رقم الترتيب:
رقم التسلسل:

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الوادي

كلية العلوم والتكنولوجيا

قسم رياضيات وإعلام آلي

مذكرة تخرج لنيل شهادة

ليسانس أكاديمي

الميدان: رياضيات وإعلام آلي

شعبة: رياضيات

تخصص: نمذجة رياضية ومحاكاة عددية

من إعداد الطالبات :

- قــدّه إيمان
- كحلة فاطمة الزهرة
- لدغم إكرام

الموضوع

نظرية الأعداد وتطبيقاتها

نوقشت يوم : 2014/06/03

أمام اللجنة المكونة من:

- تواتي إبراهيم محمد السعيد	أ.م.(ب) رئيسا
- غمام حامد العيد	أ.م.(أ) عضوا
- حريز بكار العرابي	أ.م.(ب) مشرفا

الموسم الجامعي: 2013-2014

شكر وعرفان

لو كنت أعرف فوق الشكر منزلة أوفى من الشكر عند الله في الثمن
أخلصتها لكم من قلبي مهذبة حذوا على مثل ما أوليتم من حسن

فلابد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في مرحلتنا الجامعية أن نبعث رسالة شكر وعرفان، وتقدير وامتنان لكل من ساهم في إنجاز مشروعنا هذا الذي أمضينا فيه الليالي الطوال، وأرهقنا ببحث أشبه ما يكون بحلم صعب المنال نطوي به تعب أيامٍ مضت.

فالشكر لله أولاً و آخراً أن يسر لنا إتمام هذا البحث ونسأله سبحانه في عملنا هذا التوفيق والنجاح.

ثم إلى أستاذنا الفاضل "**حريز بكار لعرابي**" المشرف على هذا البحث أعطنا ووجهنا، سألناه فأرشدنا، نسأل الله له التوفيق والسداد وعمل صالح يلقاه يوم المعاد . .

وشكرنا موصول لجميع أساتذة قسم الرياضيات الأفاضل الذين أمضينا معهم مدة ليست قصيرة راجين من الله العلي القدير لهم التوفيق والسداد . .

كما لا ننسى أن نتقدم بالشكر الجزيل لكل من مد يد العون لنا خاصة "**مكتبة الرحمة**" بحي الرمال والإخوة والأخوات سواءً كان ذلك بكلمة أو دعوة أو توجيه أو نصيحة فشكراً لهم، ونسأل الله بمنة وكرمه أن لا يحرمكم من خيري الدنيا والآخرة.

✍.. فاطمة الزهرة .. ✍إكرام . . ✍إيمان.

$b \mid a$	a يقسم b.
$b \nmid a$	a لا يقسم b.
(b, a)	القاسم المشترك الأكبر (pgcd) لـ a و b.
[b, a]	المضاعف المشترك الأصغر (ppcm) لـ a و b.
$A \equiv b \pmod{m}$	a يطابق b للمقياس m.
$a \not\equiv b \pmod{m}$	a لا يطابق b للمقياس m.
$\sigma(n)$	مجموع القواسم الموجبة للعدد n.
$\sigma^*(n)$	مجموع القواسم الفعلية للعدد n.
$\mathbb{N}$	مجموع الأعداد الطبيعية.
$\mathbb{Z}$	مجموع الأعداد الصحيحة.
$\mathbb{R}$	مجموع الأعداد الحقيقية.
F_n	أعداد فيرما.
M_n	أعداد مرسين.
=>	إذا كان فإن.
<=>	إذا وفقط إذا كان.
$< a_0, a_1 \ldots a_n >$ أو $[a_0, a_1 \ldots a_n]$	الكسر المستمر المنتهي.
$[a_0, a_1 \ldots a_n, \overline{b_1 \ldots, b_n}\ ]$	الكسر الدوري.
$\overline{K}$	اللصاقة.
Σ	رمز الجمع.

مقدمة:

من المواضيع التي شغلت علماء الرياضيات طويلا ولا تزال تشغلهم نظرية الأعداد، التي هي فرع من فروع الرياضيات يهتم بخصائص الأعداد الصحيحة منها خصوصا و الحقيقية عموما، وتتضمن عدة مسائل مفتوحة تراوحت بين السهل والتعقيد، و بصفة عامة، المجال الذي تدرسه هذه النظرية يهتم بفئة كبيرة من المسائل التي تأتي من دراسة الأعداد الطبيعية. ويمكن تقسيم نظرية الأعداد إلى عدة مجالات حسب الطريقة المستعملة ونوع المسألة.

