N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Analyse d'un problème de contact sans frottement

Présenté par: Hafsia Bennadji
Manal Nid

Soutenu devant le jury composé de

M: Bachir. Douib	…….	Rapporteur	Univ. d'El Oued
M: Abdelaziz . Azeb Ahmed	……	Président	Univ. d'El Oued
M: Hadj Ammar . Tedjani	…….	Examinateur	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2016 – 2017.

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nous avoir données les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur **Bachir Douib** qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses directives du début à la fin de ce travail.

Comme je tiens à remercier vivement **Dr. Abdel Aziz Azeb** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à **Dr. Hadj Ammar Tedjani** d'avoir accepter de juger mon travail.

Un remerciement spécial et sincère au **Prof. Mohammed Tayeb Meftah**, de l'université de Ouargla et **Prof. Salah Drabla** à l'université Ferhat Abbas Sétif.
Un grand merci aussi à **Dr. Adel Aissaoui** et **M. Mohammed Salah Mesai Aoun** pour leur aide et leur sympathie.

D'ailleurs, nous remercions chaleureusement tous les membres de nos familles surtout nos parents pour leur effort et leur fatigue, nos professeurs dès la primaire jusqu'à l'universitaire.

Finalement, nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également au nos camarades de la promotion 2017 de Mathématiques et nos amis pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal, surtout **Heddi Kaddouri**.

Table des matières

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$, on note par.

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω
Γ	la frontière de Ω, supposée souvent régulière.
$\Gamma_i (i = \overline{1,3}, a, b)$	une partie de la frontière Γ .
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue (d-1) dimensionnelle de Γ_1.
ν	la normale unitaire sortante à Γ.
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v définies sur $\overline{\Omega}$.
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω.
$D'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω.
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
Q	l'espace $L^2_s(\Omega)^{d\times d}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$.
Q_1	l'espace $\{\sigma \in Q \text{ } tel \text{ } que \text{ } Div\sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$\gamma : H_1 \to H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

H^d	l'espace $\{x = x_i / x_i \in H\}$.

$H_s^{d\times d}$	l'espace $\{x = x_{ij}/x_{ij} = x_{ji} \in H\}$.
$(.,.)_H$	le produit scalaire de H.
$\|.\|_H$	La norme de H.
H'	l'espace dual de H.
$\mathscr{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H.

Si de plus $[0,T]$ est un intervalle de temps,$k \in \mathbb{N}$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

$C(0,T;H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ dans H.
$C^1(0,T;H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0,T]$ dans H.
$L^p(0,T;H)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0,T]$ dans H. telles que $\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
$\|.\|_{L^p(0,T;H)}$	la norme de $L^p(0,T;H)$.
$W^{k,p}(0,T;H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p.
$\|.\|_{W^{k,p}(0,T;H)}$	la norme de $W^{k,p}(0,T;H)$.

Pour une fonction f ; on note par

∇f	le gradient de f.
$\dot{f},\ \ddot{f}$	les dérivées première et seconde de f par rapport au temps.
$Divf$	la divergence de f.
$divf$	la divergence de f.
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$.
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
I_d	le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
Λ^p	puissance p de l'opérateur Λ.
c	des constantes génériques strictement positives.
$p.p.$	presque partout.

Introduction générale

Le contact entre les matériaux est un phénomène très fréquent et important dans notre vie quotidienne et il a attiré l'attention de l'être humain depuis les anciens temps, c'est pourquoi les scientifiques ont essayé de l'étudier et le modéliser.

L'étude mathématique et la modélisation du phénomène de contact sont plus récent et cela est dû au fait que la modélisation mathématique de ce dernier, mène souvent à des problèmes aux limites de contact non linéaires qui sont difficiles à étudier. Parmi les premières publications mathématiques concernant ce sujet sont celle de Signorini, où le problème de contact unilatéral entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide est formulé. Ce dernier a été résolu par Fichera, en se basant sur des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Notons ici que l'étude mathématique des problèmes de contact ont commence avec la monographie de Duvaut et Lions, qui ont présenté la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact, accompagnée de résultats d'existence et d'unicité de la solution.

Un matériau piézoélectrique est celui qui produit une charge électrique quand une contrainte mécanique lui est appliquée (le matériau est pressé ou étiré). A l'inverse, une déformation mécanique est produite, quand un champ électrique est appliqué.Les matériaux piézoélectriques dont les propriétés mécaniques sont élastiques, sont appelés matériaux électro-élastique.

Ce mémoire représente une contribution à l'analyse d'un problème de contact sans frottement entre un corps déformable et une fondation, en tenant compte de l'effet piézoélectrique du matériau. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous étudions un processus quasistatique pour des matériaux électro-élastiques-visco-plastiques. Les conditions aux limites sont de type de Signorini. Les conditions électriques sont introduites dans les cas où la fondation est isolatrice.

Notre étude du phénomène de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de la solution.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, la loi de comportement, les conditions aux limites et nous présentons le problème de contact sans frottement pour les matériaux électro-élasto-visco-plastiques.

Le deuxième chapitre comprend les outils nécessaire pour une bonne compréhension du problème pour objet le modèle mathématique utilisé. Nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite, nous passons en revue à quelques résultats concernant les inéquations variationnelles, quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et des hypothèses fondamentales pour le problème à étudier.

Dans le dernier chapitre du mémoire nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible en utilisant des techniques des inéquations variationnelles elliptiques et du point fixe.

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire le cadres physique plus utilisé dans ce mémoire, la loi de comportement et les conditions aux limites de contact. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact sans frottement, ainsi que la formulation mécanique du problèmes à étudier.

1.1 Cadre physique

Dans ce paragraphe, nous allons introduire le cadre physique dans ce mémoire et la formulation mathématique appropriée à l'étude de problème de contact sans frottement entre un corps piézoélectrique et une fondation.

Nous considérons un corps piézoélectrique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2.3)$ avec une frontière Lipschitzienne Γ, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1, \Gamma_2 \quad et \quad \Gamma_3$, correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a et Γ_b, correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $mes \Gamma_1 > 0, mes \Gamma_a > 0$ et Γ_a de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2, agissent sur la partie Γ_b. Soit $T > 0$ et soit $[0; T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec une fondation sur la partie Γ_3.

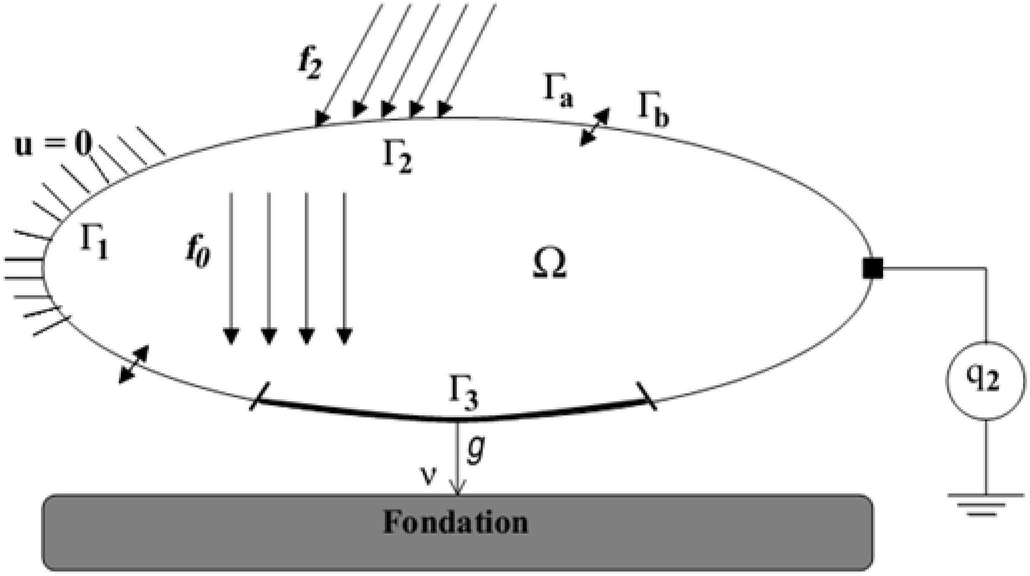

Figure 1.1 – Corps piézoélectrique en contact avec une fondation.

Nous notons par $\mathbb{S}^d(d = 2.3)$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$;"."et $||.||$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ tels que :

$$u.v = u_i v_i, \quad ||v|| = (v.v)^{1/2} \;\; \forall u = (u_i), \;\; v = (v_i) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma.\tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}, \quad ||\sigma|| = (\sigma.\sigma)^{1/2} \;\; \forall \sigma = (\sigma_{ij}), \;\; \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d.$$

Nous notons par $\sigma = \sigma(x,t)$ le champ des contraintes, par $D = D(x,t)$ le vecteur des déplacements électriques, par $u = u(x,t)$ le champ des déplacements, par $\varphi = \varphi(x,t)$ le potentiel électrique tels que $x \in \overline{\Omega}$ et $t \in [0;T]$. Nous notons aussi par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales et par $E(\varphi)$ le champ électrique.

Nous désignons par u_ν, u_τ les composantes normale et tangentielle d'un vecteur u à la frontière tels que

$$u_\nu = u.\nu, \qquad u_\tau = u - u_\nu \nu. \tag{1.1}$$

Pour le champ des contraintes σ nous notons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma\nu)_\tau, \tag{1.2}$$

donc

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu, \qquad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu \tag{1.3}$$

Les relations (1.1) et (1.2) nous permettent d'écrire la relation suivante

$$(\sigma\nu).v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau.v_\tau, \tag{1.4}$$

qu'on va l'utiliser tout au long de ce mémoire et surtout dans satisfont des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact. Les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, c'est à dire

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \qquad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}, \tag{1.5}$$

où $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}$ désigne le champ des accélérations. La relation entre le champ des déplacements u et le champ des déformations ε dans l'hypothèse des petites transformations est donnée par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \qquad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d. \tag{1.6}$$

En outre, le champ électrique est défini par la relation suivante

$$E(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i}). \tag{1.7}$$

Nous allons maintenant décrire le modèle mathématique associé au cadre physique que nous avons vu au paragraphe précédent.

1.2 Modèle mathématique

Nous commençons avec le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps dans le cadre physique de la figure 1.1.

