



N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMALAKHDAR ELOUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**L'étude des certains problèmes aux limites des
équations différentielles fractionnaires**

Présenté par: Boulaares khaoula

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président	Mr.Said beloule	MCA	Univ. El Oued
Examineur	Mrs.Meftah safia	MCA	Univ. El Oued
Encadreur	Mr.Adel aissaoui	MCA	Univ. El Oued

Dédicaces

Je dédie cette mémoire...

A ma très chère mère

Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

Ta as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.

Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour.

Puisse Dieu,le tout puissant ,te préserver et t'accorder santé ,longue vie et bonheur.

Cher à mon père

Aucune dédicace ne saurait exprime l'amour ,l'estime ,le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.

Rien au monde ne vaut les efforts fr-mis jou et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A mes frères "Said, Tarek, Hamza, Haithem"

A mes soeurs " Chaima, Sara "

A tous les membres de famille Boulaares, petite et grands.

Remerciements

*Nous aimerions en premier lieu remercier notre dieu "**Allah**" qui nous avoir donnée la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.*

*Nous exprimons nos reconnaissance à notre directeur de mémoire, le professeur **AISSAOUI Adel**, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche dès le début à la fin de ce travail.*

Nous adressons un grand merci à toute nos familles en particulier nos parents qui a toujours été présente lorsque nous en avons eu besoin, nos professeurs dès la primaire jusqu'à l'université, nos amies, nos proches.

En fin, nous remercions tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Notations générales

$\mathbb{R}$	: ensemble des nombres réels,
$\mathbb{R}_+$	: ensemble des nombres réels positifs ou nuls,
$\mathbb{R}^*$	: ensemble des nombres réels Sauf pour zéro,
$\mathbb{N}$	: ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{Z}$	: ensemble des nombres entiers.
$[a, b)$	: intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b.
$AC([a, b])$	: l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.
$C(X)$	: l'espace des fonctions continues .
$c_0(\mathbb{Z}^N)$	: l'espace des suites tendant vers 0 à l'infini .
$l^\infty(\mathbb{Z}^N)$	: l'espace des suites multiples bornées.
$ \cdot $	: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\Gamma(\cdot)$	: fonction Gamma d'Euler.
$\beta(\cdot, \cdot)$	: fonction Beta d'Euler.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: le produit scalaire.
$\ker(\cdot)$	: le noyau.
$I^\alpha f(x)$	: intégration d'ordre α .
${}^c D^\alpha f(x)$	: dérivation d'ordre α selon la définition de Caputo.
$e.v.n$	: espace vectoriel normé.
$s.e.v$	: sous-espace vectoriel .

$diam(A)$: diamètre d'une partie bornée A .
 $conv(A)$: l'enveloppe convexe de l'ensemble A .
 $\overline{conv}(A)$: l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble A .
 $\mathcal{P}$: Un pavé est un produit d'intervalles bornés.
 $\|\cdot\|_X$: la norme sur l'espace X .
 $mes(\cdot)$: la mesure de Lebesgue.
 $[\alpha]$: partie entière de α .
 $Re(z)$: la partie réelle d'un nombre complexe z .
 $f^{(n)}$: dérivée de f d'ordre n .
 c : une constante générique strictement positive .
 $\mathcal{A}$: la famille de tous les sous-ensembles bornés de E .
 R : une constante générique strictement positive .
 N : une constante naturelle strictement positive .
 $\mathcal{M}$: ensemble borné non vide.
 $\mathcal{N}$: sous famille qui consiste les ensemble relativement compact.
 $i.e$: c'est à dire.
 $p.p$: presque partout .
 MNC : la mesure de non compacité

Table des figures

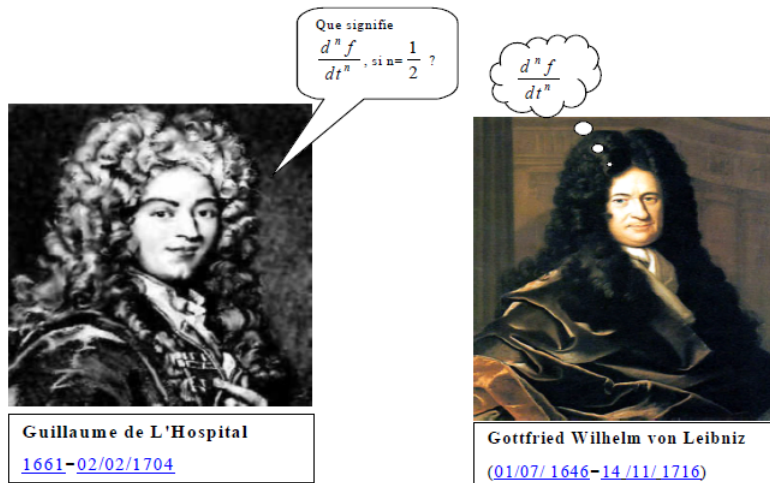
1.1	figure de f_n	9
1.2	Courbe représentative de la fonction gamma	18
1.3	Variations de la fonction Bêta pour les valeurs positives de x et y	20

Table des matières

Introduction générale	1
1 Préliminaires	4
1.1 Espaces fonctionnels	4
1.1.1 Espaces métriques	4
1.1.2 Espaces de Banach	6
1.1.3 Espace des fonctions continues	8
1.1.4 Fonctions absolument continues	10
1.1.5 Espaces L^p	10
1.1.6 Mesure de non compacité	11
1.1.7 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$	13
1.1.8 Théorème de la convergence dominée	14
1.2 Théorème du point fixe	14
1.2.1 Théorème du point fixe de Banach	14
1.2.2 Théorème du point fixe de Mönch	16
1.2.3 Théorème du point fixe de Brouwer	16
1.2.4 Théorème du point fixe de Schauder	17
1.2.5 Théorème du point fixe de Schaefer	17
1.2.6 Théorème d'Arzela-Ascoli	17
1.3 Calcul fractionnaire	18
1.3.1 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire	18
1.3.2 Dérivation fractionnaire de Caputo	21
2 Problème aux limites pour des équations fractionnaires	27
2.1 Existence des solutions	27
2.2 Exemples	33
3 Problème aux limites avec des conditions intégrales	50
3.1 Existence des Solutions	50
3.2 Exemples	60

Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle, l'époque où **Newton** et **Leibniz** ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigne la $n^{\text{ème}}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :



Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Une liste de mathématiciens qui ont fournit des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20^{ème} siècle, inclut :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832- 1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erdélyi (1939- 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M.

Riesz (1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de **New Haven** en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B.Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commenté en 1968.

Une autre théorie se développe en parallèle de la dérivation fractionnaire telle est **la théorie des équations différentielles fractionnaires** qui a de nombreuses applications dans la description de nombreux événements dans le monde réel.

D'autre part, au cours des dernières années, de nombreux articles ont été consacrés à la notion de mesure de non-compactité. Les articles les plus explicatifs sur ce sujet. La notion de mesure de non-compactité a été définie de plusieurs façons. Où les mesures de non-compactité se sont également avérées très utiles en théorie des points fixes métriques, donnant des résultats d'existence ou de stabilité pour des applications non expansives et uniformément lipschitziennes basées sur certains coefficients définis en termes de telles mesures.

Dans la théorie du point fixe, un rôle important est joué par le concept de mesure de non-compactité. Ce concept a été initié par l'article fondamental de Kuratowski [12]. En 1955, G. Darbo, en utilisant le concept d'une mesure de non-compactité, a prouvé un théorème garantissant l'existence de points fixes des opérateurs condensantes [13]. Ce théorème a trouvé une abondance d'applications pour prouver l'existence des solutions pour une large classe d'équations différentielles et intégrales.

Le manuscrit se compose de trois chapitres que nous décrivons brièvement.

Dans le **premier chapitre** intitulé "Preliminaires", on commence par définir espaces fonctionnels (espaces métriques, espaces de Banach, espace des fonctions continues, fonctions absolument continues, espaces L^p , mesure de non compactité, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et théorème de la convergence dominée), quelques les théorèmes du point fixe (Banach, Mönch, Brouwer, Schauder, Schaefer et Arzela-Ascoli) et calcul fractionnaire (quelque fonctions importantes dans le calcul fractionnaire et dérivation fractionnaire de Caputo).

Le deuxième chapitre a pour but l'étude des problèmes fractionnaires suivants :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T], & 1 < \alpha < 2, \\ y(0) &= y_0, \\ y(T) &= y_T. \end{cases}$$

où f est une fonction donnée et ${}^c D^\alpha$ est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in]1, 2[$

On s'intéresse particulièrement à l'étude de l'existence de solutions à la base du théorème de point fixe de Mönch avec la mesure de non compacité de Kuratowski.

Nous avons fait des quelques applications " cos, sin, cosh, sinh ".

Le troisième chapitre où on va traiter le problème fractionnaire avec conditions intégrales suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) &= f(t, y(t)), & t \in [0, T], & 1 < \alpha < 2, \\ y(0) - y'(0) &= \int_0^T g(s, y(s)) ds, \\ y(T) + y'(T) &= \int_0^T h(s, y(s)) ds, \end{cases}$$

On étudie l'existence de solutions en utilisant l'approche de point fixe via le théorème de Mönch et la mesure de non compacité de Kuratowski.

Et quelques applications " cos, sin ".

Enfin, le mémoire sera clôturé par une Bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces métriques

Distance

On dispose sur $\mathbb{R}$ de la distance usuelle

$$\begin{aligned}d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\(x, y) &\rightarrow d(x, y) = |x - y|.\end{aligned}$$

On l'utilise pour définir la convergence des suites et la continuité des fonctions. Le but ici est de généraliser cette notion.

Définition 1.1.1 *Une distance sur un ensemble X est une application*

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

telle que

- (a) $\forall x \in X, \forall y \in X, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (b) $\forall x \in X, \forall y \in X, \quad d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
- (c) $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Exemple 1.1.1 *Claire que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $d(x, y) = |x - y|$.*

Exemple 1.1.2 *Étant donné un espace métrique (X, d) :
distance produit sur $X \times X$, définie par*

$$\delta((x, y), (x', y')) = \max(d(x, x'), d(y, y')).$$

Exemple 1.1.3 *La distance induite sur un sous-ensemble.*

Exemple 1.1.4 *La distance triviale (ou discrète) :*

$$\forall x \neq y, d(x, y) = 1$$

Proposition 1.1.1 *(seconde inégalité triangulaire).*

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

Proposition 1.1.2 *Dans un espace métrique (X, d) , on appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble :*

$$B(a, r) = \{x \in X, d(a, x) < r\}, \quad (\text{resp. } B_f(a, r) = \{x \in X, d(a, x) \leq r\})$$

Définition 1.1.2 *Un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d) est borné si et seulement s'il est contenu dans une boule :*

$$\exists a \in X, \exists r > 0 / A \subset B_f(a, r).$$

Une application à valeur dans un espace métrique est bornée si et seulement si son image est bornée.

Définition 1.1.3 *On appelle diamètre d'une partie bornée A d'un espace métrique (X, d) , le nombre*

$$\text{diam}(A) = \sup_{(x, y) \in A \times A} d(x, y)$$

Exemple 1.1.5 *Distance associée à une norme sur un espace vectoriel réel ou complexe.*

Limite et continuité

Définition 1.1.4 *Soient (X, d) un espace métrique et $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite dans X . La suite u converge vers $l \in X$ si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, l) < \epsilon.$$

Définition 1.1.5 *Soient (X, d) un espace métrique et $u = (u_n)_{n \geq 0}$ une suite dans X . La suite u est de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, d(u_n, u_m) < \epsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.1.6 *Un espace métrique est complet si et seulement si toute suite de Cauchy converge.*

Définition 1.1.7 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ) . L'application f est continue en $a \in X$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, d(x, a) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \epsilon$$

L'application f est continue si et seulement si elle est continue en tout point a de X .
L'application f est uniformément continue si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, \forall y \in X, d(x, y) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Proposition 1.1.3 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ) . L'application f est continue en $a \in X$ si et seulement si pour toute suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ de X convergent vers a , la suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(a)$.

Définition 1.1.8 Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ) . L'application f est lipschitzienne si et seulement si, il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

(Éventuellement on précise : k -lipschitzienne.)

Proposition 1.1.4 Une application lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème 1.1.1 La composée de deux applications continues est continue.

Théorème 1.1.2 La somme et le produit sont des applications continues de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

L'application inverse : $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est continue de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, et de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$.

1.1.2 Espaces de Banach

Tous les espaces vectoriels considérés ici ont pour corps de base $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, sauf mention du contraire.

Définition 1.1.9 [15] Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (**evn**) complet.

Corollaire 1.1.1 Tout sous-espace vectoriel (sev) fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.

On rappelle le résultat suivant

Théorème 1.1.3 Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 1.1.2 Tout **evn** de dimension finie est un espace de Banach .

Définition 1.1.10 Soit E **evn** de dimension finie et $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de E , notons, pour tout $x \in E$, $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans cette base, et

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

La norme $x \rightarrow \|(x_1, \dots, x_n)\|$ étant équivalente à la norme de E , on obtient un isomorphisme bi-continu $E \ni x \rightarrow (x_1, \dots, x_n) \in K^n$; comme K^n muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet, E est complet.

Les exemples :

Voici quelques exemples d'espaces de Banach, qui sont des espaces de fonctions, importants en Analyse.

Soit F un espace de Banach, dont on note $|\cdot|_F$ la norme (par exemple, F est un **evn** de dimension finie, K^N ou même K).

- $B(A, F)$, l'espace des applications bornées de $A \rightarrow F$ où A est un ensemble, muni de la norme du sup :

$$\|f\|_B = \sup_{x \in A} |f(x)|_F.$$

- $C_b(X, F)$, l'espace des applications continues bornées de (X, d) , espace métrique, à valeurs dans F , muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$.
- $C_0(E, F)$, l'espace des applications continues tendant vers 0 à l'infini de E , **evn** de dimension finie, à valeurs dans F , muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$.
- $C(K, F)$, l'espace des applications continues de (K, d) , espace métrique compact, à valeurs dans F , muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$.

La norme du sup $\|\cdot\|_B$ définit sur chacun de ces espaces la topologie de la convergence uniforme des applications à valeurs dans F

.

Proposition 1.1.5 L'espace $B(A, F)$ muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$ est un Banach. L'espace $C_b(X, F)$ est fermé dans $B(X, F)$, l'espace $C_0(E, F)$ est fermé dans $B(E, F)$. Enfin $C(K, F) = C_b(K, F)$.

Voici d'autres exemples d'espaces de Banach, cette fois des espaces de suites :

- on note l'espace des suites multiples bornées

$$l^\infty(\mathbb{Z}^N) = \{x : \mathbb{Z}^N \rightarrow K / \sup_{h \in \mathbb{Z}^N} |x(h)| < \infty\}$$

et, pour tout $x \in l^\infty(\mathbb{Z}^N)$,

$$\|x\|_\infty = \sup_{h \in \mathbb{Z}^N} |x(h)| < \infty$$

Alors $l^\infty(\mathbb{Z}^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un Banach. (En fait, $l^\infty(\mathbb{Z}^N) = B(\mathbb{Z}^N, K)$ et $\|\cdot\|_\infty$ coïncide avec $\|\cdot\|_B$).

— on note l'espace des suites tendant vers 0 à l'infini

$$c_0(\mathbb{Z}^N) = \{x : \mathbb{Z}^N \rightarrow K / x(h) \rightarrow 0 \text{ pour } |h| \rightarrow \infty\}.$$

L'espace $c_0(\mathbb{Z}^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un sous-espace fermé de $l^\infty(\mathbb{Z}^N)$: c'est donc également un espace de Banach.

1.1.3 Espace des fonctions continues

Soit X un espace métrique compact et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons

$$C(X) = \{f : X \rightarrow K; \text{ continue} \} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Alors $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Si on définit le produit

$$(f.g)(x) = f(x).g(x),$$

$$f, g \in C(X) \text{ et pour } \lambda \in K \text{ et } f \in C(X), (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

alors $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ et $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre de Banach.