وتختص نظرية الأعداد بدراسة خواص وعلاقات الأعداد الصحيحة وتوسيعاتها الجبرية والتحليلية، ومن أهم العلماء الذين كان لهم الفضل في تطور النظريات الخاصة بنظرية الأعداد الإيطالي بومبيلي (1572م) من أهم أعماله الكسور المستمرة، وديوفنتس الذي درس الحلول القياسية للمعادلات الديوفنتية، وكذلك العالم الفرنسي بيير دي فيرما، ومن أشهر إنجازاته مبرهنته الأخيرة التي أربكت أعظم العقول لمدة تزيد عن ثلاثة قرون إلى أن توصل العالم ويلز على برهانها سنة 1995م، وغيرهم من العلماء الذين توصلوا إلى عدة نتائج حسابية ساهمت في تطور نظرية الأعداد.

وقد قسمت المذكرة إلى ثلاثة فصول، إذ يتناول الفصل الأول عموميات حول نظرية الأعداد وكل النظريات والقواعد التي تسهل دراسة هذا الموضوع، في حين يتناول الفصل الثاني نظرية الأعداد الحقيقية والمنحنيات الناقصية إلى جانب نظرية فيرما الصغرى. وقد خصصنا الفصل الثالث إلى دراسة نظرية فيرما الكبرى ومراحل برهانها وتطبيقات تخص نظرية لاجرانج والكسور المستمرة لعدة دوال وحساب دالة الخطأ.

ونظرا لما يحمله الموضوع من أهمية علمية وعملية وما يسعه من معلومات غزيرة ومتشعبة لذلك ارتأينا أن نقتصر دراستنا على أهم عناصره، ولقلة المراجع الخاصة بنظرية الأعداد وخاصة باللغة العربية التي تكون أكثر سهولة من المراجع الأجنبية، قمنا بكتابة المذكرة باللغة العربية لتكون مرجعا جديدا يرجع إليه الطلبة والمختصين في الرياضيات.

الفصل الأول:

عموميات حول نظرية

الأعـــداد

تمهيد:

في هذا الفصل سنركز اهتمامنا على دراسة مفهوم القسمة وخوارزمية القسمة والقاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر بمفاهيم أكثر، بحيث يتم دراسة هذه المفاهيم كمقدمة لنظرية الأعداد ودراستها بشكل جبري. كما سنتطرق إلى موضوع الموافقات وخواصها، إلى جانب الأعداد الخاصة وغيرها من الأعداد.

1ـ1ـ أشهر علماء نظرية الأعداد:

إقليدس (300 سنة قبل الميلاد):

رياضي إغريقي، كتب 13 مجلدا كان يعتقد أنها تدور حول الهندسة فقط إلا انه يحتوي كذلك على نظرية الأعداد ومن أهم أعماله في نظرية الأعداد خوارزمية إقليدس لحساب القاسم المشترك الأكبر.

ثابت بن قرة (221هـ – 288هـ):

هو أول عالم رياضيات عربي اهتم اهتماما كبيرا بنظرية الأعداد، حيث كان له الفضل في إيجاد طريقة لإيجاد الأعداد المتحابة.

ابن الهيثم (354هـ – 430هـ):

أول من حاول تصنيف الأعداد المثالية الزوجية $(2^K - 1)\ 2^{K-1}$ عندما يكون $2^K - 1$ عددا أوليا، وكان أول من أعلن مبرهنة ويلسون والتي يكون بموجبها عدد ما p أولي إذا وفقد إذا كان $(p-1)! + 1$ مضاعفا لذلك العدد p.

بيير دي فيرما (1608م – 1665م):

عالم فرنسي كتب أعمال على مستوى عال في نظرية الأعداد و بعض الفروع الأخرى من الرياضيات كهواية، فقد درس الأعداد الصحيحة و العلاقات بينها وكانت أشهر إنجازاته مبرهنته الأخيرة $a^n + b^n = c^n$.

ليونارد أويلر (1707م – 1783م):

عالم رياضيات سويسري، من أهم اكتشافاته في نظرية الأعداد قانون التبادل التربيعي والذي يربط قابلية الحل للتطابق $x^2 \equiv p \pmod q$ و $y^2 \equiv q \pmod p$ عندما يكون كل من p و q عددين أوليين مختلفين.

