



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Normes des opérateurs et Normes
matricielles: classes et comparaison**

Présenté par: Mida Roumaissa
Laribi Samah

Soutenu le: 07/06/2018, devant le jury composé de

Aissaoui Adel	M.A.A	Président	Univ. El Oued
Mansour Abdelouahab	M.C.A	Rapporteur	Univ. El Oued
Guedda Lamine	M.A.A	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Remerciement

En premier lieu, nous tenons à exprimer notre reconnaissance à **Allah** tout puissant, de nous avoir donné la volonté pour terminer ce travail.

Nous grand remerciements estimations à notre encadreur, Dr"**Mansour Abdelouahab**" pour ses conseils et son encouragement durant la période de rédaction de ce travail.

Nous remercions également la doctorante **Zaiz khaoula** qui nous a aidé dans ce travail. Nous tenons à remercier tous les étudiants de la promotion 2017/2018 de Master II en mathématiques à l'université d'El-oued.

En fin nos remerciements vont à nos familles, nos amis et tous ceux qui nous ont soutenu durant l'élaboration de ce travail.

Merci à tous qui nous aide de près ou de loin.

Merci pour tout.

Notations

H	espace de Hilbert
$\langle ., . \rangle$	produit scalaire
$\ . \ $	la norme
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des opérateurs linéaires bornés sur espace de Hilbert H
$\mathcal{L}(E, F)$	l'espace des opérateurs linéaires bornés sur E dans F
T^*	l'opérateur adjoint de l'opérateur T
T^{-1}	l'inverse d'un opérateur T
$Ker(T)$	le noyau de T
$Im(T)$	l'image de T
$ T $	la valeur absolue de T
$\sigma(T)$	le spectre de T
$\sigma_p(T)$	le spectre ponctuel de T
$\sigma_{ap}(T)$	le spectre approché de T
$\rho(T)$	le rayon spectral de T
$W(T)$	l'image numérique de T
$w(T)$	le rayon numérique de T
$\mathcal{U}_n$	groupe unitaire
$\mathcal{M}_{n,p}$	ensemble de matrices de n lignes et p colonnes
$\mathbb{C}_{n \times n}$	ensemble de $n \times n$ matrices complexes
$tr(A)$	trace de la matrice A
$W_C(A)$	C -image numérique de A
$r_C(A)$	C -rayon numérique de A
$cond(A)$	le conditionnement de A

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Espace de Hilbert	2
1.1.1 Produit scalaire	2
1.1.2 Quelques propriétés	3
1.2 Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert	4
1.2.1 Continuité d'un opérateur linéaire	4
1.2.2 Opérateurs linéaires bornés	5
1.2.3 Définitions sur les matrices	7
1.2.4 Opérateur adjoint	8
1.2.5 Inverse d'un opérateur	10
1.2.6 Spectre d'un opérateur	10
1.2.7 Image numérique	11
2 Normes et Classes des opérateurs	13
2.1 Norme d'un opérateur	13
2.2 Classes d'opérateurs	17
2.2.1 Opérateur auto-adjoint(hermitien)	17
2.2.2 Opérateur positif	18
2.2.3 Opérateur isométrique	18
2.2.4 Opérateur unitaire	19
2.2.5 Opérateur normal	19
2.2.6 Opérateur compact	21
2.2.7 Opérateur projecteur	21
2.2.8 Projection orthogonale	21
2.2.9 Opérateur anti-hermitien	22
2.2.10 Opérateur quasinormal	23
2.2.11 Opérateur sous normal	23
2.2.12 Opérateur hyponormal	23
2.2.13 Opérateur paranormal	24
2.2.14 Opérateur Normalöid	25
2.3 Rayon spectral et rayon numérique	28
3 Normes matricielles	32
3.1 Définitions et propriétés	32
3.1.1 Norme de Hölder	32
3.2 Normes matricielles	33
3.2.1 Normes compatibles	33

3.2.2 Normes matricielles sous multiplicatives	34
3.3 C-Rayon numérique	35
3.4 Quelques types des normes particulières	39
3.4.1 Normes essentielles	42
3.4.2 Normes de Frobenius	42
3.4.3 Opérateur de Hilbert-Schmidt	43
4 Applications	44
4.1 Système linéaire	44
4.2 Conditionnements	45
4.2.1 Calcul d'erreur	47
Bibliographie	54

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie des opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert. La théorie des opérateurs linéaires trouve ses origines d'une part dans l'étude des systèmes d'équations linéaires et d'autres part dans des équations différentielles et intégrales. Dans ce mémoire, nous avons étudié particulièrement les normes des opérateurs et les normes matricielles qui jouent un rôle essentiel dans l'étude de plusieurs problèmes dans la pratique.

Depuis quelques dizaines d'années, plusieurs travaux de recherche ont été faites dans ce domaine :

En 1979, dans [14] M.Golderberg et E.G.Straus ont étudié les propriétés qui font le C-rayon numérique représente une norme matricielle.

En 1987, dans [8] C. k. Fong, H. Radjavi et P. Rosenthal ont identifié et comparé un certain nombre de normes particulières.

En 2001, dans [11] T.Furuta a étudié toutes les classes d'opérateurs et leurs propriétés.

En 2002, dans [5] J. F. Durand a traité les définitions et toutes les propriétés de matrices.

Notre but dans ce mémoire est d'étudier les propriétés des différents types des normes des opérateurs et le rôle de la norme dans l'estimation de l'erreur dans la solution d'un système linéaire comme application.

Ce mémoire est composé d'une introduction et quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux espaces de Hilbert : définitions et propriétés. Nous donnons également la définition de la continuité, la norme, l'adjoint et l'inverse d'un opérateur, le spectre et l'image numérique des opérateurs linéaires sur l'espace de Hilbert et la matrice associé à un opérateur.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donné des définitions équivalentes à la définition de la norme, les classes de opérateurs et la relation entre le rayon numérique, le rayon spectrale et la norme.

Dans le troisième chapitre, nous définissons la norme matricielle et le C-rayon numérique qui présente une norme matricielle, ainsi que quelques normes particulières.

Dans le dernier chapitre on définit la conditionnement, calcul de l'erreur et quelques exemples.

Chapitre 1

Préliminaires

Cette partie de ce mémoire est consacrée pour rappeler quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle. Ces rappels concernent les espaces de Hilbert, les opérateurs sur les espaces de Hilbert et leurs propriétés, on donne également la notion du spectre, valeur propre et l'image numérique.

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Produit scalaire

Définition 1.1.1 Soit X un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, s'il existe un nombre complexe $z = \langle x, y \rangle$ pour tout couple des vecteurs x et y dans X qui vérifient les conditions suivantes :

1. $\forall x \in X \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in X$
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y \text{ et } z \in X$
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in X \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

alors $\langle x, y \rangle$ est dit produit scalaire de x et y

Définition 1.1.2 Une norme dans un espace vectoriel E est une application $\| \cdot \|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- i) $\forall x \in E, \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{et} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- iii) $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.1.3 On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire et on pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Définition 1.1.4 Un espace préhilbertien complet muni de la norme induit par le produit scalaire est dit espace de Hilbert.

Exemple 1.1.5 l'espace $l^2 = \{x = (x_j)_j \mid x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ est un espace de Hilbert.

1.1.2 Quelques propriétés

Inégalité de Cauchy Schwarz :

Si x et y sont deux éléments d'un espace préhilbertien alors,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Preuve.

Si $y = \vec{0}$ on a alors, $\langle x, y \rangle = \langle x, \vec{0} \rangle = 0 = \overline{\langle x, x \rangle}$ et la conclusion est claire, soit $y \neq \vec{0}$ et $x \neq \vec{0}$ alors pour tout scalaire λ nous avons :

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\lambda x + y\|^2 &= \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle \\ &= \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \quad \forall \lambda \end{aligned} \quad (1)$$

On pose

$$\lambda = \frac{-\langle y, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

alors l'inégalité (1) réduit à :

$$\langle y, y \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} \geq 0$$

D'où $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Loi du parallélogramme

La loi du parallélogramme affirme que la norme induite par le produit scalaire satisfait

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

où x et y sont deux éléments quelconque préhilbertien

Preuve.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ \text{donc } \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

Identité de polarisation

Soient $x, y \in \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ on peut montrer que

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) & \text{dans } \mathbb{C} \\ \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Preuve.

Dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}[(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)] = \\ & = \frac{1}{4}[(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle) + \\ & i(\langle x, x \rangle + \langle x, iy \rangle + \langle iy, x \rangle + i\bar{i}\langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle - i\bar{i}\langle y, y \rangle + \langle x, iy \rangle + \langle iy, x \rangle)] \\ & = \frac{1}{4}[2\langle x, y \rangle + 2\overline{\langle x, y \rangle} + 2\langle x, y \rangle - 2\overline{\langle x, y \rangle}] = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) &= \frac{1}{4}[\langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle] \\ &= \frac{1}{4}[\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle - \langle x, x \rangle \\ &\quad - \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle] \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}$: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

1.2 Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert

Définition 1.2.1 Soit H un espace de Hilbert. Une application $T : H \rightarrow H$ est dit opérateur linéaire si seulement si T satisfait les deux conditions suivantes :

- i) Additivité : $T(x+y) = Tx + Ty \quad \forall x, y \in H$
- ii) Homogénéité : $T(\lambda x) = \lambda.Tx, \forall x \in H, \lambda \in \mathbb{C}$

Définition 1.2.2 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, l'image de T est définie par $Im(T) = \{Tx : x \in H\}$ et le noyau est définie par $Ker(T) = \{x \in H : Tx = 0\}$

1.2.1 Continuité d'un opérateur linéaire

La convergence dans un espace linéaire normé est présenté par la convergence dans l'espace métrique induite.

Définition 1.2.3 Nous définissons la continuité d'un opérateur A sur espace linéaire normé E dans un espace linéaire normé F .

$$\|x_n - x\|_E \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow \|Ax_n - Ax\|_F \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Exemple 1.2.4 Soit $K(t, s)$ une fonction continue en t et s , $a \leq t, s \leq b$ on a :

$$y(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds \quad \text{si } x \in C([a, b]) \text{ alors, } y(t) \in C([a, b]).$$

$$\text{l'équation ci dessus peut être écrite comme } y = Tx \text{ et } T_x = \int_a^b k(t, s)x(s)ds$$

Démontrons la continuité de T Soit $x_n, x \in C([a, b])$ et $\|x_n - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ou

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\|y_n(t) - y(t)\| &= \max_{t \in [a, b]} |y_n(t) - y(t)| \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |k(s, t)(x_n(s) - x(s))| ds \\ &\leq (b-a) \max |k(t, s)| \|x_n(s) - x(s)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

donc $\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$ si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, ce qui montre que T est continu.

1.2.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.2.5 Soit A un opérateur linéaire de E dans F , A est dit borné s'il existe une constante $c \geq 0$ tel que :

$$\|Ax\|_F \leq c \|x\|_E \quad \forall x \in E$$

Théorème 1.2.6 Un opérateur linéaire A est continu si et seulement s'il est borné

Preuve.

Soit A un opérateur continu, on suppose que A n'est pas borné, alors il existe une suite $\{x_n\} \subset E$ telle que :

$$\|Ax_n\| > n \|x_n\|$$

On construit suite $\{\xi\}$:

$$\xi_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|} \quad i.e. \quad \|\xi_n\| = \frac{\|x_n\|}{n \|x_n\|} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

par conséquent $\xi_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

Dans l'autre part

$$\|A\xi_n\| = \frac{1}{n \|x_n\|} \|Ax_n\| > 1$$

Maintenant, comme A est continu et $\xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ alors $A\xi_n \rightarrow A0 = 0$ ce qui contredit le fait que A n'est pas borné, donc A est borné.

Dans l'autre sens, soit A un opérateur linéaire borné $\|Ax\| \leq c \|x\|$, démontrons que A est continue soit la suite $x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$, et $\|x_n - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Maintenant $\|Ax_n - Ax\| \leq \|A(x_n - x)\| \leq c \|x_n - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ donc A est continu

Exemple 1.2.7 L'opérateur de multiplication

$$T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

$$f(x) \rightarrow xf(x)$$

est borné car :

on a $\|Tf\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |Tf(x)|$, alors pour tout $x \in [0, 1]$

$$|Tf(x)| = |xf(x)| \leq |f(x)|$$

$$\text{d'où } \sup_{x \in [0, 1]} |Tf(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

alors,

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

donc T est borné

Exemple 1.2.8 L'opérateur de dérivation

$$T : C^1([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1])$$

$$f(t) \longrightarrow f'(t)$$

on a

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

d'où

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_{C^1([a, b])}$$

donc T borné

Définition 1.2.9 On définit la norme de l'opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ par :

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c \|x\|, \forall x \in H\}$$

Exemple 1.2.10 Soit

$$T : C([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1])$$

$$f(x) \longrightarrow f(0)$$

on a

$$|Tf(x)| = |f(0)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

donc

$$\frac{\|Tf\|}{\|f\|_\infty} \leq 1 \Rightarrow \|T\| \leq 1$$

montrons que $\|T\| \geq 1$

on pose $f_0(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1]$

alors $|Tf_0(x)| = |f_0(0)| = 1$

d'où

$$\|T\| \geq \frac{|Tf_0(x)|}{\|f\|_\infty} = 1 \quad \text{donc} \quad \|T\| = 1$$

Définition 1.2.11 (Invariant) Soit T un opérateur sur l'espace de Hilbert H , un sous espace fermé $M \subset H$ est dit invariant par T si $TM \subset M$ i.e (Pour tout $x \in M \quad Tx \in M$)

1.2.3 Définitions sur les matrices

Définition 1.2.12 (Trace d'une matrice) La trace de $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est définie par la somme des éléments diagonaux

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Définition 1.2.13 (matrice scalaire) Une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tout les coefficients diagonaux sont égaux c'est à dire de la forme λI_n où λ est un scalaire et I_n la matrice identité d'ordre n .

Autrement dit $D = (a_{ij})$ est une matrice scalaire si D est carrée et si

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

C'est à dire que tous les éléments situés sur la diagonale principale sont égaux et que tous les autres éléments sont nuls.

Matrice associée à un opérateur linéaire

Définition 1.2.14 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_p)$ une base de E et soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$ une base de F .

La matrice de l'opérateur T relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes représentent les vecteurs $T\vec{e}_1, T\vec{e}_2, \dots, T\vec{e}_p$ exprimés dans la base $\mathcal{B}'$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} T\vec{e}_1 & T\vec{e}_2 & \dots & T\vec{e}_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{u}_n \end{matrix}$$

Remarque 1.2.15 R 1- Avec les notations précédentes, on a donc :

$$\forall j \in [1, p], T\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{u}_i$$

R 2- $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T)$ est unique.

Autrement dit, deux opérateurs T et S de $\mathcal{L}(E, F)$ sont égaux si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{B}'$ de F telle que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(S)$$

R 3- La matrice d'un endomorphisme est une matrice carrée.