Remarque 1.1.1 Soit $(f_n)_n \subset C(X)$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ alors $f \in C(X)$. Convergence uniforme, i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Notons que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in X.$$

D'où la convergence uniforme implique la convergence simple.

La réciproque n'est pas vraie en général

Exemple 1.1.6 $X = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Pour chaque $x \in [0, 1]$ la suite $(f_n(x))_n$ converge et $f_n \rightarrow f$ simplement où $f(x) = 1$ si $x = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 1$. Alors $f \notin C([0, 1])$. Donc pas de convergence uniforme.

Exemple 1.1.7 Soit $X = [0, 1]$ et

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n+1}x + 2 & \text{si } \frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2^n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

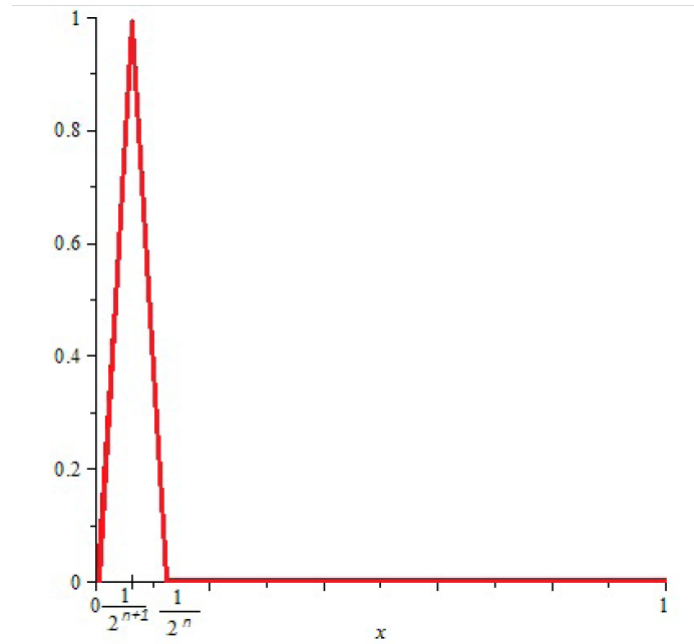


FIGURE 1.1 – figure de f_n

Alors $f_n \rightarrow f = 0$ simplement, par contre $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = 1 \not\rightarrow 0$. Donc pas de convergence uniforme.

Théorème 1.1.4 (Lemme de Dini)

Soit X un espace métrique compact et $(f_n)_n \subset C(x, \mathbb{R})$ une suite **monotone**. Supposons que f_n converge simplement vers $f \in C(x, \mathbb{R})$. Alors la convergence est uniforme.

Théorème d'Ascoli

Définition 1.1.11 (Équicontinuité)

Soit (E, d_1) et (F, d_2) deux espaces métriques et H une partie de $C(E, F)$.

On dira que H est **(Équicontinuité)** en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } d_1(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon, \forall f \in H.$$

Le point important, δ ne dépend pas de f .

On dira que H est **équicontinue** si elle est équicontinue en tout point de E .

Exemple 1.1.8 Supposons $\exists c > 0, \alpha > 0$ tel que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq c(d_1(x, y))^\alpha \forall x, y \in E, \forall f \in H$$

, alors H est équicontinue.

Exemple 1.1.9 Soit $E = C([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $H = \{f \in C^1([0, 1]), \|f'\|_\infty \leq 1\}$, alors H est équicontinue.

Remarque 1.1.2 Tout ensemble fini de fonctions continues en un point x_0 (resp. dans E) est équicontinu en x_0 (resp. équicontinu).

1.1.4 Fonctions absolument continues

Soit maintenant $[a, b](-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini.

Définition 1.1.12 [16]

On note par $AC([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables i.e :

$$f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a, b]) \text{ telle que } f = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Ainsi, toute fonction f absolument continue possède une dérivée sommable $f' = \varphi$ presque partout sur $[a, b]$, et donc $c = f(a)$.

Définition 1.1.13 On note par $AC^n([a, b]), n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, l'espace des fonctions f définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui ont des dérivées continues sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre $n - 1$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$ i.e.

$$AC^n([a, b]) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a, b]), k = 0 \dots n - 1, f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}.$$

Remarque 1.1.3 On a $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$

Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1.1 Une fonction $f \in AC^n([a, b]), n \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si elle est représentée sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

1.1.5 Espaces L^p

Soit $[a, b](-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$

Définition 1.1.14 [16] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On note par $L^p[a, b]$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions de puissance p -intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$L^p([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ mesurable, et } \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

$$\|f\|_{L^p([a, b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

L'espace $L^p[a, b]$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est un espace de Banach.

Si $p = 2$, alors $L^2([a, b])$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions mesurables de carré intégrable sur $[a, b]$.

Le produit scalaire sur $L^2([a, b])$ est défini pour toutes $f, g \in L^2([a, b])$ par

$$\langle f, g \rangle_{L^2([a, b])} = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

L'espace $L^2([a, b])$, muni par la norme

$$\|f\|_{L^2([a, b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert.

1.1.6 Mesure de non compacité

Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\mathcal{M}$ sous-ensemble borné non vide dans X , $\mathcal{N}$ sous famille qui consiste les ensembles relativement compact, et l'enveloppement convexe de $A \subset X$, notons $\text{conv}(A)$.

La mesure de non compacité en générale

Définition 1.1.15 Soit l'application $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty[$ On dit que μ est mesure de non compacité (MNC) dans l'espace de Banach X , si elle satisfait les conditions suivantes

1. l'ensemble $\ker(\mu) = \{A \in \mathcal{M} \text{ telle que : } \mu(A) = 0\}$ est une ensemble non vide et $\ker(\mu) \subset \mathcal{N}$
 $\forall A, B_1, B_2 \in \mathcal{M}$ on a les propriétés suivantes
2. Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. $\mu(\overline{A}) = \mu(A)$.
4. $\mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda\mu(A) + (1 - \lambda)\mu(B), \forall \lambda \in [0, 1]$.
5. $\mu(\text{conv}(A)) = \mu(A)$.
6. $\mu(B_1 \cup B_2) = \max\{\mu(B_1), \mu(B_2)\}$
7. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un ensemble des suites de $\mathcal{M}$ telle que $A_{n+1} \subset A_n$,
 $\overline{A_n} = A_n (n = 1, 2, \dots)$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$, alors $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \Phi$ et $A_\infty \in \ker(\mu)$.

Définition 1.1.16 On dit que la mesure de non compacité μ sublinéaire, si $\forall A, B \in \mathcal{M}$, si elle satisfait les deux conditions suivantes

1. $\mu(\lambda A) = |\lambda| \mu(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
2. $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

La mesure de kuratowski

Définition 1.1.17 Soit (X, d) un espace métrique, et Q un sous ensemble borné de X , alors la mesure de non compacité de Kuratowski de Q noté par $\mu(Q)$, avec $\mu(Q)$ est la borne inférieure de l'ensemble de tous les nombres $\varepsilon \geq 0$, tels que l'ensemble Q admet un recouvrement fini par des ensembles (S_i) avec le diamètre $\leq \varepsilon$

où

$$\mu(Q) = \inf \{ \varepsilon > 0 : Q \subset \bigcup_{i=1}^n S_i : S_i \subset X; \text{diam}(S_i) < \varepsilon (i = 1, \dots, n); n \in \mathbb{N} \}$$

la fonctions μ est dit mesure de non compacité de kuratowski.

Remarque 1.1.4 1. On appelle diamètre d'un ensemble Q est le nombre

$$\sup \{ d(x; y) : x \in Q; y \in Q \}$$

noté par $\text{diam}(Q)$, ou $\delta(Q)$ avec $\text{diam}(\Phi) = 0$. Il est clair que

$$0 \leq \mu(Q) \leq \text{diam}(Q) < +\infty.$$

pour chaque ensemble Q borné et non vide dans l'espace de Banach X et $\text{diam}(Q) = 0$ si seulement si Q est un ensemble vide ou se compose exactement d'un point, et on a aussi les propriétés du diamètre suivantes :

- Si $Q_1 \subset Q_2$ alors $\text{diam}(Q_1) \leq \text{diam}(Q_2)$.
 - $\text{diam}(\overline{Q}) = \text{diam}(Q)$.
 - $\text{diam}(Q_1 + Q_2) \leq \text{diam}(Q_1) + \text{diam}(Q_2)$.
 - $\text{diam}(x + Q) = \text{diam}(Q), \forall x \in X$.
 - $\text{diam}(\lambda Q) = |\lambda| \text{diam}(Q), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. Soit X espace de Banach, ensemble finie $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ dans X , on dit que ε -net de l'ensemble B , si pour tout point $\psi \in B$ il existe φ_j tel que

$$\|\psi - \varphi_j\| < \varepsilon$$

Proposition 1.1.6 soient Q, Q_1 et Q_2 des sous ensembles bornés dans un espace métrique (X, d) alors

- $\mu(Q) = 0$ si et seulement si $\overline{Q}$ est compact.
- $\mu(Q) = \mu(\overline{Q})$.
- $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \mu(Q_1) \leq \mu(Q_2)$.
- $\mu(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\mu(Q_1), \mu(Q_2)\}$
- $\mu(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\mu(Q_1), \mu(Q_2)\}$

1.1.7 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Mesures extérieures

Définition 1.1.18 Soit X un ensemble quelconque. On appelle mesure extérieure sur X une application $\mu^* : P(X) \rightarrow [0, +\infty[$ telle que

- i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
- ii) μ^* est croissante

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad \text{si} \quad A \subset B$$

- iii) μ^* est sous-additive, si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de parties de X , alors

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

Définition 1.1.19 (Rappel). Un pavé P de $\mathbb{R}^d$ est un produit d'intervalles bornés

$$P = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d, \quad I_d \subset \mathbb{R} \text{ intervalle borné}$$

On note $\text{mes}(P) = \ell(I_1) \dots \ell(I_d)$, où $\ell(I_d)$ est la longueur du segment I_d , la mesure du pavé P .

Définition 1.1.20 Pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, on définit

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{mes}(P_i) \mid A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_i, P_i \text{ pavé ouvert de } \mathbb{R}^d \right\}$$

L'infimum est pris sur tous les recouvrements dénombrables de A par des pavés ouverts (évidemment, il existe toujours de tels recouvrements).

Remarque 1.1.5 On obtient la même définition si on travaille avec des pavés quelconques. En effet, si $Q_i \subset \mathbb{R}^d$ est un pavé quelconque et si $\varepsilon > 0$, il existe P_i un pavé ouvert tel que $Q_i \subset P_i$ et $\text{mes}(P_i) \leq \text{mes}(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Théorème 1.1.5 On a les assertions suivantes

- i) λ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$.
- ii) La tribu $\mathcal{M}(\lambda^*)$ contient la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- iii) $\lambda^*(P) = \text{mes}(P)$, pour tout pavé $P \subset \mathbb{R}^d$.

Définition 1.1.21 On appelle **mesure de Lebesgue** sur $\mathbb{R}^d$ la restriction, notée λ , de la mesure extérieure λ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ou à $\mathcal{M}(\lambda^*)$.

1.1.8 Théorème de la convergence dominée

Théorème 1.1.6 (convergence dominée). Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que

- i) La limite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe $\forall x \in X$.
- ii) Il existe $g : X \rightarrow [0, +\infty[$ intégrable telle que $|f_n(x)| \leq g(x) \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$.

Alors $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, et on a :

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

1.2 Théorème du point fixe

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématique de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.

Dans ce chapitre on aborde quelque théorème du point fixe qui nous aident sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles fractionnaires.

1.2.1 Théorème du point fixe de Banach

Définition 1.2.1 Soit T une application d'un ensemble X dans lui-même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.

Le théorème du point fixe le plus élémentaire le plus utilisé est le principe de contraction de Banach. Pour cela nous commençons par une présentation de ce principe ainsi qu'un certain nombre de généralisations de ce résultat.

Théorème 1.2.1 [5] (Principe de contraction de Banach)

Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $F : M \rightarrow M$ une application contractante i.e qu'il existe $0 < k < 1$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Alors F admet un point fixe $u \in M$ de plus pour tout $x \in M$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = u,$$

et

$$d(F^n, u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

Preuve :

D'abord, on montre l'unicité. On suppose que il existe $x, y \in M$ avec

$$x = F(x); y = F(y),$$

et

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y).$$

Puisque $0 < k < 1$ alors la dernier inégalité implique que $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$, alors $\exists! x \in M$ tel que

$$F(x) = x.$$

Maintenant, on prouve l'existence de x où $x \in M$. On suppose que $F^n(x)$ est une suite de Cauchy où $n \in \mathbb{N}$

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq kd(F^{n-1}(x), F^n(x)) \leq \dots \leq k^n d(x, F(x))$$

Si $m > n$ où $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(F^n(x), F^m(x)) &\leq d(F^n(x), F^{n+1}(x)) + d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) + \dots + d(F^{m-1}(x), F^m(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x)) + k^{n+1} d(x, F(x)) + \dots + k^{m-1} d(x, F(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x)) [1 + k + k^2 + \dots] \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Pour $m > n$; $n \in \mathbb{N}$ on a

$$d(F^n(x), F^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)). \quad (1.1)$$

Alors $F^n(x)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet X en suite alors il existe $u \in X$ avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = u.$$

De plus par la continuité de F

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(F^n(x)) = F(u).$$

Alors u est un point fixe de F . Finalement, $m \rightarrow \infty$ dans l'inégalité (1.1), on obtient

$$d(F^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)).$$

Exemple 1.2.1 Considérons l'application $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $A(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$, alors A une contraction avec $0 < k = \frac{1}{2} < 1$, et admet comme point fixe $x = 2$ de plus

$$\lim\{A^n(x)\}_{n=1}^{\infty} = 1$$

Remarque 1.2.1 Les conditions du théorème sont nécessaires, pour s'en convaincre considérons les exemples suivants

Exemple 1.2.2 $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $A(x) = \frac{x}{2} + 1$, est contractante mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que $A([0, 1]) \not\subset [0, 1]$ et on ne peut pas itérer : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1.5$, mais x_3 n'est pas défini !

1.2.2 Théorème du point fixe de Mönch

[8, 9] Soit D un sous-ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach tel que $0 \in D$ et soit N une application continue dans D sur lui-même. Si l'implication

$$V = \overline{\text{conv}}N(V) \text{ ou } V = N(V) \cup 0 \Rightarrow \mu(V) = 0$$

est valide pour chaque sous-ensemble V de D alors N a un point fixe.

Théorème 1.2.2 [7]

Soit K un sous-ensemble fermé, convexe d'un espace de Banach E , U un sous-ensemble relativement ouvert de K et $N : \bar{U} \rightarrow P_c(K)$ Supposons que le $\text{graph}(N)$ est fermé, N est un application d'ensemble compact dans des ensembles relativement compacts, et que pour certains $x_0 \in U$; les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$\left. \begin{array}{l} M \subset U, M \subset \text{conv}(x_0 \cup N(M)) \\ \text{et } \bar{M} = \bar{C} \text{ avec } C \subset M \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{M} \text{ compacte}$$

$x \notin (1 - \lambda)x_0 + \lambda N(x)$ pour tout $x \in \bar{U}/U, \lambda \in [0, 1]$.

Alors il existe $x \in U$ avec $x \in N(x)$.

1.2.3 Théorème du point fixe de Brouwer

Définition 1.2.2 Soient $N > 1, R > 0$ et $f \in C(B_R; B_R)$ avec $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq R\}$: (on muni $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|$) Alors f admet un point fixe, c'est-à-dire :

$$\exists y \in B_R \text{ tel que } f(y) = y$$

Le théorème de point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même

Théorème 1.2.3 (Théorème du point fixe de Brouwer)

Soit B_n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2.4 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique

Théorème 1.2.4 (Théorème du point fixe de Schauder)

Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit X une partie convexe et fermée de E , et soit $T : X \rightarrow X$ une application telle que l'ensemble $T_x : x \in X$ est relativement compacte dans E . Alors T possède au moins un point fixe.