يوسف لويس لاجرانج (1736م – 1813م):

عالم رياضي إيطالي، اعتبر نظرية الأعداد كتسلية إلا أنه برهن على عدة نتائج حسابية مهمة فقد وضح أن أي عدد صحيح موجب يمكن أن يكتب كحاصل جمع لأربعة مربعات.

وكـــان لاجرانج أول من برهن نظرية ويلسون و النظرية التي تـــقول: "إن التطابق من الدرجة n لمقياس عدد أولي لا يمكن أن يكون له أكثر من n من الحلول".

كارل فريدريك جاوس (1777م – 1855م):

عالم رياضي ألماني، اعتبر جاوس نظرية الأعداد هي الجزء الأكثر أهمية في علم الرياضيات وقد برهن على القانون التبادل التربيعي لأويلر.

2ــ1ــ القواسم والمضاعفات:

1ــ2ــ1ــ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

تعريف 1:

a وb عددان صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث

$b = ka$. كذلك نقول أن a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a.

1ــ2ــ2ــ القاسم المشترك الأكبر:

تعريف 2: [3]

نقول أن العدد d هو قاسم مشترك أعظم **(pgcd)** لعددين a وb إذا كان d هو أكبر الأعداد الصحيحة التي تقسم كل من a وb و نكتب $d = (a, b)$.

1ــ2ــ3ــ المضاعف المشترك الأصغر:

نقول أن m هو مضاعف مشترك أصغر **(ppcm)** لعددين a وb في حالة ما يكون m هو أصغر الأعداد الصحيحة الموجبة الذي هو مضاعف لكل من a وb ونكتب $m = [a, b]$.

1ـ3ـ نظريات قابلية القسمة: [2]

نظرية 1ـ3ـ1:

إذا كان $a \mid b$ و $b \mid c$ فإن $a \mid c$.

نظرية 1ـ3ـ2:

إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$، فإن $a \mid ax + cy$, $\forall y, x \in \mathbb{Z}$.

نظرية 1ـ3ـ3:

إذا كان $m \mid a$ و $m \mid b$ فإن $m \mid [a, b]$.

1ـ4ـ الموافقات (التطابقات) في $\mathbb{Z}$:

تعريف 3:

n عدد طبيعي غير معدوم، القول أن العددين الصحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n. ونكتب : $a \equiv b\ [n]$ و نقرأ a يوافق b بترديد n.

1ـ4ـ1ـ خواص: [2]

خاصية 1ـ4ـ1ـ1:

n عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن 1 $(n \geq 2)$. كل عدد صحيح a يوافق بترديد n باقي قسمته على n.

خاصية 1ـ4ـ1ـ2:

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم إذا كـــان $a \equiv b\ [n]$ فإن $b \equiv a\ [n]$.

خاصية 1ـ4ـ1ـ3: (خاصية التعدي)

n عدد طبيعي غير معدوم، a، b و c أعداد صحيحة. إذا كان $a \equiv b\ [n]$ و $b \equiv c\ [n]$ فإن $a \equiv c\ [n]$.

خاصية 1ـ4ـ1ـ4: (خاصية التلاؤم مع الجمع)

n عدد طبيعي غير معدوم، a و b و c و d أعداد صحيحة. إذا كان $a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n]$ فإن

$a + c \equiv b + d\ [n]$.

خاصية 1ـ4ـ1ـ5: (خاصية التلاؤم مع الضرب)

n عدد طبيعي غير معدوم، a و b و c و d أعداد صحيحة. إذا كان ($a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن

$ac \equiv bd\ [n]$.

خاصية 1ـ4ـ1ـ6:

n و p عددان طبيعيان غير معدومين a و b عددان صحيحان. إذا كان $a \equiv b\ [n]$ و $a^p \equiv b^p\ [n]$

1ـ4ـ2ـ النظرية الصينية للباقي:

بأخذ مجموعة المتطابقات

$$\begin{cases} Z = K_1 \pmod{a} \\ Z = k_2 \pmod{b} \end{cases}$$

حيث $(a, b) = 1$ و بفرض أن:

$$ax \equiv 1 \pmod{b}$$
$$by \equiv 1 \pmod{a}$$

فأحد الحلول لمجموعة المتطابقات هو:

$$Z = axk_2 + byk_1$$

أي عدد صحيح Z' يكون حلا إذا وفقط إذا كان:

$$Z' \equiv Z \pmod{ab}$$

مثال:

