire.

1-

$$\forall x, y \in R_T$$

$$x \in R_T \Rightarrow \exists x' \in D_T : x = Tx'$$

$$y \in R_T \Rightarrow \exists y' \in D_T : y = Ty'.$$

On a :

$$\begin{aligned} T^{-1}(x+y) &= T^{-1}(Tx' + Ty') \\ &= T^{-1}T(x' + y') \\ &= x' + y' \\ &= T^{-1}x + T^{-1}y. \end{aligned}$$

2-

$$T^{-1}(\lambda x) = T^{-1}(\lambda T x') = T^{-1}T(\lambda x') = \lambda x' = \lambda T^{-1}x.$$

□

Exemple 1.3.24. On a

1. L'opérateur I est inversible et $I^{-1} = I$.

2. L'exemple suivant montre que l'inverse d'un opérateur borné n'est pas forcement borné , soit $E = l_2$ l'opérateur T défini par :

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)$$

On pose $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$.

On a :

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \|(x_1, \tfrac{x_2}{2}, \ldots, \tfrac{x_n}{n}, \ldots)\|^2 \\ &= \sum_{i\geq 1} \mid \tfrac{x_i}{i} \mid^2 \\ &\leq \sum_{i\geq 1} \mid x_i \mid^2 = \|x\|_{l_2}^2. \end{aligned}$$

D'où $\|Tx\|_{l_2} \leq \|x\|_{l_2}$. Donc T est borné et son inverse est donné par

$$T^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n, \ldots).$$

cependant, T^{-1} est non borné .

En effet si $e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$on a $\|e_n\| = 1$et $\|T^{-1}e_n\| = n$, alors n'est pas borné .

Donc l'opérateur T n'est pas inversible.

Théorème 1.3.25 (D'isomorphisme de Banach)**.** *([4]) Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est inversible s'il est bijectif et T^{-1}est borné.*

Théorème 1.3.26 (Série de Neumann)**.** *([1]) Soit E un espace de Banach et*

$T \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $\|T\| < 1$; l'opérateur $I - T$ (I l'opérateur identique dans E) est inversible et borné et on a $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ de plus $\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$.

Démonstration. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$ la suite (S_n) est une suite de Cauchy, $\mathscr{L}$(E) est un espace de Banach alors la suite (S_n) converge vers un élément de l'espace qui est donc borné.

Enfin

$$(I - T)(\sum_{n=0}^{\infty} T^n) = (\sum_{n=0}^{\infty} T^n)(I - T) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{n=0}^{n} T^n(I - T) = I.$$

□

1.4 L'adjoint d'un opérateur

Théorème 1.4.1 (Riesz)**.** *([3]) Soit H un espace de Hilbert et $f \in H'$ alors*

$$\exists! a \in H : f(x) =< x, a >; \forall x \in H.$$

Théorème 1.4.2. *([1]) Soient H, K deux espaces de Hilbert,$T \in \mathscr{L}(H,K)$,alors il existe un unique opérateur continu de K dans H note T^*tel que :*

$$< Tx, y >=< x, T^* y >, \forall x \in H, \forall y \in K.$$

Démonstration. Soit $y \in K$ et

$$\begin{aligned} f : H &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x) =< Tx, y > . \end{aligned}$$

Alors f est linéaire et borné , car

$$\begin{aligned} | f(x) | &=|< Tx, y >| \\ &\leq \|Tx\|\|y\| \\ &\leq \|T\|\|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz il existe un unique $z \in H$ tel que :

$$f(x) = < Tx, y > = < x, z > .$$

Posons $z = T^*y$, donc T^*est une application de K vers H.

C'est simple de voir que T^*est linéaire et aussi bornée car :

$$\begin{aligned} \|T^*y\|^2 &= < T^*y, T^*y > \\ &= < TT^*y, y > \\ &\leq \|TT^*y\|\|y\| \\ &\leq \|T\|\|T^*\|\|y\|. \end{aligned}$$

Alors, T^*est bornée et $\|T^*\| \leq \|T\|$ □

Définition 1.4.3. L'unique application linéaire $T^* \in \mathscr{L}$ (K,H) tel que :

$$< Tx, y > = < x, T^*y >; \forall x \in H, \forall y \in K,$$

est appelé adjoint de T.

Exemple 1.4.4. On a

1. $I^* = I$ et $O^* = O$.
2. Soit la matrice : $T = (\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix})$ tel que $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son adjoint $T^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$.

1.4.1 Propriétés de l'adjoint

Soient H, K deux espaces de Hilbert.

Proposition 1.4.5. *([2]) Soit* T $\in \mathscr{L}$ *(H,K), alors*

1. $(T^*)^* = T$.
2. $\|T^*\| = \|T\|$.
3. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Démonstration. Pour tout y dans K, l'application qui à x associe $< Tx, y >$ est une forme linéaire continue sur H, dont la norme n'excède pas$\|T\|\|y\|$; en vertu du théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $z \in H$, tel que pour tout x dans H

$$< Tx, y > = < x, z > et\|z\| \leq \|T\|\|y\|.$$

Posons $z = T^*y$, on montre aussitôt, en fixant x, que $y \to T^*y$ est une application linéaire et

$$\|T^*y\| \leq \|T\|\|y\|,$$

donc $\|T^*\| \leq \|T\|$ l'opérateur $(T^*)^*$ est caractérisé par la propriété :

$$< T^*x, y >=< x, (T^*)^*y >,$$

pour $x \in H, y \in K$ on,

$$< T^*x, y >= \overline{< y, T^*x >} = \overline{< Ty, x >} =< x, Ty > .$$

On en déduit immédiatement que $(T^*)^* = T$ et par suite $\|T^*\| = \|T\|$. De plus, l'inégalité

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^*T\|\|x\|; \forall x \in H,$$

montre que

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\|,$$

comme $\|T^*\| = \|T\|$, on a l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$. □

Proposition 1.4.6. *Soient $T, S \in \mathscr{L}(H,K)$ on a*

1. $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*$pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $(TS)^* = S^*T^*$.

Démonstration. 1.On a

$$\begin{aligned} < (\alpha T + \beta S)^*x, y > &=< x, (\alpha T + \beta S)y > \\ &=< x, (\alpha T)y > + < x, (\beta S)y > \\ &= \overline{\alpha} < T^*x, y > +\overline{\beta} < S^*x, y > \\ &=< (\overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*)x, y > . \end{aligned}$$

D'où $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*$.

2.On a

$$\begin{aligned} < (TS)^*x, y > &=< x, (TS)y > \\ &=< T^*x, Sy > \\ &=< S^*T^*x, y > . \end{aligned}$$

D'où $(TS)^* = S^*T^*$. □

Proposition 1.4.7. *([2]) Soient $T, S \in \mathscr{L}(H,K)$on a*

Si T est inversible, T^* l'est aussi et on a$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Démonstration. On a

$$I = I^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^* T^*,$$

ce implique que T^*est inversible, de plus $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

Lemme 1.4.8. *([5]) Soient H, K deux espaces de Hilbert,$T \in \mathscr{L}(H,K)$on a*

- **a)** $KerT = (ImT^*)^{\perp}$.
- **b)** $KerT^* = (ImT)^{\perp}$.
- **c)** $KerT^* = \{0\}$ si et seulement si $\overline{ImT} = K$.

Corollaire 1.4.9. *Soit $T \in \mathscr{L}(H,K)$*

$$T \ est \ inversible \Longleftrightarrow \{\exists \alpha < 0, \|Tx\| \geq \alpha \|x\|; KerT^* = \{0\}, \forall x \in H\}.$$

Exemple 1.4.10. L'opérateur « Shift » S définiront de l_2 vers l_2 n'est pas inversible , puisque $S^*(y_1, y_2, \ldots) = (y_2, y_3, \ldots)$ alors , $KerS^* \neq \{0\}$ car

$$S^*(1, 0, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots).$$

.