1.2.5 Théorème du point fixe de Schaefer

Théorème de Schaefer est en fait un cas particulier d'un théorème de plus grande portée découvert auparavant par Schauder et Leray. Il s'énonce ainsi :

Théorème 1.2.5 (Théorème du point fixe de Schaefer)

Soit T une application continue et compacte d'un espace localement convexe séparé E dans lui-même, telle que l'ensemble

$$\{x \in E / \exists \lambda \in]0, 1[, x = \lambda T(x)\}$$

est borné. Alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$, il existe $x \in E$ tel que $x = \lambda T(x)$.

1.2.6 Théorème d'Arzela-Ascoli

Rappelons que dans un espace métrique un sous-ensemble est relativement compact si son adhérence est un ensemble compact

Théorème 1.2.6 Soit (K, d) un espace métrique compact, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A \subset C(K, E)$. Alors A est relativement compact dans $(C(K, E), \|\cdot\|_{\infty, K})$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

(a) A est équicontinue, c-à-d

pour tout $x \in K$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $V \subset K$ de x tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \forall y \in V, \forall f \in A.$$

(b) Pour tout $x \in K$, l'espace $A(x)$ définie par

$$A(x) = \{f(x); f \in A\},$$

est relativement compact dans E .

1.3 Calcul fractionnaire

1.3.1 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Béta, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces application.

La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (exépté en certains points)

Définition 1.3.1 Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$, la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.2)$$

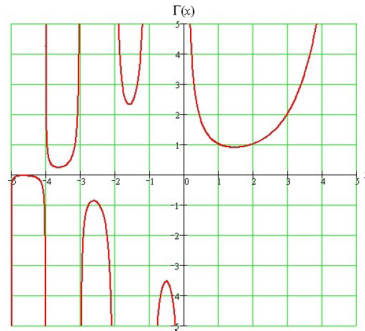


FIGURE 1.2 – Courbe représentative de la fonction gamma

Propriétés :

1. La propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (1.3)$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= [-e^{-t} t^{z+1}]_0^{+\infty} + (z+1) \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= (z+1) \Gamma(z)\end{aligned}$$

2. — soit $z = 1$, $z = 0_+$, $z = \frac{1}{2}$ alors :

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt \\ &= 1\end{aligned}$$

— $\Gamma(0_+) = +\infty$

— Et aussi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

3. $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$

4. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $\Gamma(n+1) = n!$ et aussi si $n \in \mathbb{N}$ alors : $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n \cdot n!}$

Exemple 1.3.1 Pour $z = \frac{1}{2}$ on a par définition :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

posons

$$t = u^2,$$

donc

$$dt = 2u du,$$

il s'ensuit :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u du, \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

L'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Fonction Bêta

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est elle aussi définie par une intégrale impropre.

Définition 1.3.2 [6] La fonction Bêta est définie par

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0. \quad (1.4)$$

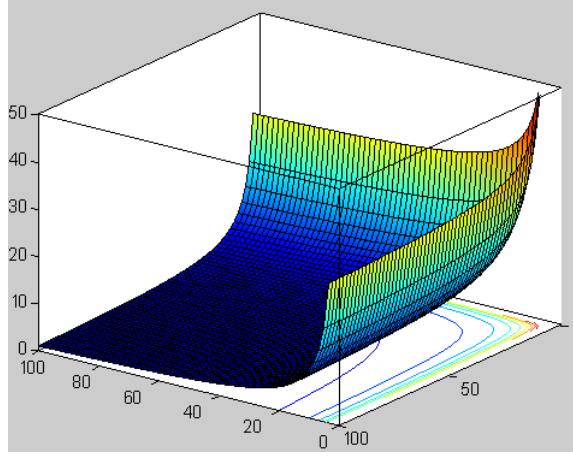


FIGURE 1.3 – Variations de la fonction Bêta pour les valeurs positives de x et y

Le changement de variable

$$u = 1 - t,$$

permet de montrer que la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :

$$\beta(x, y) = \beta(y, x).$$

Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivantes

$$\beta(x, y) = \frac{1}{\alpha^{x+y-1}} \int_0^\alpha t^{x-1} (\alpha - t)^{y-1} dt,$$

$$\beta(x, y) = \frac{1}{\alpha^{x+y-1}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt,$$

$$\beta(x, y) = \frac{1}{\alpha^{x+y-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\Theta) \cos^{2y-1}(\Theta) d\Theta.$$

Proposition 1.3.1 [6] La fonction Bêta est reliée aux fonction Gamma par la relation suivante :

$\forall x, y > 0$, on a

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.5)$$

Preuve :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} t_2^{y-1} e^{-t_1} e^{-t_2} dt_1 dt_2,$$

$$= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} \left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1} e^{-|t_1+t_2|} dt_2 \right) dt_1.$$

En effectuant le changement de variable

$$t_2' = t_1 + t_2.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} dt_1 \int_0^{+\infty} (t_2' - t_1)^{y-1} e^{t_2'} dt_2', \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t_2'} dt_2' \int_0^{t_1} (t_2' - t_1)^{y-1} t_1^{x-1} dt_1. \end{aligned}$$

Si on pose $t_1' = \frac{t_1}{t_2'}$ on arrive à

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} e^{t_2'} dt_2' \left(\int_0^1 (t_1' t_2')^{x-1} (t_2' - t_1' t_2')^{y-1} t_2' dt_1' \right), \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t_2'} dt_2' \left((t_2')^{x+y-1} \beta(x, y) \right), \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t_2'} (t_2')^{x+y-1} dt_2' \beta(x, y), \\ &= \Gamma(x+y) \beta(x, y). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré.

1.3.2 Dérivation fractionnaire de Caputo

L'opérateur fractionnaire de Caputo

Définition 1.3.3 La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction f est donnée par :

$${}^c D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx \quad (1.6)$$

avec $n-1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle

$${}^c D^\alpha h(t) = 0$$

a les solutions suivantes

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}, \quad c_i \in E, i = 0, 1, \dots, n-1, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Lemme 1.3.1 [10, 11] Soit $\alpha > 0$, alors

$$I^{\alpha c} D^\alpha h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

avec $c_i \in E, i \in 0, 1, \dots, n-1, n = [\alpha] + 1$.

Propriétés fondamentaux

Définition 1.3.4 soit $x \in \mathbb{R}$ on dit qu'une fonction $f(t)$ continue et intégrable sur un intervalle finie $]0; x[$ a une singularité intégrable d'ordre $r < 1$ au point $t = 0$ si :

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^r f(t) = c \neq 0. \text{ tell que } c \text{ est constant.}$$

Notation 1.3.1 On note l'opérateur $D^n; n \in \mathbb{N}$ différentiation de l'opérateur d'ordre entier i.e :

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Lemme 1.3.2 Soit $n-1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe, alors :

$${}^c D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t).$$

Lemme 1.3.3 Soit $n-1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe, alors ,a les propriétés suivantes pour l'opérateur de Caputo

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t),$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$

Preuve :

On utilise l'intégration par partie

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-f^{(n)}(x) \frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Big|_{x=0}^t - \int_0^t -f^{(n+1)}(x) \frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha} dx \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(f^{(n)}(0)t^{n-\alpha} + \int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-x)^{n-\alpha} dx \right). \end{aligned}$$

En prenant la limite pour $\alpha \rightarrow n$ et $\alpha \rightarrow n-1$, respectivement, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(0) + f^{(n)}(x) \Big|_{x=0}^t = f^{(n)}(0),$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^c D^\alpha f(t) &= \left(f^{(n)}(0)t + f^{(n)}(x)(t-x) \right) \Big|_{x=0}^t - \int_0^t -f^{(n)}(x) dx, \\ &= f^{(n)}(x) \Big|_{x=0}^t, \\ &= f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Quelques propriétés de dérivation fractionnaire de Caputo

Propriétés de dérivation fractionnaire de Caputo

Linéarité

Lemme 1.3.4 Soit $n - 1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, \alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que ${}^c D^\alpha f(t)$ et ${}^c D^\alpha g(t)$ existent. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :

$${}^c D^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^c D^\alpha f(t) + {}^c D^\alpha g(t)$$

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= I^{n-\alpha} D^n f(t), \\ {}^c D^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) &= I^{n-\alpha} D^n [\lambda f(t) + g(t)], \\ &= \lambda I^{n-\alpha} D^n [(f + g)(t)]. \end{aligned}$$

Comme la dérivée n -ème et l'intégrale sont linéaires, alors

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) &= \lambda I^{n-\alpha} D^n f(t) + I^{n-\alpha} D^n g(t), \\ &= \lambda {}^c D^\alpha f(t) + {}^c D^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Non-commutativité

Lemme 1.3.5 On suppose que $n - 1 \leq \alpha \leq n, m, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe, alors

$${}^c D^\alpha D^m f(t) = {}^c D^{\alpha+m} f(t) \neq D^m {}^c D^\alpha f(t). \quad (1.7)$$

Supposons que $n - 1 \leq \alpha \leq n, \beta = \alpha - (n - 1), (0 < \beta < 1), n \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe, alors

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^c D^\beta D^{n-1} f(t).$$

Preuve :

On remplace β par α et $n - 1$ par m dans (1.7), alors

$$\begin{aligned} {}^c D^\beta D^{n-1} f(t) &= {}^c D^{\beta+n-1} f(t), \\ &= {}^c D^{\beta-(n-1)+n-1} f(t), \\ &= {}^c D^\alpha f(t). \end{aligned}$$

Exemples des dérivations fractionnaires

i) La fonction constante

Lemme 1.3.6 La dérivée fractionnaire de Caputo pour la fonction constante est égale à zéro i.e :

$${}^c D^\alpha c = 0, \quad c = \text{const}$$

Preuve :

Soit $n - 1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$, i.e $n \geq 1$, on applique la définition de la dérivée de Caputo

$${}^c D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx, \quad x > 0$$

et puisque la n-ième dérivée $c^{(n)}(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ est égale à 0 :

Il suit

$${}^c D^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{c^{(n)}}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx = 0$$

ii) La fonction puissance

Comme la fonction puissance est d'une grande importance alors, on examinera de plus près sa dérivée fractionnaire. Rappelons le développement de Taylor

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)t^2}{2!} + \frac{f'''(0)t^3}{3!} + \dots$$

On sait que la dérivée fractionnaire de Caputo est linéaire. Alors si ${}^c D^\alpha t^p$ est définie, alors la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction arbitraire peut être représentée de la manière suivante :

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^c D^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} {}^c D^\alpha t^k.$$

Théorème 1.3.1 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n$ d'une fonction puissance $f(t) = t^p$ pour $p \geq 0$ est définie par :*

$${}^c D^\alpha t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} = D^\alpha t^p & (p > n-1) \\ 0 & (p \leq n-1) \end{cases}$$

Preuve

La méthode directe : Soit $n - 1 < \alpha < n, p > n - 1, p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{(t^p)^{(n)}}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} (x^{p-n}) (t-x)^{n-\alpha-1} dx \end{aligned}$$

Et en utilisant la substitution $x = \lambda t$, $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned}
 {}^c D^\alpha t^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_0^1 (\lambda t)^{p-n} ((1-\lambda)t)^{n-\alpha-1} t d\lambda \\
 &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \int_0^1 \lambda^{p-n} (1-\lambda)^{n-\alpha-1} d\lambda \\
 &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \beta(p-n+1, n-\alpha) \\
 &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}{p-\alpha+1} \\
 &= \frac{\Gamma(p+1)}{p-\alpha+1} t^{p-\alpha}
 \end{aligned}$$

Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on considère l'intégrale

$$\begin{aligned}
 I^{(1)} f(x) &= \int_a^x f(t) dt \\
 I^{(2)} f(x) &= \int_a^x dt \int_a^t f(u) du.
 \end{aligned}$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

Plus généralement le n -ème itéré de l'opérateur I peut s'écrire sous la forme :

$$I^{(n)} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \quad (1.8)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (1.9)$$

Pour tout entier n .

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$.

Intégrales d'ordre arbitraire

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, b pouvant être fini ou infini. Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$(I_a^{(1)} f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^{(2)} f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t) dt \right) ds.$$

Le théorème de Fubini, nous donne

$$(I_a^{(2)}f)(t) = \int_a^t (t - \tau)f(\tau)d\tau.$$

En itérant, on arrive à

$$(I_a^{(n)}f)(t) = \int_a^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau.$$

Définition 1.3.5 [10, 11] *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $f \in L^1[a, b]$ d'ordre $r \in \mathbb{R}_+$, est définie par :*

$$I_a^{(r)}h(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-r}} ds,$$

où Γ est la fonction Gamma. Lorsque $a = 0$ nous écrivons $I^{(r)}h(t) = h(t) * \varphi_r(t)$ où $\varphi_r(t) = \frac{t^r - 1}{\Gamma(r)}$ pour $t > 0$, $\varphi_r(t) = 0$ pour $t \leq 0$, et $\varphi_r \rightarrow \delta$ quand $r \rightarrow 0$.

Exemple 1.3.2 Soit $h(t) = (t - a)^\mu$ ou $\mu > 1$.

$$\begin{aligned} I_a^r h(t) &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-r}} ds, \\ I_a^r h(t) &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t \frac{(t-s)^\mu}{(t-s)^{1-r}} ds. \end{aligned}$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $s = a + (t - a)x$, on obtient,

$$\begin{aligned} I_a^r h(t) &= \frac{(t-a)^{\mu+r}}{\Gamma(r)} \int_a^t (1-x)^{r-1} x^\mu dx, \\ &= \frac{(t-a)^{\mu+r}}{\Gamma(r)} \beta(r, \mu+1), \\ &= \frac{(t-a)^{\mu+r}}{\Gamma(r)} \frac{\Gamma(r)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+r)}. \end{aligned}$$

D'où

$$I_a^r (t-a)^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+r)} (t-a)^{\mu+r}.$$

Proposition 1.3.2 *Nous avons les propriétés suivantes :*

- i)* $I_0^0 h(t) = I_a h(t) = h(t)$.
- ii)* $I_0^\alpha I_0^\beta h(t) = I_0^{\alpha+\beta} h(t)$.
- iii)* l'opérateur intégral I_0^α est linéaire.

Chapitre 2

Problème aux limites pour des équations fractionnaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse au résultat d'existence des solutions pour le problème aux limites :

$${}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T], 1 < \alpha < 2, \quad (2.1)$$

$$y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T. \quad (2.2)$$

Où ${}^cD^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : [0, T] \times E \rightarrow E$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, $y_0, y_T \in E$ et E est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$. Le résultat de ce chapitre est basé sur le théorème de point fixe de **Mönch** 3.1.1 combiné avec la mesure de non compacité de Kuratowski.

2.1 Existence des solutions

Tout d'abord, nous définissons ce que nous exprimons être une solution du problème aux limites (2.1) - (2.2).