Dans le cas général, on décrit l'évolution d'un corps matériel par l'équation de mouvement de Cauchy suivante

$$Div\sigma(t) + \mathbf{f}_0(t) = \rho\ddot{u} \qquad \text{dans} \quad \Omega \times [0;T] \tag{1.8}$$

où $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse et " Div " désigne l'opérateur divergence des tenseurs tel que

$$Div\sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les inconnues de ce problème spécifique sont :
le champ des déplacements $u : \Omega \times [0;T] \to \mathbb{R}$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0;T] \to \mathbb{S}^d$. Le processus d'évolution définis par (1.8) s'appellent processus dynamiques. On remarque que dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho\ddot{u}$ peut être négligé et l'équation (1.8) devient

$$Div\sigma(t) + \mathbf{f}_0(t) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T). \tag{1.9}$$

Cette dernière équation s'appelle l'équation d'équilibre et les processus d'évolution définis par cette équation s'appellent processus quasistatiques. Dans le cadre physique décrit ci-dessus(dans le paragraphe précédent) on a supposé que $\mathbf{f}_0$ et $\mathbf{f}_2$ varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, si nous supposons que les accélérations dans le milieu sont négligeables nous nous plaçons dans le cas quasistatique et nous utilisons l'équation (1.9).

Dans ce mémoire le corps étudié est piezoélectrique, donc aux inconnues mécaniques du problème se rajoutent les inconnues électriques qui sont le champ des déplacements électrique $D : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0;T] \to \mathbb{R}$, ce qui nécessite une autre équation d'équilibre pour gérer cette situation ; c'est l'équation de Maxwell-Gauss ou équation de conservation de la charge qui décrit l'évolution du corps dans ce cas

$$divD = q_0 \;\; \text{dans} \;\; \Omega \times (0,T), \tag{1.10}$$

où "div" est l'opérateur divergence qui agit sur les vecteurs, $divD = D_{i,i}$ et q_0 est la densité volumique de charge au sein du matériau.

1.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ et le vecteur des déplacements électriques D sont reliés par la loi de comportement

$$\left\{\begin{array}{lcl}\sigma & = & \mathscr{A}\varepsilon(u)-\mathcal{E}^{*}E(\varphi),\\ D & = & \beta E(\varphi)+\mathcal{E}\varepsilon(u)\end{array}\right. \tag{1.11}$$

où $\mathscr{A}:\Omega\times\mathbb{S}^{d}\to\mathbb{S}^{d}$ est l'opérateur d'élasticité non linéaire,$E(\varphi)=-\nabla\varphi$ est le champ électrique, $\mathcal{E}=(e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et $B=(B_{ij})$ est le tenseur du permittivité électrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs $\mathcal{E}^{*}=(e^{*}_{ijk})$ où $e^{*}_{ijk}=e_{kij}$, dénote le transposé du tenseur $\mathcal{E}$ tel que

$$\mathcal{E}\sigma.v=\sigma.\mathcal{E}^{*}v,\qquad\forall\sigma\in\mathbb{S}^{d},v\in\mathbb{R}^{d}. \tag{1.12}$$

En électro-élasticité linéaire, on suppose que le tenseur des contraintes σ est une fonction linéaire du tenseur des petites déformations ε et du gradient du potentiel électrique ou le champ électrique E, c'est-à-dire

$$\sigma_{ij}=a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)+e^{*}_{ijk}\varphi_{,k}, \tag{1.13}$$

où $\mathscr{A}=(a_{ijkh})$ est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes a_{ijkh} s'appellent coefficients d'élasticité et elles sont indépendantes du tenseur des déformations en élasticité pure et $\mathcal{E}=(e_{ijk})$ est le tenseur des constantes piézoélectriques. Dans le cas non-homogène a_{ijkh} et e_{ijk} dépendent du point $x\in\Omega$ et dans le cas homogène a_{ijkh} et e_{ijk} sont des constantes. Le but de ce mémoire est d'étudier un problème de contact sans frottement pour des matériaux électro-élasto-visco-plastic. On suppose que le tenseur de contrainte σ a une décomposition additive de la forme

$$\sigma=\sigma^{EE}+\sigma^{EVP}, \tag{1.14}$$

où σ^{EE} représente la partie électro-élastique du contrainte et σ^{EVP} est la partie électro-visco-plastic. Pour le contrainte électro-élastique, nous utilisons la loi (1.11) constitutive linéaire

$$\sigma^{EE} = \mathscr{A}\varepsilon(u) - \xi^* E(\varphi). \tag{1.15}$$

Et pour le contrainte d'électro-visco-plastic, nous utilisons une équation d'évolution

$$\sigma^{EVP} = \mathscr{G}(\sigma, \varepsilon(u), E(\varphi)), \tag{1.16}$$

où $\mathscr{G}$ est une fonction constitutive, généralement non-linéaire.
Nous combinons maintenant (1.14) - (1.16) pour obtenir

$$\dot{\sigma} = \mathscr{A}\varepsilon(\dot{u}) - \xi^* E(\dot{\varphi}) + \mathscr{G}(\sigma, \varepsilon(u), E(\varphi)). \tag{1.17}$$

Nous utilisons un argument semblable pour le champ de déplacement électrique D et (1.4) pour obtenir

$$\dot{D} = \beta E(\dot{\varphi}) + \xi\varepsilon(\dot{u}) + G(D, E(\varphi), \varepsilon(u)), \tag{1.18}$$

où G est une fonction constitutive non-linéaire.

1.3 Conditions aux limites

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la fig 1.1.1. On définit maintenant les conditions aux limites mécaniques et électriques sur chaque partie de Γ, et nous présentons les conditions de contact sur la surface Γ_3.

1.3.1 La condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie Γ_1, le champ des déplacements y est par conséquent nul

$$u = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0; T]. \tag{1.19}$$

1.3.2 La condition aux limites de traction

Une traction surfacique de densité $\mathbf{f}_2$ agit sur Γ_2 et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait à :

$$\sigma\nu = \mathbf{f}_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times [0;T]. \tag{1.20}$$

1.3.3 Les conditions aux limites électriques

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\varphi = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_a \times [0;T]. \tag{1.21}$$

$$D\nu = q_2 \ \ \text{sur} \ \ \Gamma_b \times [0;T]. \tag{1.22}$$

1.3.4 Contact unilatérale

Dans ce cas nous supposons que le corps est susceptible d'entrer en contact avec une base rigide. Par conséquent, le mouvement des particules matérielles de Γ_3 est restreint de la présence du solide rigide de telle sorte que, avant l'application des forces externes, la distance de chaque point $x \in \Gamma_3$ à la base rigide dans la direction de la normale $\nu(x)$ est connue et notée par $g(x)$.

Puisque la base est considérée rigide, elle ne subira pas de déformations donc le corps Ω ne pourra pas le pénétrer ; cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité

$$u_\nu \leq g \qquad \text{sur} \ \ \Gamma_3. \tag{1.23}$$

Dans les points de Γ_3 tels que $u_\nu < g$, il n'existe pas de contact entre Ω et la base rigide donc le vecteur des contraintes de Cauchy s'annule, c'est-à-dire

$$u_\nu < g \quad \Rightarrow \quad \sigma_\nu = 0 \qquad \text{sur} \ \ \Gamma_3. \tag{1.24}$$

Pour les points de Γ_3 tels que $u_\nu = g$, le contact entre le corps Ω et la base rigide se produit ; nous supposons pour ces points que la base rigide exerce une pression inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers Ω ; on a

$$u_\nu \quad = g \Rightarrow \sigma_\nu \quad \leq \quad 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \tag{1.25}$$

On peut résumer les conditions (1.23)–(1.27) de la manière condensée suivante

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \tag{1.26}$$

Les conditions (1.26) s'appellent les conditions de contact unilatéral ou conditions de contact de type Signorini.

1.3.5 Loi de contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0. \tag{1.27}$$

Qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

1.4 Position du problème de contact sans frottement d'un matériaux électro-élastique visco-plastique

On considère ici le problème mécanique qu'on va étudier dans le chapitre 2 et 3.

Problème P

Trouver le champ de déplacements $u : \Omega \times [0;T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes, $\sigma : \Omega \times [0;T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0;T] \longrightarrow \mathbb{R}$ et le champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0;T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tels que

$$\dot{\sigma} = \mathscr{A}\varepsilon(\dot{u}) - \mathcal{E}^* E(\dot{\varphi}) + \mathscr{G}(\sigma, \varepsilon(u), E(\varphi)) \ \text{ dans } \ \Omega \times [0;T], \tag{1.28}$$

$$\dot{D} = \beta E(\dot{\varphi}) + \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) + G(D, E(\varphi), \varepsilon(u)) \ \text{ dans } \ \Omega \times [0;T], \tag{1.29}$$

$$Div\sigma + \mathbf{f}_0 = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \times [0;T], \tag{1.30}$$

$$divD = q_0 \ \text{ dans } \ \Omega \times [0;T], \tag{1.31}$$

$$u = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \times (0, T), \tag{1.32}$$

$$\sigma\nu = \mathbf{f}_2 \ \text{ sur } \ \Gamma_2 \times [0;T], \tag{1.33}$$

$$u_\nu \leqslant g, \quad \sigma_\nu \leqslant 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0 \ \ \sigma_\tau = 0 \ \text{ dans } \ \Gamma_3 \times [0;T], \tag{1.34}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \ \Gamma_a \times [0;T], \tag{1.35}$$

$$D.v = q_2 \ \text{ sur } \ \Gamma_b \times [0;T], \tag{1.36}$$

$$u(0) = u_0 \ \ \sigma(0) = \sigma_0 \ \ \varphi(0) = \varphi_0 \ \ D(0) = D_0 \ \text{ dans } \ \Omega. \tag{1.37}$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites.

Les équations (1.28) et (1.29) représentent la loi de comportement électro-élasto-visco-plastique.

Les équations (1.30) et (1.31) sont les équations d'équilibre associées aux champs de contrainte et de déplacement électrique, où "Div" et "div" dénotent l'opérateur de divergence pour les tenseurs et les vecteurs, respectivement.

Les équations (1.32) et (1.33) sont respectivement, les conditions aux limites en déplacements et en tractions et (1.34) la condition de contact sans frottement de Signorini.

Les équations (1.35) et (1.36) sont les conditions aux limites électriques.

Enfin, (1.37) sont les condition initiales

Notons que dans (1.28) - (1.37) le couplage entre les inconnues mécaniques (u, σ) et les inconnues électriques (φ, D) n'apparaît que dans les équations constitutives (1.28) et (1.29). Il n'est pas impliqué dans les conditions aux limites, en particulier pas dans la condition de contact (1.34). Cette caractéristique du problème (1.28) - (1.37) est une conséquence de notre hypothèse sur le cadre physique. Effectivement le rappel que nous avons supposé que la base isole, $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$ et $q_2 = 0$ sur Γ_3. Par conséquent, il s'ensuit que les conditions aux limites électriques sur Γ_3 ne changent pas en fonction de l'état du contact, ils sont les mêmes dans les zones de contact et de séparation, et ils sont inclus dans la condition aux limites (1.36). Ces propriétés permettent l'utilisation de (1.34) comme modèle du contact sans frottement du corps piézoélectrique. Une extension importante de ce travail serait le cas d'une base conductrice, dans lequel les conditions électriques dépendent de l'état du contact, conduisant à un couplage des inconnues électriques et mécaniques pour les conditions aux limites sur Γ_3 .