1.5 Spectre d'un opérateur

Définition 1.5.1 (Valeur propre et vecteur propre)**.** Soit E un espace normé et $T \in \mathscr{L}$(E), un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle valeur propre de l'opérateur T, si l'équation $(T - \lambda I)x = 0$ a une solution $x \neq 0$ dans E.

Une telle solution x est appelée vecteur propre associée à la valeur propre λ.

Exemple 1.5.2. L'opérateur « Shift » S définiront de l_2 vers l_2 n'est pas de valeur propre, en effet soit λ une valeur propre alors existe $(x_n)_n$ tel que $Sx_n = \lambda x_n$

d'où $(0, x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots)$.

- **a)** Si $\lambda = 0$ alors $x = 0$ impossible car il faut $x \neq 0$.
- **b)** Si $\lambda \neq 0$, aussi impossible .

Définition 1.5.3 (Point régulier)**.** Soit $T \in \mathscr{L}$(E) le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle un point régulier de l'opérateur T ; si $(T - \lambda I)^{-1}$est inversible.

Définition 1.5.4 (Ensemble résolvante)**.** On appelle ensemble résolvant de T l'ensemble des point réguliers de l'opérateur T et noté par $\rho(T)$

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \ inversible\}.$$

Exemple 1.5.5. L'ensemble résolvant d'opérateur identique I

$$\rho(I) = \{\lambda \in \mathbb{C}; I - \lambda I \; inversible\} = \mathbb{C} - \{1\}\,.$$

Définition 1.5.6 (La résolvant)**.** On définit la résolvant de T l'opérateur comme $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$.

Théorème 1.5.7. *([5]) Si $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\mid \lambda \mid > \|T\|$alors, λ est un point régulier de T.*

Démonstration. $T - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$, $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} R_\lambda &= (T - \lambda I)^{-1} \\ &= -\tfrac{1}{\lambda}(I - \tfrac{1}{\lambda}T)^{-1} \\ &= -\tfrac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{T^k}{\lambda^k}. \end{aligned}$$

Pour $\|T\| <\mid \lambda \mid$cette série est convergente et fournit un opérateur borné. □

Proposition 1.5.8. *([2]) Soit H un espace de Hilbert et.$T \in \mathcal{L}(H)$*

a) La résolvante est une application holomorphe de $\rho(T)$ dans $\mathcal{L}(H)$ et vérifie l'équation de la résolvante

$$\forall \lambda, \mu \in \rho(T); R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu.$$

b)

$$\forall \lambda, \mu \in \rho(T); R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda. \tag{1.5.1}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= R_\lambda(T - \mu I)R_\mu - R_\mu(T - \lambda I)R_\lambda \\ &= R_\lambda(TR_\mu - \mu R_\mu) - R_\mu(TR_\lambda - \lambda R_\lambda) \\ &= (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu \end{aligned}$$

De plus, par symétrie on a $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda$ au vu de l'équation de la résolvante, on en déduit que R_λ et R_μ commutent, ce qui démontre(1.4.1) □

Définition 1.5.9 (Spectre d'un opérateur)**.** On appelle spectre de T et on noté $\sigma(T)$ le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$ c'est-à-dire

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \; non \; inversible\},$$

1. $\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}$.

2. $\sigma(T) \cap \rho(T) = \emptyset$.
3. Si $\lambda \in \sigma(T)$ alors $|\lambda| \leq \|T\|$ c-à-d $\sigma(T) \subset \overline{B(0, \|T\|)}$.

Exemple 1.5.10. Soit $I : E \to E$,on cherche $\sigma(I)$ on a :

$$\sigma(I) = \{\lambda \in \mathbb{C} : I - \lambda I \text{ non inversible}\},$$

$$I - \lambda I = (1 - \lambda)I \text{ non inversible ssi } \lambda = 1 \text{ alors } \sigma(I) = \{1\}.$$

Proposition 1.5.11. *([2]) Soit $T \in \mathscr{L}(E)$, E espace de Banach le spectre de T n'est pas vide et fermé.*

Proposition 1.5.12. *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$(H espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$) . Alors*

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Démonstration. Si $\lambda \notin \sigma(T)$ D'où $T - \lambda I$ est inversible et $(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$ est inversible , donc $\overline{\lambda} \notin \sigma(T^*)$, on remplace T^*par T ,on obtient , si $\overline{\lambda} \notin \sigma(T^*)$ alors $\lambda \notin \sigma(T)$.

Donc

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\}$$

. □

Proposition 1.5.13. *[2] Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ et soit P un polynôme de degré n à coefficient complexes, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$, alors*

a) Le spectre de $P(T)$ est :$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$.
b) Si T est inversible $\sigma(T^{-1}) = (\sigma(T))^{-1} = \{\lambda^{-1}; \lambda \in \sigma(T)\}$.

1.5.1 Classification de spectre

Définition 1.5.14 (spectre ponctuel)**.** On appelle spectre ponctuel de T l'ensemble des valeurs propres de T noté $\sigma_P(T)$, tel que

$$\begin{aligned} \sigma_P(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ non injectif}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.5.15. On a toujours, $\sigma_P(T) \subset \sigma(T)$ mais si E est dimension finie, on en déduit $\sigma_P(T) = \sigma(T)$.

Exemple 1.5.16. Sur l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$, on considéré l'opérateur T de multiplication $Tf(x) = xf(x)$, on a $\|T\| = 1$, donc $\sigma_P(T) = \emptyset$ et $\sigma(T) = [0,1]$.

Définition 1.5.17 (spectre continu)**.** On appelle spectre continu de T et noté $\sigma_c(T)$ l'ensemble

$$\begin{aligned}\sigma_c(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \ injectif \ et \ R(T-\lambda I) \neq \overline{R(T-\lambda I)} = E\} \\ &= \{\lambda \in \sigma(T)/\sigma_P(T) : \ R(T-\lambda I) \neq \overline{R(T-\lambda I)} = E\}.\end{aligned}$$

Définition 1.5.18 (spectre résiduel)**.** On appelle spectre résiduel de T et noté $\sigma_r(T)$ l'ensemble

$$\begin{aligned}\sigma_r(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \quad injectif \quad et \quad \overline{R(T-\lambda I)} \neq E\} \\ &= \{\lambda \in \sigma(T)/\sigma_P(T) : \overline{R(T-\lambda I)} \neq E\}.\end{aligned}$$

Remarque 1.5.19.

$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Définition 1.5.20 (Rayon spectrale)**.** Soit $T \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on définit le rayon spectral de T comme suit

$$r(T) = sup\{\mid \lambda \mid, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Théorème 1.5.21. *([12]) Soit $T \in \mathscr{L}(E)$, alors on a*

1. La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe et elle est égale a $\inf\limits_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.
2. $r(T) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Corollaire 1.5.22. *On a $r(T) \leq \|T\|$.*

Chapitre 2

Les opérateurs normaux

Dans ce chapitre, nous allons apprendre des concepts importants dans la théorie des opérateurs, tels que l'opérateur auto-adjoint, normal, positif et isométrie ..., et nous allons examiner certaines de ses caractéristiques.

2.1 Quelques classes d'opérateurs

Définition 2.1.1 (l'opérateur auto-adjoint)**.** Un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ est dit auto-adjoint (ou parfois hermitien) s'il est égal à son adjoint, c'est-à-dire si, quels que soient x et y dans H

$$< Tx, y >=< x, Ty > .$$

Exemple 2.1.2. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, d'où :$T^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque $T = T^*$donc T est auto-adjoint.