Définition 2.1.1 *Une fonction $y \in AC^1([0, T], E)$ est dite une solution du problème (2.1) - (2.2) si y satisfait l'équation (2.1), et les conditions (2.2).*

Lemme 2.1.1 *Soit $1 < \alpha < 2$ et $h : [0, T] \rightarrow E$ une fonction continue. Le problème aux limites linéaire*

$${}^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

$$y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T, \quad (2.4)$$

a une solution unique donnée par

$$y(t) = g(t) + \int_0^T G(t, s)h(s)ds, \quad (2.5)$$

où

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)y_0 + \frac{t}{T}y_T,$$

et

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(a)} \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & \text{si } t \leq s \leq T \end{cases}.$$

Preuve :

Supposons que y le problème (3.1)- (3.2), d'après le lemme 1.3.1 , on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= I_a^\alpha h(t) + c_0 + c_1 t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 t, \end{aligned}$$

pour certaines constantes $c_0, c_1 \in E$, les conditions (3.2) donnent

$$c_0 = y_0.$$

Parce que

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) = \mathbf{0} + c_0 + c_1(\mathbf{0}), \\ y(0) &= c_0, \end{aligned}$$

et

$$c_1 = \frac{1}{T}y_T - \frac{1}{T}y_0 - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Parce que

$$\begin{aligned} y_T &= y(T) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 T, \\ y_T &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds + y_0 + c_1 T, \\ c_1 T &= y_T - y_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \\ c_1 &= \frac{1}{T}y_T - \frac{1}{T}y_0 - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds. \end{aligned}$$

Ensuite, la solution de (3.1)-(3.2) est

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + y_0 + \left(\frac{1}{T} y_T - \frac{1}{T} y_0 - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right) t, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + y_0 + \frac{t}{T} y_T - \frac{t}{T} y_0 - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \left(1 - \frac{t}{T} \right) y_0 + \frac{t}{T} y_T, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^t (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_t^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\
 &\quad + \left(1 - \frac{t}{T} \right) y_0 + \frac{t}{T} y_T, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T} (T-s)^{\alpha-1} \right] h(s) ds - \frac{t}{T} y_T \int_t^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right] \\
 &\quad + \left(1 - \frac{t}{T} \right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.
 \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons (3.3).

Lemme 2.1.2 *Le problème aux limites (2.1)- (2.2) a une solution y , si et seulement si y satisfait l'équation intégral*

$$y(t) = g(t) + \int_0^T G(t, s) f(s, y(s)) ds, \quad (2.6)$$

où

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{T} \right) y_0 + \frac{t}{T} y_T,$$

et

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T} (T-s)^{\alpha-1} & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{t}{T} (T-s)^{\alpha-1} & \text{si } t \leq s \leq T. \end{cases}$$

Il est évident que $G(t, s)$ est continue sur $[0, T] \times [0, T]$.

Notons

$$G^* = \sup\{\|G(t, s)\|, (t, s) \in [0, T] \times [0, T]\}.$$

La fonction g est continue sur $[0, T]$, donc il existe $g^* = \sup \|g(t)\|$. Pour établir notre résultat principal concernant l'existence de solutions de (2.1)-(2.2), nous donnons des conditions appropriées sur les fonctions impliquées dans ce problème.

Nous supposons que

H1 $f : [0, T] \times E \rightarrow E$ satisfait aux conditions de Carathéodory.

H2 Il existe $p \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+)$, de telle sorte que

$$\|f(t, y)\| \leq p(t)\|y\|, \text{ pour } t \in [0, T] \text{ et chaque } y \in E.$$

H3 Pour chaque $t \in [0, T]$ et chaque borné $B \subset E$ nous avons

$$\mu(f(t, B)) \leq p(t)\mu(B).$$

Théorème 2.1.1 *Supposons que les hypothèses **(H1)** - **(H3)** sont vérifiées. Si*

$$G^* \int_0^T p(s)ds < 1, \quad (2.7)$$

alors le problème aux limites (2.1) -(2.2) a au moins une solution.

Preuve :

Transformons le problème (2.1) -(2.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $N : C([0, T], E) \rightarrow C([0, T], E)$ défini par

$$N(y)(t) = g(t) + \int_0^T G(t, s)f(s, y(s))ds,$$

d'après le lemme 2.1.2, les points fixes de l'opérateur N sont des solutions du problème (2.1) -(2.2).

Soit

$$R > \frac{g^*}{1 - G^* \int_0^T p(s)ds} \quad (2.8)$$

et l'ensemble

$$D_R = \{y \in C([0, T], E) : \|y\|_\infty \leq R\}.$$

D_R est un sous-ensemble fermé, borné et convexe.

On va montrer que D_R est fermé, borné et convexe.

(1) D_R fermé :

Soit $\{f_n\}_{n \geq 1}, n \in \mathbb{N}^*$ une suite dans $C([0, T], E)$.

On a $\forall x \in [0, T]$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

comme $f_n \in D_R$, alors

$$\sup |f_n(x)| \leq R$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x)| \leq R$$

$$\Rightarrow \sup \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right| \leq R$$

$$\Rightarrow \sup |f(x)| \leq R$$

$$\Rightarrow \|f(x)\|_\infty \leq R.$$

Donc $f \in D_R$ et puisque $\{f_n\}_{n \geq 1}$ est une suite dans D_R et converge vers f dans lui-même, alors D_R est fermé .

(2) D_R borné :

On a $y \in D_R$. Donc

$$\|y\|_\infty \leq R.$$

Alors

$$y \in B_f(0, R), \quad \forall y \in C([0, T], E)$$

Et de cela , nous apprenons que $D_R \subset B_f(0, R)$.

Donc D_R est borné .

(3) D_R convexe :

$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in D_R$

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_\infty &\leq \|\lambda x\|_\infty + \|(1 - \lambda)y\|_\infty \\ &\leq \lambda \|x\|_\infty + (1 - \lambda)\|y\|_\infty \\ &\leq \lambda R + (1 - \lambda)R \\ &= R. \end{aligned}$$

Donc $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_\infty \leq R$, alors D_R est convexe .

Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du Théorème 3.1.1 La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : N est continue.

Soit y_n une suite telle que $y_n \rightarrow y$ dans $C([0, T], E)$ alors pour chaque $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|N(y_n)(t) - N(y)(t)\| &= \left\| \int_0^T G(t, s)[f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))]ds \right\| \\ &\leq \int_0^T \|G(t, s)\| \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\leq \sup \|G(t, s)\| \int_0^T \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &= G^* \int_0^T \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds. \end{aligned}$$

Comme f est de type Carathéodory, alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue 2-1.1.6, nous avons

$$\|N(y_n) - N(y)\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Étape 2 : N est un application de D_R dans lui-même. Pour chaque $y \in D_R$ d'après **(H2)** et

(2.8) nous avons pour chaque $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
 \|N(y)(t)\| &= \|g(t) + \int_0^T G(t, s)f(s, y(s))ds\|, \\
 &\leq \|g(t)\| + \left\| \int_0^T G(t, s)f(s, y(s))ds \right\|, \\
 &\leq \|g(t)\| + \int_0^T \|G(t, s)\| \|f(s, y(s))\| ds, \\
 &\leq \|g(t)\| + \int_0^T \|G(t, s)\| p(s) \|y(s)\| ds, \\
 &\leq \sup \|g(t)\| + \sup \|G(t, s)\| \int_0^T p(s) \|y(s)\| ds, \\
 &\leq g^* + RG^* \int_0^T p(s) ds, \\
 &\leq R.
 \end{aligned}$$

L'étape 3 : $N(D_R)$ est bornée et équicontinue. D'après l'étape 2 nous avons $N(D_R) = \{N(y) : y \in D_R\} \subset D_R$. Ainsi, pour chaque $y \in D_R$ nous avons $\|N(y)\|_\infty \leq R$ ce qui signifie que $N(D_R)$ est bornée. Pour l'équicontinuité de $N(D_R)$. Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$ et $y \in D_R$. Alors

$$\begin{aligned}
 \|N(y)(t_1) - N(y)(t_2)\| &= \left\| g(t_1) - g(t_2) + \int_0^T (G(t_1, s) - G(t_2, s))f(s, y(s))ds \right\|, \\
 &\leq \|g(t_1) - g(t_2)\| + \left\| \int_0^T (G(t_1, s) - G(t_2, s))f(s, y(s))ds \right\|, \\
 &\leq \|g(t_1) - g(t_2)\| + R \left\| \int_0^T (G(t_1, s) - G(t_2, s))p(s)ds \right\|,
 \end{aligned}$$

comme $t_1 \rightarrow t_2$, le second membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

Maintenant soit V un sous-ensemble de D_R tel que $V \subset \overline{\text{conv}}(N(V) \cup \{0\})$. V est bornée et équicontinue et donc la fonction $v \rightarrow v(t) = \mu(V(t))$ est continue sur $[0, T]$. Puisque la fonction g est continue sur $[0, T]$, l'ensemble $\{g(t), t \in [0, T]\} \subset E$ est compact. En utilisant ce fait,

(H3) et les propriétés de la mesure μ , nous avons pour chaque $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \mu(V(t)), \\
 &\leq \mu(N(V)(t) \cup \{0\}), \\
 &\leq \mu(N(V)(t)), \\
 &\leq \int_0^T \|(G(t, s)\|p(s)\mu(V(s))ds, \\
 &\leq G^* \int_0^T p(s)v(s)ds, \\
 &\leq \|v\|_\infty G^* \int_0^T p(s)ds.
 \end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_\infty G^* \int_0^T p(s)ds.$$

D'après la condition 2.7 nous obtenons $\|v\|_\infty = 0$, c'est à dire $v(t) = 0$ pour chaque $t \in [0, T]$, et ensuite $V(t)$ est relativement compact dans E . En vue du théorème d' **Ascoli Arzela** 1.2.6, V est relativement compact dans D_R . En appliquant maintenant le théorème 3.1.1, nous concluons que N a un point fixe qui est une solution du problème (2.1)-(2.2).

2.2 Exemples

Dans cette section, nous donnons des exemples pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats. Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant

Exemple 1

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y_n(t) = \frac{2}{19 + \cos(t)} |y_n|, & \forall t \in [0, 1], \quad 1 < \alpha < 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ y_n(0) = 0, \\ y_n(1) = 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Posons

$$E = l^1 = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty \right\}$$

avec la norme

$$\|y\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \text{ et } f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$$

Soit $x \in E$, tel que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$,
on trouve

$$f_n(t, x) = \frac{2}{19 + \cos(t)} |x_n|, \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times E.$$

Donc

$$f(t, x) = \frac{2}{19 + \cos(t)} x, \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times E.$$

(H1) est vérifiée parce que

(1) $t \rightarrow f(t, x)$ est **mesurable** pour chaque $x \in E$

$t \rightarrow f(t, x)$ continue puisque est une somme et une multiplication de fonctions continues. Donc f est mesurable $\forall x \in E$.

(2) $x \rightarrow f(t, x)$ est **continue** presque par tous $t \in [0, 1]$.

Soit $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\|_E &= \left\| \frac{2}{19 + \cos(t)} x - \frac{2}{19 + \cos(t)} y \right\|_E \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{19 + \cos(t)} x_n - \frac{2}{19 + \cos(t)} y_n \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{19 + \cos(t)} \right| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| \\ &< \frac{2}{19} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Car $0 < \cos(t) \leq 1$ pour $t \in [0, 1]$.

On trouve $k = \frac{2}{19} < 1$.

Donc l'application f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue, donc continue.

Après (1) et (2) alors l'application f est **Caratheodory**

(H2) Vérifiée en prenant

$$p(t) = \frac{2}{5 + \cos(t)}.$$

Il est clair que $p \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$.

Avec pour $t \in [0, 1]$ et chaque $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\|_E &= \left\| \frac{2}{19 + \cos(t)} x \right\|_E \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{19 + \cos(t)} x_n \right| \\ &\leq \frac{2}{19 + \cos(t)} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\ &\leq \frac{2}{5 + \cos(t)} \|x\|_E \end{aligned}$$

(H3) D'après (H2) , on a

$$\|f(t, x)\|_E \leq \frac{2}{5 + \cos(t)} \|x\|_E.$$

Soit B un sous ensemble borné dans E et $x \in B$

$$f(t, B) \subset p(t)B,$$

c'est à dire

$$f(t, B) \subset \frac{2}{5 + \cos(t)} B.$$

Après avoir appliqué la deuxième propriété de la mesure de non compacité 2 et la définition 1.1.6, nous trouvons

$$\begin{aligned} \mu(f(t, B)) &\leq \mu\left(\frac{2}{5 + \cos(t)} B\right) \\ &\leq \left|\frac{2}{5 + \cos(t)}\right| \mu(B), \end{aligned}$$

et comme $\frac{2}{5 + \cos(t)} > 0$ pour chaque $t \in [0, 1]$.

Alors

$$\mu(f(t, B)) \leq \frac{2}{5 + \cos(t)} \mu(B).$$

De 2.7 la fonction G est donnée par

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t - s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T - s)^{\alpha-1} & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{t}{T}(T - s)^{\alpha-1} & si \quad t \leq s \leq T. \end{cases}$$

Pour $T = 1$ nous trouvons

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t - s)^{\alpha-1} - \frac{t}{1}(1 - s)^{\alpha-1} & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{t}{1}(1 - s)^{\alpha-1} & si \quad t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Donc

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t - s)^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t(1 - s)^{\alpha-1} & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t(1 - s)^{\alpha-1} & si \quad t \leq s \leq 1. \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 G(t, s) ds &= \int_0^t G(t, s) ds + \int_t^1 G(t, s) ds \\
 \int_0^t G(t, s) ds &= \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) ds \\
 &= \left[-\frac{(t-s)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{t(1-s)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right]_0^t \\
 &= \frac{t(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} \quad \dots (1) \\
 \int_t^1 G(t, s) ds &= - \int_t^1 \frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
 &= \left[\frac{t(1-s)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right]_t^1 \\
 &= \frac{t}{\alpha\Gamma(\alpha)} [0 - (1-t)^\alpha] \\
 &= \frac{-t(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

Nous collectons (1) et (2) trouvons :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 G(t, s) ds &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} \\
 &= \frac{t^\alpha - t}{\Gamma(\alpha+1)}.
 \end{aligned}$$

Maintenant , nous allons chercher sur la limite supérieure de $\|G(t, s)\|$.

On pose

$$\begin{aligned}
 h(t) &= t^\alpha - t, \\
 h'(t) &= \alpha t^{\alpha-1} - 1.
 \end{aligned}$$

On va trouvé t

$$\begin{aligned}
 \alpha t^{\alpha-1} - 1 &= 0 \\
 \alpha t^{\alpha-1} &= 1 \\
 t^{\alpha-1} &= \frac{1}{\alpha} \\
 \ln(t^{\alpha-1}) &= -\ln(\alpha) \\
 (\alpha-1) \ln(t) &= -\ln(\alpha) \\
 \ln(t) &= \frac{-\ln(\alpha)}{\alpha-1} \\
 t &= \exp\left(\frac{-\ln(\alpha)}{\alpha-1}\right)
 \end{aligned}$$

x	0	$\exp\left(\frac{-\ln(\alpha)}{\alpha-1}\right)$	1
$h'(x)$	—	0	+
$h(x)$	0	$h\left(\exp\left(\frac{-\ln(\alpha)}{\alpha-1}\right)\right)$	0

$$h\left(\exp\left(\frac{-\ln(\alpha)}{\alpha-1}\right)\right) = \left[\exp\left(\frac{-\ln(\alpha)}{\alpha-1}\right)\right]^\alpha - \exp\left(\frac{-\ln(\alpha)}{\alpha-1}\right).$$

Alors, pour $\alpha = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} h\left(\exp\left(\frac{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right)\right) &= \left[\exp\left(\frac{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{3}{2}} - \exp\left(\frac{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right) \\ h(0.44) &= 0.29 - 0.44 \\ &= -0.15 < 1. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1.75$

$$\begin{aligned} h\left(\exp\left(\frac{-\ln(1.75)}{0.75}\right)\right) &= \left[\exp\left(\frac{-\ln(1.75)}{0.75}\right)\right]^{1.75} - \exp\left(\frac{-\ln(1.75)}{0.75}\right) \\ h(0.47) &= 0.27 - 0.47 \\ &= -0.2 < 1. \end{aligned}$$

Donc $\forall \alpha \in]1, 2[$

$$h(t) = t^\alpha - t < 1 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Alors

$$G^* = \sup\{\|G(t, s)\|\} < \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

La condition (2.7) est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned} G^* \int_0^1 p(s) ds &< G^* \int_0^1 \frac{2}{5 + \cos(s)} ds, \\ &< G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \cos(s)} ds. \end{aligned}$$

On a pour chaque $t \in [0, 1]$

$$0.4 < \cos(t) \leq 1.$$

Alors

$$\frac{14}{10} < \cos(t) + 1 \leq 2.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\cos(t) + 1} < \frac{10}{14}.$$

$$\begin{aligned} G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \cos(s)} ds &< \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 \frac{10}{14} ds \\ &= \frac{10}{14\Gamma(\alpha + 1)} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Est satisfait pour chaque $\alpha \in]1, 2[$.