Chapitre 2

OUTILS MATHÉMATIQUES

Ce chapitre est consacré à la description des espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire et nous rappelons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, des théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et quelques hypothèses qui facilite notre problème .

Nous supposons dans ce chapitre que Ω est un domaine borné et de Lipschitz de $R^d(d = 2, 3)$, c'est-à-dire que sa frontière Γ est représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert de R^{d-1}, étant situé localement d'un seul côté de Γ. Par ailleurs, nous considérons une partition de Γ en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 d'un côté et une partition de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux parties ouvertes Γ_a et Γ_b d'un autre côté, telles que $mes\Gamma_1 > 0$ et $mes\Gamma_a > 0$.

2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons définir les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les fonctions p-intégrables et les espaces de Sobolev.

Fonctions continues et continûment différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur Ω est noté par $C(\overline{\Omega})$ et il est un espace de Banach pour la norme donnée par

$$|v|_{C(\overline{\Omega})} = sup\{|v(x)|,\ x \in \overline{\Omega}\}.$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur $\overline{\Omega}$. Pour tout entier m, l'espace $C^m(\overline{\Omega})$ donné par

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega})/D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \ \text{ pour } \ |\alpha| \leq m\},$$

est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\overline{\Omega}$. Il est aussi un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$|v|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{C(\overline{\Omega})}.$$

L'espace $C^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables :

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}).$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ensemble Ω à support compact inclus dans Ω, défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega)/supp\ v \subset \Omega\},$$

où $supp\ v = \overline{\{v \in C^\infty(\Omega)/v(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction v. Si $supp\ v$ est un sous ensemble propre de Ω, on dit que v est une fonction à support compact dans Ω.

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.1.1 *(Espace de Lebesgue). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble*

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}/v \ \textit{Lebesgue mesurable sur } \Omega \textit{ et } |v|^p \textit{ Lebesgue integrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |v(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}},$$

si $p = \infty$ *et* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable, alors on definit* $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ *par*

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = supess\ (v) = inf\{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ *est aussi un espace de Banach.*

Définition 2.1.2 *Soit* $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$*, on dit qu'une fonction* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *appartient à* $L^p_{loc}(\Omega)$ *si* $u \circ I_K \in L^p(\Omega)$ *pour tout compact* $K \subset \Omega$*, où* I_K *représente l'application identité de* K*.*

Remarque 2.1.1 *Soit* $u \in L^p_{Loc}(\Omega)$*, si on a*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

Alors $u = 0$ *p.p. dans* Ω

Espace de Hilbert

Définition 2.1.3 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire.*

Espace de Sobolev

Définition 2.1.4 *Soit* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*. On dit que la fonction* $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *est la dérivée faible d'ordre* α *de* u *si*

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Définition 2.1.5 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $p \in [1, +\infty]$*, nous définissons l'espace de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *par*

$$W^{k,P}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\ \ \forall\alpha,\ \ |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega);\ \ tel\ que\ \ v_\alpha = D^\alpha u\}.$$

Remarque 2.1.2 *Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α. La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par*

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p \leq \infty \\ \max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & si \quad p = \infty \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence

Dans cette section nous introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques *u et σ*

$$\begin{cases} H = \{u = (u_i)| \quad u_i \in \ L^2(\Omega)\}, \\ Q = \{\sigma = (\sigma_{ij})| \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \ L^2(\Omega)^{d\times d}\}, \\ H_1 = \{u = u_i | u_i \in \ H^1(\Omega)\}, \\ Q_1 = \{\sigma \in Q | \sigma_{ij,j} \in \ H\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Les espaces H, Q, H_1 et Q_1 sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants

$$\begin{cases} (u, v)_H = \int_\Omega u_i v_i dx, \\ (\sigma, \tau)_Q = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx, \\ (u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q, \\ (\sigma, \tau)_{Q_1} = (\sigma, \tau)_Q + (Div\sigma, Div\tau)_H. \end{cases} \tag{2.2}$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1 \to Q$ et $Div : Q_1 \to H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div\sigma = (\sigma ij, j).$$

Les normes sur les espaces H, Q, H_1 *et* Q_1 sont notées par $\|.\|_H, \|.\|_Q, \|.\|_{H_1}$ *et* $\|.\|_{Q_1}$, respectivement. Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ.

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$; ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ et $(.,.)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ.Pour tout $\sigma \in Q_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que :

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_Q + (Div\sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1. \tag{2.3}$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu.vda \quad \forall v \in H_1 \tag{2.4}$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_Q + (Div\sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu.vda \quad \forall v \in H_1$$

Nous introduisons à présent un sous-espace fermé de H_1, dont la définition est donnée ci-après

$$V = \{v \in H_1(\Omega)^d : v = 0 \ sur \ \Gamma_1\}. \tag{2.5}$$

Inégalité de Korn. Soit $mes\Gamma_1 > 0$. Alors il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \ \geq \ c\|v\|_{H_1}, \quad \forall \ v \in \ V. \tag{2.6}$$

Sur V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q, \quad \forall \ u, v \in V, \tag{2.7}$$

Et soit $\|.\|_V$ la norme associée ; c'est-à-dire

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q, \quad \forall \ v \in V. \tag{2.8}$$

Par l'inégalité de Korn et (2.2), il vient que $\|.\|_{H_1}$ et $\|.\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V; (.,.)_V)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration : On a d'après (2.2)

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q.$$

Alors

$$\|v\|_{H_1} = (\|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_Q^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{H_1}^2 = \|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_Q^2,$$

$$\|\varepsilon(v)\|_Q^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 + \|v\|_H^2, \tag{2.9}$$

d'après (2.6) et (2.9) on obtient

$$c^2\|v\|_{H_1}^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 + \|v\|_H^2,$$

$$c\|v\|_{H_1} \leq \|\varepsilon(v)\|_Q \leq \|v\|_{H_1}. \tag{2.10}$$

Alors $\|.\|_{H_1}$ équivalent $\|.\|_Q$.

En outre, d'après (2.6), (2.8) et le théorème de trace de Sobolev, trouvons qu'il existe une constante $c > 0$ dépendante uniquement de $\Omega\,;\, \Gamma_1$ et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\|v\|_V. \tag{2.11}$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnus électriques (Le champ des déplacements électriques D et le potentiel électrique φ) des problèmes électro-mécaniques qui vont être introduits dans cette thèse. Soit les espaces

$$\begin{cases} W = \{\psi \in H^1(\Omega) \ : \psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a\}, \\ W_1 = \{D = (D_i) \in H : D_{i,i} \in L^2(\Omega)\}. \end{cases}$$

où $divD = D_{i,i}$. Ces espaces W et W_1 sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi, \psi)_W = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_H, \quad (D, E)_{W_1} = (D, E)_H + (divD, divE)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.12}$$

soient $\|.\|_W$ et $\|.\|_{W_1}$ les normes associées ; c'est-à-dire

$$\|\psi\|_W = \|\nabla\psi\|_H, \quad \|D\|^2_{W_1} = \|D\|^2_H + \|divD\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.13}$$

Puisque $mes\Gamma_a > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c > 0$ dépendante uniquement de Ω et Γ_a telle que

$$\|\nabla\psi\|_H \geq c\|\psi\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall\ \psi \in W. \tag{2.14}$$

Par l'inégalité de Friedrichs-Poincaré et (2.14), il vient que $\|.\|_{H^1}$ et $\|.\|_W$ sont des normes équivalentes sur W. Aussi, rappelons que lorsque $D \in W_1$ est une fonction régulière, la formule de Green est satisfaite :

$$(D, \nabla\xi)_H + (divD, \xi)_H = \int_\Gamma D.\nu\xi\ da \quad \forall\xi \in H^1(\Omega)$$

2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Soit $0 < T <$ 1et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment dérivables sur [0 ; T] avec à valeurs dans X respectivement, avec les normes

$$|u|_{0,X} = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|_X,$$
$$|u|_{1,X} = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|_X + \max_{t\in[0;T]} |\dot{u}(t)|_X.$$

Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans (0, T) à valeurs dans X.

Définition 2.3.1 *Une fonction $u : [0, T] \to X$ est dite mesurable s'il existe un sous-ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(u_n)_{n\in N}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $|u_n(t) - u(t)|_X \to\ 0$ quand $n \to +\infty$, pour tout $t \in [0, T]/E$.*

Définition 2.3.2 *Une fonction $u : [0, T] \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n\in N}$de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T |u_n(t) - u(t)|_X dt = 0.$$

Théorème 2.3.1 *(Bochner)Une fonction $u : [0,T] \to X$ mesurable et intégrable si et seulement si $t \to |u(t)|_X : [0,T] \to R$ est intégrable. Dans ce cas*

$$|\int_0^T u(t)dt|_X \leq \int_0^T |u(t)|_X dt.$$

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : (0;T) \to X$ mesurables, telles que l'application $t \to |u(t)|_X$ appartient à $L^p(0,T)$. On sait que $L^p(0,T;X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$|u|_{0,p,X} = \begin{cases} (\int_0^T |u(t)|_X^p dt)^{\frac{1}{p}} & si \;\; 1 \leq p \leq +\infty, \\ inf\{c > 0| \;\; |u(t)|_X < c \quad p.p. \;\; t \in (0,T)\} \; si \;\; p = +\infty. \end{cases}$$

Proposition 2.3.1

1. *$L^p(0,T;X)$ $(1 \leq p \leq +1)$ est un espace de Banach.*
2. *Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)_X$, alors $L^2(0,T;X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt.$$

Définition 2.3.3 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ est l'espace des fonction $u : [0;T] \to X$ telles que $u \in L^p(0,T;X)$ et $\dot{u} \in L^p(0,T;X)$. $W^{1;p}(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$|u|_{1,p,X} = |u|_{0,p,X} + |\dot{u}|_{0,p,X}.$$

En particulier, $W^{1;2}(0,T;X)$ est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

Définition 2.3.4 *Une fonction $u : [0;T] \to X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_i,b_i) disjoints, inclus dans $[0,T]$, tels que $\sum\limits_i (b_i - a_i) < \delta$ on a $\sum\limits_i |u(b_i) - u(u_i)|_X \leq \varepsilon$*

Théorème 2.3.2 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0,T;X)$. Les propriétés suivantes sont équivalente*

1. *$u \in W^{1;p}(0,T;X)$.*
2. *u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0,T;X)$.*

3. *Il existe* $u_0 \in X$ *et* $g \in L^p(0,T;X)$, *telles que*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \qquad \forall t \in [0,T]$$

L'espace $W^{k;p}(0,T;X)$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$|u|_{k,p,X} = |u|_{0,p,X} + \sum_{\alpha=1}^{K} |u^{(\alpha)}|_{0,p,X}$$

2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

Opérateurs fortement monotones

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(.,.)_X$ et de la norme associée $|.|_X$. Soit $A : X \to X$ un opérateur non linéaire.