Remarque 2.1.3. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathscr{L}(H)$. Les opérateurs $U = \frac{1}{2}(T + T^*)$ et $V = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ sont auto-adjoints et on a $T = U + iV$, L'opérateur U est appelé la partie réelle de T et l'opérateur$V$ est sa partie imaginaire.

Remarque 2.1.4. On remarque que si T est auto-adjoint, alors $V = 0$.

Théorème 2.1.5. *([2]) Si T est un opérateur auto-adjoint, alors*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |< Tx, x >| .$$

Proposition 2.1.6. *([13]) Si T et S deux opérateurs auto-adjoint, alors*

1. $\alpha T + \beta S$ est auto-adjoint pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. TS est auto-adjoint si et seulement si $TS = ST$.
3. Si T est un opérateur quelconque : alors T^*T, TT^* et $T + T^*$sont auto-adjoint .

Démonstration. On a : □

1. pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} < (\alpha T + \beta S)x, y > &=< \alpha Tx, y > + < \beta Sx, y > \\ &= \alpha < x, Ty > + \beta < x, Sy > \\ &=< x, (\alpha T + \beta S)y > . \end{aligned}$$

2. $< TSx, y >=< Sx, T^*y >=< x, S^*T^*y >=< x, (TS)^*y >$.
3. clair.

Proposition 2.1.7. *([2]) Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. Un élément T de $\mathscr{L}(H)$ est auto-adjoint si, et seulement si, pour tout x dans H, $< Tx, x >$ est un nombre réel.*

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} < Tx, x > &=< x, Tx > \\ &= \overline{< Tx, x >}. \end{aligned}$$

Donc $< Tx, x >\in \mathbb{R}$. □

2.1.1 Théorie spectrale d'opérateur auto-adjoint

Proposition 2.1.8. *[13] Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint , alors : $\sigma_P(T) \subset \mathbb{R}$ et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux .*

Démonstration. Soit λ une valeur propre de T, alors

$$\begin{aligned} < Tx, x > &= < \lambda x, x > \\ &= \lambda < x, x > \\ &= \lambda \|x\|^2, \end{aligned}$$

pour $x \neq 0$, on a $\lambda = \frac{<Tx,x>}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire $\sigma_P(T) \subset \mathbb{R}$.

D'autre part

Soit $\lambda^{'}$ une autre valeur propre de T et y une valeur propre associé, on a T est auto-adjoint, et pour tout $x, y \in H$,

$$\begin{array}{rcl} & < Tx, y > & = & < x, Ty > \\ < Tx, y >=< x, Ty >\Rightarrow & < \lambda x, y > & = & < x, \lambda^{'} y > \\ < \lambda x, y >=< x, \lambda^{'} y >\Rightarrow & \lambda < x, y > & = & \lambda^{'} < x, y > \\ \lambda < x, y >= \lambda^{'} < x, y >\Rightarrow & \left(\lambda - \lambda^{'}\right) < x, y > & = & 0, \end{array}$$

$\lambda \neq \lambda^{'}$d'où $< x, y >= 0$. □

Lemme 2.1.9. *([15]) Soit $T \in \mathscr{L}(H)$, alors $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_P(T^*)$.*

Théorème 2.1.10. *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ est auto-adjoint, alors :*

$$\begin{array}{cc} 1)\sigma_P(T) \subset \mathbb{R} & 2)\sigma_r(T) = \emptyset \\ 3)\sigma(T) \subset \mathbb{R} & 4)\sigma_c(T) \subset \mathbb{R} \end{array}.$$

Démonstration. On a □

1. voir le preuve de proposition précédente .
2. Si λ est complexe, l'équation

$$Tx - \lambda x = y.$$

A pour solution $x = R_\lambda(T)y$.

$< x, Tx >$ étant réel, la relation $< x, Tx > -\lambda\|x\|^2 =< x, y >$(Obtenue en multipliant par x les deux membres de l'équation) implique

$$\begin{array}{rcl} | \, Im\lambda \, | \, \|x\|^2 & = & | \, Im < x, y >| \\ & \leq & |< x, y >| \\ & \leq & \leq \|x\|\|y\|. \end{array}$$

Ou encore

$$\|x\| = \|R_\lambda(T)y\| \leq \frac{\|y\|}{| \, Im\lambda \, |}.$$

Ce qui montre que $R_\lambda(T)$ est borné si donc $Im\lambda \neq 0$, λ appartient à $\rho(T)$ ou $\sigma_r(T)$.

λ appartient en réalité à $\rho(T)$ car la relation

$$\overline{D_{R_\lambda(T)}} = \overline{R_{T-\lambda I}} = (Ker(T - \overline{\lambda} I))^\perp.$$

Puisque $\overline{R_T} = (KerT^*)^\perp$.

Montre que le domaine de l'opérateur $R_\lambda(T)$ est dense dans H, $\overline{\lambda}$ n'étant pas, par hypothèse, valeur propre de T, $Ker(T - \overline{\lambda} I) = \{0\}$.

3 et 4. La démonstration précédente a permis d'établir que si $Im\lambda \neq 0$ alors $\lambda \in \rho(T)$, On en déduit donc que le spectre de T est nécessairement réel .

2.1.2 L'opérateur positive

Définition 2.1.11. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ on dit que T est un opérateur positif et que l'on note $T \geq 0$, si T auto-adjoint et $< Tx, x > \geq 0, \forall x \in H$.

Corollaire 2.1.12. *$T \in \mathscr{L}(H)$ est positif si et seulement si : $< Tx, x > \geq 0, \forall x \in H$.*

Exemple 2.1.13. Soit T l'opérateur défini par

$$\begin{array}{rcl} T : L^2([0,1]) & \longrightarrow & L^2([0,1]) \\ f & \longmapsto & Tf(x) = xf(x), \end{array}$$

T est positif, car $\forall f \in L^2([0,1])$ on a

$$\begin{aligned} < Tf, f > &= \int_0^1 xf(x)\overline{f(x)}dx \\ &= \int_0^1 x \mid f(x) \mid^2 dx \geq 0 \end{aligned}.$$

Définition 2.1.14 (Comparaison des opérateurs)**.** Soient $T, S \in \mathscr{L}(H)$ on dit que $T \leq S$ si $S - T$ est un opérateur positif . Autrement dit :

$$< (S - T)x, x > \geq 0, \forall x \in H.$$

Théorème 2.1.15 (Théorème de Cauchy Schwarz générale)**.** *([2]) Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ est positif . alors*

$$|< Tx, y >|^2 \leq < Tx, x >< Ty, y >; \forall x, y \in H.$$

Démonstration. On a

$$< T(x + \lambda y), x + \lambda y > \geq 0; \forall x, y \in H; \forall \lambda \in \mathbb{C}$$
$$< Tx, x > + \overline{\lambda} < Tx, y > + \lambda \overline{< Tx, y >} + \lambda \overline{\lambda} < Ty, y > \geq 0$$

prenons $\lambda = -\frac{<Tx,y>}{<Ty,y>}$, on obtient. D'où

$$\begin{array}{c} < Tx, x > -\frac{|<Tx,y>|^2}{<Ty,y>} - \frac{|<Tx,y>|^2}{<Ty,y>} + \frac{|<Tx,y>|^2}{<Ty,y>} \geq 0 \\ < Tx, x > -\frac{|<Tx,y>|^2}{<Ty,y>} \geq 0. \end{array}$$

D'où le résultat. □

Définition 2.1.16 (Racine carrée d'un opérateur positif)**.** Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ est positif.

On dit que l'opérateur S est racine carrée de l'opérateur T. Si $S^2 = T$ ou encore $S = T^{\frac{1}{2}}$ (ou $S = \sqrt{T}$).