Alors d'après le Théorème 2.1.1, le problème (2.9) a une solution sur $[0, 1]$.

Exemple 2

$$\begin{cases} {}^c D^{\frac{3}{2}} y_n(t) = \frac{2}{19 + \cos(t)} |y_n|, & \forall t \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ y_n(0) = 0, \\ y_n(1) = 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

On a

$$\alpha = \frac{3}{2},$$

posons

$$E = l^1 = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty \right\}$$

avec la norme

$$\|y\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \text{ et } f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$$

Soit $x \in E$, tel que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$,

on pose

$$f_n(t, x) = \frac{2}{19 + \cos(t)} |x_n|, \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times E.$$

Alors

$$f(t, x) = \frac{2}{19 + \cos(t)} x, \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times E.$$

(H1) est vérifiée parce que

(1) $t \rightarrow f(t, x)$ est **mesurable** pour chaque $x \in E$

$t \rightarrow f(t, x)$ continue puisque est une somme et une multiplication de fonctions continues. Donc f est mesurable $\forall x \in E$.

(2) $x \rightarrow f(t, x)$ est claire que **continue** presque par tous $t \in [0, 1]$.

Après (1) et (2) alors l'application f est **Caratheodory**

(H2) Vérifiée en prenant

$$p(t) = \frac{2}{5 + \cos(t)}.$$

Il est clair que $p \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$.

Avec pour $t \in [0, 1]$ et chaque $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\|_E &= \left\| \frac{2}{19 + \cos(t)} x \right\|_E \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{19 + \cos(t)} x_n \right| \\ &\leq \frac{2}{19 + \cos(t)} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\ &\leq \frac{2}{5 + \cos(t)} \|x\|_E. \end{aligned}$$

(H3) Il est réalisé comme dans l'exemple précédent

De (2.7) la fonction G est donnée par

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si \quad t \leq s \leq T. \end{cases}$$

Pour $T = 1$ nous trouvons

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}(t-s)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}t(1-s)^{\frac{1}{2}} & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}t(1-s)^{\frac{1}{2}} & si \quad t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Maintenant, nous calculons l'intégration $\int_0^1 G(t, s)ds$ pour trouver de la valeur

$$G^* = \sup\{\|G(t, s)\|, (t, s) \in [0, T] \times [0, T]\}.$$

Alors

$$\int_0^1 G(t, s)ds = \int_0^t G(t, s)ds + \int_t^1 G(t, s)ds,$$

calculer la première intégrale de côte droite

$$\begin{aligned}
 \int_0^t G(t, s) ds &= \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \frac{t(1-s)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right) ds \\
 &= \left[-\frac{(t-s)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{t(1-s)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} \right]_0^t \\
 &= \frac{t(1-t)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} - \frac{t}{\Gamma(\frac{5}{2})} \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

calculer la deuxième intégrale de côte droite

$$\begin{aligned}
 \int_t^1 G(t, s) ds &= - \int_t^1 \frac{t(1-s)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} ds \\
 &= \left[\frac{t(1-s)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} \right]_t^1 \\
 &= \frac{t}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} [0 - (1-t)^{\frac{3}{2}}] \\
 &= -\frac{t(1-t)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

l'intégrale de côte gauche, en utilisant (1) et (2) nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 G(t, s) ds &= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} - \frac{t}{\Gamma(\frac{5}{2})} \\
 &= \frac{t^{\frac{3}{2}} - t}{\Gamma(\frac{5}{2})}.
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons chercher sur la limite supérieure de $\|G(t, s)\|$.

On pose

$$\begin{aligned}
 h(t) &= t^{\frac{3}{2}} - t, \\
 h'(t) &= \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} - 1.
 \end{aligned}$$

La valeur de dérivée est égale zéro

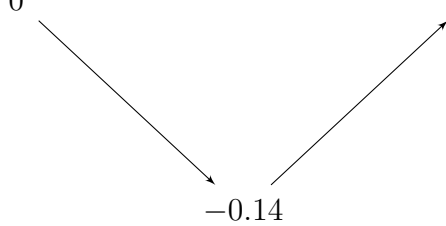
$$\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

$$\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$t = \frac{4}{9}$$

$$h'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{9}$$

x	0	$\frac{4}{9}$	1
$h'(x)$	—	0	+
$h(x)$	0		

donc

$$h(t) = t^{1.5} - t < 1 \quad \forall t \in [0, 1],$$

alors

$$G^* = \sup\{\|G(t, s)\|\} < \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)},$$

$$\Rightarrow G^* < \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)},$$

puisque

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right), \\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ &\simeq 0.88. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right), \\ &= \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \\ &\simeq 1.32. \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = 0.75$, et $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 1.13$.

Alors

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} < \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

La condition (2.7) est satisfaite avec $T = 1$.

En effet

$$\begin{aligned} G^* \int_0^1 p(s) ds &< G^* \int_0^1 \frac{2}{5 + \cos(s)} ds, \\ &< G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \cos(s)} ds. \end{aligned}$$

On a pour chaque $t \in [0, 1]$.

$$0.4 < \cos(t) \leq 1,$$

alors

$$\frac{14}{10} < \cos(t) + 1 \leq 2,$$

donc

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\cos(t) + 1} < \frac{10}{14}.$$

$$\begin{aligned} G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \cos(s)} ds &< \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^1 \frac{10}{14} ds \\ &= \frac{10}{14 \times 0.88} \\ &= \frac{10}{12.32} \\ &= 0.811 \\ &< 1. \end{aligned}$$

Alors d'après le Théorème 2.1.1, le problème (2.10) a une solution sur $[0, 1]$.

Exemple 3

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y_n(t) = \frac{3}{10 + \sin(t)} |y_n|, & \forall t \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ y_n(0) = 0, \\ y_n(1) = 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Posons

$$E = l^1 = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty \right\}$$

avec la norme

$$\|y\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \text{ et } f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$$

Soit $x \in E$, tel que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$

Donc

$$f_n(t, x) = \frac{3}{10 + \sin(t)} |x_n|, (t, x) \in [0, 1] \times E.$$

Alors

$$f(t, x) = \frac{3}{10 + \sin(t)} x, (t, x) \in [0, 1] \times E.$$

(H1) est vérifiée parce que

(1) $t \rightarrow f(t, x)$ est **mesurable** pour chaque $x \in E$:

$t \rightarrow f(t, x)$ continue puisque est une somme et une multiplication de fonctions continues. Donc f est mesurable $\forall x \in E$.

(2) $x \rightarrow f(t, x)$ est **continue** presque par tous $t \in [0, 1]$.

Soit $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\|_E &= \left\| \frac{3}{10 + \sin(t)} x - \frac{3}{10 + \sin(t)} y \right\|_E \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3}{10 + \sin(t)} x_n - \frac{3}{10 + \sin(t)} y_n \right| \\ &\leq \left| \frac{3}{10 + \sin(t)} \right| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| \\ &\leq \frac{3}{10} \|x - y\|. \end{aligned}$$

On trouve $k = \frac{3}{10} < 1$.

Donc l'application f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue, donc continue.

Après (1) et (2) alors l'application f est **Caratheodory**

(H2) Vérifiée en prenant

$$p(t) = \frac{3}{4 + \sin(t)}.$$

Il est clair que $p \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$.

Avec pour $t \in [0, 1]$ et chaque $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\|_E &= \left\| \frac{3}{10 + \sin(t)} x \right\|_E \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3}{10 + \sin(t)} x_n \right| \\ &\leq \frac{3}{10 + \sin(t)} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\ &\leq \frac{3}{4 + \sin(t)} \|x\|_E \end{aligned}$$

(H3) D'après (H2) , on a

$$\|f(t, x)\|_E \leq \frac{3}{4 + \sin(t)} \|x\|_E$$

Soit B un sous ensemble borné dans E et $x \in B$

Alors $\forall x \in B \subset E$. Nous définissons $f(t, B) \doteq \{f(t, x), x \in B\}$

$$f(t, B) \subset p(t)B$$

c'est à dire

$$\frac{3}{10 + \sin(t)} B \subset \frac{3}{4 + \sin(t)} B$$

Après avoir appliqué la deuxième propriété de la mesure de non compacité 2 et la définition 1.1.6, nous trouvons

$$\begin{aligned} \mu(f(t, B)) &\leq \mu\left(\frac{3}{4 + \sin(t)} B\right), \\ &\leq \left|\frac{3}{4 + \sin(t)}\right| \mu(B), \end{aligned}$$

et comme $p(t) > 0$ pour chaque $t \in [0, 1]$.

Alors

$$\mu(f(t, B)) \leq \frac{3}{4 + \sin(t)} \mu(B).$$

De 2.7 la fonction G est donnée par

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t - s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T - s)^{\alpha-1} & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{t}{T}(T - s)^{\alpha-1} & \text{si } t \leq s \leq T. \end{cases}$$

Pour $T = 1$ nous trouvons

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t - s)^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t(1 - s)^{\alpha-1} & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t(1 - s)^{\alpha-1} & \text{si } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Un calcul simple donne

$$G^* < \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.$$

La condition 2.7 est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned} G^* \int_0^1 p(s) ds &< G^* \int_0^1 \frac{3}{4 + \sin(s)} ds \\ &< G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \sin(s)} ds. \end{aligned}$$

On a pour chaque $t \in [0, 1]$.

$$0 \leq \sin(t) < 1,$$

$$\begin{aligned} G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \sin(s)} ds &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{1 + 0} ds \\ &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Est satisfait pour chaque $\alpha \in]1, 2[$.

Alors d'après le Théorème 2.1.1, le problème(2.11) a une solution sur $[0, 1]$.

Exemple 4

Soit le problème fractionnaire aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = \frac{2}{18 + \sinh(t)} |y(t)|, t \in [0, 1], 1 < \alpha \leq 2, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

On pose :

$$E = [0, +\infty[$$

et

$$f(t, x) = \frac{2}{18 + \sinh(t)} x, \quad (t, x) \in [0, 1] \times [0, +\infty[$$

(H1) (1)

$$f(t, x) = \frac{2}{18 + \sinh(t)} x,$$

est **mesurable** par rapport à $t \in [0, 1]$

Comme $t \rightarrow f(t, x)$ continue parce que est une somme et une multiplication de fonctions continues. Donc f est mesurable $\forall x \in E$.

(2) Il est claire que f est **continue** par rapport à x presque partout sur $[0, +\infty[$.

Après **(1)** et **(2)** alors la fonction vérifient les conditions de **Carathéodory**.

(H2) est vérifiée puisque

$$\begin{aligned}\|f(t, x)\|_E &= \left| \frac{2}{18 + \sinh(t)} x \right| \\ &\leq |x| \left| \frac{2}{18 + \sinh(t)} \right| \\ &\leq \frac{2}{18 + \sinh(t)} |x| \\ &= p(t) \|x\|.\end{aligned}$$

(H3) D'après (H2) , on a

$$\|f(t, x)\|_E \leq \frac{2}{18 + \sinh(t)} \|x\|_E.$$

Soit B un sous ensemble borné dans $E = [0, +\infty[$ et $x \in B$

$$f(t, B) \subset \frac{2}{18 + \sinh(t)} B.$$

Après avoir appliqué la deuxième propriété de la mesure de non compacité 2 et la définition 1.1.6, nous trouvons

$$\begin{aligned}\mu(f(t, B)) &\leq \mu\left(\frac{2}{18 + \sinh(t)} B\right) \\ &\leq \left| \frac{2}{18 + \sinh(t)} \right| \mu(B),\end{aligned}$$

et comme $\frac{2}{18 + \sinh(t)}$ est positive pour chaque $t \in [0, 1]$.

Alors

$$\mu(f(t, B)) \leq \frac{2}{18 + \sinh(t)} \mu(B).$$

Pour $T = 1$ nous trouvons

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t(1-s)^{\alpha-1} & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t(1-s)^{\alpha-1} & \text{si } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Un calcul simple donne

$$G^* < \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.$$

La condition (2.7) est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned}G^* \int_0^1 p(s) ds &< G^* \int_0^1 \frac{2}{18 + \sinh(s)} ds, \\ &< G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \sinh(s)} ds.\end{aligned}$$

On a pour chaque $t \in [0, 1]$.

$$0 \leq \sinh(t) \leq 1.175,$$

$$\begin{aligned} G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \sinh(s)} ds &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{1 + 0} ds \\ &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Est satisfait pour chaque $\alpha \in]1, 2[$.

Alors d'après le Théorème 2.1.1, le problème (2.12) a une solution sur $[0, 1]$.

Exemple 5

Soit le problème fractionnaire aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = \frac{2}{10 + \cosh(t)} |y(t)|, t \in [0, 1], 1 < \alpha \leq 2, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

On pose :

$$E = [0, +\infty[$$

et

$$f(t, x) = \frac{2}{10 + \cosh(t)} x, \quad (t, x) \in [0, 1] \times [0, +\infty[.$$

(H1) (1)

$$f(t, x) = \frac{2}{10 + \cosh(t)} x,$$

est **mesurable** par rapport à $t \in [0, 1]$

Comme $t \rightarrow f(t, x)$ continue parce que est une somme et une multiplication de fonctions continues. Donc f est mesurable $\forall x \in E$.

(2) Il est claire que f est **continue** par rapport à x presque partout sur $[0, +\infty[$.

Après **(1)** et **(2)** alors la fonction vérifient les conditions de **Carathéodory**.

(H2) est vérifiée puisque

$$\begin{aligned}\|f(t, x)\|_E &= \left| \frac{2}{10 + \cosh(t)} x \right| \\ &\leq |x| \left| \frac{2}{10 + \cosh(t)} \right| \\ &\leq \frac{2}{10 + \cosh(t)} |x| \\ &= p(t) \|x\|.\end{aligned}$$

(H3) Il est clairement réalisé.

Pour $T = 1$ nous trouvons

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t(1-s)^{\alpha-1} & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t(1-s)^{\alpha-1} & \text{si } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Un calcul simple donne

$$G^* < \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$$

La condition (2.7) est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned}G^* \int_0^1 p(s) ds &< G^* \int_0^1 \frac{2}{10 + \cosh(s)} ds \\ &< G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \cosh(s)} ds.\end{aligned}$$

On a pour chaque $t \in [0, 1]$

$$1 \leq \cosh(t) \leq 1.543,$$

alors

$$2 \leq \cosh(t) + 1 \leq 2.543,$$

donc

$$0.393 \leq \frac{1}{\cosh(t) + 1} \leq \frac{1}{2},$$

alors

$$\begin{aligned}G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \cosh(s)} ds &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{2} ds \\ &< \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \\ &< 1.\end{aligned}$$

Est satisfait pour chaque $\alpha \in]1, 2[$.

Alors d'après le Théorème 2.1.1, le problème(2.13) a une solution sur $[0, 1]$.

Chapitre 3

Problème aux limites avec des conditions intégrales

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions du problème aux limites avec des conditions intégrales suivant :

$${}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), t \in [0, T], 1 < \alpha \leq 2, \quad (3.1)$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^T g(s, y(s)) ds, \quad (3.2)$$

$$y(T) + y'(T) = \int_0^T h(s, y(s)) ds, \quad (3.3)$$

où ${}^c D^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, f, g et $h : [0, T] \times E \rightarrow E$ sont des fonctions données vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et E est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$. Nous consacrons la première section à l'existence des solutions du problème (3.1)-(3.3) qui est basé sur le théorème du point fixe de Mönch 3.1.1 et la deuxième section sera réservée à un exemple illustrant l'applicabilité des conditions imposées.