Définition 2.4.1 *L'opérateur A est dit :*

1. *monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0, \qquad \forall\ u, v \in X.$$

2. *fortement monotone s'il existe* $m > 0$ *tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m|u - v|_X^2, \quad \forall u, v \in X.$$

3. *de Lipschitz s'il existe* $M > 0$ *tel que*

$$|Au - Av|_X \leq M|u - v|_X, \quad \forall\ u, v \in X.$$

Théorème 2.4.1 ***(Théorème du point fixe)*** *Soit X un espace de Banach,* $A : X \to X$ *un opérateur de Lipschitz avec* $0 < M < 1$. *L'opérateur A admet un point fixe unique* $x \in X$, *c'est-à-dire* $Ax = x$ *et nous appelons A un opérateur contractant.*

Théorème 2.4.2 ***(Théorème de point fixe de Banach)*** *Soit K un sous ensemble fermé et non-vide de l'espace de Banach $(X, \|.\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \to K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in [0,1)$ telle que*

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq c\|u - v\|_X, \qquad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$. Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \to K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}), \quad m \geq 2.$$

Théorème 2.4.3 *Soit K un sous-ensemble fermé et non-vide de l'espace de Banach $(X, \|.\|_X)$ et soit $\Lambda : K \to K$. Supposons que $\Lambda^m : K \to K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors, Λ a un point fixe unique dans K.*

2.5 Énoncés de certains théorèmes

Opérateurs linéaires bornés

Définition 2.5.1 *Soit H un espace de Hilbert et un corps $\mathbb{K}$, qui sera ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $T : H \longrightarrow H$ est dite opérateur linéaire si*

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + \beta Ty, \qquad \forall x, y \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Définition 2.5.2 *On dit qu'un opérateur T défini sur H est borné s'il existe une constante C telle que*

$$\|Tx\| \leq C\|x\|.$$

Théorème 2.5.1 *Pour tout opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ la norme de T est donné par*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Définition 2.5.3 *Une forme bilinéaire $a : X \times X \to R$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$|a(u, v)| \leq M|u|_X|v|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 2.5.4 *Une forme bilinéaire $a : X \times X \to R$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$a(u,v) \geq m|u|_X^2, \qquad \forall u \in X.$$

Théorème 2.5.2 *pour j=1,2,...n soit X_j est un espace de Banach avec la norme $\|.\|_j$ .Le produit cartésien $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$, composé de points $x = (x_1, ..., x_n)$ avec $x_j \in X_j$, est un espace vectoriel sous les définitions*

$$x + y \ = \ (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \qquad cx \ = \ (cx_1, ...cx_n).$$

et est un espace de Banach en ce qui concerne l'une quelconque des normes équivalentes

$$\|x\|_p = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_j^p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|_j$$

Théorème 2.5.3 ***(Lax- Milgram)***
Soit H un espace de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe $u \in H$ solution unique du problème

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H,$$

de plus si a est symétrique u est définie par

$$\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}(v,v) - L(v) \right\}.$$

Théorème 2.5.4 ***(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)***
Étant donné $\eta \in X'$, il existe $f \in X$ unique telle que

$$(\eta, v)_{X' \times X} = (f, v)_X \quad \forall \ v \in X,$$

on a de plus

$$\|\eta\|_{X'} = \|f\|_X.$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire.

Théorème 2.5.5 ***(Théorème de Stampachia)***
Soit H un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire noté $(.,.)$ *Soit K une partie convexe fermée non vide de H.*
Si $a(u, v)$ *une forme bilinéaire qui soit :*
•*Continue sur* $H \times H$: $\exists c > 0\ \forall u, v \in H, \|a(u, v)\| \leq c\|u\|\|v\|$.
• *Coercive sur* H : $\exists c > 0\ \forall u \in H\ a(u, u) \geq c\|u\|^2$.
Si $L(.)$ *une forme linéaire continue sur H, sous ces conditions, il existe un unique u de K tel que*

$$\forall v \in K \quad a(u, v - u) \geq L(v - u).$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de K qui minimise la fonctionnelle $J : H \to R$ *définie par* $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ *pour tout v de K, en particulier :*

$$\exists! u \in K \quad J(v) = \min_{v \in K} J(u).$$

Théorème 2.5.6 ***(L'inégalité de Korn)***
Si Ω *est borné de frontière régulière alors, il existe une constante* $c > 0$ *telle que :*

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|\varepsilon(u)\|_Q \geq c\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Inéquations variationnelles linéaires

Inéquations variationnelles de première espèce

Définition 2.5.5 *Le problème considéré est* $\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u)\ \forall v \in K \end{cases}$
appelé inéquation variationnelle de première espèce.

Théorème 2.5.7 *D'après le théorème de Stampacchia il existe un unique u de K tel que*

$$\forall v \in K \quad a(u, v-u) \geq (f, v-u).$$

Inéquations variationnelles de deuxième espèce

Définition 2.5.6 *Le problème considéré est* $\begin{cases} \textit{trouver } u \in K \textit{ tel que} \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \; \forall v \in K \end{cases}$ *appelé inéquation variationnelle de deuxième espèce.*

2.6 Hypothèses fondamentaux pour le problème P

Pour l'étude du problème mécanique (1.28)-(1.37)on considère les hypothèses suivantes qui facilitent notre problème.
Supposons que l'opérateur d'élasticité $\mathscr{A}$, satisfait :

$$\begin{cases} (a)\ \mathscr{A} = (\mathscr{A}_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d, \\ (b)\ \mathscr{A}_{ijkl} = \mathscr{A}_{klij} = \mathscr{A}_{jikl} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq d, \\ (c)\ \textit{Il existe } m_{\mathscr{A}} > 0 \ \textit{ tel que } \ \mathscr{A}\tau \cdot \tau \geq m_{\mathscr{A}} \|\tau\|^2 \ \ \forall \tau \in \mathbb{S}^d, \ \textit{p.p. dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.15}$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathscr{E}$, satisfait :

$$\begin{cases} (a)\mathscr{E} = (e_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d, \\ (b)e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k \leq d. \end{cases} \tag{2.16}$$

Le tenseur du permittivité électrique β, satisfait :

$$\begin{cases} (a)\beta = (\beta_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \\ (b)\beta_{ij} = \beta_{ji} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j \leq d, \\ (c)\textit{Il existe } m_\beta \ > 0 \textit{ tel que } \beta E \cdot E \geq m_\beta \|E\|^2 \ \ \forall E \in \mathbb{R}^d, \ \ \textit{p.p.x} \in \Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

Supposons que les fonctions constitutives non linéaires $\mathscr{G}$ et G, satisfait :

$$\begin{cases} (a)\mathscr{G}:\ \Omega\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{S}^d, \\ (b)\ \text{Il existe } L_{\mathscr{G}}>0\ \textit{telle que} \\ \ \|\mathscr{G}(x,\sigma_1,\varepsilon_1,E_1)-\mathscr{G}(x,\sigma_2,\varepsilon_2,E_2)\|\le L_{\mathscr{G}}(\|\sigma_1-\sigma_2\|+\|\varepsilon_1-\varepsilon_2\|+\|E_1-E_2\|) \\ \ \forall\sigma_1,\sigma_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbb{S}^d, E_1,E_2\in\mathbb{R}^d,\ \ p.p.x\in\Omega, \\ (c)\ \text{Pour toute } \sigma,\varepsilon\in\mathbb{S}^d\ \ et\ \ E\in\mathbb{R}^d, x\to\mathscr{G}(x,\sigma,\varepsilon,E)\text{est mesurable sur }\Omega, \\ (d)\mathscr{G}(x,0,0,0)\in Q. \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} (a)G:\Omega\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{S}^d\to\mathbb{R}^d, \\ (b)\text{Il existe } L_G>0\ \textit{telle que} \\ \|G(x,D_1,E_1,\varepsilon_1)-G(x,D_2,E_2,\varepsilon_2)\|\le L_G(\|D_1-D_2\|+\|E_1-E_2\|+\|\varepsilon_1-\varepsilon_2\|) \\ \forall D_1,D_2,E_1,E_2\in\mathbb{R}^d,\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathbb{S}^d,\ \ p.p.x\in\Omega, \\ (c)\ \text{Pour toute } D,E\in\mathbb{R}^d\ \ et\ \ \varepsilon\in\mathbb{S}^d, x\to G(x,D,E,\varepsilon)\text{ est mesurable sur }\Omega, \\ (d)G(x,0,0,0)\in L^2(\Omega)^d. \end{cases} \tag{2.19}$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques f_0 et les tractions surfaciques f_2 satisfont les régularités

$$\mathbf{f}_0\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)^d),\quad \mathbf{f}_2\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_2)^d), \tag{2.20}$$

et les charges électriques volumiques q_0 et surfaciques q_2 satisfont

$$q_0\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)),\quad q_2\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_b)), \tag{2.21}$$

$$q_2(t)=0\ \ dans\ \ \Gamma_3\ \ \forall t\in[0,T]. \tag{2.22}$$

En outre, la fonction du gap est telle que

$$g\in L^2(\Gamma_3),\ \ g\ge 0\ \ p.p.\ \ sur\ \ \Gamma_3. \tag{2.23}$$

Nous utilisons l'ensemble convexe des déplacements admissibles défini par

$$U = \{\nu \in V : v_\nu \leq g \quad sur \quad \Gamma_3\}.$$

Le théorème de représentation de Riesz nous permet de définir les fonctions f : $[0, T] \to V$ et $q : [0, T] \to W$ comme suit :

$$(\mathbf{f}(t), v)_V = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t).vdx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t).vda \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \tag{2.24}$$

$$(q(t), \psi)_W = -\int_\Omega q_0(t).\psi dx + \int_{\Gamma_b} q_2(t).\psi da \quad \forall\ \psi \in W, t \in [0, T]. \tag{2.25}$$

Des hypothèses (2.20) et (2.23) il s'ensuit que U est un sous-ensemble convexe fermé non vide de V

$$\mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T; V), \tag{2.26}$$

$$q \in W^{1,\infty}(0, T; W). \tag{2.27}$$

Enfin, nous supposons que les données initiales satisfont les conditions de régularité et de compatibilité suivantes

$$u_0 \in U, \qquad \sigma_0 \in Q_1 \qquad (\sigma_0, \varepsilon(v))_Q = (\mathbf{f}(0), v)_V \qquad \forall v \in V, \tag{2.28}$$

$$\varphi_0 \in W, \qquad \psi_0 \in Q_1 \qquad (D_0, \nabla\psi)_H = (q(0), \psi)_W \qquad \forall \psi \in W. \tag{2.29}$$

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution

Le troisième chapitre du mémoire est consacré à l'étude de la formulation variationnelle et le résultat d'existence et d'unicité d'un problème.