Définition 2.1.17 (Opérateur isométrie)**.** ([5]) On dit $T \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur isométrie (ou isométrique) si $T^*T = I$ ou bien ;

$$\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in H.$$

Exemple 2.1.18. L'opérateur de Shift

$$\begin{array}{ccc} S : l_2 & \longrightarrow & l_2 \\ (x_1, x_2, \ldots) & \longmapsto & (0, x_1, x_2, \ldots) \end{array}$$

est une isométrie .

Définition 2.1.19 (Opérateur unitaire)**.** On dit l'opérateur isométrique $T \in \mathscr{L}(H)$ est unitaire si $T^{-1} = T^*$.

Exemple 2.1.20. Soit

$$\begin{array}{ccc} T : L^2([0,1]) & \longrightarrow & L^2([0,1]) \\ f & \longmapsto & Tf(x) = f(1-x), \end{array}$$

T est unitaire, puisque :

toute d'abord, on détermine T^*, pour tout $f, g \in L^2([0,1])$, on a

$$< Tf, g >= \int_0^1 f(1-x)\overline{g(x)}dx.$$

On pose $y = 1 - x$ d'où $dy = -dx$ alors, on a trouve .

$$\begin{array}{rcl} < Tf, g > & = & \int_0^1 f(y)\overline{g(1-y)}dy \\ & = & < f, g(1-y) > \\ & = & < f, Tg > . \end{array}$$

D'où $T^*f = f(1-x) = Tf$.

On a

$$\begin{aligned} T^*Tf(x) &= T^*f(1-x) \\ &= f(1-(1-x)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} TT^*f(x) &= Tf(1-x) \\ &= f(1-(1-x)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc

$$T^*T = TT^* = I.$$

Exemple 2.1.21. L'opérateur Shift

$$\begin{array}{rcl} S : l_2 & \to & l_2 \\ (x_1, x_2, \ldots) & \mapsto & (0, x_1, x_2, \ldots) \end{array}$$

est isométrique mais n'est pas unitaire car il n'est pas surjectif .

Définition 2.1.22 (Opérateur projection)**.** Soit $P \in \mathscr{L}(H)$, on dit P est projection si

$$P^2 = P.$$

Corollaire 2.1.23. *Si P un opérateur de projection sur H, alors $I-P$ un opérateur de projection sur H.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} (I-P)^2 &= I - 2P + P^2 \\ &= I - 2P + P \\ &= I - P. \end{aligned}$$

□

Définition 2.1.24 (Opérateur projection orthogonale)**.** Soit $P \in \mathscr{L}(H)$,on dit P est projection orthogonale si

$$P^2 = P = P^*.$$

.

Exemple 2.1.25. Soit l'opérateur T définit par

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y, 0). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} T^2(x, y, z) &= T(T(x, y, z)) \\ &= T(x, y, 0) \\ &= (x, y, 0) \\ &= T(x, y, z). \end{aligned}$$

D'où $T^2 = T$ on vérifie $T^* = T$.

On pose $X = (x_1, y_1, z_1), Y = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\begin{aligned} < TX, Y > &= < T(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) > \\ &= < (x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, z_2) > \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 \\ &= < (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, 0) > \\ &= < X, T^*Y > . \end{aligned}$$

$T^*Y = (x_2, y_2, 0)$, c-à-d $T^* = T$ donc $P^2 = P = P^*$, alors T est projection orthogonale.

Définition 2.1.26 (Opérateur anti hermitien)**.** Un opérateur T sur un espace de Hilbert est dit anti-hermitien si $T^* = -T$.

Exemple 2.1.27. Soit $T = iI$ d'où $T^* = -iI$ donc $T^* = -T$ alors T est anti-hermitien.

2.2 Propriétés des opérateurs normaux

Définition 2.2.1. On dit $T \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur normal si T commute avec son adjoint $T^*T = TT^*$.

Remarque 2.2.2. On remarque que tous les classes des opérateurs que nous étudions précédemment sont opérateurs normaux sauf l'opérateur isométrie et projection .

Exemple 2.2.3. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ On a $T^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T^*T = TT^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc T est normal .

Proposition 2.2.4. *([3]) Soit $T \in \mathscr{L}(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. T est normal.
2. $\|Tx\| = \|T^*x\|, \forall x \in H$.
3. Dans le cas complexe, les parties réelles et imaginaires de T commutent .

Démonstration. 1.(1 $\Longleftrightarrow$ 2) pour tout $x \in H$ on a :

$\|Tx\| = \|T^*x\|$et $\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2$ alors

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 &= < Tx, Tx > - < T^*x, T^*x > \\ &= < x, (T^*T - TT^*)\, x >, \end{aligned}$$

car $T^*T - TT^*$est hermitien et théorème (1.3.16), $T^*T - TT^* = 0$ enfin $T^*T = TT^*$ c'est-à-dire T est normal.

2.(1 $\Longleftrightarrow$ 3) On pose $T = A + iB$ talque $A = Re(T)$ et $B = Im(T)$

$T^* = A - iB$, on a

$$\begin{array}{rcl} TT^* & = & A^2 - iAB + iBA + B^2 \\ T^*T & = & A^2 + iAB - iBA + B^2, \end{array}$$

et

$$TT^* - T^*T = 2i(BA - AB).$$

On remarque que T est normal si et seulement si $AB = BA$. □

Corollaire 2.2.5. *Si $T \in \mathscr{L}(H)$ est normal , alors $KerT = KerT^*$.*

Proposition 2.2.6. *([6]) Soit T est normal, on a*

1. L'opérateur αT est aussi normal pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
2. L'opérateur T^n est normal pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On a :

1-Nous avons $(aT)(aT)^* = a\overline{a}TT$ et $(aT)^*(aT) = \overline{a}aTT$. Puisque$T$ est normal, d'où ils sont égaux.

2-T est normal, d'où $TT^* = T^*T$

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & (TT^*)^n & = & (T^*T)^n \\ \Rightarrow & T^n(T^*)^n & = & (T^*)^n T^n \\ \Rightarrow & T^n(T^n)^* & = & (T^n)^* T^n. \end{array}$$

C'est - à-dire T^n est normal, pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Corollaire 2.2.7. *Soit P est polynôme et T est un opérateur normal. Alors $P(T)$ est aussi normal.*

Remarque 2.2.8. T^nnormal $\nRightarrow T$ normal.

Exemple 2.2.9. En effet, soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ On a $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$est normal, mais T n'est pas normal.

Proposition 2.2.10. *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ est normal, on a*

$$Ker(T) \oplus \overline{Im(T)} = H$$

Démonstration. On sait que :$Ker(T^*) = (ImT)^{\perp}$

d'où $(Ker(T)^*)^{\perp} = \left((ImT)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{(ImT)}$.

Donc

$$\begin{aligned} H &= KerT^* \oplus (KerT^*)^{\perp} \\ &= KerT \oplus \overline{(ImT)} \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.11 (Inverse d'un opérateur normal)**.** *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ est normal et inversible d'inverse T^{-1}. Alors T^{-1} est aussi normal.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} & (TT^*)^{-1} &=& (T^*T)^{-1} \\ \Rightarrow & (T^*)^{-1} T^{-1} &=& T^{-1} (T^*)^{-1} \\ \Rightarrow & \left(T^{-1}\right)^* T^{-1} &=& T^{-1} \left(T^{-1}\right)^* . \end{aligned}$$

Donc T^{-1} est un opérateur normal. □

Proposition 2.2.12. *([6]) Pour tout U unitaire. L'opérateur U^*TU est normal si et seulement si T est normal.*

Démonstration. On a

$$(U^*TU)^*(U^*TU) = U^*T^*TU,$$

et

$$(U^*TU)(U^*TU)^* = U^*TT^*U.$$

On remarque que $T^*T = TT^*$ si et seulement si U^*TU est normal. □

Proposition 2.2.13. *([6]) Soit$T \in \mathscr{L}(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Test normal.