Remarque 1.2.16 Si $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base de E , alors la matrice de T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ (même base de départ et d'arrivée) est notée tout simplement :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(T)$$

C'est la matrice de l'endomorphisme T dans la base $\mathcal{B}$:

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} T\vec{e}_1 & T\vec{e}_2 & \dots & T\vec{e}_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_p \end{matrix}$$

Définition 1.2.17 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice de n lignes et p colonnes alors il existe un unique opérateur T de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est représenté par la matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. C'est l'opérateur canoniquement associé à A

1.2.4 Opérateur adjoint

Pour tout $y \in F$ l'application $x \mapsto \langle T(x), y \rangle$ est linéaire et continue (de norme inférieure à $\|T\| \|y\|$ et après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément noté $T^*(y)$ tel que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

on vérifie facilement que pour tous $y, z \in F'$ et un scalaire λ , $T^*(y) + \lambda T^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $T^*(y + \lambda z)$. Par unicité, $T^*(y) + \lambda T^*(z) = T^*(y + \lambda z)$ ce qui prouve que T^* est linéaire

Définition 1.2.18 Soient E et F deux espaces de Hilbert, E' et F' les duals de E et F et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ telle que pour tout $x \in E$, $y \in F$ on a

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

est appelée l'adjoint de T

Proposition 1.2.19 Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on a :

$$1) \|T\| = \|T^*\|$$

$$2) \|T^*T\| = \|T\|^2$$

Preuve.

1) Par définition de la norme d'un opérateur,

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(F', E')} = \sup_{y \in F, \|y\| \leq 1} \|T^*y\|$$

D'après le corollaire de Hahn-Banach on a $\|T^*y\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \langle x, T^*y \rangle = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \langle Tx, y \rangle$. De plus, comme $\langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle$, on obtient

$$\|T^*\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \sup_{y \in F, \|y\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle|.$$

En appliquant de nouveau un corollaire de Hahn-Banach et la définition de la norme d'un opérateur T on obtient :

$$\sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \sup_{y \in F, \|y\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|$$

Ainsi T^* est continue et $\|T\| = \|T^*\|$

2) Montrons que $\|T^*T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|T\|^2$. Tout d'abord on rappelle que la norme d'opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier, $\|T^*T\| \leq \|T\| \|T^*\| = \|T\|^2$. d'autre part, en utilisant encore une fois le corollaire de Hahn-Banach et la définition de la norme d'opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T^*Tx\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle T^*T(x), y \rangle| \\ &\geq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^*T(x), x \rangle| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), T(x) \rangle| \\ &= \|T\|^2\end{aligned}$$

on a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Exemple 1.2.20 1) Soit

$$\begin{aligned}A : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (x, 0)\end{aligned}$$

on pose $X = (x_1, x_2)$ $Y = (y_1, y_2)$

on a $\langle AX, Y \rangle = \langle A(x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle (x_1, 0), (y_1, y_2) \rangle$

$$= x_1 y_1 = \langle (x_1, x_2), (y_1, 0) \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

d'où $A^*Y = A^*(y_1, y_2) = (y_1, 0)$

i.e. $A^*(x, y) = (x, 0)$

2) On considère l'opérateur shift défini par :

$$\begin{aligned}S : l_2 &\longrightarrow l_2 \\ (x_1, x_2, \dots) &\longrightarrow (0, x_1, x_2, \dots)\end{aligned}$$

on pose $X = (x_1, x_2, \dots)$ $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$

nous avons :

$$\langle SX, Y \rangle = \langle S(x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots) \rangle = \langle (0, x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots) \rangle$$

$$= x_1 \overline{y_2} + x_2 \overline{y_3} + \dots = \langle (x_1, x_2, \dots), (y_2, y_3, \dots) \rangle$$

d'où $S^*(y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, \dots)$

1.2.5 Inverse d'un opérateur

Définition 1.2.21 Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $A \in \mathcal{L}(E, F)$. L'opérateur A est dit inversible si pour tout $y \in F$ l'équation $Ax = y$ a une seule solution .

Définition 1.2.22 on dit que $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $AB = I_F$ et $BA = I_E$. L'opérateur l'inverse s'il existe est unique.

On appelle l'opérateur B l'inverse de A et notée par A^{-1}

Remarque 1.2.23 1) Si $AB = I_F$ alors $B = A_d^{-1}$

2) Si $BA = I_E$ alors $B = A_g^{-1}$

Remarque 1.2.24 $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible s'il est bijectif et A^{-1} borné .

Exemple 1.2.25 1) l'opérateur I est inversible et $I^{-1} = I$.

2) l'opérateur "Shift" S défini de l_2 vers l_2

$$\begin{aligned} S : l_2 &\longrightarrow l_2 \\ (x_1, x_2, \dots) &\longrightarrow (0, x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

n'est pas inversible .

1.2.6 Spectre d'un opérateur

Définition 1.2.26 (valeurs propres et vecteurs propres) le nombre complexe λ est un valeur propre de T s'il existe $u \in E$, $u \neq 0$ tel que $Tu = \lambda u$. u est un vecteur propre associé à la valeur λ .

Définition 1.2.27 (Spectre d'un opérateur) Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(H)$, on définit le spectre de T par :

$$\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \}$$

Exemple 1.2.28 Soit l'opérateur $T = I$ alors

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : I - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : (1 - \lambda)I \text{ n'est pas inversible} \}. \end{aligned}$$

$(1 - \lambda)I$ est non inversible si et seulement si $\lambda = 1$ alors, $\sigma(T) = \{1\}$.

Exemple 1.2.29 S (le shift) n'a pas de valeur propre. En effet soit λ valeur propre de S alors

$$\exists (x_n) \text{ telle que } S(x_n) = \lambda(x_n) \text{ alors } (0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

Si $\lambda = 0$ alors $x = 0$ impossible car il faut $x \neq 0$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $x = 0$ impossible aussi.

Définition 1.2.30 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ on définit le rayon spectrale de T comme suit :

$$\rho(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}$$

Définition 1.2.31 On appelle spectre ponctuel de T l'ensemble des valeurs propres de T noté $\sigma_p(T)$ tel que

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}$$

Définition 1.2.32 On appelle spectre approché (ou d'approximation) de T l'ensemble

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset H : \|x_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)x_n = 0\}$$

Théorème 1.2.33 Si T est un opérateur de $\mathcal{L}(H)$ alors $\sigma(T)$ est un sous ensemble compact du plan complexe. Si $\lambda \in \sigma(T)$ alors $|\lambda| \leq \|T\|$

Preuve.

Si $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ alors $T - \lambda_0 I$ est inversible donc

$$\|I - (T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)\| = \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\{(T - \lambda_0 I) - (T - \lambda I)\}\| = \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| |\lambda - \lambda_0|$$

et donc $\|I - (T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)\| < 1$ chaque fois que $|\lambda - \lambda_0|$ est suffisamment petite.

Il en suit que $(T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)$ est inversible et par conséquent $T - \lambda I$ aussi inversible.

Il en résulte la complément de $\sigma(T)$ est un sous ensemble ouvert du plan complexe alors $\sigma(T)$ est un sous ensemble fermé du plan complexe.

Ensuite, nous allons montrer la deuxième assertion de la théorème si $|\lambda| > \|T\|$ alors $\|\frac{T}{\lambda}\| < 1$ et donc $I - \frac{T}{\lambda}$ est inversible, il s'ensuit que $\lambda \notin \sigma(T)$ et par conséquent contra-position affirme que si $\lambda \in \sigma(T)$ alors $|\lambda| \leq \|T\|$

Définition 1.2.34 (Valeurs singulières) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ on définit les valeurs singulières de T par

$$s_n(T) := \lambda_n(|T|) = \sqrt{\lambda_n(T^*T)}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

i.e. les valeurs singulières de T sont les valeurs propres de l'opérateur $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

En particulier,

$$s_1(T) = \|T\|.$$

1.2.7 Image numérique

Définition 1.2.35 Soit H un espace de Hilbert. L'image numérique de l'opérateur T est un sous ensemble de $\mathbb{C}$ donnée par :

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$

Les propriétés suivantes de W sont immédiates :

- i) $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- ii) $W(T^*) = \{\overline{\lambda}, \lambda \in W(T)\}$, T^* est l'adjoint de l'opérateur T
- iii) $W(U^*TU) = W(T)$, U opérateur unitaire

Définition 1.2.36 Le rayon numérique $w(T)$ de l'opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est défini par :

$$w(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\}$$

Exemple 1.2.37 Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis, $\sigma(T) = \{0\}$ $\|T\| = 1$.

Nous calculons l'image numérique :

$$\begin{aligned} W(T) &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle \in \mathbb{C} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \\ &= \{ \beta \bar{\alpha} \in \mathbb{C} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \} \end{aligned}$$

Le rayon numérique est : $w(T) = \frac{1}{2}$.

Définition 1.2.38 Soit $\mathbb{C}_{n \times n}$ l'algèbre $n \times n$ matrices complexes et soit $\mathcal{U}_n$ un groupe unitaire donné $A, C \in \mathbb{C}_{n \times n}$. C-image numérique de A est

$$W_C(A) = \{ \text{tr}(CU^*AU), U \in \mathcal{U}_n \}$$

$W_C(A)$ est invariant par similitude unitaire de A ou C par conséquent, si C est une normale avec des valeurs propres γ_j nous trouvons facilement que

$$W_C(A) = W_{\text{diag}(\gamma_1 \dots \gamma_n)}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j^* A x_j : \{x_j\} \in \Lambda_n \right\}$$

Λ_n est un ensemble des bases orthonormal pour $\mathbb{C}_n$

Nous définissons la C-rayon numérique par :

$$r_C(A) = \max\{|z| : z \in W_C(A)\}$$

Chapitre 2

Normes et Classes des opérateurs

Dans ce chapitre, on donne quelques lemmes et définitions sur la norme d'un opérateur, nous rappelons les classes d'opérateurs et ces propriétés, la relation entre la norme, le rayon spectrale et le rayon numérique.

2.1 Norme d'un opérateur

Par définition de la norme usuelle on évoque certains lemmes qui donnent des définitions équivalentes

Lemme 2.1.1 Pour un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, on a les propriétés suivantes :

i) $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ pour tout $x \in H$

ii) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un élément x_ϵ tel que :

$$\|Ax_\epsilon\| > (\|A\| - \epsilon) \|x_\epsilon\|$$

Preuve .

Par définition de la norme de A nous pouvons écrire

$$\|A\| = \inf\{c, c > 0 \text{ et } \|Ax\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in H\} \quad (2.1)$$

Par conséquent :

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

ii) On a $\|A\|$ est l'infimum de c dans 2.1, alors

$$\exists x_\epsilon \in H \text{ tq } \|Ax_\epsilon\| > (\|A\| - \epsilon) \|x_\epsilon\|$$

Lemme 2.1.2 Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$ on a :

i) $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

ii) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

iii) $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

Preuve.

i) D'après 2.1 on a :

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \quad (2.2)$$

encore d'après (ii) du lemme 2.1.1 on a :

$$\frac{\|Ax_\epsilon\|}{\|x_\epsilon\|} > (\|A\| - \epsilon)$$

par conséquent :

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \|A\| \quad (2.3)$$

il résulte de 2.2 et 2.3 que :

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$$

ii) Si $\|x\| = 1$, d'après (i) on a :

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \sup \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

d'où la deuxième égalité .

iii) Si $\|x\| \leq 1$, d'après (i) de lemme 2.1.1 on a :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \|A\| \quad (2.4)$$

encore une fois que nous obtenons de (ii) du lemme 2.1.1

$$\|Ax_\epsilon\| > (\|A\| - \epsilon) \|x_\epsilon\|$$

Mais $\zeta_\epsilon = \frac{x_\epsilon}{\|x_\epsilon\|}$ alors

$$\|A\zeta_\epsilon\| = \frac{1}{\|x_\epsilon\|} \|Ax_\epsilon\| > \frac{1}{\|x_\epsilon\|} (\|A\| - \epsilon) \|x_\epsilon\|,$$

il s'ensuit que :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|A\zeta_\epsilon\| \geq \|A\| - \epsilon$$

par conséquent :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \|A\| \quad (2.5)$$

d'après 2.4 et 2.5 on a :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\|$$

Théorème 2.1.3 Pour tout opérateur linéaire borné T la formule suivante est vérifiée :

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}$$

Preuve.

On remarque que $|\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \|y\| = \|Tx\|$ pour $\|y\| = 1$ alors,

$$\sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\} \leq \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \|T\|$$

et l'égalité découle du lemmme 2.1.2, donc

$$\sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\} \leq \|T\|$$

L'autre inégalité découle de : $\sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\} \geq \sup\{|\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|} \rangle| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \|T\|$, d'après le lemmme 2.1.2 et $\|\frac{Tx}{\|Tx\|}\| = 1$.

Exemple 2.1.4 On donne quelques exemples sur les normes des opérateurs

1. Opérateur Identité :

L'opérateur identité $I_E : E \longrightarrow E$ est définie par $I_E x = x$ pour tout $x \in E$. Dans le cas E est un espace vectoriel normé non vide, l'opérateur I est borné et de norme $\|I_E\| = 1$.

2. Opérateur nul :

Soient E et F sont des vectoriels espaces normés, l'opérateur nul $0 : E \longrightarrow F$ est borné et $\|0\| = 0$.

3. Opérateur différentiel :

Soit E est l'espace vectoriel normé des polynômes sur $J = [0, 1]$ avec la norme donnée par $\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|$. Un opérateur différentiel A défini sur E par $Ax(t) = x'(t)$.

L'opérateur est linéaire car, pour tout $x(t)$ et $y(t) \in E$ on a $A(x(t) + y(t)) = x'(t) + y'(t) = Ax(t) + Ay(t)$.

et $A(\lambda x(t)) = (\lambda x(t))' = \lambda x'(t) = \lambda Ax(t)$ λ est un scalaire.

Si $x_n(t) = t^n$ $Ax_n(t) = nt^{n-1}$, $t \in J$.

alors

$$\|x_n(t)\| = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = n.$$

Pour tout entier positif, il n'existe aucune constante M qui vérifie

$$\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \leq M.$$

Par conséquent A est non borné.

4. Opérateur intégrale :

Soit $A : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$ pour $x(s) \in C([a, b])$ on a

$$Ax(s) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

où $K(t, s)$ est continue en (t, s) tel que $a \leq t, s \leq b$ par conséquent

$$y(t) = Ax(s) \in C([a, b])$$

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \max_{a \leq t \leq b} |y(t)| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^b K(t, s)x(s)ds \right| \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, s)| ds \max_{a \leq s \leq b} |x(s)| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, s)| ds \|x\| \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|A\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, s)| ds.$$

On a $\int_a^b |K(t, s)| ds$ est une fonction continue, elle atteint le maximum à un certain point t_0 de l'intervalle $[a, b]$ on prend

$$z_0(s) = \operatorname{sgn} K(t_0, s),$$

$$\text{où } \operatorname{sgn} z = \frac{\bar{z}}{|z|} \quad z \in \mathbb{C}$$

Soit $x_n(s)$ une fonction continue telle que $|x_n(s)| \leq 1$ et $x_n(s) = z_0(s)$ partout sauf sur un ensemble E_n de mesure moins de $\frac{1}{2Mn}$, où $M = \max_{t,s} |K(t, s)|$

Donc

$$|x_n(s) - z_0(s)| \leq 2$$

partout sur E_n .