3.1 Formulation variationnelle

Dans cette section, on va donner la formulation variationnelle du problème P. En utilisant la formule de Green

$$(\sigma, \varepsilon(v))_Q + (Div\sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu.v \, da, \qquad \forall v \in H_1,$$

on trouve

$$(\sigma, \varepsilon(v))_Q + (Div\sigma, v)_H = \int_{\Gamma_1} \sigma\nu.v \, da + \int_{\Gamma_2} \sigma\nu.v \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu.v \, da, \qquad \forall v \in V.$$

En utilisant la définition de l'espace V avec (1.30) et (1.33), on obtient

$$\int_\Omega \sigma.\varepsilon(v)dx - \int_\Omega \mathbf{f}_0.vdx = \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2.vda + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu.vda, \qquad \forall v \in V,$$

puisque

$$\sigma\nu(v-u) = \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) + \sigma_\tau(v_\tau - u_\tau).$$

On utilise la condition (1.34), il vient que

$$\int_{\Omega} \sigma(\varepsilon(v) - \varepsilon(u))dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0.(v-u)dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2.(v-u)da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu)da, \quad (3.1)$$

on utilise (2.24), alors (3.1) devient

$$(\sigma, (\varepsilon(v) - \varepsilon(u)))_Q = (\mathbf{f}, v-u)_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu)da. \quad (3.2)$$

Notons que les conditions aux limites (1.34) et la définition de l'ensemble U montrent que $u \in U$, de plus

$$\sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) = \sigma_\nu(v_\nu - g) + \sigma_\nu(g - u_\nu) = \sigma_\nu(v_\nu - g) \geq 0, \qquad on \quad \Gamma_3,$$

et comme $u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0$, alors

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu)da \geq 0. \quad (3.3)$$

Donc (3.2), devient

$$(\sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_Q \geq (\mathbf{f}, v-u)_V. \quad (3.4)$$

En outre, par utilisation de la formule de Green

$$(D, \nabla\psi)_H + (divD, \psi)_{H(\Omega)} = \int_{\Gamma} D.\nu\psi da, \qquad \forall \psi \in H^1(\Omega),$$

on a

$$\int_{\Omega} D.\nabla\psi dx + \int_{\Omega} divD.\psi dx = \int_{\Gamma_a} D.\nu\psi da + \int_{\Gamma_b} D.\nu\psi da,$$

et en utilisant la définition de l'espace W avec (1.31) et (1.36), on obtient

$$\int_{\Omega} D.\nabla\psi dx = -\int_{\Omega} q_0.\psi dx + \int_{\Gamma_b} q_2.\psi dx,$$

d'après (2.25) alors

$$(D(t), \nabla\psi)_H = (q(t), \psi)_W. \quad (3.5)$$

De (3.4) et (3.5) nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème P.

Problème (PV).

Trouver le champ des déplacements $u : [0,T] \longrightarrow V$, le champ de contraintes $\sigma : [0,T] \longrightarrow Q_1$, le champ du potentiel électrique $\varphi : [0,T] \longrightarrow W$ et le champ des déplacements électriques $D : [0,T] \longrightarrow W_1$ tels que

$$\dot{\sigma}(t) = \mathscr{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) - \mathcal{E}^* E(\dot{\varphi}(t)) + \mathscr{G}(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), E(\varphi(t))) \quad p.p.\ t \in (0,T), \tag{3.6}$$

$$\dot{D}(t) = \beta E(\dot{\varphi}(t)) + \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}(t)) + G(D, E(\varphi(t)), \varepsilon(u(t))) \quad p.p.\ t \in (0,T), \tag{3.7}$$

$$u(t) \in U, \quad (\sigma(t), \varepsilon(v - u(t))_Q \geq (\mathbf{f}(t), v - u(t))_V \qquad \forall v \in U, t \in [0,T], \tag{3.8}$$

$$(D(t), \nabla\psi)_H = (q(t), \psi)_W \qquad \forall \psi \in W, t \in [0,T], \tag{3.9}$$

$$u(0) = u_0, \qquad \sigma(0) = \sigma_0, \qquad \varphi(0) = \varphi_0, \qquad D(0) = D_0. \tag{3.10}$$

Dans la suite du paragraphe, c désigne une constante positive générique qui peut dépendre des données du problème, mais ne dépend pas de t, ni de η, et dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

3.2 Résultat d'existence et d'unicité

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses (2.15) - (2.23), (2.28) et (2.29), Problème P_V admet une solution unique qui satisfait :*

$$(u, \sigma, \varphi, D) \in W^{1,\infty}(0,T; V \times Q_1 \times W \times W_1) \tag{3.11}$$

Un quadruplet (u, σ, φ, D) qui satisfait (3.6)-(3.10) est appelé solution faible pour le problème P. Nous concluons que, dans les hypothèses énoncées, le problème (1.28)-(1.37) a une unique solution satisfait (3.11).

La démonstration du Théorème 3.2.1. Sera effectué dans plusieurs étapes :

Soient $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^\infty(0,T;Q\times H)$ et nous définissons $Z = (Z^1_\eta, Z^2_\eta) \in W^{1,\infty}(0,T;Q\times H)$ comme suit : on a

$$\sigma_\eta(t) = \mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(t)) - \mathcal{E}^* E(\varphi_\eta(t)) + \int_0^t \eta^1(s)ds,$$

et

$$\sigma(0) = \mathscr{A}\varepsilon(u(0)) - \mathcal{E}^* E(\varphi(0)),$$

d'après les conditions initiales (1.37)

$$\sigma_0 = A\varepsilon(u_0) - \mathcal{E}^* E(\varphi_0),$$

donc

$$\sigma_\eta(t) - \sigma_0 = \mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(t)) - \mathcal{E}^* E(\varphi_\eta(t)) + \int_0^t \eta^1(s)ds - \mathscr{A}\varepsilon(u_0) + \mathcal{E}^* E(\varphi_0),$$

alors

$$\sigma_\eta(t) = \mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(t)) + \mathcal{E}^* \nabla\varphi_\eta(t)) + \int_0^t \eta^1(s)ds - \mathscr{A}\varepsilon(u_0) + \mathcal{E}^* E(\varphi_0) + \sigma_0.$$

On pose

$$Z^1_\eta(t) = \int_0^t \eta^1(s)ds - \mathscr{A}\varepsilon(u_0) + \mathcal{E}^* E(\varphi_0) + \sigma_0. \tag{3.12}$$

On a aussi

$$\dot{D}(t) = \beta E(\dot{\varphi}(t)) + \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}(t) + G(D, E(\varphi(t)), \varepsilon(u(t)).$$

En intégrant l'équation précédente par rapport au temps, on trouve

$$D_\eta(t) - D_0 = \beta E(\varphi_\eta(t)) + \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)) - \int_0^t \eta^2(s)ds - \beta E(\varphi_0) - \mathcal{E}\varepsilon(u_0),$$

$$D_\eta(t) = -\beta\nabla\varphi_\eta(t) + \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)) - \int_0^t \eta^2(s)ds - \beta E(\varphi_0) - \mathcal{E}\varepsilon(u_0) + D_0,$$

$$D_\eta(t) = -\beta\nabla\varphi_\eta(t) + \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)) - (\int_0^t \eta^2(s)ds + \beta E(\varphi_0) + \mathcal{E}\varepsilon(u_0) - D_0).$$

On pose

$$Z^2_\eta(t) = \int_0^t \eta^2(s)ds + \beta E(\varphi_0) + \mathcal{E}\varepsilon(u_0) - D_0. \tag{3.13}$$

Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème P_η

Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0,T] \longrightarrow V$ et le champ de potentiel électrique $\varphi_\eta : [0,T] \longrightarrow W$ tels que pour tout $t \in [0,T]$, $u_\eta(t) \in U$,

$$(\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q + (Z^1_\eta(t), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q$$
$$\geq (\mathbf{f}(t), v - u_\eta(t))_V \quad \forall v \in U, \tag{3.14}$$

$$(\beta\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\psi)_H + (Z^2_\eta(t), \nabla\psi)_H + (q(t), \psi)_W = 0 \quad \forall\psi \in W. \tag{3.15}$$

Pour résoudre le problème P_η on considère l'espace de Hilbert $X = V \times W$ muni du produit scalaire donné par

$$(x, y)_X = (u, v)_V + (\varphi, \psi)_W \quad \forall x = (u, \varphi), \; y = (v, \psi) \in X, \tag{3.16}$$

et soit $\|.\|_X$ la norme associée. Nous considérons $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire, un ensemble $K \subset X$ et deux fonctions $f : [0,T] \longrightarrow X$, $Z_\eta : [0,T] \longrightarrow X$ donnés par

$$a(x, y) = (\mathscr{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q + (\beta\nabla\varphi, \nabla\psi)_H + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(v))_Q - (\mathcal{E}\varepsilon(u), \nabla\psi)_H$$
$$\forall x = (u, \varphi), y = (v, \psi) \in X, \tag{3.17}$$

$$K = U \times W, \tag{3.18}$$

$$f(t) = (\mathbf{f}(t), -q(t)) \qquad \forall t \in [0,T], \tag{3.19}$$

$$(Z_\eta, x)_X = (Z^1_\eta, \varepsilon(u))_Q + (Z^2_\eta, \nabla\varphi)_H \qquad \forall x = (u, \varphi), \forall t \in [0,T]. \tag{3.20}$$

Nous commençons par le résultat d'équivalence suivant.

Lemme 3.2.1 *Le couple $x_\eta = (u_\eta, \varphi_\eta) \in W^{1,\infty}(0,T; V \times W)$ est une solution du problème P_η si et seulement si $x_\eta \in W^{1,\infty}(0,T; X)$ Satisfait*

$$x_\eta(t) \in K,$$

$$a(x_\eta(t), y - x_\eta(t)) + (Z_\eta(t), y - x_\eta(t))_X \geq (f(t), y - x_\eta(t))_X$$
$$\forall y \in K, t \in [0, T]. \qquad (3.21)$$

Preuve.