أوجد أصغر عدد موجب يكون حلا للمتطابقات:

$Z \equiv 15 \pmod{43}$

$Z \equiv -8 \pmod{21}$

هنا $k_2 = -8, k_1 = 15, b = 21, a = 43$

الآن: $43 = 2\,(21) + 1$

ومنها: $1 = 21\,(-2) + (43)\,1$

نأخذ: $x = 1, y = -2$

حل المجموعة الأصلية هو:

$Z = 43\,(1)\,(-8) + 21\,(-2)\,15 = -974$

في الواقع فإن أي قيمة تطابق 974- للمقياس 903 = (21) 43 هي أيضا حل.

و يكون أقل حل موجب هو:

$-974 + 2\,(903) = 832$

1ـ5ـ نظريات عامة حول الأعداد:

1ـ5ـ1ـ الأعداد الأولية:

تعريف 4:

هي الأعداد الطبيعية الأكبر من 1 التي لا تقبل إلا قاسمين فقط.

مثال:

الأعداد الأولية الأقل من 20

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19

نظرية 1ـ5ـ1ـ1:

كل عدد n أكبر من 2 يمكن تحليله إلى أعداد أولية.

نظرية 1ـ5ـ1ـ2:

إذا كان α أوليا مع كل من a و b فإنه أولي مع الجداء a*b.

نظرية 1ـ5ـ1ـ3: (غوص)

إذا قسم عدد جداء عددين و كان أوليا مع أحدهما فإنه يقسم الآخر.

1ـ5ـ2ـ الأعداد الأولية فيما بينهما:

تعريف 5:

نقول عن عددين طبيعيين أنهما أوليان فيما بينهما، إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1.

مثال:

11 و 5 هما عددان أوليان فيما بينهما لأن القاسم المشترك لهما هو الواحد فقط و نكتب ذلك

كما يلي: $(5,11) = 1$.

1ـ5ـ3ـ الأعداد الأولية النسبية:

تعريف 6:

العددان a وb هما عددان أوليان نسبيا إذا كان $(a, b) = 1$، بمعنى آخر إذا لم تكن هناك أية علاقة مشتركة بين a و b.

1ـ5ـ4ـ الأعداد المنتظمة:

تعريف 7:

هي الأعداد التي تساوي مجموع قواسمها الفعلية باستثناء العدد نفسه.

مثال:

$$6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

من العدد 0 إلى 10000 يوجد 4 أعداد منتظمة.

$$6,\ 28,\ 496,\ 8128$$

نظرية:

إذا كان لدينا $\forall n \in \mathbb{N}$، $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$ عددا أوليا فعندئذ :

$2^n(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n)$ يكون عددا منتظما.

1ـ5ـ5ـ الأعداد الزائدة:

تعريف 8: [2]

العدد n يسمى زائدا إذا كان مجموع قواسمه ما عدا العدد نفسه اكبر من العدد.

أي: $(\sigma(n) > n)$

مثال:

12 قواسمها (1، 2، 3، 4، 6) و مجموعها 16 أكبر من 12.

1ـ5ـ5ـ الأعداد الناقصة:

تعريف 9:

العدد n يسمى ناقصا إذا كان مجموع قواسمه الموجبة ما عدا العدد نفسه أقل من العدد.

أي: $(\sigma(n) < n)$.

مثال:

10 قواسمها (1، 2، 5) و مجموعها 8 وهو أقل من 10.

1ـ5ـ6ـ أعداد فيبوناتشي:

تعريف 10: [2]

نعرف متتالية أعداد كالتالي:

$F_1 = 1$

$F_2 = 1$

$F_3 = 1+ 1 + 2$

$F_4 = 1+ 2 + 3$

$F_5 = 2+ 3 + 5$

وبصيغة عامة إذا كان $n \geq 3$ ،فإن:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

العدد F_n يسمى عدد فيبوناتشي الذي ترتيبه n.

نظرية:

لكل عدد صحيح موجب n يكون:

$$F_2 + F_4 + \ldots\ldots F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

1ـ6ـ الأعداد الخاصة:

1ـ6ـ1ـ أعداد فيرما:

تعريف 11:

نقول عن عدد F_n أنه عدد فيرما، إذا كان $F_n = 2^{2^n}+1$ $n \in \mathbb{N}$ و إذا كان F_n عدد أولي فيسمى F_n عدد فيرما الأولي.