3.1 Existence des Solutions

Nous commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (3.1)-(3.3).

Définition 3.1.1 Une fonction $y \in AC^1([0, T], E)$ est dite une solution de (3.1)-(3.3) si elle satisfait l'équation 3.1 sur $[0, T]$, et les conditions (3.2)-(3.3).

Lemme 3.1.1 Soit $1 < \alpha \leq 2$ et $\sigma, \rho_1, \rho_2 : [0, T] \rightarrow E$ des fonctions continues. Le problème aux limites linéaire

$${}^c D^\alpha y(t) = \sigma(t), t \in [0, T], 1 < \alpha \leq 2, \quad (3.4)$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^T \rho_1(s) ds, \quad (3.5)$$

$$y(T) + y'(T) = \int_0^T \rho_2(s)ds, \quad (3.6)$$

a une solution unique donnée par

$$y(t) = P(t) + \int_0^T G(t, s)\sigma(s)ds,$$

avec

$$P(t) = \frac{T+1-t}{T+2} \int_0^T \rho_1(s)ds + \frac{t+1}{T+2} \int_0^T \rho_2(s)ds,$$

et

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(T-s)^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(T-s)^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{(t+1)(T-s)^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(T-s)^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } t \leq s \leq T. \end{cases}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha y(t) &= \sigma(t), t \in [0, T] \\ \Rightarrow I^{\alpha c} D^\alpha y(t) &= I^\alpha \sigma(t) \\ \Rightarrow y(t) &= I^\alpha \sigma(t) + c_0 + c_1 t \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma(s)ds + c_0 + c_1 t. \end{aligned}$$

On a les conditions (3.2) et (3.3) Donc

$$y(0) = c_0 = y'(0) + \int_0^T \rho_1(s)ds,$$

parce que

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma(s)ds + c_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{d}{dt} (t-s)^{\alpha-1} \sigma(s)ds + c_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2} \sigma(s)ds + c_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \sigma(s)ds + c_1, \end{aligned}$$

pour $t = 0$, on trouve

$$y'(0) = c_1,$$

avec

$$y(T) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sigma(s)ds + c_0 + c_1 T,$$

alors

$$y'(T) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-2} \sigma(s) ds + c_1,$$

En combinant $y(T)$ et $y'(T)$ on trouve

$$\begin{aligned} y(T) + y'(T) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds + c_0 + c_1 T \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-2} \sigma(s) ds + c_1, \end{aligned}$$

on a

$$c_0 = y'(0) + \int_0^T \rho_1(s) ds,$$

et

$$y(T) + y'(T) = \int_0^T \rho_2(s) ds,$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^T \rho_2(s) ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds + c_1 + \int_0^T \rho_1(s) ds \\ &\quad + c_1 T + \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-2} \sigma(s) ds + c_1. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)(T+2)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds - \frac{1}{(T+2)} \int_0^T \rho_1(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)(T+2)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-2} \sigma(s) ds + \frac{1}{(T+2)} \int_0^T \rho_2(s) ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)(T+2)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)(T+2)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-2} \sigma(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{(T+2)} \int_0^T \rho_1(s) ds + \frac{1}{(T+2)} \int_0^T \rho_2(s) ds + \int_0^T \rho_1(s) ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)(T+2)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)(T+2)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-2} \sigma(s) ds - \frac{1}{(T+2)} \int_0^T \rho_1(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{(T+2)} \int_0^T \rho_2(s) ds + \int_0^T \rho_1(s) ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha)(T+2)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds \\ &\quad - \frac{t}{(T+2)} \int_0^T \rho_1(s) ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha - 1)(T+2)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-2} \sigma(s) ds + \frac{t}{(T+2)} \int_0^T \rho_2(s) ds, \end{aligned}$$

donc

$$y(t) = P(t) + \int_0^T G(t, s)\sigma(s)ds.$$

Inversement On a

$$\begin{aligned} y(t) &= P(t) + \int_0^T G(t, s)\sigma(s)ds, \\ {}^c D^\alpha y(t) &= {}^c D^\alpha \left(P(t) + \int_0^T G(t, s)\sigma(s)ds \right). \end{aligned}$$

Par la définition 1.3.3

$${}^c D^\alpha y(t) = I^{2-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^2 (P(t)) + I^{2-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \left(\int_0^T G(t, s)\sigma(s)ds \right),$$

on a

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^2 \left(\frac{T+1-t}{T+2} \int_0^T \rho_1(s)ds + \frac{t+1}{T+2} \int_0^T \rho_2(s)ds \right) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha y(t) &= I^{2-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \left(\int_0^T G(t, s)\sigma(s)ds \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \left(\int_0^T G(t, \tau)\sigma(\tau)d\tau \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \left(\frac{d}{ds} \right)^2 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} \sigma(\tau)d\tau \right. \\ &\quad - \frac{(s+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (T-\tau)^{\alpha-1} \sigma(\tau)d\tau - \frac{(s+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)} \int_0^s (T-\tau)^{\alpha-2} \sigma(\tau)d\tau \\ &\quad \left. - \frac{(s+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \int_s^T (T-\tau)^{\alpha-1} \sigma(\tau)d\tau - \frac{(s+1)}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)} \int_s^T (T-\tau)^{\alpha-2} \sigma(\tau)d\tau \right] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \left(\frac{d}{ds} \right)^2 \left[I^\alpha \sigma(s) - \frac{(s+1)}{(T+2)} I^\alpha \sigma(T) - \frac{(s+1)}{(T+2)} I^{\alpha-1} \sigma(T) \right] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} I^{\alpha-2} \sigma(s) ds \\ &= I^{2-\alpha} I^{\alpha-2} \sigma(t) \\ &= \sigma(t), \end{aligned}$$

donc

$${}^c D^\alpha y(t) = \sigma(t).$$

D'où l'équivalence sus-citée dans le lemme.

Lemme 3.1.2 Le problème aux limites (3.1)-(3.3) a une solution y , si et seulement si $y \in C([0, T], E)$ satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = P_y(t) + \int_0^T G(t, s)f(s, y(s))ds,$$

avec

$$P_y(t) = \frac{T+1-t}{T+2} \int_0^T g(s, y(s)) ds + \frac{t+1}{T+2} \int_0^T h(s, y(s)) ds,$$

et

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(T-s)^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(T-s)^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{(t+1)(T-s)^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(T-s)^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } t \leq s \leq T. \end{cases} \quad (3.7)$$

Remarque 3.1.1 Il est clair que la fonction $t \rightarrow \int_0^T |G(t, s)| ds$ est continue sur $[0, T]$, et est donc bornée. Soit

$$G^{**} = \sup \left\{ \int_0^T |G(t, s)| ds, t \in [0, T] \right\}.$$

Nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H1) Les fonctions $f, g, h : [0, T] \times E \rightarrow E$ satisfont aux conditions de Carathéodory.

(H2) Ils existent $p_f, p_g, p_h \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}_+)$ tel que

$$\begin{aligned} \|f(t, y)\| &\leq p_f(t) \|y\| & p.p.t \in [0, T]; y \in E, \\ \|g(t, y)\| &\leq p_g(t) \|y\| & p.p.t \in [0, T]; y \in E, \\ \|h(t, y)\| &\leq p_h(t) \|y\| & p.p.t \in [0, T]; y \in E. \end{aligned}$$

(H3) Pour p.p. $t \in [0, T]$ et chaque ensemble borné $B \subset E$ nous avons

$$\begin{aligned} \mu(f(t, B)) &\leq p_f(t) \mu(B), \\ \mu(g(t, B)) &\leq p_g(t) \mu(B), \\ \mu(h(t, B)) &\leq p_h(t) \mu(B). \end{aligned}$$

Théorème 3.1.1 Supposons que les hypothèses **(H1)** - **(H3)** sont vérifiées. Si

$$\frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}] + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} < 1, \quad (3.8)$$

alors le problème aux limites (3.1)-(3.3) a au moins une solution.

Preuve :

On transforme le problème (3.1)- (3.3) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $N : C([0, T], E) \rightarrow C([0, T], E)$ défini par :

$$N(y)(t) = P_y(t) + \int_0^T G(t, s) f(s, y(s)) ds,$$

où

$$P_y(t) = \frac{T+1-t}{T+2} \int_0^T g(s, y(s)) ds + \frac{t+1}{T+2} \int_0^T h(s, y(s)) ds,$$

et la fonction $G(t, s)$ est donnée par 3.7. D'après le Lemme 3.1.2 les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème 3.1. Soit $R > 0$ et considérer l'ensemble

$$D_R = \{y \in C([0, T], E) : \|y\|_\infty \leq R\}.$$

Il est clair que le sous-ensemble D_R est fermé, borné, et convexe. Nous allons montrer que N satisfait les hypothèses du théorème . La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : continuité de N Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \rightarrow y$ dans $C([0, 1], E)$. Alors, pour chaque $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \|N(y_n)(t) - N(y)(t)\| &= \left\| \frac{T+1-t}{T+2} \int_0^T (g(s, y_n(s)) - g(s, y(s))) ds \right. \\ &\quad + \frac{t+1}{T+2} \int_0^T (h(s, y_n(s)) - h(s, y(s))) ds \\ &\quad \left. + \int_0^T G(t, s) (f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))) ds \right\| \end{aligned}$$

On utilise la relation trigonométrique, nous trouvons

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \frac{T+1-t}{T+2} \int_0^T (g(s, y_n(s)) - g(s, y(s))) ds \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{t+1}{T+2} \int_0^T (h(s, y_n(s)) - h(s, y(s))) ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_0^T G(t, s) (f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))) ds \right\| \\ &\leq \frac{T+1-t}{T+2} \int_0^T \|g(s, y_n(s)) - g(s, y(s))\| ds \\ &\quad + \frac{t+1}{T+2} \int_0^T \|h(s, y_n(s)) - h(s, y(s))\| ds \\ &\quad + \int_0^T |G(t, s)| \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds, \end{aligned}$$

et puisque $t \leq T$, alors

$$\begin{aligned} &\leq \frac{T+1}{T+2} \int_0^T \|g(s, y_n(s)) - g(s, y(s))\| ds \\ &\quad + \frac{T+1}{T+2} \int_0^T \|h(s, y_n(s)) - h(s, y(s))\| ds \\ &\quad + \int_0^T |G(t, s)| \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds. \end{aligned}$$

Soit $m > 0$ tel que

$$\|y_n\|_\infty \leq m, \quad \|y\|_\infty \leq m.$$

Par **(H2)** nous avons

$$\begin{aligned}
 \|g(s, y_n(s)) - g(s, y(s))\| &\leq \|g(s, y_n(s))\| + \|g(s, y(s))\| \\
 &\leq 2mp_g(s) = \sigma_1(s), \\
 \|h(s, y_n(s)) - h(s, y(s))\| &\leq \|h(s, y_n(s))\| + \|h(s, y(s))\| \\
 &\leq 2mp_h(s) = \sigma_2(s), \\
 |G(., s)| \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| &\leq |G(., s)| (\|f(s, y_n(s))\| + \|f(s, y(s))\|) \\
 &\leq 2m|G(., s)|p_f(s) = \sigma_3(s).
 \end{aligned}$$

Clairement, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+)$.

Comme f, g et h sont des fonctions Carathéodory, alors f, g, h sont mesurables par rapport à y , donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \|N(y_n)(t) - N(y)(t)\| &\leq \frac{T+1}{T+2} \int_0^T \lim_{n \rightarrow \infty} \|g(s, y_n(s)) - g(s, y(s))\| ds \\
 &+ \frac{T+1}{T+2} \int_0^T \lim_{n \rightarrow \infty} \|h(s, y_n(s)) - h(s, y(s))\| ds \\
 &+ \int_0^T \|G(t, s)\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds, \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\|N(y_n)(t) - N(y)(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

D'où la continuité de l'opérateur N .

Étape 2 : N applique D_R dans D_R

Pour chaque $y \in D_R$ par **(H2)** et 3.8 nous avons pour chaque $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
 \|N(y)(t)\| &= \left\| P_y(t) + \int_0^T G(t, s) f(s, y(s)) ds \right\|, \\
 &\leq \|P_y(t)\| + \left\| \int_0^T G(t, s) f(s, y(s)) ds \right\|, \\
 &\leq \|P_y(t)\| + \int_0^T |G(t, s)| \|f(s, y(s))\| ds, \\
 &\leq \frac{(T+1-t)}{T+2} \int_0^T \|g(s, y(s))\| ds + \frac{(t+1)}{T+2} \int_0^T \|h(s, y(s))\| ds \\
 &+ \int_0^T |G(t, s)| \|f(s, y(s))\| ds,
 \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse **(H2)**

$$\begin{aligned} \|N(y)(t)\| &\leq \frac{(T+1)}{T+2} \|p_g\|_{L^\infty} \|y\|_\infty \int_0^T ds + \frac{(T+1)}{T+2} \|p_h\|_{L^\infty} \|y\|_\infty \int_0^T ds \\ &\quad + \|p_f\|_{L^\infty} \|y\|_\infty \int_0^T |G(t, s)| ds, \end{aligned}$$

puisque $\|y\|_\infty < R$

$$\begin{aligned} \|N(y)(t)\| &\leq R \left(\frac{T(T+1)}{T+2} \|p_g\|_{L^\infty} + \frac{T(T+1)}{T+2} \|p_h\|_{L^\infty} + \|p_f\|_{L^\infty} G^{**} \right) \\ &< R. \end{aligned}$$

Donc $N(y) \in D_R$, alors $N(D_R) \subset D_R$.

Étape 3 : $N(D_R)$ est bornée et équicontinue.

Par l'étape 2 :

$$N(D_R) \subset D_R,$$

puisque D_R est borné dans $C([0, T]; E)$, alors $N(D_R)$ l'est aussi.

Pour l'équicontinuité de $N(D_R)$:

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$ et $y \in D_R$. Alors

$$\begin{aligned} \|(Ny)(t_2) - (Ny)(t_1)\| &= \left\| \frac{T+1-t_2}{T+2} \int_0^T g(s, y(s)) ds + \frac{t_2+1}{T+2} \int_0^T h(s, y(s)) ds \right. \\ &\quad + \int_0^T G(t_2, s) f(s, y(s)) ds - \frac{T+1-t_1}{T+2} \int_0^T g(s, y(s)) ds \\ &\quad \left. - \frac{t_1+1}{T+2} \int_0^T h(s, y(s)) ds - \int_0^T G(t_1, s) f(s, y(s)) ds \right\|, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &= \left\| -\frac{t_2-t_1}{T+2} \int_0^T g(s, y(s)) ds + \frac{t_2-t_1}{T+2} \int_0^T h(s, y(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T (G(t_2, s) - G(t_1, s)) f(s, y(s)) ds \right\| \end{aligned}$$

On utilise la relation trigonométrique, nous trouvons

$$\begin{aligned} \|(Ny)(t_2) - (Ny)(t_1)\| &\leq \frac{(t_2-t_1)}{T+2} \int_0^T \|g(s, y(s))\| ds + \frac{(t_2-t_1)}{T+2} \int_0^T \|h(s, y(s))\| ds \\ &\quad + \int_0^T |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \|f(s, y(s))\| ds. \end{aligned}$$

Par **(H2)**

$$\begin{aligned} \|(Ny)(t_2) - (Ny)(t_1)\| &\leq \frac{t_2 - t_1}{T + 2} \|p_g\|_{L^\infty} \|y\|_\infty \int_0^T ds + \frac{t_2 - t_1}{T + 2} \|p_h\|_{L^\infty} \|y\|_\infty \int_0^T ds \\ &\quad + \|p_f\|_{L^\infty} \|y\|_\infty \int_0^T |G(t_2, s) - G(t_1, s)| ds. \end{aligned}$$

comme $\|y\|_\infty < R$, donc

$$\begin{aligned} \|(Ny)(t_2) - (Ny)(t_1)\| &\leq RT \left(\frac{t_2 - t_1}{T + 2} (\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}) \right) \\ &\quad + R \|p_f\|_{L^\infty} \int_0^T |G(t_2, s) - G(t_1, s)| ds. \end{aligned}$$

Puisque $G(., s)$ est continue alors le côté droit de l'inégalité tend vers 0 quand $t_1 \rightarrow t_2$.
Donc $N(D_R)$ est équicontinu.