1. Soit $x_\eta = (u_\eta, \varphi_\eta) \in W^{1,\infty}(0, T; V \times W)$ une solution au problème P_η.
   Soit $y = (v, \psi) \in K$ et soit $t \in [0, T]$.
   Nous utilisons la fonction de test $\psi - \varphi_\eta(t)$ dans (3.15)

$$(\beta\varphi_\eta(t), \nabla(\psi - \varphi_\eta(t)))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla(\psi - \varphi_\eta(t)))_H + (Z^2_\eta(t), \nabla(\psi - \varphi_\eta(t)))_H$$
$$+ (q(t), \psi - \varphi_\eta(t))_W = 0,$$

   ajouter l'équation correspondante à (3.14)

$$(\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q + (Z^1_\eta(t), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q$$
$$+(\beta\varphi_\eta(t), \nabla(\psi-\varphi_\eta(t)))_H-(\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla(\psi-\varphi_\eta(t)))_H+(Z^2_\eta(t), \nabla(\psi-\varphi_\eta(t)))_H$$
$$+(q(t), \psi - \varphi_\eta(t))_W \geq (\mathbf{f}(t), v - u_\eta(t))_V.$$

   En utilisant (3.17), (3.19) et (3.20), on obtient

$$a(x_\eta(t), y - x_\eta(t)) + (Z_\eta(t), y - x_\eta(t))_X \geq (f(t), y - x_\eta(t))_X.$$

2. **Inversement**, soit $x_\eta = (u_\eta, \varphi_\eta) \in W^{1,\infty}(0, T; X)$ qui satisfait (3.21). Pour toute $v \in U$ on prend $y = (v, \varphi_\eta(t))$ dans (3.21). On a d'après (3.17)

$$a(x_\eta(t), y - x_\eta(t)) = (\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q + (\beta\nabla\varphi_\eta(t), \nabla(\varphi_\eta(t) - \varphi_\eta(t)))_H$$
$$+ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t), \varepsilon(v - u_\eta(t))_Q - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla(\varphi_\eta(t) - \varphi_\eta(t)))_H$$
$$= (A\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q.$$
$$(3.22)$$

Et d'après (3.19),(3.20)

$$\begin{aligned}(f(t), y - x_\eta(t))_X &= (\mathbf{f}(t), v - u_\eta(t))_V + (-q(t), \varphi_\eta(t) - \varphi_\eta(t))_W \\ &= (\mathbf{f}(t), v - u_\eta(t))_V. \qquad (3.23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Z_\eta(t), y - x_\eta(t))_X &= (Z_\eta^1(t), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q + (Z_\eta^2(t), \nabla(\varphi_\eta(t) - \varphi_\eta(t)))_H \\ &= (Z_\eta^1(t), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_Q. \qquad (3.24)\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (3.21) et d'après (3.22)-(3.24)on obtient à l'inégalité (3.14). Ensuite, on prend $y = (u_\eta, \varphi_\eta(t) + \psi),\ x_\eta = (u_\eta, \varphi_\eta)$. D'après (3.17)-(3.20)

$$\begin{aligned}a(x_\eta(t), y - x_\eta(t)) &= (\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(u_\eta(t) - u_\eta(t)))_Q + (\beta\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\psi(t))_H \\ &+ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t)), \varepsilon(u_\eta(t) - u_\eta(t)))_Q - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\psi(t))_H \\ &= (\beta\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\psi(t))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\psi(t))_H, \qquad (3.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f(t), y - x_\eta(t))_X &= (\mathbf{f}(t), u_\eta(t) - u_\eta(t))_V + (-q(t), \psi(t))_W \\ &= -(q(t), \psi(t))_W, \qquad (3.26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Z_\eta(t), y - x_\eta(t))_X &= (Z_\eta^1(t), \varepsilon(u_\eta(t) - u_\eta(t)))_Q + (Z_\eta^2(t), \nabla\psi(t))_H \\ &= (Z_\eta^2(t), \nabla\psi(t))_H. \qquad (3.27)\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (3.21) et d'après (3.25)-(3.27) alors

$$\begin{aligned}(\beta\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\psi(t))_H &- (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi(t))_H + (Z_\eta^2(t), \nabla\psi(t))_H \\ &+ (q(t), \psi(t))_W \geq 0. \qquad (3.28)\end{aligned}$$

Posons $y = (u_\eta, \varphi_\eta(t) - \psi),\ x_\eta = (u_\eta, \varphi_\eta)$. D'après (3.17)- (3.20)

$$
\begin{aligned}
a(x_\eta(t), y - x_\eta(t)) &= (\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(u_\eta(t) - u_\eta(t)))_Q - (\beta\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\psi(t))_H \\
&\quad + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t) - u_\eta(t))_Q + (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\psi(t))_H \\
&= -(\beta\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\psi(t))_H + (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\psi(t))_H, \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f(t), y - x_\eta(t))_X &= (\mathbf{f}(t), u_\eta(t) - u_\eta(t))_V + (q(t), \psi(t))_W \\
&= (q(t), \psi(t))_W, \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(Z_\eta(t), y - x_\eta(t))_X &= (Z_\eta^1(t), \varepsilon(u_\eta(t) - u_\eta(t)))_Q - (Z_\eta^2(t), \nabla\psi(t))_H \\
&= (Z_\eta^2(t), \nabla\psi(t))_H. \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité (3.21) et d'après (3.29)-(3.31) alors

$$
\begin{aligned}
(\beta\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\psi(t))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi(t))_H + (Z_\eta^2(t), \nabla\psi(t))_H& \\
+ (q(t), \psi(t))_W \leq 0,& \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

enfin (3.28) et (3.32) donne (3.15).

Nous utilisons maintenant le lemme 3.2.1 pour obtenir l'existence et l'unicité du résultat.

Lemme 3.2.2 *Le problème P_η a une solution unique $(u_\eta, \varphi_\eta) \in W^{1,\infty}(0, T; V \times W)$. En outre, la solution satisfait*

$$
u_\eta(0) = u_0 \qquad et \qquad \varphi_\eta(0) = \varphi_0. \qquad (3.33)
$$

Preuve.

La forme bilinéaire $a(x,y)$ définie dans (3.17)est continue :

$$|a(x,y)| = |(\mathscr{A}\varepsilon(u),\varepsilon(v))_Q + (\beta\nabla\varphi,\nabla\psi)_H + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi,\varepsilon(v))_Q - (\mathcal{E}\varepsilon(u),\nabla\psi)_H|,$$

$$|a(x,y)| \leq |(\mathscr{A}\varepsilon(u),\varepsilon(v))_Q| + |(\beta\nabla\varphi,\nabla\psi)_H| + |(\mathcal{E}^*\nabla\varphi,\varepsilon(v))_Q| + |(\mathcal{E}\varepsilon(u),\nabla\psi)_H|,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|a(x,y)| \leq &\| \mathscr{A}\varepsilon(u) \|_Q \| \varepsilon(v) \|_Q + \| \beta\nabla\varphi \|_H \| \nabla\psi \|_H,\\ &+ \| \mathcal{E}^*\nabla\varphi \|_Q \| \varepsilon(v) \|_Q + \| \mathcal{E}\varepsilon(u) \|_H \| \nabla\psi \|_H,\end{aligned}$$

d'après les hypothèses (2.15)-(2.17) on obtient

$$|a(x,y)| \leq c(\| \varepsilon(u) \|_Q \| \varepsilon(v) \|_Q + \| \nabla\varphi \|_H \| \nabla\psi \|_H + \| \nabla\varphi \|_H \| \varepsilon(v) \|_Q + \| \varepsilon(u) \|_Q \| \nabla\psi \|_H),$$

les égalités (2.8) et (2.13) donnent

$$\begin{aligned}|a(x,y)| &\leq c(\| u \|_V \| v \|_V + \| \varphi \|_W \| \psi \|_W + \| \varphi \|_W \| v \|_V + \| u \|_V \| \psi \|_W)\\ &\leq c((\| u \|_V + \| \varphi \|_W)(\| v \|_V + \| \psi \|_W)),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}|a(x,y)|^2 &\leq c((\| u \|_V + \| \varphi \|_W)^2(\| v \|_V + \| \psi \|_W))^2\\ &\leq c((\| u \|_V^2 + \| \varphi \|_W^2)(\| v \|_V^2 + \| \psi \|_W^2))\\ &\leq c \| x \|_X^2 \| y \|_X^2,\end{aligned}$$

donc

$$|a(x,y)| \leq c \| x \|_X \| y \|_X .$$

La forme bilinéaire $a(x,y)$ est coercive ; en effet

$$a(x,x) = (\mathscr{A}\varepsilon(u),\varepsilon(u))_Q + (\beta\nabla\varphi,\nabla\varphi)_H + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi,\varepsilon(u))_Q - (\mathcal{E}\varepsilon(u),\nabla\varphi)_H,$$

l'égalité (1.12) donne,

$$a(x,x) = (\mathscr{A}\varepsilon(u), \varepsilon(u))_Q + (\beta\varphi, \nabla\varphi)_H \qquad \forall x = (u,\varphi) \in X,$$

(2.15) et (2.17) donnent

$$a(x,x) \geq m(\| u \|_V^2 + \| \varphi \|_W^2),$$

donc

$$a(x,x) \geq m \| x \|_X^2 .$$

Notons que K est un ensemble convexe fermé non vide de X. Par le lemme 3.2.1, pour tout $t \in [0,T]$, il existe un unique $x_\eta(t) \in X$ satisfaisant (3.21). Pour $t_1, t_2 \in [0,T]$, l'inégalité (3.21) donne :

$$a(x_\eta(t_1), y - x_\eta(t_1)) + (Z_\eta(t_1), y - x_\eta(t_1))_X \geq (f(t_1), y - x_\eta(t_1))_X, \tag{3.34}$$

$$a(x_\eta(t_2), y - x_\eta(t_2)) + (Z_\eta(t_2), y - x_\eta(t_2))_X \geq (f(t_2), y - x_\eta(t_2))_X. \tag{3.35}$$

On pose $y = x_\eta(t_2)$ dans (3.34) et $y = x_\eta(t_1)$ dans (3.35)

$$a(x_\eta(t_1), x_\eta(t_2) - x_\eta(t_1)) + (Z_\eta(t_1), x_\eta(t_2) - x_\eta(t_1))_X \geq (f(t_1), x_\eta(t_2) - x_\eta(t_1))_X, \tag{3.36}$$

$$a(x_\eta(t_2), x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2)) + (Z_\eta(t_2), x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2))_X \geq (f(t_2), x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2))_X, \tag{3.37}$$

en ajoutant (3.36) à (3.37)

$$\begin{aligned} a(x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2), x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2)) + (Z_\eta(t_1) - Z_\eta(t_2), x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2))_X \\ \leq (f(t_1) - f(t_2), x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2))_X. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Mais $a(x, y)$ est coercive, alors d'aprés inégalité cauchy- schwarz

$$m \parallel x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2) \parallel^2 \leq \parallel Z_\eta(t_1) - Z_\eta(t_2) \parallel \parallel x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2) \parallel + \parallel f(t_1) - f(t_2) \parallel \parallel x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2) \parallel,$$

$$\parallel x_\eta(t_1) - x_\eta(t_2) \parallel \leq c \parallel Z_\eta(t_1) - Z_\eta(t_2) \parallel + \parallel f(t_1) - f(t_2) \parallel .$$