2. $T^{-1}T^*($ ou $T^*T^{-1})$ est unitaire.
3. Il existe un opérateur unitaire$U$ tel que :$T^* = UT$.

Démonstration. Montrons que :

a -(1 $\Rightarrow$ 2) On a

$$\begin{array}{rcl}\left(T^{-1}T^*\right)\left(T^{-1}T^*\right)^* & = & T^{-1}T^*T(T^{-1})^* \\ & = & T^{-1}TT^*(T^*)^{-1} \\ & = & I \times I \\ & = & I\end{array},$$

et $\left(T^{-1}T^*\right)^*\left(T^{-1}T^*\right) = I$.

b -(2 $\Rightarrow$ 3) On pose $U = T^{-1}T^*$ d'où $T^* = TU = UT$.

c - 3 $\Rightarrow$ 1 Il existe U tel que $T^* = UT$, pour tout $x \in H$,on a

$$\begin{array}{rcl}\|T^*x\|^2 & = & \|UTx\|^2 \\ & = & < UTx, UTx > \\ & = & < Tx, U^*UTx > \\ & = & < Tx, Tx > \\ & = & \|Tx\|^2.\end{array}$$

Donc $\|T^*x\| = \|Tx\|, \forall x \in H$; alors T est normal . □

2.2.1 Théorie spectrale des opérateurs normaux

Proposition 2.2.14. *Soit* $T \in \mathscr{L}(H)$ *est normal, alors*

1. Si $Tx = \lambda x$, tel que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in H$. Alors, $T^*x = \overline{\lambda}x$.
2. Deux vecteurs propres de T associé à des valeurs propres distincts sont orthogonaux.

Démonstration. On a :

1- $Tx = \lambda x$, $(T - \lambda I)x = 0$, alors $x \in Ker\,(T - \lambda I)$ d'où $x \in Ker\left(T^* - \overline{\lambda}I\right)$ C-à-d $T^*x = \overline{\lambda}x$

2- Soit λ' autre valeur propre de T et y vecteur propre associé, on a

$$\begin{array}{rrcl} & <Tx, y> & = & <x, T^*y> \\ <Tx, y>=<x, T^*y>\Rightarrow & <\lambda x, y> & = & <x, \overline{\lambda'}y> \\ <\lambda x, y>=<x, \overline{\lambda'}y>\Rightarrow & \lambda <x, y> & = & \lambda' <x, y> \\ \lambda <x, y>=\lambda' <x, y>\Rightarrow & \left(\lambda-\lambda'\right) <x, y> & = & 0 \end{array},$$

$\lambda \neq \lambda$, d'où

$$<x, y>=0 \Rightarrow x \perp y.$$

□

Proposition 2.2.15. *Le rayon spectral d'un opérateur normal $T \in \mathscr{L}(H)$ vérifie*

$$r(T) = \|T\|.$$

Démonstration. On suppose d'abord que T est auto-adjoint.

On a $\|T^2\| = \|T\|^2$ et par récurrence sur n l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation

$$\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}.$$

Il vient

$$r(T) = \lim_{n\to+\infty} \|T^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|T\|.$$

On revient au cas normal, l'élément T^*T est auto-adjoint et il s'ensuit que l'on a

$$\begin{array}{rcl} r(T) & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\|T^n(T^n)^*\|^{\frac{1}{n}}} \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}}} \\ & = & \sqrt{r(TT^*)} \\ & = & \sqrt{\|TT^*\|} \\ & = & \|T\|. \end{array}$$

□

Proposition 2.2.16. *([5])Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

Dans le résultat suivant, nous présentons certaines caractérisation du spectre continu d'un opérateur normal borné.

Théorème 2.2.17. *([6]) Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ est normal, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lambda \in \sigma_c(T)$.
2. $\lambda \in \sigma(T)/\sigma_p(T)$.

3. $T - \lambda I$ est injectif, et l'image de $(T - \lambda I)(H)$ n'est pas fermée.

Démonstration. 1-($2 \Rightarrow 1$)On a $\lambda \in \sigma(T)/\sigma_p(T)$ et on a $\sigma_r(T) = \emptyset$

Alors $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ donc $\lambda \in \sigma_c(T)$.

2-($1 \Rightarrow 3$) est évidente à partir de la définition du spectre continu.

3- ($3 \Rightarrow 2$) on a $(T - \lambda I)$ est injectif, alors $\lambda \notin \sigma_p(T)$.

Supposons que $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors il existe un opérateur (inversible)$S \in \mathscr{L}(H)$ tel que

$$S(T - \lambda I)x = x; \forall x \in H.$$

En particulier nous avons,

$$\frac{1}{\|S\|}\|x\| \leq \|(T - \lambda I)x\|; \forall x \in H.$$

D'où $(T - \lambda I)(H)$ est complet et fermée dans H, qui est une contradiction. Nous concluons que $\lambda \in \sigma(T)/\sigma_p(T)$. □

Chapitre 3

La somme des deux opérateurs normaux

3.1 Les opérateurs non bornés

Définition 3.1.1 (L'opérateur linéaire non borné)**.** Un opérateur non borné sur un espace Hilbert H est couple $(T, D(T))$ où $D(T)$ est un sous espace vectoriel de H et T est un opérateur linéaire défini de $D(T)$ dans H, on dit que T est un opérateur non borné de domaine $D(T)$.

Exemple 3.1.2. Considérons l'opérateur $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, défini par

$$Tf(x) = xf(x),$$

l'opérateur T a pour domaine

$$D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); xf \in L^2(R)\},$$

est un opérateur non borné, appelé opérateur de multiplication par x.

Définition 3.1.3 (L'opérateur fermé)**.** On dit que l'opérateur T est fermé si pour toutes les suites $(x_n)_n$ de $D(T)$ convergente vers x et la suite des images $(Tx_n)_n$ convergente vers y dans H. Alors, $x \in D(T)$ et $y = Tx$.

Exemple 3.1.4. Soit T est un opérateur défini comme

$$D(T) \quad = \quad \left\{f \in L^2([0\,;1]), \frac{df}{dx} \in L^2([0\,;1]), f(0) = 0\right\},$$

et

$$Tf(x) = \frac{df}{dx}.$$

L'opérateur T est non borné, soit $f_n = t^n, n \in \mathbb{N}$ est on $D(T)$, et

$$\|f_n\| = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \leq 1.$$

Mais

$$\|Tf_n\| = \int_0^1 n^2 \; t^{2n-2} dt = \frac{n^2}{2n-1} \longrightarrow +\infty.$$

On a $kerT = \{0\}$et $ImT = L^2([0\,;1])$, soient $g \in L^2([0\,;1])$ et $f(t) = \int_0^t g(s)\,ds$ (Remarque que $L^2([0\,;1]) \subset L^1([0\,;1])$) , alors $f \in D(T)$ et $Tf = g$, on défini $T^{-1}g = f, g \in L^2([0\,;1])$

l'opérateur T^{-1}est borné sur $L^2([0\,;1])$ et $ImT^{-1} = D(T)$, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mid \left(T^{-1}g\right)(t) \mid \leq \int_0^1 \mid g(s) \mid ds \leq \left(\int_0^1 \mid g(s) \mid^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|,$$

et

$$\|T^{-1}g\|^2 = \int_0^1 \mid (T^{-1} \; g)(t) \mid^2 \; dt \leq \int_0^1 \|g\|^2 dt = \|g\|^2.$$

Par conséquent $\|T^{-1}\| \leq 1$, nous supposons

$$f_n \longrightarrow f, f_n \in D(T) \;\; et \; Tf_n \longrightarrow h \in L^2([0\,;1]).$$

Alors $f_n = T^{-1}Tf_n \longrightarrow T^{-1}h$, Par conséquent $f = T^{-1}h \in D(T)$et $Tf = h$.