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_a^b K(t,s)z_0(s)ds - \int_a^b K(t,s)x_n(s)ds \right| \\
 & \leq \int_a^b |K(t,s)| |x_n(s) - z_0(s)| ds \\
 & = \int_{E_n} |K(t,s)| |x_n(s) - z_0(s)| ds \\
 & \leq 2 \max |K(t,s)| \frac{1}{2Mn} = \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \int_a^b K(t,s)z_0(s)ds & \leq \int_a^b K(t,s)x_n(s)ds + \frac{1}{n} \\
 & \leq \|A\| \|x_n\| + \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

Pour $t \in [a, b]$ posons $t = t_0$

$$\int_a^b |K(t_0,s)| ds \leq \|A\| \|x_n\| + \frac{1}{n}$$

pour $\|x_n\| \leq 1$ on passe à la limite quand $n \rightarrow \infty$ on a : $\int_a^b |K(t,s)| ds \leq \|A\|$

i.e. $\max_t \int_a^b |K(t,s)| ds \leq \|A\|$ alors,

$$\max_t \int_a^b |K(t,s)| ds = \|A\|$$

2.2 Classes d'opérateurs

2.2.1 Opérateur auto-adjoint(hermitien)

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si $T = T^*$.

Exemple 2.2.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

On remarque $A = A^*$ donc A est auto-adjoint.

Exemple 2.2.2 Considérons l'opérateur A définie sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$Ax(t) = e^{-t}x(t)$ est auto-adjoint car : pour $x(t), y(t) \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 \langle Ax, y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} Ax(t) \overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}x(t) \overline{y(t)} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{e^{-t}y(t)} dt = \langle x(t), e^{-t}y(t) \rangle = \langle x, Ay \rangle
 \end{aligned}$$

donc $A = A^*$.

2.2.2 Opérateur positif

Un élément $P \in \mathcal{L}(H)$ est appelé positif (notation : $P \geq 0$) si P est auto-adjoint et si pour tout $x \in H$ $\langle Px, x \rangle \geq 0$.

Remarque 2.2.3 On verra que dans le cas d'un espace de Hilbert H complexe, un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est positif si et seulement si $\langle Px, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$.

Exemple 2.2.4 Soit A l'opérateur défini par $A : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$

$Af(x) = xf(x)$, A est positif car

$\forall f \in L^2([0, 1])$ on a

$$\langle Af, f \rangle = \int_0^1 xf(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^1 x |f(x)|^2 dx \geq 0$$

Lemme 2.2.5 Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est hermitien positif, on a pour tout vecteur $x \in H$

$$\|Ax\| \leq \|A\|^{\frac{1}{2}} \langle Ax, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Preuve.

si $Ax = 0$ c'est évident ;

sinon, soit $y = \|Ax\|^{-1} Ax$, on a $\|y\| = 1$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué à la forme hermitienne positive $(u, v) \rightarrow (Au, v)$

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, y \rangle^2 \leq \langle Ay, y \rangle \langle Ax, x \rangle \leq \|A\| \|y\|^2 \langle Ax, x \rangle = \|A\| \langle Ax, x \rangle.$$

Définition 2.2.6 Pour tout opérateur positif A il existe un unique opérateur positif tel que $S^2 = A$ (noté par $S = A^{\frac{1}{2}}$).

Exemple 2.2.7 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est la racine de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Opérateur isométrique

Un élément $T \in \mathcal{L}(H)$ est appelé isométrique si $\|T(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$ et $T^*T = I$

Exemple 2.2.8

$$S : l_2 \rightarrow l_2$$

$$x \rightarrow Sx = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$\text{on a } S^*x = (x_2, x_3, \dots) \quad \text{où } x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$$

$$S^*Sx = S^*(0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots) = Ix, \quad \text{d'où } S^*S = I$$

$$\text{et } \|Sx\|_{l_2}^2 = \|x\|_{l_2}^2 = \sum |x_i|^2.$$

Alors, l'opérateur shift est isométrique.

Définition 2.2.9 Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit isométrie partielle s'il existe un sous-espace fermé M de H tel que $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in M$ et $Tx = 0$ pour tout $x \in M^\perp$.

2.2.4 Opérateur unitaire

Un élément $U \in \mathcal{L}(H)$ est appelé unitaire si $U^*U = I$ et $UU^* = I$.
 U est inversible et $U^{-1} = U^*$.

Exemple 2.2.10 Soit $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
 $A^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ alors $AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
donc A unitaire

Proposition 2.2.11 Soit $U \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur unitaire. Alors,

i) U est isométrique.

ii) $\|U\| = 1$

Preuve.

i) Pour tout $x \in H$, on a bien

$$\|Ux\|_H^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^*Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|_H^2.$$

ii) Si $\|Ux\|_H = \|x\|_H$ pour tout $x \in H$ alors,

$$\|U\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{x \in H} \frac{\|Ux\|_H}{\|x\|_H} = 1$$

Lemme 2.2.12 Si $\|T\| \leq 1$ et $\|T^{-1}\| \leq 1$ alors, T est unitaire

Preuve.

On a $\|T^*\| = \|T\| \leq 1$ et $\|T^{-1}\| \leq 1$ on a aussi

$$\begin{aligned} \|(T^* - T^{-1})x\|^2 &= \|T^*x\|^2 - \langle T^{-1}x, T^*x \rangle - \langle T^*x, T^{-1}x \rangle + \|T^{-1}x\|^2 \\ &= \|T^*x\|^2 - 2\langle x, x \rangle + \|T^{-1}x\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0 \end{aligned}$$

pour tout x alors $T^* = T^{-1}$ donc T est unitaire.

2.2.5 Opérateur normal

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est appelé normal si $TT^* = T^*T$

Exemple 2.2.13 Soit $H = \mathbb{R}^2(\mathbb{C}^2)$ et $x = (x_1, x_2)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors,

$$Ax = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad A^*x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$A^*Ax = A^* \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$AA^*x = A \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 - x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Alors, $A^*A = AA^*$ donc A est un opérateur normal

Proposition 2.2.14 1. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal si et seulement si $\|Tx\| = \|T^*x\|$, pour tout $x \in H$

2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal alors $\text{Ker}T = \text{Ker}T^*$

Preuve.

1. $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = \langle x, TT^*x \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle = \|T^*x\|^2$. Alors pour tout $x \in H$ on a

$$\|Tx\| = \|T^*x\|$$

Dans l'autre sens, si $\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2$ alors

$$\langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle$$

et par suite $\langle x, T^*Tx \rangle = \langle x, TT^*x \rangle$

ce qui donne $\langle x, T^*Tx - TT^*x \rangle = 0$ donc $(T^*T - TT^*) = 0$

$T^*T = TT^*$ c'est à dire T est normal .

2. Soit $x \in \text{Ker}(T)$ alors,

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle = 0$$

comme T est normal donc $TT^* = T^*T$.

Ceci prouve donc que $\text{Ker}(T) \subset \text{Ker}(T^*)$.

Maintenant, remarquons que si T est normal alors T^* est normal et en appliquant l'inclusion précédent, on obtient $\text{Ker}T^* \subset \text{Ker}T^{**} = \text{Ker}T$, car $T^{**} = T$. Finalement $\text{Ker}T = \text{Ker}T^*$.

2.2.6 Opérateur compact

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ on dit que T est compact s'il transforme tout sous-ensemble borné de H en un ensemble relativement compact (d'adhérence compact)

Exemple 2.2.15 Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ si E ou F est de dimension finie alors T est un opérateur compact puisque :

si $\dim E = n$ alors $\dim T(E) \leq n$, soit B_E la boule unité de E alors $T(B_E)$ est borné de $T(E)$ donc relativement compact dans F

si $\dim F = n$ alors $T(B_E)$ est borné dans F , il s'ensuit que $T(\bar{B}_E)$ est compact dans F

2.2.7 Opérateur projecteur

Un opérateur T est dit projection si et seulement si $T^2 = T$

2.2.8 Projection orthogonale

Un opérateur T est dit projection orthogonale si et seulement si $T^2 = T = T^*$.

Exemple 2.2.16 Soit l'opérateur T défini par :

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1, 0, x_3, \dots, x_n)$$

on a :

$$T^2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = T(T(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)) = T((x_1, 0, x_3, \dots, x_n)) = (x_1, 0, x_3, \dots, x_n)$$

$$= T(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \text{ d'où } T^2 = T.$$

On vérifie que $T^* = T$

$$\text{on pose : } X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\langle TX, Y \rangle = \langle T(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \langle (x_1, 0, x_3, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle$$

$$= x_1 y_1 + x_3 y_3 + \dots = \langle (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), (y_1, 0, \dots, y_n) \rangle$$

$$T^*(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_1, 0, x_3, \dots, x_n)$$

c'est à dire que $T^* = T$ donc $T^* = T = T^2$

alors T est une projection orthogonale.

Théorème 2.2.17 Si $P \in \mathcal{L}(H)$ est une projection non nulle alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) P est une projection orthogonale
- b) P est non négative
- c) P est un opérateur auto-adjoint
- d) P est un opérateur normal

$$e) \|P\| = 1$$

$$f) \|P\| \leq 1$$

Preuve.

Soit P est une projection.

Si P est une projection orthogonale (i.e. $\text{Im}(P) \perp \text{Ker}(P)$) alors $I - P$ est aussi une projection orthogonale bornée, alors $\text{Im}(P) = \text{Ker}(I - P)$ est fermé.

Par conséquent : $\text{Im}(P^*)$ est fermé de plus $\text{Im}(P) = \text{Ker}(P)^\perp$, Mais $\text{Ker}(P)^\perp = \text{Im}(P^*)$ alors $\text{Im}(P) = \text{Im}(P^*)$ et ainsi pour chaque $x \in H$ il existe $z \in H$ tel que $Px = P^*z$.

Par conséquent, $P^*Px = (P^*)^2z = (P^2)^*z = P^*z = Px$. c'est $P^*P = P$. cela implique que P est non négative (c'est auto-adjoint et P^*P est toujours non négatif).

Résultats : $\text{Im}(P) \perp \text{Ker}(P) \Rightarrow P \geq 0 \Rightarrow P^* = P \Rightarrow P^*P = PP^*$

A l'inverse, si P est normal alors $\|P^*x\| = \|Px\|$ pour tout $x \in H$ d'où $\text{Ker}(P^*) = \text{Ker}(P)$.

Par conséquent, $\text{Im}(P) = \text{Ker}(P^*)^\perp = \text{Ker}(P)^\perp$ (parce que $\text{Im}(P)$ est fermé) donc $\text{Im}(P) \perp \text{Ker}(P)$

$$P^*P = PP^* \Rightarrow \text{Im}(P) \perp \text{Ker}(P)$$

Si $0 \neq P = P^*$, alors $\|P\|^2 = \|P^*P\| = \|P^2\| = \|P\| \neq 0$ et ainsi $\|P\| = 1$

$$P = P^* \Rightarrow \|P\| = 1 \Rightarrow \|P\| \leq 1.$$

Prendre tout $v \in \text{Ker}(P)^\perp$ alors $(I - P)v \in \text{Ker}(P)$ (On a $\text{Im}(I - P) = \text{Ker}(P)$).

Par conséquent $(I - P)v \perp v$ donc

$$0 = \langle (I - P)v, v \rangle = \|v\|^2 - \langle Pv, v \rangle.$$

Si $\|P\| \leq 1$ alors $\|v\|^2 = \langle Pv, v \rangle \leq \|Pv\| \|v\| \leq \|P\| \|v\| \|v\| \leq \|v\|^2$

ainsi $\|Pv\| = \|v\| = \langle Pv, v \rangle^{\frac{1}{2}}$ alors

$$\|(I - P)v\|^2 = \|Pv - v\|^2 = \|Pv\|^2 - 2\text{Re} \langle Pv, v \rangle + \|v\|^2 = 0$$

Et par conséquent $v \in \text{Ker}(I - P) = \text{Im}(P)$. On a $\text{Ker}(P)^\perp \subseteq \text{Im}(P)$, ce qui implique que $\text{Im}(P^*) \subseteq \text{Ker}(P^*)^\perp$, et par conséquent $\text{Im}(P^*) \perp \text{Ker}(P^*)$. Mais P^* est une projection .

Chaque fois que P est ($P = P^2$ implique $P^* = P^{2*} = P^{*2}$) ainsi P^* est une projection orthogonale alors P^* est auto-adjoint donc P auto-adjoint. Par conséquent,

$$\|P\| \leq 1 \Rightarrow P = P^*.$$

2.2.9 Opérateur anti-hermitien

On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur anti-hermitien si $T^* = -T$

Exemple 2.2.18 Soit $T = iI$ d'où $T^* = -iI$ donc $T^* = -T$, donc T est anti-hermitien.

Proposition 2.2.19 Soit T un opérateur anti-hermitien alors,

1) $(T + S)^* = -(T + S)$ pour tout S opérateur anti hermitien

2) $\|T^2\| = \|T\|^2$

2.2.10 Opérateur quasinormal

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit quasinormal si T^*T commute avec T i.e. $TT^*T = T^*TT$

Définition 2.2.20 Soit T un opérateur sur l'espace de Hilbert H avec $\text{Ker}(U) = \text{Ker}(|T|)$; $T = U|T|$ est dit décomposition polaire de T et si la condition de noyau $\text{Ker}(U) = \text{Ker}(|T|)$ n'est pas nécessairement satisfait, $T = U|T|$ est dit décomposition de T .

Théorème 2.2.21 Soit $T = U|T|$ une décomposition polaire de l'opérateur T alors, $T = U|T|$ est quasinormal si et seulement si $U|T| = |T|U$.

Preuve.

$\Leftarrow$) On suppose $U|T| = |T|U$, alors, $T(T^*T) - (T^*T)T = U|T||T|^2 - |T|^2U|T| = 0$ donc T est quasinormal.

$\Rightarrow$) Si T est quasinormal alors

$$0 = T(T^*T) - (T^*T)T = U|T||T|^2 - |T|^2U|T| = (U|T|^2 - |T|^2U)|T|,$$

cette égalité signifie que $(U|T|^2 - |T|^2U)$ s'annule sur $\overline{\text{Im}(|T|)}$ par la continuité d'un opérateur et aussi $(U|T|^2 - |T|^2U)$ s'annule sur $\text{Ker}(|T|)$ on a $\text{Ker}(U) = \text{Ker}(|T|)$ alors $(U|T|^2 - |T|^2U)$ s'annule sur $H = \text{Ker}(|T|) \oplus \overline{\text{Im}(|T|)}$ donc $U|T|^2 = |T|^2U$ par conséquent : $U|T| = |T|U$, $|T|$ est approximée uniformément par des polynômes de $|T|^2$ sans terme constant.