Par (2.26), (2.27) et (3.19), $f \in W^{1,\infty}(0, T; X)$. Aussi, $Z_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; X)$. Ainsi, $x_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; X)$. La partie de l'existence et de l'unicité dans le lemme 3.2.2 est une conséquence du lemme 3.2.1. Enfin, nous écrivons (3.14) et (3.15) à t $= 0$ et utilisons les hypothèses de compatibilité (2.28) et (2.29).
Après quelques calculs on obtient

$$(\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(0)), \varepsilon(v - u_\eta(0)))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(0), \varepsilon(v - u_\eta(0)))_Q + (Z^1_\eta(0), \varepsilon(v - u_\eta(0)))_Q \geq (\mathbf{f}(0), v - u_\eta(0))_V,$$

$$(\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(0)), \varepsilon(v - u_\eta(0)))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(0), \varepsilon(v - u_\eta(0)))_Q + (Z^1_\eta(0), \varepsilon(v - u_\eta(0)))_Q \geq (\sigma_0, \varepsilon(v - u_\eta(0)))_V,$$

$$(\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(0)), \varepsilon(v - u_\eta(0)))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(0), \varepsilon(v - u_\eta(0)))_Q - (\mathscr{A}\varepsilon(u_0) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_0 - \sigma_0, \varepsilon(v - u_\eta(0)))_Q$$
$$- (\sigma_0, \varepsilon(v - u_\eta(0)))_V \geq 0,$$

on pose $v = u_0$ dans l'inégalité précédente, alors

$$(\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(0)) - \mathscr{A}\varepsilon(u_0), \varepsilon(u_\eta(0) - u_0))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(0) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_0, \varepsilon(u_\eta(0) - u_0)_Q \leq 0,$$

$$(\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(0) - u_0), \varepsilon(u_\eta(0) - u_0))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_\eta(0) - \varphi_0), \varepsilon(u_\eta(0) - u_0))_Q \leq 0. \quad (3.39)$$

D'autre part, on trouve

$$(\beta\nabla\varphi_\eta(0), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(0)), \nabla\psi)_H + (Z^2_\eta(0), \nabla\psi)_H + (q(0), \psi)_W = 0,$$

$$(\beta\nabla\varphi_\eta(0), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(0)), \nabla\psi)_H - (\beta\nabla\varphi_0 - \mathcal{E}\varepsilon(u_0) + D_0, \nabla\psi)_H + (D_0, \nabla\psi)_H = 0,$$

$$(\beta\nabla(\varphi_\eta(0) - \varphi_0), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(0) - u_0), \nabla\psi)_H = 0,$$

On pose $\psi = \varphi_\eta(0) - \varphi_0$ dans l'égalité précédente, alors

$$(\beta\nabla(\varphi_\eta(0) - \varphi_0), \nabla(\varphi_\eta(0) - \varphi_0))_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(0) - u_0), \nabla(\varphi_\eta(0) - \varphi_0))_H = 0. \quad (3.40)$$

En ajoutant (3.39) à (3.40), on obtient

$$(\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(0)-u_0),\varepsilon(u_\eta(0)-u_0))_Q+(\beta\nabla(\varphi_\eta(0)-\varphi_0),\nabla(\varphi_\eta(0)-\varphi_0))_H\leq 0,$$

Par les hypothèses (2.15) et (2.17), on conclut ensuite que (3.33).

Nous utilisons maintenant les fonctions u_η et φ_η pour définir les fonctions σ_η et D_η, $\forall t\in[0,T]$ par

$$\sigma_\eta(t)=\mathscr{A}\varepsilon(u_\eta(t))+\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t)+Z^1_\eta(t), \tag{3.41}$$

$$D_\eta(t)=-\beta\nabla\varphi_\eta(t)+\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t))-Z^2_\eta(t). \tag{3.42}$$

Lemme 3.2.3 $(\sigma_\eta,D_\eta)\in W^{1,\infty}(0,T;Q_1\times W_1), et$

$$\sigma_\eta(0)=\sigma_0 \qquad et \qquad D_\eta(0)=D_0. \tag{3.43}$$

Preuve.

Nous utilisons la régularité des fonctions u_η et φ_η, les propriétés (2.15) - (2.17) des opérateurs $\mathscr{A}$, $\mathcal{E}$, β et les définitions des fonctions Z^1_η,Z^2_η pour voir cela $\sigma_\eta\in W^{1,\infty}(0,T;Q)$ et $D_\eta\in W^{1,\infty}(0,T;W)$. En ajoutant (3.14), (3.15)à (3.41), (3.42) pour obtenir

$$(\sigma_\eta(t),\varepsilon(v-u_\eta(t)))_Q\geq(\mathbf{f}(t),v-u_\eta(t))_V \qquad \forall v\in U,t\in[0,T], \tag{3.44}$$

$$(D_\eta(t),\nabla\psi)_H=(q(t),\psi)_W \qquad \forall\psi\in W,t\in[0,T]. \tag{3.45}$$

Mettant $v=u_\eta(t)\pm\xi$, où $\xi\in C^\infty_0(\Omega)^d$ dans (3.44) d'après la définition 2.1.4 et (2.24) alors

$$\int_\Omega\sigma_\eta.\varepsilon(\xi)dx=-\int_\Omega Div\sigma_\eta.\xi dx=\int_\Omega\mathbf{f}_0.\xi dx,$$

on obtient

$$Div\sigma_\eta(t) + \mathbf{f}_0(t) = 0.$$

On pose $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ dans (3.45) d'après la définition 2.1.4 et (2.25) alors

$$\int_\Omega D.\nabla\psi dx = -\int_\Omega divD.\psi dx = -\int_\Omega q_0.\psi dx,$$

donc

$$divD_\eta(t) - q_0(t) = 0 \qquad \forall t \in [0,T].$$

On utilise (2.20), (2.21) pour voir cela $Div\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)^d)$ et $divD_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, ce qui montre

$$\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;Q_1),$$

$$D_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;W_1).$$

Enfin, les conditions initiales (3.43) sont facilement obtenues à (3.12), (3.13) et aussi on utilise (3.33),(3.41) et (3.42). On utilise maintenant les propriétés (2.18) et (2.19) des fonctions constitutives $\mathscr{G}$ et G pour définir un opérateur
$\Lambda : L^\infty(0,T;Q\times H) \longrightarrow L^\infty(0,T;Q\times H)$ par la formule

$$\Lambda\eta = (\mathscr{G}(\sigma,\varepsilon(u),E(\varphi)), -G(D,E(\varphi),\varepsilon(u))) \;\; \forall\eta \in L^\infty(0,T;Q\times H). \tag{3.46}$$

Pour l'opérateur Λ, on a le résultat suivant.

Lemme 3.2.4 *L'opérateur Λ a un point fixe unique $\eta^* \in L^\infty(0,T;Q\times H)$.*

Preuve.

soitent $\eta_1,\eta_2 \in L^\infty(0,T;Q\times H)$ on utilise la notation simplifiée $u_i = u_{\eta_i}, \sigma_i = \sigma_{\eta_i}, D_i = D_{\eta_i}, \varphi_i = \varphi_{\eta_i}, Z_i^j = Z_{\eta_i}^j$ et $Z_i = (Z_i^1, Z_i^2)$, i,j=1,2 soit $t \in [0,T]$ et on utilise le théorème 2.5.2

$$\begin{aligned}\| \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) \|_{Q\times H} =& \| \mathscr{G}(\sigma_1(t),\varepsilon(u_1(t),E(\varphi_1(t))) - \mathscr{G}(\sigma_2(t),\varepsilon(u_2(t),E(\varphi_2(t))) \|_Q \\ &+ \| G(D_1(t),E(\varphi_1(t)),\varepsilon(u_1(t))) - G(D_2(t),E(\varphi_2(t)),\varepsilon(u_2(t))) \|_H\end{aligned}$$

D'après (2.18) et (2.19), on a

$$\| \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) \|_{Q\times H} \leq L_{\mathscr{G}}(\| \sigma_1 - \sigma_2 \|_Q + \| \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \|_Q + \| E(\varphi_1) - E(\varphi_2) \|_Q)$$
$$+ L_G(\| D_1 - D_2 \|_H + \| \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \|_H + \| E(\varphi_1) - E(\varphi_2) \|_H),$$

d'après (2.8) et (2.13) donc

$$\| \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) \|_{Q\times H} \leq c(\| \sigma_1 - \sigma_2 \|_Q + \| u_1 - u_2 \|_V + \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_V$$
$$+ \| D_1 - D_2 \|_H).$$

Maintenant, par (3.10), (3.11) et (3.22)-(3.23), on a

$$\sigma_i(t) = \mathscr{A}\varepsilon(u_i(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_i(t) + Z_i^1(t),$$

alors

$$\sigma_1(t) = \mathscr{A}\varepsilon(u_1(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(t) + Z_1^1(t),$$
$$\sigma_2(t) = \mathscr{A}\varepsilon(u_2(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(t) + Z_2^1(t),$$

donc

$$\| \sigma_1(t) - \sigma_2(t) \|_Q = \| \mathscr{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathscr{A}\varepsilon(u_2(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(t) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(t) + Z_1^1(t) - Z_2^1(t) \|_Q,$$

$$\| \sigma_1(t) - \sigma_2(t) \|_Q \leq \| \mathscr{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathscr{A}\varepsilon(u_2(t)) \|_Q + \| \mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(t) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(t) \|_Q + \| Z_1^1(t) - Z_2^1(t) \|_Q,$$

d'après (2.15), (2.16), (2.8) et (2.13) on obtient

$$\| \sigma_1(t) - \sigma_2(t) \|_Q \leq c(\| u_1(t) - u_2(t) \|_V + \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \|_W + \| Z_1^1(t) - Z_2^1(t) \|_Q). \tag{3.47}$$

Et on a

$$D_i(t) = -\beta\nabla\varphi_i(t) + \mathcal{E}\varepsilon(u_i(t)) - Z_i^2(t),$$

alors

$$D_1(t) = -\beta\nabla\varphi_1(t) + \mathcal{E}\varepsilon(u_1(t)) - Z_1^2(t),$$
$$D_2(t) = -\beta\nabla\varphi_2(t) + \mathcal{E}\varepsilon(u_2(t)) - Z_2^2(t),$$

donc

$$\| D_1(t) - D_2(t) \|_H = \| -\beta\nabla\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t) + \mathcal{E}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{E}\varepsilon(u_2(t)) - Z_1^2(t) + Z_2^2(t) \|_H$$
$$\leq \| \beta\nabla\varphi_1(t) - \beta\nabla\varphi_2(t) \|_H + \| \mathcal{E}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{E}\varepsilon(u_2(t)) \|_H + \| Z_1^2(t) - Z_2^2(t) \|_H,$$

d'après (2.16), (2.17), (2.8) et (2.13) on obtient

$$\| D_1(t) - D_2(t) \|_H \leq c(\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \|_W + \| u_1(t) - u_2(t) \|_V + \| Z_1^2(t) - Z_2^2(t) \|_H). \tag{3.48}$$

Pour voir ceci, combinons (3.47) et (3.48)

$$\| \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) \|_{Q\times H} \leq c(\| u_1(t) - u_2(t) \|_V + \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \|_W + \| Z_1(t) - Z_2(t) \|_{Q\times H}). \tag{3.49}$$