Alors T est fermé.

Définition 3.1.5 (Adjoint d'un opérateur non borné)**.** Soit $(T, D(T))$ un opérateur non borné de domaine $D(T)$ dense dans H . On défini l'adjoint T^* de T par :

$$< Tx, y >=< x, T^* y >; \forall x \in D(T), \forall y \in D(T^*).$$

Définition 3.1.6 (Domaine de l'adjoint)**.** Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et soit $(T, D(T))$ un opérateur non borné de H_1 dans H_2 tel que $D(T)$ est un sous-espace dense dans H_2. On définit $D(T^*)$ comme suit

$$D(T^*) = \left\{y \in H_2 \text{ tel que } x \mapsto < Tx, y >_{H_2} \text{ est borné de } \left(D(T); \|\|_{H_1}\right) \text{ dans } \mathbb{C}\right\}.$$

3.2 Les opérateurs normaux non bornés

Définition 3.2.1 (Opérateur normal non borné)**.** Soit T un opérateur non borné de domaine $D(T)$ dense dans H.

On dit que T est un opérateur normal si, T est fermé et $TT^* = T^*T$.

Proposition 3.2.2. *([6]) Si T est un opérateur normal.*

Alors

$$D(T) = D(T^*); \|Tx\| = \|T^*x\|.$$

Démonstration. Si $h \in D(T^*T) = D(TT^*)$, alors $Th \in D(T^*)$ et $T^*h \in D(T)$.

On a

$$\begin{aligned} \|Th\|^2 &= < T^*Th, h > \\ &= < TT^*h, h > \\ &= \|T^*h\|^2. \end{aligned}$$

Si $h \in D(T)$ d'où, il existe une suite $(h_n) \in D(T^*T)$ tel que

$$< h_n, Th_n > \rightarrow < h, Th >,$$

donc

$$\|Th_n - Th\| \rightarrow 0.$$

On a alors,

$$\|T^*h_n - T^*h_m\| = \|Th_n - Th_m\|.$$

D'où, il existe $g \in H$ tel que $T^*h_n \rightarrow g$.

Alors

$$< h_n, T^* h_n > \longrightarrow < h, g > .$$

Mais T^* est fermé. Alors $h \in D(T^*)$ et $g = T^* h$.

Donc, $D(T) \subseteq D(T^*)$ et $\|Th\| = \lim\limits_{n \to +\infty} \|T^* h_n\| = \|T^* h\|$. □

3.3 Somme de deux opérateurs normaux

Définition 3.3.1. ([10]) un opérateur S est $T-$borné pour certains $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\forall f \in D(T) ; \|Sf\| \le a\|Tf\| + b\|f\|$$

et si $D(T) \subset D(S)$ L'infiniment de tout a tel est appelé la limite relative .

Définition 3.3.2. ([11]) H est un espace de Hilbert et $(T, D(T))$ est un opérateur non borné, Si $\overline{D(T)} = H$ on dit T est défini par densité .

Théorème 3.3.3. *([10]) Soit T un opérateur non borné*

1. $(T + S)^* = T^* + S^*$ si S est borné.
2. $T + S$ est fermé si T est supposé être fermé et si S est borné.
3. $(ST)^* = T^* S^*$ si S est borné .
4. $T^* S^* \subset (ST)^*$ pour tout S non borné et si ST est défini par densité .

Théorème 3.3.4 (Hess-Kato)**.** *([8]) Soient T et S deux opérateurs définis dans espace de Banach , tels que S est $T-$borné et S^*est T^*-borné avec les deux limites relative plus petites qu'un , ensuite $T + S$ est fermé et $(T + S)^* = T^* + S^*$.*

Théorème 3.3.5. *([3]) Si T est un opérateur auto-adjoint non borné et S est un opérateur auto-adjoint borné, alors $T + S$ est un opérateur auto-adjoint .*

Démonstration. Après le théorème (3.3.3)

$(T + S)^* = T^* + S^*$ et T, S sont auto-adjoint, alors

$$(T + S)^* = T + S.$$

□

Théorème 3.3.6 (Hess-kato résultat)**.** *([14]) Si S est $T-$borné avec un limite relatif $a < 1$. Si S est un opérateur symétrique et si T est un opérateur auto-adjoint, alors $T + S$ est un opérateur auto-adjoint dans $D(T)$.*

3.3.1 Le cas borné

Tous les opérateurs considérés dans cette sous-section sont supposés être bornés. Tout d'abord, nous notons que la somme de deux opérateurs normaux n'est pas toujours normale comme indiqué dans.

Exemple 3.3.7. Soient T et S deux matrices

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tel que

$$T \cdot T^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T^*T.$$

Alors T est normal .

Et $S^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors S est auto-adjoint En conséquence normal .

Mais $T + S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas normal.

Proposition 3.3.8. *([11]) Soient T, S deux opérateur normaux, si T commute avec S^*, alors $T + S$ est normal.*

Démonstration. On a

$$(T + S)^* (T + S) = (T^* + S^*) (T + S) = T^*T + T^*S + S^*T + S^*S,$$

et

$$(T + S) (T + S)^* = TT^* + TS^* + ST^* + SS^*.$$

Puisque $TS^* = S^*T, ST^* = T^*S$ et la normalité de T, S, alors

$$(T + S)^* (T + S) = (T + S) (T + S)^*,$$

en conséquence $T + S$ est normal . □

Théorème 3.3.9 (Fuglede - 1950)**.** *([6]) Soient T et S deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H, tels que $TS = ST$ où S est normal. Alors*

$$TS^* = S^*T.$$

Remarque 3.3.10. En utilisant le théorème de Fuglede on peut remplacer la commutativité de T et S^* (dans la proposition précédente) par celle de T et S.

Remarque 3.3.11. L'inverse de la proposition précédente n'est pas toujours vrai .

Corollaire 3.3.12. *Si T, S sont deux opérateurs auto-adjoints commutant, alors $T + iS$ $\left(i^2 = -1\right)$ est normal .*

Démonstration. depuis S est auto-adjoint

$$(iS)^* \, (iS) = S^* \, (-i) \, iS = S^2 = (iS) \, (iS)^* \, .$$

Alors iS est normal et d'où la proposition précédente s'applique. □

Proposition 3.3.13. *([6]) Soient T et S deux opérateurs normaux bornés. Si TS^* et S^*T sont auto-adjoints.*

Alors, la normalité de $T + S$ implique que la commutativité de T et S.

Démonstration. Puisque T, S et $T + S$ sont normaux, on trouve

$$T^*S + S^*T = ST^* + TS^*. \tag{3.3.1}$$

Comme TS^* et S^*T sont auto-adjoints.

Alors, $(TS^*)^* = ST^* = TS^*$ et $(S^*T)^* = T^*S = S^*T$ par (3.3.1) on obtient

$$S^*T = TS^*.$$

D'après le théorème de Fuglede.

Alors, on a

$$TS = ST.$$

□

3.3.2 Le cas non borné

En général, la somme de deux opérateurs normaux non bornés n'est pas necessurment d'être normale. Considérer l'exemple suivant

Exemple 3.3.14. Considérons T et S définis comme

$$Tf(x) = f'(x) \ \ et \ Sf(x) = -f'(x) \ \ etD(T) = D(S) = H^1(\mathbb{R}).$$

où $H^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$ est l'espace Sobolev. Alors évidemment T et S sont tous deux normaux. Cependant $T + S = 0$ n'est pas normal car il est défini sur $H^1(\mathbb{R})$.