2.2.11 Opérateur sous normal

$T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur sous normal s'il admet une extension normale.

Exemple 2.2.22 Soit μ une mesure à support compact dans $\mathbb{C}$. L'opérateur de multiplication par la variable complexe z sur $\mathcal{P}^2(\mu)$, où $\mathcal{P}^2(\mu)$ est la fermeture dans $L^2(\mu)$ de l'algèbre de polynômes analytique $\mathbb{C}[z]$ est défini par :

$$M_z : \mathcal{P}^2(\mu) \rightarrow \mathcal{P}^2(\mu)$$

$$f \rightarrow zf.$$

L'opérateur M_z est un opérateur sous normal. En effet, si N est un opérateur défini sur $L^2(\mu)$ par $Nf = zf$, alors N est normal et comme $Np \in \mathbb{C}[z]$ pour tout $p \in \mathbb{C}[z]$, $\mathcal{P}^2(\mu)$ est invariant par N . Ce qui entraîne que M_z est un opérateur sous normal d'extension normal N .

2.2.12 Opérateur hyponormal

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ et T^* l'adjoint de T on dit que T est hyponormal si $T^*T - TT^* \geq 0$

Exemple 2.2.23 Soit l'opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ défini par

$$T(e_n) = a^{2n}e_{n+1} \quad \text{tel que } a \geq 1$$

Cet opérateur est hyponormal, en effet

On a

$$T^*(e_n) = a^{2(n-1)}e_{n-1}$$

Par conséquent

$$T^*T(e_n) = a^{4n}e_n \text{ et } TT^*(e_n) = a^{4(n-1)}e_n$$

Alors

$$(T^*T - TT^*)e_n = a^{4n}(1 - a^{-4})e_n \geq 0$$

2.2.13 Opérateur parnormal

Soit T un opérateur sur l'espace de Hilbert H est dit opérateur parnormal si $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ pour tout vecteurs unitaire $x \in H$.

Théorème 2.2.24 Si T est un opérateur parnormal alors les inégalités suivantes sont vérifiées : pour tout $x \in H$

$$P_1) \quad \|T\| \geq \dots \geq \frac{\|T^{n+1}x\|}{\|T^n x\|} \geq \dots \geq \frac{\|T^3x\|}{\|T^2x\|} \geq \frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Si T est un opérateur parnormal inversible alors les inégalités suivantes sont vérifiées : pour tout $x \in H$

$$P_2) \quad \frac{\|x\|}{\|T^{-1}x\|} \geq \frac{\|T^{-1}x\|}{\|T^{-2}x\|} \dots \geq \frac{\|T^{-n+1}x\|}{\|T^{-n}x\|} \geq \frac{1}{\|T^{-1}x\|}$$

Preuve.

Nous rappelons que

$$T \text{ parnormal} \Leftrightarrow \|T^2x\| \geq \|Tx\|^2 \text{ pour tout } x \in H$$

En remplaçant x par $\frac{x}{\|x\|}$ dans la dernière inégalité on a

$$T \text{ est parnormal} \Leftrightarrow \frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \text{ pour tout } x \in H. \quad (2.6)$$

Le remplacement x par Tx dans [2.6](#) et la répétition de ce processus, nous donne l'inégalité P_1 .

Si T est un opérateur parnormal inversible alors le remplacement x par $T^{-2}x$ dans [2.6](#) alors

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}x\|} \geq \frac{\|T^{-1}x\|}{\|T^{-2}x\|} \text{ pour tout } x \in H \quad (2.7)$$

Le remplacement x par $T^{-1}x$ dans [2.7](#) et répétition de ce processus, nous obtenons l'inégalité P_2

Lemme 2.2.25 Soit T un opérateur parnormal, alors

$$\|T^3x\| \geq \|T^2x\| \|Tx\| \quad x \in H \quad (2.8)$$

Preuve.

Pour un vecteur unitaire $x \in H$, on peut supposer

$$\begin{aligned} \|T^3x\| &= \|Tx\| \cdot \left\| T^2 \frac{Tx}{\|Tx\|} \right\| \geq \|Tx\| \cdot \left\| T \frac{Tx}{\|Tx\|} \right\|^2 \\ &= \frac{\|T^2x\|^2}{\|Tx\|} \geq \frac{\|T^2x\| \cdot \|Tx\|^2}{\|Tx\|} = \|T^2x\| \cdot \|Tx\| \end{aligned}$$

Lemme 2.2.26 Soit T un opérateur paranormal, alors

$$\|T^{k+1}x\|^2 \geq \|T^kx\|^2 \cdot \|T^2x\| \quad (Q_k)$$

pour un entier positif $k \geq 1$ et tout vecteur unitaire $x \in H$.

Preuve.

Pour le cas $k = 1$

$$\|T^2x\|^2 = \|T^2x\| \cdot \|T^2x\| \geq \|Tx\|^2 \cdot \|T^2x\|$$

(Q_1) est clair. Supposons maintenant que Q est valide pour k et $\|Tx\| \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \|T^{k+2}x\|^2 &= \|Tx\|^2 \left\| \frac{T^{k+1}Tx}{\|Tx\|} \right\|^2 \geq \|Tx\|^2 \|T^k \frac{Tx}{\|Tx\|}\|^2 \|T^2 \frac{Tx}{\|Tx\|}\| \\ &= \|T^{k+1}x\|^2 \cdot \frac{\|T^3x\|}{\|Tx\|} \geq \|T^{k+1}x\|^2 \|T^2x\| \end{aligned}$$

par 2.8 et (Q_k) . Donc (Q_{k+1}) est valide et la preuve est complète.

2.2.14 Opérateur Normalöid

$T \in \mathcal{L}(H)$ est dit opérateur normalöid si $\rho(T) = \|T\|$

Exemple 2.2.27 Soit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Par rapport à la base orthonormale

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

On peut facilement déduire que

$$Te_i = \begin{cases} e_1 & (i=1) \\ e_{i+1} & (i=2j) \\ 0 & (i=2j+1) \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots$$

Par conséquent $\|T\| = 1$.

On a

$$T - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

alors,

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0$$

donc ,

$$\rho(T) = \|T\| = 1$$

alors, T est normaloid.

Théorème 2.2.28 Si T est un opérateur sur l'espace de Hilbert H sur $\mathbb{C}$ alors (i),(ii)et (iii) sont vérifiées :

i) T est auto-adjoint si et seulement si $\langle Tx, x \rangle$ est réel pour tout $x \in H$.

ii) T est unitaire si et seulement si $\|Tx\| = \|T^*x\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$.

iii) T est hyponormal si et seulement si $\|Tx\| \geq \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$.

Preuve.

i) $\Rightarrow$ Si T est auto-adjoint i.e. $T^* = T$ la preuve du résultat découle de

$$\langle Tx, x \rangle = \langle T^*x, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$$

$\Leftarrow$ On suppose $\langle Tx, x \rangle$ est réel pour tout $x \in H$ alors pour tout $x \in H$:

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle T^*x, x \rangle$$

donc $T - T^* = 0$ alors T est auto-adjoint.

ii) $\Rightarrow$ Si T est un opérateur unitaire i.e. $T^*T = TT^* = I$ la preuve du résultat découle de

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

$\Leftarrow$ On suppose $\|Tx\| = \|T^*x\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$ alors pour tout $x \in H$ on a ,

$$\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow \langle (TT^* - I)x, x \rangle = 0$$

Par conséquent $T^*T - I = 0$ et $TT^* - I = 0$ donc T est un opérateur unitaire

iii) Rappelons que

$$(1) \quad \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle \quad \text{pour tout } x \in H$$

$\Rightarrow$ Si T est un opérateur hyponormal alors, $\|Tx\| \geq \|T^*x\|$ d'après (1)

$\Leftarrow$ On suppose $\|Tx\| \geq \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$ alors $T^*T - TT^* \geq 0$ d'après (1) donc T est un opérateur hyponormal.

Théorème 2.2.29 On a la série des inclusions des classes d'opérateurs suivante :

$auto-adjoint \subseteq Normal \subseteq Quasinormal \subseteq sous\ normal \subseteq Hyponormal \subseteq paranormal \subseteq Normaloid$

Preuve.

La relation $auto-adjoint \subseteq Normal \subseteq Quasinormal$ est évidente.

$Hyponormal \subseteq paranormal$. Soit T est hyponormal, rappelons que T est hyponormal si et seulement si $\|Tx\| \geq \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$, alors $\|TTx\| \geq \|T^*Tx\|$ pour tout $x \in H$ et on a T est hyponormal par (iii) de théorème 2.2.28 alors

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^2x\| \|x\|$$

donc $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ pour tout $\|x\|=1$ donc T est paranormal.

paranormal $\subseteq$ *Normaloid*, l'inégalité (P_1) dans le théorème 2.2.24 on a :

$$\frac{\|T^n x\|}{\|Tx\|} \geq \left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \right)^{n-1} \text{ pour tout } x \in H$$

alors, $\|T^n x\| \geq \|Tx\|^n$ pour tout $\|x\|=1$ et $\|T^n\| \geq \|T\|^n$ vérifié. Donc $\|T^n\| = \|T\|^n$ parce que $(\|T^n\| \leq \|T\|^n)$ est toujours vrai. Donc $\|T\| = \rho(T)$ alors T est Normaloid. *Sous normal* $\subseteq$ *Hyponormal*. Soit T sous normal alors une extension normal N peut être exprimé comme suit

soit $N = \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ sur un plus grand espace de Hilbert $K \supset H$, $N^*N = NN^*$ comme N est une normale donc :

$$N^*N = \begin{pmatrix} T^* & 0 \\ X^* & Y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^*T & T^*X \\ X^*T & X^*X + Y^*Y \end{pmatrix} = NN^* = \begin{pmatrix} T & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^* & 0 \\ X^* & Y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TT^* + XX^* & XY^* \\ YX^* & YY^* \end{pmatrix}$$

alors $T^*T = TT^* + XX^*$ alors $T^*T \geq TT^*$ comme $XX^* \geq 0$.

Quasinormal $\subseteq$ *sous normal*, tout d'abord nous montrons que *quasinormal* $\subseteq$ *hyponormal*.

Soit T est quasinormal et $T = U |T|$ est la décomposition polaire de T. rappelons que T est quasinormal si et seulement si $U |T| U^* = |T| (I - UU^*) |T| \geq 0$ puisque $U |T| = |T| U$ vérifie alors T est hyponormal.

En suit, nous allons montrer que *Quasinormal* $\subseteq$ *sous normal*. On définit $[T] = T^*T - TT^*$ alors $[T] \geq 0$ puisque T est hyponormal. Pour T est quasinormal,

$$[T]T = T^*TT - TT^*T = 0$$

alors $T^*[T] = 0$. En prenant l'adjoint de $[T]T = 0$ nous avons par induction $[T]^n T = T^*[T]^n = 0$ pour tout nombre naturel n.

On a la racine carrée S de [T] est approximée uniformément par des polynômes de [T] sans termes constants donc $ST = T^*S$

En suit, définie N par $N = \begin{pmatrix} T & S \\ 0 & T^* \end{pmatrix}$ et $S = [T]^{\frac{1}{2}}$ s'avère être normal comme suit

$$NN^* - N^*N = \begin{pmatrix} TT^* + S^2 & ST \\ T^*S & T^*T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T^*T & T^*S \\ ST & S^2 + TT^* \end{pmatrix} = 0$$

alors T est sous normal.

Remarque 2.2.30 On a aussi les inclusions suivantes :

isométrique $\subseteq$ *quasinormal*.

positif $\subseteq$ *auto-adjoint*.

2.3 Rayon spectral et rayon numérique

Théorème 2.3.1 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ notons

$$\rho(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Alors $\sigma(T) \subset \overline{D}(0, \rho(T))$ de plus, on a

$$\rho(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Preuve.

Notons $\alpha := \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

Soit $\lambda \in \sigma(T)$ on a : $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ ainsi $|\lambda^n| \leq \|T^n\|$ ce qui implique $|\lambda| \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Ainsi

$$\rho(T) \leq \alpha$$

de plus

$$\alpha \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(T).$$

Pour cela nous allons utiliser la théorie des fonctions holomorphes et les séries entières. Notons Ω le disque ouvert centré en 0 et de rayon $\frac{1}{\rho(T)}$ avec la convention $\Omega = \mathbb{C}$ si $\rho(T) = 0$. Considérons la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H)$ définie par $f(0) = 0$ et $f(\lambda) = (T - \frac{1}{\lambda}I_d)^{-1}$ pour tout $\lambda \in \Omega \setminus 0$. La fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus 0$ et on a : $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) = 0$. La fonction f est donc continue sur Ω ce qui implique que f est en fait holomorphe sur Ω . De plus, si $0 \leq |\lambda| \leq \frac{1}{\|T\|}$, on a

$$f(\lambda) = -\lambda(I_d - \lambda T)^{-1} = -\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n,$$

égalité qui reste trivialement vrai pour $\lambda = 0$. Par conséquent, si $|\lambda| \leq \frac{1}{\|T\|}$, $f(\lambda) = -\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n$. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} T^n$. Comme f est holomorphe sur Ω , $R \geq \text{dist}(0, \Omega^c) = \frac{1}{\rho(T)}$. De plus, d'après la formule d'Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Finalement, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(T)$ ce qui achève la preuve du théorème.

Proposition 2.3.2 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$

i) T est normal alors $\rho(T) = \|T\|$

ii) T est isométrique alors $\rho(T) = 1$

Preuve.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|T^{2^n}\|^2 = \|(T^*)^{2^n} T^{2^n}\| = \|(T^* T)^{2^n}\| = \|(T^* T)^{2^{n-1}} (T^* T)^{2^{n-1}}\| = \|(T^* T)^{2^{n-1}}\|^2 = \dots = \|T^* T\|^{2^n} = \|T\|^{2^{n+1}}$$

$$\rho(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|T\|$$

ii) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\|T^n\|^2 = \|(T^*)^n (T)^n\| = \|(T^* T)^n\| = \|I\| = 1.$$

Il résulte :

$$\rho(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 1$$

Théorème 2.3.3 Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$ alors $w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T)$

Preuve.

Soit $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$

De l'inégalité de Cauchy Schwarz on a :

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\|$$

d'où $w(T) \leq \|T\|$

de l'identité de polarisation on obtient :

$$4|\langle Tx, y \rangle| = |\langle T(x+y), (x+y) \rangle - \langle T(x-y), (x-y) \rangle + i\langle T(x+iy), (x+iy) \rangle - i\langle T(x-iy), (x-iy) \rangle| \leq w(T)[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2] = 4w(T)(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

En prenant $\|x\| = \|y\| = 1$ on trouve $4|\langle Tx, y \rangle| \leq 8w(T)$, ce qui implique $\|T\| \leq 2w(T)$.