Maintenant, soit V un sous ensemble de D_R tel que :

$$V \subset \overline{\text{conv}}(N(V) \cup \{0\})$$

est borné et équicontinu, et donc la fonction $v \rightarrow v(t) = \mu(V(t))$ est continue.

Par **(H3)**, et les propriétés de la mesure nous avons pour chaque $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \mu(V(t)) \\ &< \mu(N(V)(t) \cup \{0\}) \\ &\leq \mu(N(V)(t)) \end{aligned}$$

$$\text{car } \mu(N(V)(t) \cup \{0\}) = \max\{\mu(N(V)(t)), \mu(\{0\})\}$$

$$\begin{aligned} \mu(N(V)(t)) &= \mu\left(P_y(t) + \int_0^T G(t, s)f(s, y(s))ds\right) \\ &= \mu\left(\frac{(T+1-t)}{T+2} \int_0^T g(s, y(s))ds + \frac{t+1}{T+2} \int_0^T h(s, y(s))ds\right. \\ &\quad \left.+ \int_0^T G(t, s)f(s, y(s))ds\right) \\ &\leq \mu\left(\frac{(T+1-t)}{T+2} \int_0^T g(s, y(s))ds\right) + \mu\left(\frac{t+1}{T+2} \int_0^T h(s, y(s))ds\right) \\ &\quad + \mu\left(\int_0^T G(t, s)f(s, y(s))ds\right) \\ &\leq \left|\frac{T+1-t}{T+2}\right| \int_0^T p_g(s)\mu(V(s))ds + \left|\frac{t+1}{T+2}\right| \int_0^T p_h(s)\mu(V(s))ds \\ &\quad + \int_0^T |G(t, s)|p_f(s)\mu(V(s))ds \quad (\text{parH3}), \end{aligned}$$

pour $t \leq T$, donc

$$\begin{aligned} &\leq \frac{T(T+1)}{T+2} \|p_g\|_{L^\infty} v(s) + \frac{T(T+1)}{T+2} \|p_h\|_{L^\infty} v(s) + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} v(s) \\ \max |v(t)| &\leq \max |v(s)| \left[\frac{T(T+1)}{T+2} (\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}) + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_\infty \left[\frac{T(T+1)}{T+2} (\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}) + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} \right].$$

Alors

$$\|v\|_\infty - \|v\|_\infty \left[\frac{T(T+1)}{T+2} (\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}) + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} \right] < 0.$$

Ceci signifie que

$$\|v\|_\infty \left[1 - \left[\frac{T(T+1)}{T+2} (\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}) + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} \right] \right] < 0.$$

Puisque :

$$\frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_\infty + \|p_h\|_\infty] + G^{**} \|p_f\|_\infty < 1.$$

On a forcément :

$$\begin{aligned} \|v\|_\infty &= 0 \\ &\Leftrightarrow v(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu(V(t)) = 0. \end{aligned}$$

Donc $V(t)$ est relativement compact dans E .

Et d'après le théorème d'**Ascoli-Arzelà** 1.2.6 , V est relativement compact dans D_R .

Appliquons maintenant le théorème 3.1.1 , nous concluons que N a un point fixe qui est une solution du problème 3.1- 3.3.

3.2 Exemples

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Exemple 1

Considérons le problème fractionnaire aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = \frac{2}{18 + \cos(t)} |y(t)|, & t \in [0, 1], 1 < \alpha \leq 2, \\ y(0) - y'(0) = \int_0^1 \frac{1}{5 + \cos(5t)} |y(t)| dt, \\ y(1) + y'(1) = \int_0^1 \frac{1}{3 + \cos(3t)} |y(t)| dt, \end{cases} \quad (3.9)$$

on pose :

$$E = [0, +\infty[,$$

avec

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \frac{2}{18 + \cos(t)} x, & (t, x) &\in [0, 1] \times [0, +\infty[, \\ g(t, x) &= \frac{1}{5 + \cos(5t)} x, & (t, x) &\in [0, 1] \times [0, +\infty[, \\ h(t, x) &= \frac{1}{3 + \cos(3t)} x, & (t, x) &\in [0, 1] \times [0, +\infty[. \end{aligned}$$

(H1) (1)

$$f(t, x) = \frac{2}{18 + \cos(t)} x,$$

est **mesurable** par rapport à $t \in [0, 1]$:

Comme $t \rightarrow f(t, x)$ continue parce que est une somme et une multiplication de fonctions continues. Donc f est mesurable $\forall x \in E$.

De même pour $g(t, x)$ et $h(t, x)$

(2) Il est claire que f est **continue** par rapport à x presque partout sur $[0, +\infty[$.

De même pour $g(t, x)$ et $h(t, x)$.

Après **(1)** et **(2)** alors les trois fonctions vérifient les conditions de **Carathéodory**.

(H2) est vérifiée puisque

$$\begin{aligned}
 \|f(t, x)\|_E &= \left\| \frac{2}{18 + \cos(t)} x \right\|_E, \\
 &= \left| \frac{2}{18 + \cos(t)} x \right|, \\
 &\leq |x| \left| \frac{2}{18 + \cos(t)} \right|, \\
 &\leq \frac{2}{18 + \cos(t)} |x|, \\
 &= p_f(t) \|x\|_E,
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \|g(t, x)\|_E &= \left\| \frac{1}{5 + \cos(5t)} x \right\|_E, \\
 &= \left| \frac{1}{5 + \cos(5t)} x \right|, \\
 &\leq |x| \left| \frac{1}{5 + \cos(5t)} \right|, \\
 &\leq \frac{1}{5 + \cos(5t)} |x|, \\
 &= p_g(t) \|x\|_E,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \|h(t, x)\|_E &= \left\| \frac{1}{3 + \cos(3t)} x \right\|_E, \\
 &= \left| \frac{1}{3 + \cos(3t)} x \right|, \\
 &\leq |x| \left| \frac{1}{3 + \cos(3t)} \right|, \\
 &\leq \frac{1}{3 + \cos(3t)} |x|, \\
 &= p_h(t) \|x\|_E.
 \end{aligned}$$

(H3) D'après (H2) , on a

$$\|f(t, x)\|_E \leq \frac{2}{18 + \cos(t)} \|x\|_E.$$

Soit B un sous ensemble borné dans E et $x \in B$

$$f(t, B) \subset \frac{2}{18 + \cos(t)} B,$$

après avoir appliqué la deuxième propriété de la mesure de non compacité 2

et la définition 1.1.6, nous trouvons

$$\begin{aligned}\mu(f(t, B)) &\leq \mu\left(\frac{2}{18 + \cos(t)} B\right) \\ &\leq \left|\frac{2}{18 + \cos(t)}\right| \mu(B),\end{aligned}$$

et comme $\frac{2}{18 + \cos(t)} > 0$ pour chaque $t \in [0, 1]$.

Alors

$$\mu(f(t, B)) \leq \frac{2}{18 + \cos(t)} \mu(B).$$

De la même manière avec h et g .

La fonction $G(t, s)$ est donné par :

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(t, s) ds &= \int_0^t G(t, s) ds + \int_t^1 G(t, s) ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} \right) ds \\ &\quad + \int_t^1 \left(-\frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - \int_0^t \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} ds - \int_0^t \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} ds \\ &\quad - \int_t^1 \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} ds - \int_t^1 \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} ds \\ &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(t+1)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(t+1)}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(t+1)(1-t)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} \\ &\quad - \frac{(t+1)}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(t+1)(1-t)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)},\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 G(t, s) ds &\leq \frac{|t^\alpha|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|(t+1)(1-t)^\alpha|}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|t+1|}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|(t+1)(1-t)^{\alpha-1}|}{3\Gamma(\alpha)} \\
 &+ \frac{|t+1|}{3\Gamma(\alpha)} + \frac{|(t+1)(1-t)^\alpha|}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|(t+1)(1-t)^{\alpha-1}|}{3\Gamma(\alpha)} \\
 &< \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{3\Gamma(\alpha)} \\
 &+ \frac{2}{3\Gamma(\alpha)} + \frac{2}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{3\Gamma(\alpha)} \\
 &< \frac{3}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Donc :

$$G^{**} < \frac{3}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}.$$

La condition (3.8) est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned}
 &\frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}] + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} \\
 &\leq \frac{2}{3} [\|p_g\|_\infty + \|p_h\|_\infty] + \left(\frac{3}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \right) \|p_f\|_\infty.
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \|p_g\|_{L^\infty} &= \inf\{c > 0, \|p_g(t)\| \leq c\} \\
 \|p_g(t)\| &= \left\| \frac{1}{5 + \cos(5t)} \right\|,
 \end{aligned}$$

puisque

$$0 \leq \cos(5t) < 1 \quad \forall t \in [0, 1],$$

alors

$$5 \leq 5 + \cos(5t) < 6.$$

Donc

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5 + \cos(5t)} \leq \frac{1}{5}.$$

Alors

$$\left\| \frac{1}{5 + \cos(5t)} \right\| \leq \frac{1}{5}.$$

On conclue que

$$\|p_g\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{5}.$$

De même pour $\|p_h\|_{L^\infty}$ et $\|p_f\|_{L^\infty}$, puisque

$$\begin{aligned}
 \|p_h(t)\| &= \left\| \frac{1}{3 + \cos(3t)} \right\| \\
 &\leq \frac{1}{3},
 \end{aligned}$$

alors

$$\|p_h\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{3}.$$

Et

$$\begin{aligned} \|p_f(t)\| &= \left\| \frac{2}{18 + \cos(t)} \right\| \\ &\leq \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

donc

$$\|p_f\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{9}.$$

$$\begin{aligned} \frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}] + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} &\leq \frac{2}{3} \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right] + \left(\frac{3}{9\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{9\Gamma(\alpha)} \right) \\ &\leq \frac{16}{45} + \left(\frac{3}{9\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{9\Gamma(\alpha)} \right) \\ &< 1, \end{aligned}$$

est satisfaite pour chaque $\alpha \in]1, 2]$.

Alors d'après le Théorème 3.1.1, le problème (3.9) a une solution sur $[0, 1]$.

Exemple 2

Considérons le problème fractionnaire aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) &= \frac{2}{18 + \cos(t)} |y(t)|, & t \in [0, 1], \\ y(0) - y'(0) &= \int_0^1 \frac{1}{5 + \cos(5t)} |y(t)| dt, \\ y(1) + y'(1) &= \int_0^1 \frac{1}{3 + \cos(3t)} |y(t)| dt, \end{cases} \quad (3.10)$$

On pose :

$$E = [0, +\infty[, \quad \alpha = \frac{7}{4},$$

avec

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \frac{2}{18 + \cos(t)} x, & (t, x) &\in [0, 1] \times [0, +\infty[, \\ g(t, x) &= \frac{1}{5 + \cos(5t)} x, & (t, x) &\in [0, 1] \times [0, +\infty[, \\ h(t, x) &= \frac{1}{3 + \cos(3t)} x, & (t, x) &\in [0, 1] \times [0, +\infty[. \end{aligned}$$

(H1) (1)

$$f(t, x) = \frac{2}{18 + \cos(t)}x,$$

est **mesurable** par rapport à $t \in [0, 1]$:

Comme $t \rightarrow f(t, x)$ continue parce que est une somme et une multiplication de fonctions continues. Donc f est mesurable $\forall x \in E$.

De même pour $g(t, x)$ et $h(t, x)$

(2) Il est claire que f est **continue** par rapport à x presque partout sur $[0, +\infty[$.

De même pour $g(t, x)$ et $h(t, x)$.

Après (1) et (2) alors les trois fonctions vérifient les conditions de **Carathéodory**.
(H2) est vérifiée puisque

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &= \left\| \frac{2}{18 + \cos(t)}x \right\|, \\ &\leq \|x\| \left| \frac{2}{18 + \cos(t)} \right|, \\ &\leq \frac{2}{18 + \cos(t)} \|x\|, \\ &= p_f(t) \|x\|, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \|g(t, x)\| &= \left\| \frac{1}{5 + \cos(5t)}x \right\|, \\ &\leq \|x\| \left| \frac{1}{5 + \cos(5t)} \right|, \\ &\leq \frac{1}{5 + \cos(5t)} \|x\|, \\ &= p_g(t) \|x\|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|h(t, x)\| &= \left\| \frac{1}{3 + \cos(3t)}x \right\|, \\ &\leq \|x\| \left| \frac{1}{3 + \cos(3t)} \right|, \\ &\leq \frac{1}{3 + \cos(3t)} \|x\|, \\ &= p_h(t) \|x\|. \end{aligned}$$

(H3) Il est réalisé comme dans l'exemple précédent

Pour $T = 1$ la fonction $G(t, s)$ est donné par :

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\frac{7}{4}-1}}{\Gamma(\frac{7}{4})} - \frac{(t+1)(1-s)^{\frac{7}{4}-1}}{3\Gamma(\frac{7}{4})} - \frac{(t+1)(1-s)^{\frac{7}{4}-2}}{3\Gamma(\frac{7}{4}-1)} si & 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{(t+1)(1-s)^{\frac{7}{4}-1}}{3\Gamma(\frac{7}{4})} - \frac{(t+1)(1-s)^{\frac{7}{4}-2}}{3\Gamma(\frac{7}{4}-1)} si & t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

En le simplifiant on trouve

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\frac{3}{4}}}{\Gamma(\frac{7}{4})} - \frac{(t+1)(1-s)^{\frac{3}{4}}}{3\Gamma(\frac{7}{4})} - \frac{(t+1)(1-s)^{-\frac{1}{4}}}{3\Gamma(\frac{3}{4})} si & 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{(t+1)(1-s)^{\frac{3}{4}}}{3\Gamma(\frac{7}{4})} - \frac{(t+1)(1-s)^{-\frac{1}{4}}}{3\Gamma(\frac{3}{4})} si & t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(t, s)ds &= \int_0^t G(t, s)ds + \int_t^1 G(t, s)ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\frac{3}{4}}}{\Gamma(\frac{7}{4})} - \frac{(t+1)(1-s)^{\frac{3}{4}}}{3\Gamma(\frac{7}{4})} - \frac{(t+1)(1-s)^{-\frac{1}{4}}}{3\Gamma(\frac{3}{4})} \right) ds \\ &\quad + \int_t^1 \left(-\frac{(t+1)(1-s)^{\frac{3}{4}}}{3\Gamma(\frac{7}{4})} - \frac{(t+1)(1-s)^{-\frac{1}{4}}}{3\Gamma(\frac{3}{4})} \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\frac{3}{4}}}{\Gamma(\frac{7}{4})} ds - \int_0^t \frac{(t+1)(1-s)^{\frac{3}{4}}}{3\Gamma(\frac{7}{4})} ds - \int_0^t \frac{(t+1)(1-s)^{-\frac{1}{4}}}{3\Gamma(\frac{3}{4})} ds \\ &\quad - \int_t^1 \frac{(t+1)(1-s)^{\frac{3}{4}}}{3\Gamma(\frac{7}{4})} ds - \int_t^1 \frac{(t+1)(1-s)^{-\frac{1}{4}}}{3\Gamma(\frac{3}{4})} ds. \end{aligned}$$