Remarque 3.3.15. Observez que $TS = ST$ dans l'exemple précédent, mais la validité de cette la condition de commutativité n'est pas suffisante pour la normalité de $T+S$.

Remarque 3.3.16. La multiplication de T (et donc S) par $i(i^2 = -1)$ montre que

$$T, S \ auto - adjoint \nRightarrow T + S \ normal.$$

Lemme 3.3.17. *([11])Soit T un opérateur normal non borné avec le domaine $D(T)$. Soit S un opérateur borné défini sur un espace de Hilbert H . Si*

$$S^*T \subset TS^*.$$

Alors

1. $D(T^*(T + S)) = D(T^*T) \cap D(T^*S)$.
2. $D(T(T^* + S^*)) = D(TT^*) \cap D(TS^*)$.

Démonstration. On a

1-Nous avons $S^*T \subset TS^*$. Cela nous donne $D(T) \subset D(TS^*)$. Cela implique également Suivant

$$ST^* \subset (TS^*)^* \subset (S^*T)^* = T^*S.$$

Alors $D(T^*) \subset D(T^*S)$ par la normalité de$T$, nous savons que

$$D(T) = D(T^*).$$

Et

$$D(TT^*) = D(T^*T).$$

On a

$$D(T^*(T + S)) = \{f \in D(T) : Tf + Sf \in D(T^*)\} = D(T^*T).$$

Et

$$D(T^*T) \subset D(T) = D(T^*) \subset D(T^*S).$$

Alors $D(T^*(T+S)) = D(T^*T) \cap D(T^*S)$.

2-Nous avons

$$D\left(T\left(T^* + S^*\right)\right) = \{f \in D(T^*) : T^*f + S^*f \in D(T)\} = D(TT^*).$$

Et

$$D(TT^*) \subset D(T^*) = D(T) \subset D(TS^*).$$

Alors $D(T(T^* + S^*)) = D(TT^*) \cap D(TS^*)$. □

Théorème 3.3.18. *([11])Soit T un opérateur normal non borné avec le domaine $D(T)$. Soit S un opérateur normal borné. Supposons en outre que $S^*T \subset TS^*$. Alors $T+S$ est normal sur $D(T)$.*

Démonstration. Montrons que $T+S$ est normal. Notons d'abord que la fermeture de $T+S$ suit du théorème 3.3.3

Maintenant que S est borné $(T+S)^* = T^* + S^*$ et donc

$$(T+S)^*(T+S) = (T^*+S^*)(T+S) = T^*(T+S) + S^*(T+S).$$

Lemme(3.3.17) implique $T^*(T+S) = T^*T + T^*S$.

Aussi puisque S est borné $S^*(T+S) = S^*T + S^*S$, Ainsi

$$(T+S)^*(T+S) = T^*T + T^*S + S^*T + S^*S.$$

De même

$$(T+S)(T+S)^* = TT^* + TS^* + ST^* + SS^*.$$

Maintenant, soit$f \in D(T^*T) = D(TT^*)$. Nous avons ensuite

$$\begin{array}{rcccl} \|(T+S)f\|^2 & = & <(T+S)f,(T+S)f> & = & <f,(T+S)^*(T+S)f> \\ & & & = & <f,(T^*T+T^*S+S^*T+S^*S)f> \\ & & & = & <f,(TT^*+TS^*+ST^*+SS^*)f> \\ & & & = & <f,(T+S)(T+S)^*f> \\ & & & = & <(T+S)^*f,(T+S)^*f> \\ & & & = & \|(T+S)^*f\|^2 \end{array}.$$

Mais $D(T^*T)$ est un noyau pour T ([8]) et pour T^*et donc il est aussi un noyau pour $T + S$ et pour $(T + S)^*$. Ainsi $T + S$est normal. □

Théorème 3.3.19 (Fuglede - le cas non borné). *([6]) Soient T, S deux opérateurs normaux non bornés, et soit A un opérateur borné sur un espace de Hilbert H .*

Si

$$AS \subseteq TA.$$

Alors

$$AS^* \subseteq T^*A.$$

Remarque 3.3.20. Ayant supposé $ST \subset TS$ (au lieu de $S^*T \subset TS^*$) a donné la même conclusion. Ceci est une simple application de la version non bornée du théorème de Fuglede.

Remarque 3.3.21. L'inverse du théorème précédent n'est pas toujours vrai. Prenez Tet S pour être deux opérateurs auto-adjoints (S bornés). Alors $T+S$ est auto-adjoint donc normal et nous pouvons facilement choisir une paire de T et S tel que $ST \not\subset TS$.

L'exemple suivant montre que la condition $S^*T \subset TS^*$ ne peut pas être complètement éliminé.

Exemple 3.3.22. Considérons les deux opérateurs T et S définis comme

$$Tf(x) = xf'(x) \ \ et \ \ Sf(x) = e^{ix}f(x).$$

Sur

$$D(T) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : xf' \in L^2(\mathbb{R}) \right\} \ \ et \ \ D(S) = L^2(\mathbb{R}).$$

Il est connu que T est normal. Aussi S est un opérateur normal borné sur $L^2(R)$. Nous pouvons facilement vérifier que $S^*T \not\subset TS^*$. Considérons $N = T + S$ qui est défini par

$$Nf(x) = xf'(x) + e^{ix}f(x),$$

pour tout $f \in D(T)$. Maintenant, les calculs directs montrent que $NN^* \neq N^*N$ et donc N est ne pas normal. Ceci montre la nécessité de l'hypothèse $S^*T \subset TS^*$.

Corollaire 3.3.23. *Soit T un opérateur auto-adjoint non borné avec le domaine $D(T)$. Laissez S est un opérateur auto-adjoint borné. Si $ST \subset TS$, alors $N = T + iS$ est normal .*

Lemme 3.3.24. *([11]) Soient T, S deux opérateurs normaux non bornés tels que $D(T) \subset D(S)$, $ST^* \subset T^*S$ et $S^*T \subset TS^*$, Si $D(T) \subset D(ST^*)$ et $D(T) \subset D(S^*T)$ alors*

1. $T^*(T+S) = T^*T + T^*S$ et $S^*(T+S) = S^*T + S^*S$.
2. $T(T^* + S^*) = TT^* + TS^*$ et $S(T^* + S^*) = ST^* + SS^*$.

Démonstration. par $D(T) \subset D(ST^*) \subset D(T^*S)$ nous avons :

1-a

$$D(T^*(T+S)) = \{f \in D(T) : Tf + Sf \in D(T^*)\} = D(T^*T).$$

Et

$$D(T^*T) \subset D(T) \subset D(ST^*) \subset D(T^*S).$$

Alors

$$T^*(T+S) = T^*T + T^*S.$$

1-b

$$D(S^*(T+S)) = \{f \in D(T) : Tf + Sf \in D(S^*)\} = D(S^*T).$$

Et

$$D(S^*T) \subset D(T) \subset D(ST^*) \subset D(T^*S) \subset D(S^*S).$$

Alors

$$S^*(T+S) = S^*T + S^*S.$$

- La deuxième assertion est prouvée dans de la même manière. □

Théorème 3.3.25. *([11]) Soient T et S deux opérateurs normaux non bornés tels que S est $T-$borné avec une limite relative inférieure à un. Supposons que $ST^* \subset T^*S$ et $S^*T \subset TS^*$. Supposons en outre que $D(T) \subset D(ST^*)$ et que $D(T) \subset D(S^*T)$, alors $T + S$ est normal sur $D(T)$.*

Démonstration. puisque T et S sont normaux, S étant $T-$borné est équivalent à S^* étant T^*-borné avec la même limite relative. Le théorème de Hess-Kato nous dit alors que $T + S$ est fermé et que $(T + S)^* = T^* + S^*$. Depuis $D(T) \subset D(ST^*)$ et $D(T) \subset D(S^*T)$, procédant comme dans la preuve du théorème (3.3.18)(ou comme dans la remarque juste en dessous la preuve du théorème (3.3.18) et en utilisant le lemme (3.3.24à nous permettent d'établir la normalité de $T + S$. □

Théorème 3.3.26 (Kato–Rellich)**.** *([8]) Soit T un opérateur auto-adjoint. Si S est symétrique et $T-$borné avec une limite relative inférieure à un , alors $T + S$ est aussi auto-adjoint .*

Remarque 3.3.27. l'inverse du théorème précédent n'est pas vrai. Prendre deux opérateurs auto-adjoints T et S non bornés tel que S est $T-$borné avec une limite relative inférieure à un . Alors le théorème de Kato-Rellich établit le auto-adjointes (et donc la normalité) de $T+S$ et il peut facilement arriver que $ST \not\subset TS$.