Remarque 2.3.4 $|\langle Tx, x \rangle| \leq w(T) \|x\|^2$

Théorème 2.3.5 Si $w(T) = \|T\|$ alors il existe $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ tel que $|\lambda| = \|T\|$ et $\rho(T) = \|T\|$

Preuve.

Si $T \neq 0$ $w(T) = \|T\| = 1$ alors il existe une suite $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de nombre complexe telle que $\lambda_n \in W(T)$ et $1 - \frac{1}{n} \leq |\lambda_n| \leq 1$ on suppose que $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \overline{W(T)}$ par construction $\lambda_n = \langle Tx_n, x_n \rangle$ pour tout $x_n \in H$ tel que $\|x_n\| = 1$ et de l'inégalité $|\langle Tx_n, x_n \rangle| \leq \|Tx_n\| \leq 1$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| = 1$, alors $\|(\lambda I - T)x_n\|^2 = |\lambda|^2 - \langle Tx_n, \lambda x_n \rangle - \langle \lambda x_n, Tx_n \rangle + \|Tx_n\|^2 = |\lambda|^2 - \overline{\lambda} \langle Tx_n, x_n \rangle - \lambda \langle x_n, Tx_n \rangle + \|Tx_n\|^2 \rightarrow 2 - 2|\lambda|^2 = 0$ donc $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$

Théorème 2.3.6 Si T est un opérateur normal alors $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour tout $n \geq 1$ de plus on a $\rho(T) = w(T) = \|T\|$

Preuve.

On a toujours $\rho(T) \leq w(T) \leq \|T\| \cdots (1)$ pour trouver $x \in H$ on a :

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T\| \|T^*x\| \|x\| = \|T\| \|T^2x\| \|x\| \leq \|T\|^2 \|x\|^2$$

car pour un opérateur normal on a toujours $\|Tx\| = \|T^*x\|$, en résulte donc que $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$.

Comme l'inégalité $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ est toujours vraie on a $\|T^2\| = \|T\|^2$ de plus

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^*T^n x, T^{n-1}x \rangle \leq \|T^{n+1}x\| \|T^{n-1}x\| \quad \forall n \geq 1$$

Cette inégalité implique que

$$\|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\| \quad \forall n \geq 2$$

Fixons un entier $n > 2$ et supposons que $\|T\|^K \leq \|T^K\|$ pour tout $K \in \{1, 2, \dots\}$ il suit que

$$\|T\|^{2n} \leq \|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\| \leq \|T^{n+1}\| \|T\|^{n-1}$$

Ainsi, $\|T\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}\|$.

On déduit par induction que $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour tout $n \geq 1$.

Finalement la formule de rayon spectral entraîne que $\rho(T) = \|T\|$ et on a donc par (1) le résultat.

Théorème 2.3.7 Les assertions suivantes sont vraies :

i) T est auto-adjoint si et seulement si $W(T)$ réel

ii) Si T est auto-adjoint et $W(T) \subset [m, M]$ alors $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$

Preuve.

i) Si T est auto-adjoint alors pour tout $x \in H$

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}.$$

On a donc $W(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Dans l'autre sens, si $\langle Tx, x \rangle$ réel pour tout $x \in H$, on a

$$\langle Tx, x \rangle - \langle x, Tx \rangle = 0 = \langle (T - T^*)x, x \rangle$$

donc $T = T^*$

ii) T est auto-adjoint alors, $w(T) = \|T\|$ donc $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$

Théorème 2.3.8 1) Si $\lambda \in W(T)$ et $|\lambda| = \|T\|$ alors $\lambda \in \sigma_p(T)$

2) Si $\text{Im}(T) \perp \text{Im}(T^*)$ alors $w(T) = \frac{1}{2} \|T\|$

Preuve.

1) Par hypothèse :

$\lambda = \langle Tx, x \rangle$ $x \in H, \|x\| = 1$. On a $\|T\| = |\lambda| \leq \|Tx\| \leq \|T\|$ et ainsi

$|\langle Tx, x \rangle| = \|Tx\| \|x\|$. Ainsi $Tx = \mu x$ pour certains $\mu \in \mathbb{C}$ alors $\lambda = \langle Tx, x \rangle = \mu$

Par conséquent $Tx = \lambda x$

2) Soit $x \in H, \|x\| = 1$ si nous écrivons $x = y + z$ tel que $y \in \text{Ker}(T), z \in \text{Ker}(T)^\perp = \overline{\text{Im}(T^*)}$

donc $\langle Tx, x \rangle = \langle Tz, z + y \rangle = \langle Tz, y \rangle$ et $\langle Tx, x \rangle \leq \|Tz\| \|y\| \leq \|T\| \|z\| \|y\|$

$\leq \|T\| \frac{\|y\|^2 + \|z\|^2}{2} = \frac{1}{2} \|T\|$

on a x est arbitraire alors $w(T) \leq \frac{1}{2} \|T\| \leq w(T)$

Chapitre 3

Normes matricielles

Dans ce chapitre, on définit la norme matricielle, on donne les conditions qui rendent C-rayon numérique qui présente une norme matricielle et on définit quelques types des normes particulières

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.1 Dans $\mathbb{R}^n$ les trois normes les plus courantes sont la norme infinie, la norme un et la norme euclidienne et sont définies par : pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

La norme infinie : $\|x\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$

La norme un : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

La norme euclidienne : $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$. La norme euclidienne est donc définie par le produit scalaire $x^T y$

Proposition 3.1.2 Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a les inégalités :

$$\begin{aligned}\|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty\end{aligned}$$

3.1.1 Norme de Hölder

Lorsque E est de dimension finie, $E = \mathbb{K}^n$, une norme de Hölder ou p-norme ($p \geq 1$) est définie par :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

3.2 Normes matricielles

Définition 3.2.1 i) Une application $A \rightarrow \|A\|$ est dite semi norme dans $\mathbb{C}_{n \times n}$ si pour tous $A, B \in \mathbb{C}_{n \times n}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\|A\| \geq 0$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

ii) Une semi norme est une norme générale de la matrice si elle est définie positive :

$$\|A\| > 0 \quad \text{pour} \quad A \neq 0$$

iii) La norme générale de la matrice est une norme matricielle si elle est multiplicative :

$$\text{i.e. pour tout } A, B \in \mathbb{C}_{n \times n} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Définition 3.2.2 Étant donné une norme vectorielle $\|\cdot\|$ l'application $A \rightarrow \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ définit une norme matricielle est dite norme induite par (ou subordonnée à) la norme vectorielle $\|\cdot\|$.

Les normes vectorielles $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ induisent respectivement les normes matricielles suivantes :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

Exemple 3.2.3 Soit A une matrice carrée telle que : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \max_{j=1,2} (a_{1j} + a_{2j}) = \max(a_{11} + a_{21}, a_{12} + a_{22}) = \max(1 + 3, 2 + 4) = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_i (a_{i1} + a_{i2}) = \max(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22}) = \max(1 + 2, 3 + 4) = 7$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^T A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 14 \\ 14 & 20 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(20 - \lambda) - (14)^2 = \lambda^2 - 30\lambda + 4.$$

$$\rho(A^T A) = 15 + \sqrt{221} \quad \text{donc} \quad \|A\|_2 = \sqrt{15 + \sqrt{221}}.$$

Remarque 3.2.4 Après le calcul des normes, nous concluons que les normes sont comparables mais que les valeurs ne sont pas égaux.

3.2.1 Normes compatibles

Une norme vectorielle $\|\cdot\|$ et une norme matricielle $\|\cdot\|_*$ sont compatibles si pour toute matrice A et tout vecteur x

$$\|Ax\| \leq \|A\|_* \|x\|.$$

En particulier, toute norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle et compatible avec celle-ci.

3.2.2 Normes matricielles sous multiplicatives

Une norme matricielle est dite sous multiplicative si :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times m} \quad \forall B \in \mathbb{C}^{m \times p}$$

Proposition 3.2.5 *Quelle que soit la norme matricielle $\|\cdot\|$ sous multiplicative pour une matrice carrée A on a :*

$$1) \rho(A) \leq \|A\|$$

2) *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$ (dépendant de ϵ et de A) telle que :*

$$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$$

Preuve.

1) Pour le vecteur $Au = \lambda u$ on choisit une norme vectorielle compatible et

$$|\lambda| \|u\| = \|\lambda u\| = \|Au\| \leq \|A\| \|u\|$$

Quelle que soit la valeur propre $|\lambda| \leq \|A\|$.

2) On choisit U unitaire telle que $T = U^{-1}AU = (t_{ij})$ soit une matrice triangulaire. Ainsi $t_{ij} = 0$ si $i > j$. On note $t_{ii} = \lambda_i$ $i^{\text{ème}}$ valeur propre de A . Considérons alors la matrice diagonale $D_\delta = D = \text{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$.

Dans la preuve nous utilisons le lemme suivante :

Lemme 3.2.6 *La matrice $D^{-1}U^{-1}AUD = D^{-1}TD$ est la matrice triangulaire dont le coefficient à la place (i, j) est $\delta^{j-i}t_{ij}$.*

Complétons la preuve du théorème : Ceci est le résultat d'un calcul élémentaire et grâce à la condition "triangulaire", les coefficients non diagonaux de cette dernière matrice sont nuls ou tendent vers zéro quand $\delta \rightarrow 0$.

Donc, $\lim_{\delta \rightarrow 0} D^{-1}U^{-1}AUD = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i = t_{ii}$.

Pour l'une quelconque des trois normes usuelles, on remarque que si Δ est diagonale $\|\Delta\| = \rho(\Delta)$.

Considérons alors la norme sur $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$:

$$A \longrightarrow N_\delta(A) = \|(UD_\delta)^{-1}AUD_\delta\|_\infty$$

On obtient : $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_\infty = \rho(A)$ et par conséquent :

$$\exists \delta > 0, N_\delta(A) \leq \rho(A) + \epsilon$$

Pour compléter, il reste à vérifier que N_δ est subordonnée à une norme sur $\mathbb{K}^n$. Vérifions que $v \rightarrow \|(UD_\delta)^{-1}v\|$ est une norme et que N_δ est la norme subordonnée.

Remarque 3.2.7 *Si A est hermitienne ($A = A^*$) $\|A\|_2 = \rho(A)$.*

Exemple 3.2.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A^*$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda \quad \text{alors} \quad \rho(A) = 2$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^*A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda \quad \text{alors} \quad \rho(A^*A) = 4$$

$$\text{donc } \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = 2 = \rho(A)$$

3.3 C-Rayon numérique

Théorème 3.3.1 Pour tout $C \in \mathbb{C}_{n \times n}$, r_C est une semi norme

Théorème 3.3.2 r_C est une norme générale de la matrice si et seulement si C n'est pas scalaire et $\text{tr}(C) \neq 0 \cdots (1)$

Dans la preuve nous utilisons les trois lemmes dans les quels A et C sont données des matrices $n \times n$

Lemme 3.3.3 Soit m un entier avec $1 \leq m \leq n$ si C est invariant sur tout sous espace de dimension m de $\mathbb{C}^n$ alors C est scalaire

Preuve.

On a $m < n$, chaque sous espace de dimension un de $\mathbb{C}^n$ est une intersection de sous espace de dimension m par hypothèse qui sont fixés par C , cela implique que tous les correctifs C sous espace de dimension un de $\mathbb{C}^n$

Maintenant, soit $\{e_j\}_{j=1}^n$ la base standard de $\mathbb{C}^n$ par l'argument précédent il existe une scalaire $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu$

$$\text{telle que } Ce_j = \lambda_j e_j \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{et} \quad C \sum_{j=1}^n e_j = \mu \sum_{j=1}^n e_j$$

$$\text{par conséquent : } \mu \sum_{j=1}^n e_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \text{ et on conclut que } \lambda_j = \mu \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\text{par conséquent : } Ce_j = \mu e_j \quad 1 \leq j \leq n$$

i.e. $C = \mu I$ alors C est scalaire .

Lemme 3.3.4 Si $CU^*AU = U^*AUC \quad \forall U \in \mathcal{U}_n$ et $\mathcal{U}_n$ est un groupe unitaire alors A ou C est scalaire .

Preuve.

Supposons A n'est pas scalaire et montrer que C est scalaire, soit λ est une valeur propre de A avec correspondant de l'espace de vecteurs propres V_λ de dimension m . A n'est pas scalaire, alors

$$1 \leq m = \dim(V_\lambda) < \dim(\mathbb{C}^n) = n.$$

Maintenant,

pour un arbitraire $U \in \mathcal{U}_n$, U^*AU a aussi λ valeur propre avec correspondant l'espace de vecteurs propres U^*V_λ . Ainsi pour tout vecteur $v \in U^*V_\lambda$

$$U^*AU(Cv) = C(U^*AUv) = C(\lambda v) = \lambda(Cv).$$

On conclut que $Cv \in U^*V_\lambda \quad \forall v \in U^*V_\lambda$

c'est C invariant U^*V_λ alors $\dim(V_\lambda) = m$ et U^* est arbitraire nous trouvons que C est invariant sur tout sous espace de dimension m de $\mathbb{C}^n$, alors d'après le lemme [3.3.3](#), C est scalaire.

Lemme 3.3.5 Si $\text{tr}(CU^*AU) = \text{constant} \quad \forall U \in \mathcal{U}_n$ alors,

$$CU^*AU = U^*AUC \quad \forall U \in \mathcal{U}_n$$

Preuve.

Soit S anti-hermitienne alors $e^{\theta S}$ est unitaire pour tout réel θ , et $Ue^{\theta S}$ est unitaire donc par hypothèse

$$f(\theta) = \text{tr}[C(Ue^{\theta S})^*A(Ue^{\theta S})] = \text{constant} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

et pour conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}f(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\text{tr}(Ce^{-\theta S}U^*AUe^{\theta S}) \\ &= \text{tr}[Ce^{-\theta S}U^*AUSe^{\theta S} - CS e^{-\theta S}U^*AUe^{\theta S}] = 0 \end{aligned}$$

L'évaluation de la dérivée en $\theta = 0$ nous obtenons $\text{tr}(CU^*AUS - CSU^*AU) = 0$

par conséquent pour tous anti-hermitienne (et tout unitaire U)

$$\text{tr}[(CU^*AU - U^*AUC)S] = 0.$$

Pour chaque matrice B est une combinaison linéaire de anti-hermitienne.

La dernière identité implique :

$$\text{tr}[(CU^*AU - U^*AUC)B] = 0 \quad \forall B \in \mathbb{C}_{n \times n}.$$

Ainsi,

$$CU^*AU - U^*AUC = 0$$

et le lemme est démontré.

Preuve du théorème :

par théorème 3.3.1 il suffit de montrer que (1) tient si et seulement si r_C est définie positive .

Si C est un scalaire à savoir $C = \lambda I$ pour tout $A \neq 0$ avec $tr(A) = 0$ donne

$$r_C(A) = |\lambda tr(A)| = 0$$

Aussi, si $tr(C) = 0$ alors

$$r_C(I) = |tr(C)| = 0.$$

Aussi de (1) implique l'imprécision de $r_C(\cdot)$.