Nous calculons l'intégration que nous trouvons

$$\begin{aligned} &= \frac{t^{\frac{7}{4}}}{\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{(t+1)(1-t)^{\frac{7}{4}}}{3\Gamma(\frac{11}{4})} - \frac{(t+1)}{3\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{(t+1)(1-t)^{\frac{3}{4}}}{3\Gamma(\frac{7}{4})} \\ &\quad - \frac{(t+1)}{3\Gamma(\frac{7}{4})} - \frac{(t+1)(1-t)^{\frac{7}{4}}}{3\Gamma(\frac{11}{4})} - \frac{(t+1)(1-t)^{\frac{3}{4}}}{3\Gamma(\frac{7}{4})}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(t, s)ds &\leq \frac{|t^{\frac{7}{4}}|}{\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{|(t+1)(1-t)^{\frac{7}{4}}|}{3\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{|t+1|}{3\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{|(t+1)(1-t)^{\frac{3}{4}}|}{3\Gamma(\frac{7}{4})} \\ &\quad + \frac{|t+1|}{3\Gamma(\frac{7}{4})} + \frac{|(t+1)(1-t)^{\frac{7}{4}}|}{3\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{|(t+1)(1-t)^{\frac{3}{4}}|}{3\Gamma(\frac{7}{4})}. \end{aligned}$$

Puisque $t \leq 1$, alors

$$\begin{aligned}
 &< \frac{1}{\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{2}{3\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{2}{3\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{2}{3\Gamma(\frac{7}{4})} \\
 &+ \frac{2}{3\Gamma(\frac{7}{4})} + \frac{2}{3\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{2}{3\Gamma(\frac{7}{4})} \\
 &= \frac{9}{3\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{6}{3\Gamma(\frac{7}{4})} \\
 &= \frac{3}{\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{2}{\Gamma(\frac{7}{4})}.
 \end{aligned}$$

Donc :

$$G^{**} < \frac{3}{\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{2}{\Gamma(\frac{7}{4})}.$$

La condition 3.8 est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned}
 &\frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}] + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} \\
 &\leq \frac{2}{3} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}] + \left(\frac{3}{\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{2}{\Gamma(\frac{7}{4})} \right) \|p_f\|_{L^\infty}.
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \|p_g\|_{L^\infty} &= \inf \{c > 0, \|p_g(t)\| \leq c\} \\
 \|p_g(t)\| &= \left\| \frac{1}{5 + \cos(5t)} \right\|,
 \end{aligned}$$

puisque

$$0 \leq \cos(5t) < 1 \quad \forall t \in [0, 1],$$

alors

$$5 \leq 5 + \cos(5t) < 6.$$

Donc

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5 + \cos(5t)} \leq \frac{1}{5}.$$

Alors

$$\left\| \frac{1}{5 + \cos(5t)} \right\| \leq \frac{1}{5}.$$

On conclue que

$$\|p_g\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{5}.$$

De même pour $\|p_h\|_{L^\infty}$ et $\|p_f\|_{L^\infty}$, puisque

$$\begin{aligned}
 \|p_h(t)\| &= \left\| \frac{1}{3 + \cos(3t)} \right\| \\
 &\leq \frac{1}{3},
 \end{aligned}$$

alors

$$\|p_h\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{3}.$$

Et

$$\begin{aligned}\|p_f(t)\| &= \left\| \frac{2}{18 + \cos(t)} \right\| \\ &\leq \frac{1}{9},\end{aligned}$$

donc

$$\|p_f\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{9}.$$

Nous allons calculer les deux $\Gamma(\frac{11}{4})$ et $\Gamma(\frac{7}{4})$.

Nous savons que

$$\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

Pour trouver une valeur du $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$.

On a

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},$$

pour $x = \frac{1}{4}$, donc

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) &= \frac{\pi}{\sin(\pi\frac{1}{4})} \\ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{4})} \\ \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{4})}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \\ &= \pi\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \\ &= \pi\sqrt{2}\frac{1}{3.625} \\ &\approx 1.225.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) &= \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4} \times 1.225 \\ &\approx 0.918,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{11}{4}\right) &= \frac{7}{4}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \\ &\approx 1.606\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}] + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} &\leq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{3}{\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{2}{\Gamma(\frac{7}{4})} \right) \left(\frac{1}{9} \right) \\
 &= \frac{2}{3} \left(\frac{8}{15} \right) + \left(\frac{3}{9\Gamma(\frac{11}{4})} + \frac{2}{9\Gamma(\frac{7}{4})} \right) \\
 &= \frac{16}{45} + \left(\frac{3}{9 \times 1.606} + \frac{2}{9 \times 0.918} \right) \\
 &= 0.35 + 0.2 + 0.24 \\
 &= 0.79 \\
 &< 1.
 \end{aligned}$$

Alors d'après le Théorème 3.1.1, le problème 3.10 a une solution sur $[0, 1]$.

Exemple 3

Soit le problème fractionnaire aux limites suivant

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y_n(t) = \frac{2}{20 + \sin(t)} |y_n(t)|, & t \in [0, 1], 1 < \alpha \leq 2, \\ y_n(0) - y'_n(0) = \int_0^1 \frac{2}{6 + \sin(6t)} |y_n(t)| dt, \\ y_n(1) + y'_n(1) = \int_0^1 \frac{2}{4 + \sin(4t)} |y_n(t)| dt, \end{cases} \quad (3.11)$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$E = l^1 = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty \right\},$$

avec la norme

$$\|y\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots), f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots), g = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots) \text{ et } h = (h_1, h_2, \dots, h_n, \dots)$$

Soit $x \in E$

$$\begin{aligned}
 f_n(t, x) &= \frac{2}{20 + \sin(t)} |x_n|, & (t, x) &\in [0, 1] \times E \\
 g_n(t, x) &= \frac{2}{6 + \sin(6t)} |x_n|, & (t, x) &\in [0, 1] \times E \\
 h_n(t, x) &= \frac{2}{4 + \sin(4t)} |x_n|, & (t, x) &\in [0, 1] \times E
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \left(\frac{2}{20 + \sin(t)} x_1, \frac{2}{20 + \sin(t)} x_2, \dots, \frac{2}{20 + \sin(t)} x_n, \dots \right) \\ &= \frac{2}{20 + \sin(t)} (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \\ &= \frac{2}{20 + \sin(t)} x. \end{aligned}$$

La même chose avec $g(t, x), h(t, x)$

(H1) (1)

$$f(t, x) = \frac{2}{20 + \sin(t)} x,$$

est **mesurable** par rapport à $t \in [0, 1]$

Comme $t \rightarrow f(t, x)$ continue parce que est une somme et une multiplication de fonctions continues. Donc f est mesurable $\forall x \in E$.

De même pour $g(t, x)$ et $h(t, x)$.

(2) Il est claire que f est **continue** par rapport à x presque partout sur E .

De même pour $g(t, x)$ et $h(t, x)$.

Après **(1)** et **(2)** alors les trois fonctions vérifient les conditions de **Carathéodory**.

(H2) est vérifiée puisque

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\|_E &= \left\| \frac{2}{20 + \sin(t)} x \right\|_E \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{20 + \sin(t)} x_n \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{20 + \sin(t)} \right| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\ &\leq \frac{2}{20 + \sin(t)} \|x\|_E \\ &= p_f(t) \|x\|_E. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \|g(t, x)\|_E &= \left\| \frac{2}{6 + \sin(6t)} x \right\|_E \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{6 + \sin(6t)} x_n \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{6 + \sin(6t)} \right| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\ &\leq \frac{2}{6 + \sin(6t)} \|x\|_E \\ &= p_g(t) \|x\|_E. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \|h(t, x)\|_E &= \left\| \frac{2}{4 + \sin(4t)} x \right\|_E \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{4 + \sin(4t)} x_n \right| \\
 &\leq \left| \frac{2}{4 + \sin(4t)} \right| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\
 &\leq \frac{2}{4 + \sin(4t)} \|x\|_E \\
 &= p_h(t) \|x\|_E.
 \end{aligned}$$

(H3) Il est clairement réalisé.

La fonction $G(t, s)$ est donné par :

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} si & 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} & si \quad t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 G(t, s) ds &= \int_0^t G(t, s) ds + \int_t^1 G(t, s) ds \\
 &= \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} \right) ds \\
 &\quad + \int_t^1 \left(-\frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} \right) ds \\
 &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds - \int_0^t \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} ds - \int_0^t \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} ds \\
 &\quad - \int_t^1 \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} ds - \int_t^1 \frac{(t+1)(1-s)^{\alpha-2}}{3\Gamma(\alpha-1)} ds \\
 &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(t+1)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(t+1)}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(t+1)(1-t)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)} \\
 &\quad - \frac{(t+1)}{3\Gamma(\alpha)} - \frac{(t+1)(1-t)^\alpha}{3\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(t+1)(1-t)^{\alpha-1}}{3\Gamma(\alpha)},
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 G(t, s) ds &\leq \frac{|t^\alpha|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|(t+1)(1-t)^\alpha|}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|t+1|}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|(t+1)(1-t)^{\alpha-1}|}{3\Gamma(\alpha)} \\
 &+ \frac{|t+1|}{3\Gamma(\alpha)} + \frac{|(t+1)(1-t)^\alpha|}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|(t+1)(1-t)^{\alpha-1}|}{3\Gamma(\alpha)} \\
 &< \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{3\Gamma(\alpha)} \\
 &+ \frac{2}{3\Gamma(\alpha)} + \frac{2}{3\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{3\Gamma(\alpha)} \\
 &< \frac{3}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$G^{**} < \frac{3}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}.$$

La condition (3.8) est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned}
 &\frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}] + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} \\
 &\leq \frac{2}{3} [\|p_g\|_\infty + \|p_h\|_\infty] + \left(\frac{3}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \right) \|p_f\|_\infty.
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \|p_g\|_{L^\infty} &= \inf\{c > 0, \|p_g(t)\| \leq c\} \\
 \|p_g(t)\| &= \left\| \frac{2}{6 + \sin(6t)} \right\|,
 \end{aligned}$$

puisque

$$0 \leq \sin(6t) \leq 0.104 < 1 \quad \forall t \in [0, 1],$$

alors

$$6 \leq 6 + \sin(6t) < 7.$$

Donc

$$\frac{2}{7} < \frac{2}{6 + \sin(6)} \leq \frac{2}{6}.$$

Alors

$$\left\| \frac{2}{6 + \sin(6t)} \right\| \leq \frac{1}{3}.$$

On conclue que

$$\|p_g\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{3}.$$

Nous faisons la même chose pour trouver $\|p_h\|_{L^\infty}$ et $\|p_f\|_{L^\infty}$, puisque

$$\begin{aligned}
 \|p_h(t)\| &= \left\| \frac{2}{4 + \sin(4t)} \right\| \\
 &\leq \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

alors

$$\|p_h\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2}.$$

Et

$$\begin{aligned} \|p_f(t)\| &= \left\| \frac{2}{20 + \sin(t)} \right\| \\ &\leq \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

donc

$$\|p_f\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{10}.$$

En appliquant la condition de le théorème 3.1.1, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{T(T+1)}{T+2} [\|p_g\|_{L^\infty} + \|p_h\|_{L^\infty}] + G^{**} \|p_f\|_{L^\infty} &\leq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \right) \left(\frac{1}{10} \right) \\ &\leq \frac{5}{9} + \left(\frac{3}{10\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{5\Gamma(\alpha)} \right) \\ &< 1, \end{aligned}$$

est satisfaite pour chaque $\alpha \in]1, 2]$.

Alors d'après le théorème 3.1.1, le problème (3.11) a une solution sur $[0, 1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié quelques problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires.

Le premier problème porte sur l'existence des solutions de problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire et le deuxième problème est consacré à l'étude de l'existence des solutions du problème aux limites avec des conditions intégrales .

On a montré l'existence de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : le Théorème de point fixe de Mönch combiné avec la mesure de non compacité de Kuratowski.

A l'avenir, ces problèmes fractionnaires pourront être appliqués à l'aide de la théorie de Darbo combinés avec la mesure de non compacité de Hausdorff.

Bibliographie

- [1] M. Benchohra, A. Cabada, and D. Seba, *An existence result for nonlinear rfractional differential equations on Banach spaces. Bound. Value Probl. 2009, Art. ID 628916, 11 pp.*
- [2] S. Abbas, M. Benchohra, *Upper and lower solutions method for impulsive partial hyperbolic differential equations with fractional order, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 4 (2010), 406-413.*
- [3] R.P. Agarwal, M. Benchohra and D. Seba, *On the application of measure of noncompactness to the existence of solutions for fractional differential equations. Results Math. 55 (2009), no. 3-4, 221230.*
- [4] M. Benchohra, J. R. Graef, and S. Hamani, *Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations, Applicable Analysis, vol. 87, no. 7, pp. 851-863, 2008.*
- [5] K.B Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus, Academic Press, New York, London, 1974. MR0361933(50 14078). Zbl 0292.26011.*
- [6] Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F and Tricomi F, *Higher Transcendental Functions, Vol.III, Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981)*
- [7] D.O'Regan, R. Precup, *Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions, J. Math. Anal. Appl. 245 (2000), 594-612.*
- [8] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed point theory and applications, Cambridge tracts in Mathematics, 141. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.*
- [9] H. Monch, *Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces. Nonlinear Anal. 4 (5) (1980), 985-999.*

- [10] B. N. Sadovskii, *On a fixed point principle. Funct. Anal. Appl.* 1 1967 pp. 74-76.
- [11] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering*, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.
- [12] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets, Fund. Math*, 1930, vol.15, pp.301-309.
- [13] G. Darbo, *Punti uniti dans trasformazioni un condomino non compatto, Rend. Univ Padova*, 1955, vol.24, pp.84-92.
- [14] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach spaces, Lect. Notes Pure Appl. Math. Dekker*, New York, 1980, vol. 60.
- [15] F. Golse. *Analyse réelle*.
- [16] H. Medjekal, *Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire impulsive de temps infini dans un espace de Banach, Thèse de Doctorat Univ. Badji Mokhtar Annaba*

résumé

Le principe du point fixe est très important dans la résolution de nombreuses équations différentielles non linéaires, en particulier dans l'étude de l'existence.

Dans cette thèse, nous avons étudié quelques problèmes fractionnaires au sens de Caputo en montrant l'existence des solutions à l'aide de la théorie des points fixes de Mönch à l'aide de mesures non compactes de Kuratowski.

Mots clés : Equations différentielles fractionnaires, dérivation fractionnaire de Caputo, théorème de point fixe de Monch , la mesure de Kuratowski.

Mathématiques sujet Classification AMS(2000) : 26A33, 34A60, 34B15.

abstract

The fixed point principle is so important in the study of several non linear differential equations, particularly, problems the existence of solutions.

In this memory, we consider different fractional problems in the sense of Caputo. We prove the existence of solutions by using Monch's fixed point theorem with Kuratowski measure of non compactness.

Keywords : fractional differential equations, Fractional derivation of Caputo, Monch's fixed point theorem, the measure of Kuratowski .

Mathematics Subject Classification AMS(2000) : 26A33, 34A60, 34B15.

ملخص

يعتبر مبدأ النقطة الثابتة ذا أهمية كبيرة في حل مختلف المعادلات التفاضلية الغير خطية, خاصة في دراسة وجود الحلول.

في هذه المذكرة، سنتطرق لدراسة بعض المعادلات التفاضلية ذات رتبة كسرية بمعنى كابيتو, عن طريق إثبات وجود حلول و ذلك باستعمال نظرية النقطة الثابتة لمونش مقترنة بقياس كوراتوفسكي.

الكلمات المفتاحية : معادلات تفاضلية كسرية, التفاضل الكسري لكابيتو, فضاء متري معمم, نظرية النقطة الثابتة لمونك , قياس كوراتوفسكي .

تصنيف الجامعة الأمريكية (AMS(2000) : 26A33, 34A60 , 34B15 .