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$

1ـــ6ـــ2ـــ أعداد مرسين:

تعريف 12:

إذا كان k عدد صحيح موجبا فإننا نسمي العدد 2^k-1 عدد مرسين ونرمز بالرمز M_K حيث $k \geq 2$.

نظرية:

إذا كان $d \mid k$، فإن $2^d-1 \mid 2^K-1$ ولهذا فإنه إذا كان M_K عددا أوليا فإن K لابد أن يكون عددا أوليا.

1ـــ6ـــ3ـــ الأعداد التامة:

تعريف 13:

هو كل عدد إذا جمعت كل قواسمه فحاصل الجمع يساوي العدد نفسه.

نظرية:

كل عدد تام زوجي هو على الشكل $(2^\ell - 1)\, 2^{\ell-1}$ عندما يكون $2^\ell - 1$ عددا أوليا.

مثال:

6 قواسمه هي : 1 و 2 و 3 و مجموعها 6.

1ـــ6ـــ4ـــ الأعداد المتحابة:

تعريف 14:

نقول عن زوج الأعداد a, b متحابا إذا كان مجموع القواسم الموجبة للعدد a مطروحا منه العدد a نفسه يساوي العدد b، وإذا كان مجموع قواسم العدد b الموجبة مطروحاً منه العدد b نفسه يساوي العدد a.

و طريقة أخرى للتعبير عن ذلك وهي إذا كان $\bigtriangledown(b) - b = a$ و $\bigtriangledown(a) - a = b$

مثال:

220، 284 متحابان، لأن 504 = 220 + 284 و

$$\sigma(220) = \sigma(2^2.5.11) = \frac{2^3-1}{2-1}.\frac{5^2-1}{5-1}.\frac{11^2}{11-1} = 7.6.12 = 504$$

$$\sigma(284) = \sigma(2^2.71) = \sigma(2^2).\sigma(71) = \frac{2^3-1}{2-1}.(72) = 7.72 = 504$$

1ـ6ـ5ـ الأعداد المتعادلة:

تعريف 15:

إذا عبرنا عن عدد زوجي كمجموع عددين أوليين وضربناهما في بعضهما ونسمي العدد الناتج m ثم عبرنا عن ذلك العدد الزوجي بطريقة أخرى و ضربناهما في بعضهما، ونسمي العدد الناتج n، لوجدنا أن العددين m, n متعادلان.

مثال:

$16 = 3 + 13 \Rightarrow n = 3.13 = 39$ و $16 = 5 + 11 \Rightarrow m = 5.11 = 55$ و m, n متعادلان.

تعريف 16:

يقال عن عددين طبيعيين m, n أنهما متعادلان إذا كان $\sigma^*(m) = \sigma^*(n)$

نتيجة 1:

يقال عن $a_1 \ldots a_n$ أنها أعداد متعادلة إذا كان: $\sigma^*(a_1) = \sigma^*(a_2) = \cdots = \sigma^*(a_n)$.

نتيجة 2:

m , n متعادلان إذا وفقط إذا كان: $\left(\sigma^* m\right) + n = \sigma(n) + m$.

الفصل الثاني:

نظرية الأعداد للأعداد الحقيقية

تمهيد:

بالرغم من وجود كثير من الأعداد الحقيقية ليست أعداد صحيحة سواء قياسية أو غير قياسية لكن يبقى للأعداد الصحيحة أهمية خاصة عند دراسة هذه الأعداد ومن خلال هذا الفصل سنتطرق إلى دراسة نظرية الأعداد للأعداد الحقيقية بما فيها الأعداد القياسية وغير القياسية و الكسور المستمرة بنوعيها المنتهية و المنحنيات الناقصية التي ساهمت بدور فعال في البرهان على نظرية فيرما الأخيرة وكذلك المعادلات الديوفنتينية وأمثله عنها.

2ــ1ــ نظرية الأعداد للأعداد الحقيقية:

2ــ1ــ1ــ الأعداد القياسية وغير القياسية:

تعريف 1:

مجموعة الأعداد القياسية - ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$- هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية و تحوي مجموعة الأعداد الصحيحة، أي أن: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

وتكون مجموعة الأعداد القياسية حقلا مرتبًا أرشميديًا، حيث أي عدد قياسي له تمثيل عشري منتهي أو دوري.

أما الأعداد غير القياسية لا تمتلك صفة الدورية في التمثيل العشري ولا يمكن التعبير عنها بنسبة عددين صحيحين و تدعى بالأعداد غير الكسرية.