Dans l'autre sens, soit (1) tenir si $r_C(A) = 0$, par définition : $tr(CU^*AU) = 0 \quad \forall U \in \mathcal{U}_n$ par lemme 3.3.5

$$CU^*AU = U^*AUC \quad \forall U \in \mathcal{U}_n$$

d'après lemme 3.3.4 l'une ou l'autre C ou A est scalaire , et on a C n'est pas scalaire, alors A est scalaire donc $A = \mu I$ nous avons

$$r_C(A) = |\mu tr(C)| = 0$$

et $tr(C) \neq 0$, alors μ doit disparaître et la preuve établie.

Théorème 3.3.6 Soit N une semi norme, M une norme matricielle et $\eta \geq \xi > 0$ constants tels que :

$$\xi M(A) \leq N(A) \leq \eta M(A) \quad \forall A \in C_{n \times n}$$

alors

(i) N est une norme générale de la matrice

(ii) pour tout $v \geq \frac{\eta}{\xi^2}$, N_v ($N_v \equiv vN$) est une norme matricielle

(iii) si $\frac{\eta}{\xi^2} \leq 1$ alors N est une norme matricielle .

Preuve.

(i) Claire

(ii) Il faut simplement noter que

$$\begin{aligned} N_v(AB) &= vN(AB) \leq v\eta M(AB) \leq v\eta M(A)M(B) \\ &\leq \frac{v\eta}{\xi^2} N(A)N(B) \leq v^2 N(A)N(B) = N_v(A)N_v(B) \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} N(AB) &\leq \eta M(AB) \leq \eta M(A)M(B) \\ &\leq \frac{\eta}{\xi^2} N(A)N(B) \leq N(A)N(B), \end{aligned}$$

alors N est une norme matricielle

Définition 3.3.7 (certaine inégalité combinatoire) Soient α_i, γ_j $1 \leq j \leq n$ sont deux scalaires, on considère un ensemble $\mathcal{S}_\gamma(\alpha) = \{\sum_{i=1}^n \gamma_j \alpha_\sigma(j) : \sigma \in S_n\}$ S_n est un groupe symétrique.

Le rayon de $\mathcal{S}_\gamma(\alpha)$ est $\mathcal{R}_\gamma(\alpha) = \max\{|z| : z \in \mathcal{S}_\gamma(\alpha)\}$

Théorème 3.3.8 [14]

Si γ_j $1 \leq j \leq n$ est un scalaire complexe du même argument donc

$$\mathcal{R}_\gamma(\alpha) \geq K_\gamma \max_i |\alpha_i| \quad \forall \alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

avec $K_\gamma = \frac{1}{2} \max_{i,j} |\gamma_i - \gamma_j|$

Lemme 3.3.9 [14]

Soient A et C deux matrices normales avec α_j et γ_j sont des valeurs propres de A et C respectivement alors $\mathcal{R}_\gamma(\alpha) = r_C(A)$

Lemme 3.3.10 [14]

Si C est hermitienne avec γ_j est un valeur propre et K_γ satisfait 3.1 alors

$$r_C(A) \geq \frac{1}{2} K_\gamma \|A\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{C}_{n \times n}$$

Lemme 3.3.11 [14]

Si C est normale avec γ_j est un valeur propre alors

$$r_C(A) \leq \sum_j |\gamma_j| \|A\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{C}_{n \times n}$$

Théorème 3.3.12 C est hermitienne et définie non négative (non positive), si C n'est pas scalaire avec γ_j est un valeur propre alors pour chaque v avec

$$v \geq \frac{16 |tr(C)|}{\max_{i,j} |\gamma_i - \gamma_j|^2}$$

$vr_C \equiv r_{vC}$ est une norme matricielle.

Preuve.

On a C est hermitienne et γ_j sont de même signe et par théorème 3.3.8, K_γ satisfait 3.1 et d'après les lemmes 3.3.10 et 3.3.11 on a

$$\frac{1}{4} \max |\gamma_i - \gamma_j| \|A\|_2 \leq r_C(A) \leq \sum |\gamma_j| \|A\|_2 = |tr C| \|A\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{C}_{n \times n}$$

on a C n'est pas scalaire, le γ_j ne sont pas tous égaux, $\max |\gamma_i - \gamma_j| > 0$ et le théorème 3.3.6 nous achève la preuve.

3.4 Quelques types des normes particulières

Définition 3.4.1 Soit $A = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ où $\mathcal{M}_{m,n}$ des $m \times n$ matrices complexes. La norme de A est considéré comme un opérateur de l^2 vers l^2 donné par :

$$\|A\| = \sup\left\{\sum |\alpha_{ij}x_i\overline{y_j}| : \sum |x_i|^2 = \sum |y_j|^2 = 1\right\}.$$

Rappelons que le produit schur de deux matrices de même format est donné par $A * B = (\alpha_{ij}\beta_{ij})$ si $A = (\alpha_{ij})$ et $B = (\beta_{ij})$.

Nous définissons la norme de schur de A et note $\|A\|_s$ par

$$\|A\|_s = \sup\{\|A * B\| : \|B\| \leq 1\}$$

$\|A\|_s$ la norme de l'opérateur sur $\mathcal{M}_{m,n}$ ce qui correspond à la multiplication de schur par A .

Nous considérons trois autres normes :

1) La colonne d'une norme maximale de $A = (\alpha_{ij})$ est définie par

$$\|A\|_c = \sup_j \left(\sum_i |\alpha_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2) La norme de rangée maximale

$$\|A\|_r = \sup_i \left(\sum_j |\alpha_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

3) La norme d'entrée maximale

$$\|A\|_e = \sup_{ij} |\alpha_{ij}|$$

Exemple 3.4.2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1) \|A\|_c &= \sup_j \left(\sum_i |\alpha_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_j \left(|\alpha_{1j}|^2 + |\alpha_{2j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sup \left(|\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{21}|^2, |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{22}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup(1+9, 4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \|A\|_r &= \sup_i \left(\sum_j |\alpha_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_i \left(|\alpha_{i1}|^2 + |\alpha_{i2}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sup \left(|\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2, |\alpha_{21}|^2 + |\alpha_{22}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup(1+4, 9)^{\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

$$3) \|A\|_e = \sup_{ij} |\alpha_{ij}| = \sup_j \sup_i |\alpha_{ij}| = \sup(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}) = 3$$

Définition 3.4.3 Soit $\|\alpha_{ij}\|_1$ la norme trace de la matrice (α_{ij}) , $\|\alpha_{ij}\|_1$ est la trace de $\sqrt{(\alpha_{ij})^*(\alpha_{ij})}$.

Théorème 3.4.4 Pour toute matrice $A = (\alpha_{ij})$,

$$(i) \|A\|_s = \sup\{\|\alpha_{ij}\xi_i\eta_j\|_1 : \sum |\xi_i|^2 = \sum |\eta_j|^2 = 1\}.$$

$$(ii) \|A\|_s = \sup\{\|\alpha_{ij}\xi_i\eta_j\|_1 : \xi_i \geq 0, \eta_j \geq 0, \sum \xi_i^2 = \sum \eta_j^2 = 1\}.$$

Preuve.

La première égalité est une conséquence de la relation

$$\begin{aligned} \|\alpha_{ij}\|_s &= \sup\{\|\alpha_{ij}x_{ij}\| : \|x_{ij}\| \leq 1\} = \\ &= \sup\{\|\sum_{ij} \alpha_{ij}x_{ij}\xi_i\eta_j\| : \|x_{ij}\| \leq 1, \sum |\xi_i|^2 = \sum |\eta_j|^2 = 1\} = \\ &= \sup\{|\text{tr}[(\alpha_{ij}\xi_i\eta_j)(x_{ij})]| : \|x_{ij}\| \leq 1, \sum |\xi_i|^2 = \sum |\eta_j|^2 = 1\} = \\ &= \sup\{\|\alpha_{ij}\xi_i\eta_j\|_1 : \sum |\xi_i|^2 = \sum |\eta_j|^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Pour prouver la seconde égalité on observe que $x_{ij}\xi_i\eta_j$ peut être exprimé comme $x_{ij}\alpha_i\beta_j|\xi_i||\eta_j|$ avec $|\alpha_i| = |\beta_j| = 1$ pour tout i et j et de plus

$$\begin{aligned} \|x_{ij}\alpha_i\beta_j\| &= \|\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots)(x_{ij})\text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots)\| = \\ &= \|x_{ij}\| \leq 1 \end{aligned}$$

Corollaire 3.4.5 Pour toute matrice A , $\|A\|_s \leq \|A\|_c$ et $\|A\|_s \leq \|A\|_r$

Preuve.

Soit $A = (\alpha_{ij})$ si $\sum |\xi_i|^2 = \sum |\eta_j|^2 = 1$ alors,

$$\begin{aligned} \|\alpha_{ij}\xi_i\eta_j\|_1 &= \|\text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots)(\alpha_{ij}\eta_j)\|_1 \leq \\ &\leq \|\text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots)\|_2 \|\alpha_{ij}\eta_j\|_2 = \\ &= \left(\sum_{ij} |\alpha_{ij}\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_j \left(\sum_i |\alpha_{ij}|^2\right) |\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|A\|_c. \end{aligned}$$

Donc $\|A\|_s \leq \|A\|_c$. La preuve de la deuxième inégalité est similaire.

Proposition 3.4.6 Si A est une matrice de rang un alors, $\|A\|_s = \|A\|_e$

Preuve.

Puisque A de rang un, alors A de la forme $(\alpha_i\beta_j)$, $\{\alpha_i\}$ et $\{\beta_j\}$ sont des suites dans l^2 . Si $B = (x_{ij})$ alors,

$$\begin{aligned} \|A * B\| &= \|\alpha_i\beta_jx_{ij}\| = \\ &= \|\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots)(x_{ij})\text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots)\| \leq \\ &\leq \max |\alpha_i| \max |\beta_j| \|x_{ij}\| = \max |\alpha_i\beta_j| \|x_{ij}\| = \|A\|_e \|B\| \end{aligned}$$

donc $\|A\|_s = \|A\|_e$.

Proposition 3.4.7 Soit $A = (\xi_i u_{ij} \eta_j^{-1})$ et $\{\xi_i\} \in l^2$ avec $\xi_i > 0$ pour tout i , (u_{ij}) est une matrice unitaire et $\eta_j = (\sum_i \xi_i^2 |u_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ alors $\|A\|_s = \|A\|_c = 1$

Preuve.

notons que pour chaque j il existe certain i avec $u_{ij} \neq 0$, $\eta_j > 0$ chaque colonne de A est un vecteur de l'unité parce que pour chaque j

$$(\sum_i |\xi_i u_{ij} \eta_j^{-1}|^2) = (\sum_i \xi_i^2 |u_{ij}|^2) \eta_j^{-2} = 1.$$

Ainsi $\|A\|_c = 1$ et il reste à démontrer que $\|A\|_s \geq 1$, on a $\sum \xi_i^2 = \sum \eta_j^2$ et la normalisation $\{\xi_i\}$ ne change pas A . Nous pouvons supposer que $\sum \xi_i^2 = \sum \eta_j^2 = 1$

On a

$$\begin{aligned} \|A\|_s &\geq \|(\xi_i^2 u_{ij})\|_1 = \|diag(\xi_1^2, \xi_2^2, \dots)(u_{ij})\|_1 = \\ &= \|diag(\xi_1^2, \xi_2^2, \dots)\|_1 = 1 \end{aligned}$$

Théorème 3.4.8 Si $A = (\alpha_{ij})$ et $\|A\|_c = t$ alors, $\|A\|_s = t$ si et seulement si il existe une matrice unitaire (u_{ij}) et vecteurs $\{\xi_i\}$ et $\{\eta_j\}$ avec $\xi_i \geq 0$, $\eta_j \geq 0$ et $\sum \xi_i^2 = \sum \eta_j^2 = 1$ tel que $\alpha_{ij} \eta_j = t \xi_i u_{ij}$ pour tout i, j

Preuve.

Sans perte de généralité, nous pouvons remplacer t par 1.

On suppose qu'il existe deux vecteurs $\{\xi_i\}$ et $\{\eta_j\}$ et une matrice unitaire telle que

$$\sum_{i,j} |\alpha_{ij} \eta_j|^2 = \sum_{i,j} |\xi_i u_{ij}|^2$$

ce qui implique que $\sum_j \eta_j^2 (\sum_i |\alpha_{ij}|^2) = \sum_i \xi_i^2 = 1$ et on a $\sum_i |\alpha_{ij}|^2 \leq 1$ pour tout j par hypothèse, l'équation $\sum \eta_j^2 = 1$ implique que $\sum_i |\alpha_{ij}|^2 = 1$ pour tout j .

Maintenant :

$$\eta_j^2 = \eta_j^2 \sum_i |\alpha_{ij}|^2 = \sum_i |\alpha_{ij} \eta_j|^2 = \sum_i |\xi_i u_{ij}|^2 = \sum_i \xi_i^2 |u_{ij}|^2$$

de sorte que l'équation $\|A\|_s = 1$ suit à partir de [3.4.7](#)

Pour montrer l'inverse, supposons $\|A\|_s = 1$ d'après théorème [3.4.4](#) et un argument de compacité, ils existent vecteurs $\{\xi_i\}$ et $\{\eta_j\}$ avec $\xi_i \geq 0$, $\eta_j \geq 0$, $\sum \xi_i^2 = 1 = \sum \eta_j^2$ et tel que

$$\|(\alpha_{ij} \xi_i \eta_j)\|_1 = \|A\|_s = 1$$

Soit $V = (v_{ij})$ est une matrice unitaire dans la décomposition polaire de la matrice $(\alpha_{ij} \xi_i \eta_j)$ alors,

$$\begin{aligned} 1 &= \|(\alpha_{ij} \xi_i \eta_j)\|_1 = \text{tr}[(v_{ij}(\alpha_{ij} \xi_i \eta_j))] = \\ &= \sum_{i,j} (\xi_i v_{ji})(\alpha_{ij} \eta_j) \leq (\sum_{i,j} \xi_i^2 |v_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i,j} \eta_j^2 |\alpha_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i,j} \eta_j^2 |\alpha_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|A\|_c = 1.$$

Ainsi, l'inégalité de Schwarz ci dessus est en fait une égalité et donc il existe un constant c de valeur absolue 1 tel que $\alpha_{ij}\eta_j = c\xi_i \overrightarrow{v_{ji}}$ alors, $(c\overrightarrow{v_{ji}})$ est la matrice unitaire .