Remarque 3.3.28. Inutile de dire que la limite relative ne peut pas être prise pour être un (la forme "$T=-S$" nous dit pourquoi).

Remarque 3.3.29. Il y a un nombre infini de paires d'opérateurs normaux non bornés satisfaisant les hypothèses du théorème(3.3.25) (pas de façon inattendue cependant). Un exemple facile de cela consiste à prendre S comme opérateur auto-adjoint non borné avec le domaine $D(S)$ et prenez $T=2S$, disons. Alors S est $T-$borné avec la limite relative $\frac{1}{2}$ et il est clair que $TS=ST$.

Nous donnons maintenant un exemple montrant que les conditions $ST^* \subset T^*S$ et $S^*T \subset TS^*$ ne pevent pas être simplement abandonnées. Nous avons d'abord besoin d'un opérateur relativement borné. Il y a beaucoup de des exemples de tels opérateurs.

Voici l'exemple.

Exemple 3.3.30. Considérez les opérateurs.

$$T=-\frac{d^2}{dx^2} \ et \ S=iV$$

où V est une valeur réelle et appartient à $L^2(\mathbb{R})$ (on peut aussi supposer que Vest C^2), on l'espace de Sobolev

$$D(T)=H^2=\left\{f\in L^2(\mathbb{R}):f''\in L^2(\mathbb{R})\right\}$$

$$D(S)=\left\{f\in L^2(\mathbb{R}):Vf\in L^2(\mathbb{R})\right\}$$

respectivement. Évidemment T est normal (c'est auto-adjoint) et il en est de même S. Il est également bien connu (voir par exemple [[14]]) que S est lié à T avec un arbitraire lié relatif.

Définir $N=T+S$. Nous avons pour tout $f\in D(N)=D(T)$

$$Nf(x)=-f''(x)+iV(x)f(x)$$

Et en appliquant le théorème de Hess-Kato, alors

$$N^*f(x)=-f''(x)-iV(x)f(x)$$

Maintenant, les calculs simples montrent que $ST \not\subset TS$ et $S^*T \not\subset TS^*$. Faire plus calculs faciles nous donne

$$NN^*f(x) = f^{(4)}(x) + iV''(x)f(x) + 2iV'(x)f'(x) + V^2(x)f(x)$$

Et

$$N^*Nf(x) = f^{(4)}(x) - iV''(x)f(x) - 2iV'(x)f'(x) + V^2(x)f(x)$$

Pour tout $f \in D(A^2)$. Donc N n'est pas normal sur $D(T)$.

Corollaire 3.3.31. *Soient T et S deux opérateurs auto-adjoints non bornés avec des domaines $D(T)$ et $D(S)$ respectivement et tel que $D(T) \subset D(ST)$. Supposons aussi que $ST \subset TS$. Si S est$T-$borné avec une borne relative inférieure à un, alors $T + iS$ est normal .*

Bibliographie

[1] N.Boccara, Analyse fonctionnelle, Ellipses-Paris, 1984.

[2] H.Chebli, Analyse hilbertienne, C.P.U, Tunisie .

[3] J. A .Conway, A course in functional analysis, Springer-New York, 1985 .

[4] E.B. Davies, Linear operators and their spect, Cambridge -New York, 2007 .

[5] I.Gohberg, S.Goldberg, M.A.Kaashole, Basic classes of linear operatore, Birkhänser-Basel , 2003.

[6] M. Guesba, Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, Thèse de doctorat, Université de Msila, 2017.

[7] A.Guillaune , Cours Théorie des Opérateur , Université de la Réunion .

[8] H. P. Kato , T. Perturbation of closed operators and their adjoints. Comment.Math. Helv. 45, 524– 529 (1970) .

[9] A.Kolmogorov, S. Fomine, Elements de la theorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir-Moscou, 1973(2^eedition).

[10] R.Meise , D. Vogt, Introduction to functional analysis, Oxford university press, 1997(vol 2) .

[11] M.H. Mortad , On the Normality of the sum of two normal operators, Complex analysis and operator theory, 6 (2012) ,105–112.

[12] W. Rudin, Functional analysis, Mcgraw-hill bouk company-New York, 1973 .

[13] R.Sen, A first course in functional analysis theory and application, Anthem press-london, 2013.

[14] R,M. Simon , B, Methods of modern mathematical physics. In : Fourier Analysis, Self-Adjointness, vol. 2. Academic Press (1975)

[15] A .E.Taylor, Introduction To functional analysis, John wiley & sons-New York , 1985 .

Résumé

Ce mémoire contient une etude la somme des opérateurs normaux. Cette étude se compose en trois chapitres. Le premier chapitre contient des concepts et des théories spécifiques aux opérateurs linéaires qui seront utilisés dans le mimoire. Le deuxième chapitre est divisé en deux sections. Dans la première section à certains types d'opérateurs normaux tels que l'opérateur auto-adjoint , l'opérateur positif, l'opérateur unitaire. le deuxième section nous avons traité les propriétés de l'opérateur normal . Le troisième chapitre contient deux sections, où le premier section parle de l'opérateur non borné . Enfin, dans la deuxième section on étudie la normalité de somme deux opérateurs normaux .

Mots-Clés : L'opérateur non borné, L'opérateur normal, La somme des opérateur, Théorème de Fuglede, Théorème de Hess-kato .

Abstract

This memory contains a study of the sum of normal operators. This study is divided into three chapters, The first chapter contains concepts and theories specific to linear operators that used in the mimicry, The second chapter is divided into two sections, In the first section to some types of normal operators such as the self-adjoint operator, the positive operator, the unitary operator, the second section we treated the properties of the normal operator, The third chapter contains two sections, in the first section we presented the unbounded operator, Finally, we study the normality of sum two normal operators.

keywords : The unbounded operator, The normal operator, The sum of the operators, Fuglede's theorem, The Hess-kato theorem.

مـــلـخص

تناولنا في هذه المذكرة دراسة مجموع مؤثرين ناظميين, تتضمن المذكرة ثلاثة فصول الفصل الأول يحتوي على أهم المفاهيم والخصائص التي سوف نستخدمها في كامل المذكرة , أما الفصل الثاني فقد قسمناه الى قسمين حيث يتناول القسم الأول بعض أنواع المؤثرات مثل مؤثر القرين لنفسه, المؤثر الموجب, المؤثر الوحدوي. بينما القسم الثاني يتضمن خصائص المؤثر الناظمي, أما الفصل الثالث يحتوي على قسمين, القسم الأول قدمنا المؤثرات غير المحدودة, وفي الختام درسنا ناظمية مجموع مؤثرين ناظميين .

الكلمات المفتاحية : المؤثر غير المحدود, المؤثر الناظمي , مجموع مؤثرين , نظرية Fuglede , نظرية Hess-kato .