D'autre part, du lemme 3.2.1, il en résulte que $x_i = (u_i, \varphi_i)$, satisfait à l'inégalité

$$a(x_i(t), y - x_i(t)) + (Z_i(t), y - x_i(t))_X \geq (f(t), y - x_i(t))_X \quad i = 1, 2, \forall y \in K, \forall t \in [0, T],$$

où $Z_i, i = 1, 2$ sont définis pour $\eta = \eta_i$.

$$Z_1^1(t) = \int_0^t \eta_1^1(s)ds - \mathscr{A}\varepsilon(u_0) + \mathcal{E}^* E(\varphi_0) + \sigma_0,$$

$$Z_2^1(t) = \int_0^t \eta_2^1(s)ds - \mathscr{A}\varepsilon(u_0) + \mathcal{E}^* E(\varphi_0) + \sigma_0,$$

$$Z_1^2(t) = \int_0^t \eta_1^2(s)ds + \beta E(\varphi_0) + \mathcal{E}\varepsilon(u_0) - D_0,$$

$$Z_2^2(t) = \int_0^t \eta_2^2(s)ds + \beta E(\varphi_0) + \mathcal{E}\varepsilon(u_0) - D_0.$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$a(x_1(t), y - x_1(t)) + (Z_1(t), y - x_1(t))_X \geq (f(t), y - x_1(t))_X, \tag{3.50}$$

$$a(x_2(t), y - x_2(t)) + (Z_2(t), y - x_2(t))_X \geq (f(t), y - x_2(t))_X, \tag{3.51}$$

nous combinons (3.50) et (3.51), pour $y = x_2(t)$ dans le première inégalité et $y = x_1(t)$ dans la deuxième inégalité

$$a(x_1(t) - x_2(t), x_1(t) - x_2(t)) + (Z_1(t) - Z_2(t), x_1(t) - x_2(t))_X \leq (f(t) - f(t), x_1(t) - x_2(t))_X,$$

$$a(x_1(t)-x_2(t),x_1(t)-x_2(t))+(Z_1(t)-Z_2(t),x_1(t)-x_2(t))_X\leq 0.$$

sachant que $a(x,y)$ est coercive alors

$$m\parallel x_1(t)-x_2(t)\parallel_X^2\leq |(Z_1(t)-Z_2(t),x_1(t)-x_2(t))_X|,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\parallel x_1(t)-x_2(t)\parallel_X^2\leq c\parallel Z_1(t)-Z_2(t)\parallel_X\parallel x_1(t)-x_2(t)\parallel_X,$$

$$\parallel x_1(t)-x_2(t)\parallel_X\leq c\parallel Z_1(t)-Z_2(t)\parallel_X,$$

alors

$$\parallel u_1(t)-u_2(t)\parallel_V+\parallel \varphi_1(t)-\varphi_2(t)\parallel_W\leq c\parallel Z_1(t)-Z_2(t)\parallel_{Q\times H}. \tag{3.52}$$

Pour voir ceci, combinons (3.49) et (3.52)

$$\parallel \Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\parallel_{Q\times H}\leq c\parallel Z_1(t)-Z_2(t)\parallel_{Q\times H}.$$

On a

$$\begin{aligned}\parallel Z_1(t)-Z_2(t)\parallel_{Q\times H}&=\parallel Z_1^1(t)-Z_2^1(t)\parallel_Q+\parallel Z_1^2(t)-Z_2^2(t)\parallel_H\\&=\parallel\int_0^t\eta_1^1(s)ds-\int_0^t\eta_2^1(s)ds\parallel_Q+\parallel\int_0^t\eta_1^2(s)ds-\int_0^t\eta_2^2(s)ds\parallel_H\\&=\parallel\int_0^t(\eta_1^1(s)-\eta_2^1(s))ds\parallel_Q+\parallel\int_0^t(\eta_1^2(s)-\eta_2^2(s))ds\parallel_H\\&\leq\int_0^t(\parallel\eta_1^1(s)-\eta_2^1(s))\parallel_Q+\parallel\eta_1^2(s)-\eta_2^2(s)\parallel_H)ds\\&\leq\int_0^t\parallel\eta_1(s)-\eta_2(s)\parallel_{Q\times H},\end{aligned}$$

alors

$$\parallel \Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\parallel_{Q\times H}\leq c\int_0^t\parallel\eta_1(s)-\eta_2(s)\parallel_{Q\times H}ds, \tag{3.53}$$

de plus, on a

$$\begin{aligned}\parallel \Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\parallel_{Q\times H}&\leq c\int_0^t\parallel\eta_1(s)-\eta_2(s)\parallel_{Q\times H}ds\\&\leq ct\parallel\eta_1-\eta_2\parallel_{L^\infty(0,T;Q\times H)},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\| \Lambda^2\eta_1(t) - \Lambda^2\eta_2(t) \|_{Q\times H} &\leq c\int_0^t \| \Lambda\eta_1(s) - \Lambda\eta_2(s) \|_{Q\times H}\, ds \\
&\leq c^2\int_0^t\int_0^s \| \eta_1(r) - \eta_2(r) \|_{Q\times H}\, drds \\
&\leq \frac{c^2t^2}{2} \| \eta_1 - \eta_2 \|_{L^\infty(0,T;Q\times H)},
\end{aligned}
$$

en réitérant cette inégalité m fois on obtient :

$$
\| \Lambda^m\eta_1 - \Lambda^m\eta_2 \|_{L^\infty(0,T;Q\times H)} \leq \frac{c^mT^m}{m!} \| \eta_1 - \eta_2 \|_{L^\infty(0,T;Q\times H)},
$$

D'après l'équivalence de Stirling $m! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi m}m^me^{-m}$, on a $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{c^mT^m}{m!} = 0$, l'inégalité précédente implique que pour m suffisamment grand Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^\infty(0,T;Q\times H)$, donc Λ a un point fixe unique.

Maintenant, on a toutes les données qui prouvent le Théorème 3.2.1

Démonstration du Théorème 3.2.1

Existence. Soit $\eta^* \in L^\infty(0,T;Q\times H)$ le point fixe de l'opérateur Λ et soit (u^*,φ^*) est la solution du problème P_η pour $\eta=\eta^*$, c'est-à-dire $u^*=u_{\eta^*}$ et $\varphi^*=\varphi_{\eta^*}$.Aussi, nous adoptons les notation σ^* et D^* les fonctions définies par (3.41) et (3.42) pour $\eta=\eta^*$ i.e $\sigma^*=\sigma_{\eta^*}$ et $D^*=D_{\eta^*}$. Il est facile de voir que $(u^*,\sigma^*,\varphi^*,D^*)\in W^{1,\infty}(0,T;V\times Q_1\times W\times W_1)$ est une solution du problème P_V.De plus, puisque $\eta^*=\Lambda\eta^*$, de (3.41),(3.42),(3.12),(3.13) et(3.46) il vient que (3.6)et (3.7) sont vérifiées. Les régularités des solutions et la condition initiale (3.10) suivez des lemmes 3.2.2 et 3.2.3.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (3.46) et de la solvabilité unique du problème P_η.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites de contact en piézoélectricité, le problème est un problème mécanique de contact sans frottement entre un corps électro-élastique-visco-plastique et une base rigide.
On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème à étudier.
On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendante du temps, équation variationnelle d'évolution, inéquation variationnelle d'évolution du type elliptique et point fixe de Banach.

Bibliographie

[1] A.K. Aziz (Ed.), *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1972, pp. 3–359.

[2] R.C. Batra, J.S. Yang, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, J. Elast. 38 (1995) 209–218.

[3] P. Bisenga, F. Lebon, F. Maceri, *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support*, in : J.A.C. Martins, Manuel D.P. Monteiro Marques (Eds.), Contact Mechanics, Kluwer, Dordrecht, 2002, pp. 347–354.

[4] D. Braess, *Finite Elements : Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, second ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[5] S.C. Brenner, L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, second ed, Springer-Verlag, New York, 2002.

[6] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*,1987.

[7] A. Capatina, *Variational Inequalities and Frictional Contact Problems*, Springer, 2014.

[8] G. Duvaut, J.L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, Berlin,* 1976.

[9] C. Eck, J. Jarusek, M. Krbec *Unilateral Contact Problems Variational Methods and Existence Theorems*, CRC Press, 2005.

[10] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[11] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Visco-plasticity, Studies in Advanced Mathematics,* 30, American Mathematical Society – International Press, 2002.

[12] W. Han, M. Sofonea, K. Kazmi *Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic–visco-plastic materials* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 3915–3926.

[13] A. Matei, M. Sofonea, *Variational inequalities with applications A study of antiplane frictional contact problems,* Springer, 2009.

[14] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact.* Variational Methods, Springer, 2004.

[15] M. Sofonea, A. Matei . *Mathematical Models in Contact Mechanics,* Cambridge, 2012.

[16] M. Sofonea, A. Matei, *Variational Inequalities with applications,* Springer, 2009.

[17] M. Sofonea,W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage- Chapman and Hall -CRC*, 2005.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié un problème de contact sans frottement entre un corps déformable et une base rigide. Nous avons considéré la loi de comportement non linéaire pour des matériaux électro-élasto-visco-plastique dans le processus quasi-statique. Pour ce problème nous avons obtenu la formule variationnelle suivie du résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. Les techniques employées sont basées sur les arguments suivants: inéquation variationnelle dépendante du temps, inégalité de Cauchy-schwarz et des arguments du point fixe de Banach .

Mots clés: Matériel Piézoélectrique, loi de comportement électro-élasto–visco-plastiques, contact sans frottement, condition de Signorini, solution faible, point fixe.

Abstract

In this memory, we have studied a frictionless contact problem between a deformable body and a rigid base. Here we have considered the nonlinear constitutive law of an electro-elastic-visco-plastic material in the quasi-static process. For these problem we have obtained the variational formulation followed by the result of existence and uniqueness of the weak solution. The techniques used are based on the following arguments: the time-dependent variational equation, Cauchy-schwarz inequality and the arguments of the fixed point of Banach .

Keywords: Piezoelectric material, electro-elastic–visco-plastic constitutive law, frictionless contact , signorini's condition, weak solution, fixed point.

ملخص

في هذه المذكرة درسنا مشكلة الاتصال بدون احتكاك لجسم قابل للتشوه مع قاعدة صلبة. وقد اعتبرنا قانون السلوك للمواد الكهرو مرنة -لزجة-مطاطية غير الخطي في الحالة شبه الساكنة. وقد تحصلنا على الصيغة التغايرية للمسألة ومن ثم أثبتنا وجود ووحدانية الحل الضعيف للمسألة. مستخدمين تقنيات تعتمد على المتراجحات التغايرية المرتبطة بالزمن و متباينة كوشي-شوارتز و مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ .

كلمات مفتاحية: المواد كهر ضغطية, قانون السلوك كهرو-مرن-لزج-مطاطي, اتصال بدون احتكاك, شروط سينيوريني , الحل الضعيف, النقطة الثابتة.