3.4.1 Normes essentielles

On rappelle que la norme essentielle d'un opérateur $T : X \longrightarrow Y$, notée $\|T\|_e$ est définie par :

$$\|T\|_e = \inf\{\|T - K\|, K \text{ est compact de } X \text{ dans } Y\}.$$

Observons que $\|T\|_e \leq \|T\|$ et que $\|T\|_e$ est la norme de T vu comme un élément de l'espace quotient $B(X, Y)/K(X, Y)$ où $K(X, Y)$ désigne l'espace des opérateurs compacts de X dans Y

3.4.2 Normes de Frobenius

La norme de Frobenius $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ est définie par :

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^*A)} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n \|A^j\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Où A^j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A

La norme de Frobenius ainsi que toute p norme sont des normes sous multiplicatives

Exemple 3.4.9 1) $\|I_n\|_F = \sqrt{n}$.

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

alors

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^*A)} = \sqrt{26}$$

Proposition 3.4.10 La norme de Frobenius est une norme matricielle. Elle vérifie l'inégalité suivante :

$$1) \|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$

Preuve.

$$1) \text{ On a } \text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \sigma(A)$$

alors

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^*A) \leq n \|A\|_2^2$$

Il en résulte que $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$
Comme conséquence, il vient

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$$

Proposition 3.4.11 [6]

La norme de Frobenius vérifie aussi :

- 1) $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_2$
- 2) $\|AB\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F$
- 3) $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$

3.4.3 Opérateur de Hilbert-Schmidt

Il s'agit de la classe la plus fréquente d'opérateurs compacts dans un espace de Hilbert.

Définition 3.4.12 Soit H est un espace de Hilbert séparable. On dit $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty$$

Le nombre

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

s'appelle la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur T .

Exemple 3.4.13 Pour un opérateur en dimension fini $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ (de façon équivalente pour les matrices $n \times n$),

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \text{tr}(T^*T) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 3.4.14 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt, on a

- 1) la norme $\|\cdot\|_{HS}$ ne dépend pas du choix de la base hilbertienne de H .
- 2) $\|T^*\|_{HS} = \|T\|_{HS}$.
- 3) On a toujours, $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$

Théorème 3.4.15 Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

Exemple 3.4.16 Considérons l'opérateur intégral $T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ défini par

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t, s)f(s)ds$$

Avec un noyau $K(.,.) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Alors T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et

$$\|T\|_{HS} = \|K\|_{L^2[0, 1]}$$

Chapitre 4

Applications

4.1 Système linéaire

Soient m et n des entiers naturels non nuls, un système linéaire de m équations à n inconnues est un ensemble de relations algébriques de la forme

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.1)$$

où les x_j sont les inconnues, les a_{ij} les coefficients du système et les b_i les composantes du second membre, il est commode d'écrire le système (4.1) sous la forme matricielle

$$Ax = b \quad (4.2)$$

où $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ la matrice des coefficients, $b = (b_i) \in \mathbb{C}^m$ le vecteur de second membre et $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$ le vecteur inconnu. On appelle solution de (4.2) tout n -uplet de valeurs x_i qui satisfait (4.1).

Théoriquement, le fait que A soit inversible entraîne que le système (4.2) admet une solution unique $x = A^{-1}b$. Mais cette écriture suppose que l'on dispose de la matrice A^{-1} or l'obtention de A^{-1} est équivalente à la résolution de n systèmes linéaires, $A(A^{-1})_j = e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ en plus de la multiplication $x = A^{-1}b$.

Une autre méthode consisterait à obtenir les x_i à l'aide des formules de Cramer

$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ où $\det(A_i)$ désigne le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le vecteur b .

Si la matrice est diagonalisable, on peut exprimer le système dans la base des vecteurs propres et résoudre le système diagonal :

$$A = VDV^{-1}, \quad Ax = b \Leftrightarrow D(V^{-1}x) = V^{-1}b.$$

Mais diagonaliser une matrice est très coûteux. Ensuite, il faudrait faire les calculs avec des nombres complexes, ce qui est nettement plus coûteux. De plus, il y a des matrices qui ne sont pas diagonalisables.

Les méthodes basées sur l'élimination d'inconnues avec combinaisons linéaires des lignes sont les méthodes directes de référence. Lorsqu'on élimine les inconnues, on aboutit finalement à un système triangulaire supérieur, que l'on remonte pour calculer les coordonnées de la solution. Le processus d'élimination est en fait la résolution d'un système triangulaire inférieur. L'algorithme s'appelle la factorisation LU.

4.2 Conditionnements

Dans cette section, on se propose d'examiner la sensibilité d'une méthode de résolution : aux erreurs d'arrondis aux "petites perturbations" des données du problème.

On mesurera cette sensibilité par un nombre appelé conditionnement, qui dépend d'une norme sur $\mathbb{K}^n$. Lorsqu'il est très élevé, cela peut mettre en cause la pertinence du résultat numérique obtenu. On part d'un système $Au = b$, de taille $n \times n$, et on se donne par ailleurs ΔA et Δb , présumés petits par rapport à A et b et tel que $A + \Delta A$ soit aussi inversible. On se propose de comparer les solutions x et y des systèmes :

$$Ax = b \quad \text{et} \quad (A + \Delta A)y = b.$$

On écrit aussi $y - x = \Delta x$ et on se demande si le taux d'erreur sur x mesuré par $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$, s'obtient à partir de $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ par un "facteur d'amplification" multiplicatif raisonnable.

Définition 4.2.1 (Conditionnement)

Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On appelle conditionnement de A par rapport à la norme $\|\cdot\|$ le nombre réel positif $\text{cond}(A)$ défini par :

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Proposition 4.2.2 (Propriétés générales du conditionnement)

Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible alors $\text{cond}(A) \geq 1$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$.
3. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles, alors $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\text{cond}(B)$

Preuve.

1. Comme $\|\cdot\|$ est une norme induite, c'est donc une norme matricielle. On a donc pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|I_d\| \leq \|A\| \|A^{-1}\|$$

ce qui prouve que $\text{cond}(A) \geq 1$.

2. Par définition,

$$\text{cond}(\alpha A) = \|\alpha A\| \|(\alpha A)^{-1}\| = |\alpha| \|A\| \frac{1}{|\alpha|} \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$$

3. Soient A et B des matrices inversibles alors AB est une matrice inversible et comme $\|\cdot\|$ est une norme matricielle,

$$\text{cond}(AB) = \|AB\| \|(AB)^{-1}\| = \|AB\| \|B^{-1}A^{-1}\| \leq \|A\| \|B\| \|B^{-1}\| \|A^{-1}\|.$$

Donc $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\text{cond}(B)$

Remarque 4.2.3 Le conditionnement d'un système linéaire $Ax = b$ traduit la difficulté à le résoudre : $1 \leq \text{cond}(A) \leq \infty$

$\text{cond}(A) \sim 1 \Rightarrow$ système bien conditionné (solution stable par rapport à une erreur des données)

$\text{cond}(A) \gg 1 \Rightarrow$ système mal conditionné (solution très sensible par rapport à une erreur des données)

$\text{cond}(A) = +\infty \Rightarrow$ système singulier (matrice non inversible, $\det = 0$)

Proposition 4.2.4 (Caractérisation du conditionnement pour la norme 2)

Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note $\text{cond}_2(A)$ le conditionnement associé à la norme induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note σ_n [resp. σ_1] la plus grande [resp. petite] valeur propre de $A^t A$ (noter que $A^t A$ est une matrice symétrique définie positive). Alors

$$\text{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_1}}.$$

2. Si de plus A est une matrice symétrique définie positive, alors

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

où λ_n [resp. λ_1] est la plus grande [resp. petite] valeur propre de A .

Preuve.

On rappelle que si A a comme valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors A^{-1} a comme valeurs propres $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ et A^t a comme valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Par définition, on a $\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$. Et on a $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} = \sqrt{\sigma_n}$ donc

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho((A^{-1})^t A^{-1})} = \sqrt{\rho((AA^t)^{-1})} \text{ ou } \rho((AA^t)^{-1}) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_1}$$

où $\tilde{\sigma}_1$ est la plus petite valeur propre de la matrice AA^t . Mais les valeurs propres de AA^t sont les valeurs propres de $A^t A$: en effet, si λ est valeur propre de AA^t associée au vecteur propre x alors λ est valeur propre de $A^t A$ associée au vecteur propre $A^t x$. On a donc

$$\text{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\sigma_n}{\sigma_1}}.$$

2. Si A est symétrique définie positive, alors $A^t A = A^2$ et $\sigma_i = \lambda_i^2$ où λ_i est valeur propre de la matrice A . On a dans ce cas

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Les propriétés suivantes sont moins fondamentales, mais cependant intéressantes.

Proposition 4.2.5 (Propriétés du conditionnement pour la norme 2). Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note $\text{cond}_2(A)$ le conditionnement associé à la norme induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors $\text{cond}_2(A) = 1$ si et seulement si $A = \alpha Q$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et Q est une matrice orthogonale (i.e. $Q^t = Q^{-1}$).
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On suppose que $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale. Alors $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R)$.
3. Si A et B sont deux matrices symétriques définies positives, alors

$$\text{cond}_2(A + B) \leq \max(\text{cond}_2(A), \text{cond}_2(B)).$$

4.2.1 Calcul d'erreur

Proposition 4.2.6 (Majoration de l'erreur relative pour une erreur sur le second membre). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\| \cdot \|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite. Soit $\Delta b \in \mathbb{R}^n$ si x est solution de $Ax = b$ et $x + \Delta x$ est solution de

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b, \quad (4.3)$$

alors

$$\frac{\| \Delta x \|}{\| x \|} \leq \text{cond}(A) \frac{\| \Delta b \|}{\| b \|} \quad (4.4)$$

Preuve.

D'après (4.3) on obtient

$$A\Delta x = \Delta b$$

et donc

$$\| \Delta x \| \leq \| A^{-1} \| \| \Delta b \|$$

Cette première estimation n'est pas satisfaisante car elle porte sur l'erreur globale or la notion intéressante est celle d'erreur relative. On obtient l'estimation sur l'erreur relative en remarquant que $b = Ax$, ce qui entraîne que $\| b \| \leq \| A \| \| x \|$.

On en déduit que

$$\frac{1}{\| x \|} \leq \frac{\| A \|}{\| b \|}$$

En multipliant membre à membre cette dernière inégalité et $\| \Delta x \| \leq \| A^{-1} \| \| \Delta b \|$, on obtient le résultat souhaité. Remarquons que l'estimation de (4.4) est optimale. En effet, on va démontrer qu'on peut avoir égalité dans l'inégalité (4.4).

Pour cela, il faut choisir convenablement b et Δb . On sait déjà que si x est solution de (4.2) et $x + \Delta x$ est solution de $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$, alors

$$\Delta x = A^{-1} \Delta b, \text{ et donc } \| \Delta x \| = \| A^{-1} \Delta b \|.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\| x \| = 1$ et $\| Ax \| = \| A \|$. Notons qu'un tel x existe parce que

$$\| A \| = \sup\{\| Ax \|; \| x \| = 1\} = \max\{\| Ax \|; \| x \| = 1\}.$$

On a donc

$$\frac{\| \Delta x \|}{\| x \|} = \| A^{-1} \Delta b \| \frac{\| A \|}{\| Ax \|}$$

Posons $b = Ax$; on a donc $\|b\| = \|A\| \|x\|$ et donc

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \|A^{-1} \Delta b\| \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

De même, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\| = 1$ et $\|A^{-1}y\| = \|A^{-1}\|$. On choisit alors Δb tel que $\Delta b = y$. Comme $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, on a $\Delta x = A^{-1} \Delta b$ et donc :

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1} \Delta b\| = \varepsilon \|A^{-1}y\| = \varepsilon \|A^{-1}\| = \|\Delta b\| \|A^{-1}\|.$$

On en déduit que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \|\Delta x\| \|A^{-1}\| \frac{\|A\|}{\|b\|} \text{ car } \|A\| = \|b\| \text{ et } \|x\| = 1$$

Par ce choix de b et Δb on a bien égalité dans [4.4](#) qui est donc optimale.

Majorons maintenant l'erreur relative commise sur x solution de $Ax = b$ lorsque l'on commet une erreur ΔA sur la matrice A .

Proposition 4.2.7 (Majoration de l'erreur relative pour une erreur sur la matrice). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite. Soit $\Delta A \in \mathbb{R}^n$; on suppose que $A + \Delta A$ est une matrice inversible. Si x est solution de $Ax = b$ et $x + \Delta x$ est solution de

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b \tag{4.5}$$

alors

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \tag{4.6}$$

Preuve.

D'après $Ax = b$ et [4.5](#), on obtient

$$A(\Delta x) = -\Delta A(x + \Delta x)$$

donc

$$\Delta x = -A^{-1} \Delta A(x + \Delta x)$$

On en déduit que $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x + \Delta x\|$, d'où on déduit le résultat souhaité.

On peut en fait majorer l'erreur relative dans le cas où l'on commet à la fois une erreur sur A et une erreur sur b .

On donne le théorème à cet effet ; la démonstration est toute fois nettement plus compliquée.

Théorème 4.2.8 (Majoration de l'erreur relative pour une erreur sur matrice et second membre). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite. Soient $\Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta b \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Alors la matrice $(A + \Delta A)$ est inversible et si x est solution de $Ax = b$ et $x + \Delta x$ est solution de $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$, alors

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Preuve.

On peut écrire $A + \Delta A = A(Id + B)$ avec $B = A^{-1}\Delta A$. Or le rayon spectral de B , $\rho(B)$ vérifie $\rho(B) \leq \|B\| \leq \|\Delta A\| \|A^{-1}\| < 1$ et donc $(Id + B)$ est inversible et $(Id + B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B^n$. On a aussi $\|(Id + B)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| = \frac{1}{1-\|B\|} \leq \frac{1}{1-\|\Delta A\| \|A^{-1}\|}$. On en déduit que $A + \Delta A$ est inversible, car $A + \Delta A = A(Id + B)$ et comme A est inversible, $(A + \Delta A)^{-1} = (Id + B)^{-1} A^{-1}$.

Comme A et $A + \Delta A$ sont inversibles, il existe un unique $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$ et il existe un unique $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Comme $Ax = b$, on a $(A + \Delta A)\Delta x + \Delta Ax = \Delta b$ et donc $\Delta x = (A + \Delta A)^{-1}(\Delta b - \Delta Ax)$ or $(A + \Delta A)^{-1} = (Id + B)^{-1} A^{-1}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \|(A + \Delta A)^{-1}\| &\leq \|(Id + B)^{-1}\| \|A^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|} \end{aligned}$$

On peut donc écrire la majoration suivante :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|A\| \|x\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right).$$

En utilisant le fait que $b = Ax$ et que par suite $\|b\| \leq \|A\| \|x\|$, on obtient :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right),$$

ce qui achève la preuve.

Théorème 4.2.9 Soit A une matrice inversible et x la solution de $Ax = b$. Soit ΔA et Δb tels que

$$\|\Delta A\| \leq \alpha \|A\|, \quad \|\Delta b\| \leq \beta \|b\| \quad \text{et} \quad \alpha \text{cond}(A) < 1$$

alors $A + \Delta A$ est inversible. Soit $x + \Delta x$ la solution du système

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b,$$

alors

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \alpha \text{cond}(A)} (\alpha + \beta).$$

Ce théorème correspond à la définition générale où les données sont soit A et b (si et seulement A est la donnée, alors $\beta = 0$).

La preuve du théorème nécessite le lemme suivant :

Lemme 4.2.10 Si $\|F\| < 1$ alors $(I + F)$ est inversible et $\|(I + F)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|F\|}$

Preuve.

$$\begin{aligned} A + \Delta A &= A(I + A^{-1}\Delta A), \\ \|A^{-1}\Delta A\| &\leq \text{cond}(A)\alpha < 1 \end{aligned}$$

donc d'après le lemme 4.2.10, $I + A^{-1}\Delta A$ est inversible et

$$\|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \alpha \text{cond}(A)}$$

Soit $y = x + \Delta x$, on a $(A + \Delta A)y = b + \Delta b$, $Ax = b$ donc $A(y - x) = \Delta b - \Delta Ay$ et

$$\|y - x\| \leq \|A^{-1}\| (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \|y\|) \text{ or } \|\Delta b\| \leq \beta \|b\| \leq \beta \|A\| \|x\|, \\ d'où \| \Delta x \| \leq \text{cond}(A)(\beta \|x\| + \alpha \|y\|).$$

Il reste à majorer $\|y\|$. On a

$$A(I + A^{-1}\Delta A)y = A(x + A^{-1}\Delta b), \\ \|y\| \leq \|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| (\|x\| + \|A^{-1}\| \|\Delta b\|), \\ \|y\| \leq \frac{1}{1 - \alpha \text{cond}(A)} (1 + \beta \text{cond}(A)) \|x\|.$$

Par conséquent, $\beta \|x\| + \alpha \|y\| \leq \frac{1}{1 - \alpha \text{cond}(A)} (\alpha + \beta) \|x\|$ on en déduit que

$$\|\Delta x\| \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \alpha \text{cond}(A)} (\alpha + \beta) \|x\|$$

Dans ces exemples nous étudions la norme qui donne une minimale erreur

Exemple 4.2.11 Considérons le système

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix} \text{ de solution } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le système perturbé

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + \Delta u_1 \\ u_2 + \Delta u_2 \\ u_3 + \Delta u_3 \\ u_4 + \Delta u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{bmatrix} \text{ a pour solution } \begin{bmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi une erreur relative de $2 \cdot 10^{-2}$ sur les données entraîne une erreur relative de l'ordre de $\frac{10}{1}$ du résultat (erreur amplifiée de 2000).

De même

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + \Delta u_1 \\ u_2 + \Delta u_2 \\ u_3 + \Delta u_3 \\ u_4 + \Delta u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix} \text{ a pour solution } \begin{bmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Pour tant, la matrice est "bonne" (symétrique, de déterminant 1, donc loin de 0). Son inverse est d'ailleurs donnée par

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mais les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 \approx 0,01015 < \lambda_2 \approx 0,8431 < \lambda_3 \approx 3,858 < \lambda_4 \approx 30,2877,$$

si bien que

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \approx 2984 \text{ est grand}$$

D'autre part

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \Delta u = \begin{bmatrix} 8,2 \\ -13,6 \\ 3,5 \\ -2,1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}, \Delta b = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{bmatrix}$$

de sorte que

$$\frac{\|\Delta u\|_2}{\|u\|_2} \simeq 8,1985 \text{ et } \text{cond}_2(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \simeq 9,9424.$$

On n'est pas loin de l'égalité dans l'estimation 4.4

$$\frac{\|\Delta u\|_2}{\|u\|_2} \leq \text{cond}_2(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

Dans l'autre sens

$$\text{cond}_\infty(A) = \text{cond}_1(A) = 4488.$$

puisque A est symétrique, alors

$$\frac{\|\Delta u\|_1}{\|u\|_1} \simeq 6,85 \text{ et } \text{cond}_1(A) \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} \simeq 15,0855.$$

donc 4.4 est vérifié.

Pour la norme de l'infinie on a

$$\frac{\|\Delta u\|_\infty}{\|u\|_\infty} \simeq 13,6 \text{ et } \text{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \simeq 13,6.$$

Exemple 4.2.12 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 10 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ et } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 75 & -145 & 135 \\ 0 & -21 & 41 & -38 \\ 0 & 14 & -27 & 25 \\ \frac{1}{2} & -53 & 102 & -95 \end{bmatrix}$$

le système linéaire de A est

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 10 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 13 \\ 28 \\ 23 \end{bmatrix} \text{ de solution } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le système perturbé

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 10 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + \Delta u_1 \\ u_2 + \Delta u_2 \\ u_3 + \Delta u_3 \\ u_4 + \Delta u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38,1 \\ 12,9 \\ 28,1 \\ 22,9 \end{bmatrix} \text{ a pour solution } \begin{bmatrix} -34,5 \\ 11 \\ -5,6 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

On a $\lambda_1 = 24,1$ $\lambda_2 = -0,007$ et $\text{cond}_2(A) = 7363$.

D'autre part

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \Delta u = \begin{bmatrix} -35,5 \\ 10 \\ -6,6 \\ 25 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 38 \\ 13 \\ 28 \\ 23 \end{bmatrix}, \Delta b = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{bmatrix}$$

alors,

$$\frac{\|\Delta u\|_2}{\|u\|_2} \simeq 22,6 \text{ et } \text{cond}_2(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \simeq 27,24.$$

On n'est pas loin de l'égalité dans l'estimation 4.4

Dans l'autre sens, on a $\|A\|_1 = 33$ $\|A^{-1}\|_1 = 315$ et $\text{cond}_1(A) = 10395$.

$$\frac{\|\Delta u\|_1}{\|u\|_1} \simeq 19,275 \text{ et } \text{cond}_1(A) \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} \simeq 40,7484.$$

Pour la norme l'infinie on a

$$\frac{\|\Delta u\|_\infty}{\|u\|_\infty} \simeq 35,5 \text{ et } \text{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \simeq 35,5.$$

Exemple 4.2.13 Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

on obtient le système suivant : $A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,7 \end{bmatrix}$ de solution $\begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$

Le système perturbé est

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + \Delta u_1 \\ u_2 + \Delta u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,01 \\ 0,69 \end{bmatrix} \text{ de solution } x = \begin{bmatrix} -0,17 \\ 0,22 \end{bmatrix}$$

Son inverse est donnée par $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

donc,

$$\text{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 289$$

D'autre part

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \Delta u = \begin{bmatrix} -0,17 \\ 0,12 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,7 \end{bmatrix}, \Delta b = \begin{bmatrix} 0,01 \\ -0,01 \end{bmatrix}$$

de sorte que

$$\frac{\|\Delta u\|_1}{\|u\|_1} \simeq 2,9 \text{ et } \text{cond}_1(A) \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} \simeq 3,3813.$$

On est proche de l'égalité dans l'estimation 4.4

$$\frac{\|\Delta u\|_1}{\|u\|_1} \leq \text{cond}_1(A) \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1}$$

Dans l'autre sens

$$\text{cond}_\infty(A) = 289.$$

alors,

$$\frac{\|\Delta u\|_\infty}{\|u\|_\infty} \simeq 1.7 \text{ et } \text{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \simeq 2.89.$$

donc 4.4 est vérifié

Pour la norme euclidienne, les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 \approx 0,0044, \quad \lambda_2 \approx 222.99$$

si bien que

$$\text{cond}_2(A) = 225.12$$

donc

$$\frac{\|\Delta u\|_2}{\|u\|_2} \simeq 2.08 \text{ et } \text{cond}_2(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \simeq 2.60.$$

Remarque 4.2.14 1) Dans les deux exemples (4.2.11 et 4.2.12), la norme infinie a donné une petite erreur en comparant par d'autres normes mais l'exemple 4.2.13 la norme un a donné une petite erreur en comparant par d'autres normes.

2) Après avoir étudié un certain nombre de systèmes linéaires, nous avons conclu que l'erreur est liée au changement de système linéaire, donc à chaque système linéaire, il existe une norme qui donne l'approximation la plus proche du bon résultat.

Bibliographie

- [1] N.I.Akhiezer and I.M.Glazman, Theory of linear operator in Hilbert space, Inc.New York,1961-1963.
- [2] R. Bhatia, Matrix Analysis, graduate texts in mathematics, springer-Verlag, newyork, (1997).
- [3] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical range 1, Lond. Math. Soc. Lecture Notes Series, 2(1971).
- [4] J-C. Chuan, Operator Norms on $L(E)$, Journal of Mathematical Analysis and Application 97, 214-218(1983).
- [5] J.F. Durand, Eléments de Calcul Matriciel et d'Analyse Factorielle de Données, Maitrise d'Ingénierie Mathématique DEA de Biostatistique, Université Montpellier II, Novembre 2002.
- [6] J. Erhel, N.Nassif et B. Philippe, Calcul matriciel et systèmes linéaires, DEA Informatique et modélisation, 2004.
- [7] C.K.Fong and J.A.R.Holbrook, Unitairily invariant operator norms, Can .j.Math, Vol XXXV,No. 2, 1983, pp.274-299.
- [8] C.K.Fong, H.Radjavi and P.Rosenthal, Norms for matrices and operators, J.Operator theory, 99-113, 1987.
- [9] T. Furuta, On the Class of paranormal Operators, Proc. Japan Acad., 43 (1967).
- [10] T. Furuta, M. Horie and R. Nakamoto, A Remark on a Class of Operators, Proc. Japan Acad., 43 (1967).
- [11] T.Furuta, Invitation to Linear Operators,From matrices to bounded linear operators on a Hilbert space ,London and New York, 2001.
- [12] A. Gherbi, Quelques classes d'opérateurs quotientes caractérisation et applications, thèse de doctrat Université d'Oran 1,2015.

- [13] M.Goldberg and E. G. Straus, Elementary inclusion relations for generalized numerical ranges, *Linear Algebra and Appl*, 18 :1-24(1967).
- [14] M.Goldberg and E. G. Straus, Norm Properties of C-Numerical Radii, *Linear Algebra And its Applications* 24 :113-131, (1979).
- [15] M.Guesba, Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, Thèse de doctrat, Universite de M'sila, 2017.
- [16] K.E.Gustafson;D.K.M.Rao, Numerical Range, The field of values of Linear and Matrices, Sringer, New York, 1997.
- [17] W.Kahan, Notes on vector and Matrix Norms, Math H 110, November 14-1999.
- [18] C.S. Kubrusly, Spectral Operators Theory of on Hilbert Spaces, Birkhauser, 2012.
- [19] F.Kittaneh, Norm inequalities for sums of positive operators, *j.Operator Theory* 95-103, 2002.
- [20] F. Kittaneh, Norm Inequalities for commutators of normal operators; *Int. Series of Numerical Mathematics Vol 157*(2008), 147 - 154.
- [21] S. C. Ong, On the schur multiplier norm of matrices, *Linear Algebra Appl.*, 56(1984),45-55.
- [22] A.Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications, Springer, 2004.
- [23] V. Rakocevic, On class of operators, *Mat. Vesnik.* 37(1989), 423-426.
- [24] S.Raouafi, Image numérique et le théorème de Crouzeix, thèse de doctra Université Lval Québec, 2010.
- [25] R.Sen, A First course in Functional Analysis Theory and Applications, Anthem Press UK and USA 2013.
- [26] J. P. Williams, Schwarz norms for operators, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 24, No. 1, May 1968.
- [27] N. Young, An Introduction to Hilbert Space, Cambridge University, 1988.
- [28] W.Young Lee, Lecture Notes on Operator Theory, Spring 2008.

Résumé

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie des opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert.

Dans ce mémoire, nous avons étudié particulièrement les normes des opérateurs et les normes matricielles qui jouent un rôle essentiel dans l'étude de plusieurs problèmes dans la pratique. Le premier chapitre est consacré aux espaces de Hilbert: définitions et propriétés. Nous donnons également la définition de la continuité, la norme, l'adjoint et l'inverse d'un opérateur, le spectre et l'image numérique des opérateurs linéaires sur l'espace de Hilbert et la matrice associé à un opérateur. Dans le deuxième chapitre, nous avons donné des définitions équivalentes à la définition de la norme, les classes de opérateurs et la relation entre le rayon numérique, le rayon spectrale et la norme. Dans le troisième chapitre, nous définissons la norme matricielle et le C-rayon numérique qui présente une norme matricielle, ainsi que quelques normes particulières. Dans le dernier chapitre on définit la conditionnement, calcul de l'erreur et quelques exemples.

Mots clés opérateur linéaire, spectre d'un opérateur, image numérique d'un opérateur , rayon spectral, rayon numérique, C-image numérique, C-rayon numérique, conditionnement.

Abstract

This work is part of the theory of linear operators on a Hilbert space. In this thesis, we have particularly studied the norms of operators and the matrix norms which play a key role in the study of several problems in practice.

The first chapter is devoted to Hilbert spaces: definitions and properties. We also give the definition of continuity, the norm, the adjoint and the inverse of an operator, the spectrum and the

numerical range of the linear operators on the Hilbert space and the matrix associated to an operator.

In the second chapter, we have given definitions equivalent to the definition of the norm, the classes of operators and the relation between the numerical radius, the spectral radius and the norm.

In the third chapter, we define the matrix norm and the C-numerical radius which presents a matrix norm, as well as some particular norms. In the last chapter we define the conditioning, calculation of the error and some examples.

Key words Linear operator, spectrum of an operator, numerical range of an operator, spectral radius, numerical radius, C-numerical range, C-numerical radius, conditioning.

ملخص

هذا العمل جزء من نظرية المؤثرات الخطية في الفضاء الهلبرتي. في هذه المذكرة درسنا بشكل خاص تنظيم المؤثرات وتنظيم المصفوفات التي تلعب دور ضروريا في دراسة العديد من المشاكل في الجزء التطبيقي.

الفصل الأول مخصص للفضاء الهلبرتي: تعاريف وخصائص. كما نعطي تعريف استمرارية, تنظيم, قرين ومعكوس المؤثر وتعريف الطيف, الصورة العددية للمؤثرات الخطية في الفضاء الهلبرتي والمصفوفة المرفقة بالمؤثر الخطي. في الفصل الثاني أعطينا تعاريف مكافئة لتعريف التنظيم, أصناف المؤثرات وعلاقة نصف القطر العددي ونصف القطر الطيفي بالتنظيم. في الفصل الثالث عرفنا التنظيم المصفوفي ونصف القطر العددي المتعلق ب C الذي يمثل تنظيم مصفوفي وكذلك بعض النظم الخاصة. في الفصل الأخير نعرف التكتيف, وتوظيفه في حساب الخطأ مع بعض الأمثلة.

الكلمات المفتاحية مؤثر خطي, طيف مؤثر, صورة عددية لمؤثر, نصف القطر الطيفي, نصف القطر العددي, الصورة العددية المتعلقة ب C , نصف القطر العددي المتعلق ب C , التكتيف.