2ــ1ــ2ــ الفئات القابلة للعد وغير القابلة للعد:

تعريف 2:

نقول عن المجموعة S أنها قابلة للعد إذا أمكن وضعها في تناظر أحادي مع مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، وهذا ببساطة يعني أنه توجد قاعدة تربط كل عنصر في s مع عدد صحيح موجب وحيد، و بذلك تأخذ كل من الأعداد الصحيحة الموجبة لتكون زوجا مع عنصر واحد فقط من عناصر s (من المصطلحات المعتادة لهذا الوضع هو انه توجد دالة أحادية من s إلى الأعداد الصحيحة الموجبة).

فإذا كانت S مجموعة غير منتهية و لكن لا يمكن عدها، فنقول أنها غير قابلة للعد.

نظرية 2ـ1ـ2ـ1: [2]

نفرض أن n و k عددان صحيحان، فإذا كان $\sqrt[k]{n}$ ليس عددا صحيحا فهو غير قياسي.

نظرية 2ـ1ـ2ـ2:

إذا كانت s غير منتهية فإن s تحتوي على مجموعة جزئية قابلة للعد.

نظرية 2ـ1ـ2ـ3: (كانتور) [2]

مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد.

نظرية 2ـ1ـ2ـ4:

بفرض أن S ،T مجموعتان قابلتان للعد وليس لهما عنصر مشترك فإتحاد S ،T (أي مجموعة العناصر الموجودة في أي منها) قابلة أيضا للعد.

نظرية 2ـ1ـ2ـ5:

مجموعة الأعداد القياسية قابلة للعد.

2ـ2ـ الكسور المستمرة:

يعود تاريخها إلى الإيطالي بومبللي سنة 1572م و كاتالدي (1528م – 1626م) سنة 1613م والإنجليزي جون ويلس سنة 1653م وأويلر لاجرانج و جاوس، و الكسر المستمر تعبير على الشكل:

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

حيث $a \in \mathbb{R}$ ، $a_i > 0$ لكل $i \geq 1$.

ويرمز له بالرمز $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ و الكسور المستمرة منتهية و غير منتهية.

فالكسر المستمر:

$$[3,7,15,292] = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{292}}} = \frac{103993}{33102} = 3.141592653019 \simeq \pi$$

كسر منتهي، أما الكسر المستمر:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}} = [1,1,1,\dots]$$

فهو كسر غير منته.

تنقسم الكسور المستمرة إلى نوعين هما الكسور المستمرة المنتهية وغير المنتهية لأنها تمثل الأعداد النسبية وغير النسبية.

2ـــ2ـــ1ـــ الكسور المستمرة المنتهية:

تعريف 3: [3]

الكسر المستمر هو تعبير على الشكل:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \; \cfrac{1}{a_{n-1}\cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

حيث $a_i \in \mathbb{R}$ $a_i > 0$ لكل $i \geq 1$، و إذا كان $a_i \in \mathbb{Z}$، $a_i > 0$ لكل $i \geq 1$ فيسمى الكسر المستمر كسرا منتهيا و يرمز عادة للكسر المستمر المنتهي بالرمز $[a_1 \dots . a_n]$ أو $< a_0 , a_1 , \dots \, a_n >$.

تعريف 4:

يسمى $[a_0, a_1,\ldots,a_m]$ = C_m التقارب الميمي للكسر المستمر $[a_0, a_1,\ldots,a_n,\ldots]$ إذا:

$$C_2 = [a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, C_1 = [a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_0}, C_0 = [a_0] = a_0$$

$$C_m = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}}}$$

تعريف 5:

تعرف الأعداد الحقيقية q_m و p_m لكل $-2 \le m \le n$ كالآتي:

$$P_{-2} = 0, p_{-1} = 1, p_0 = a_0, \ldots, p_m = a_m p_{m-1} + p_{m-2}$$

$$q_{-2} = 0, q_{-1} = 1, q_0 = a_0, \ldots, q_m = a_m q_{m-1} + q_{m-2}$$

نظرية 2ــ2ــ1ــ1: [3]

بفرض أن $a_0, a_1, \ldots, a_m$ أعداد حقيقية حيث $a_i > 0$ عندما $i > 1$ ونفرض أن

p_i , q_i معرفان كما سبق فإن : $[a_1, a_2, \ldots, a_m] = \frac{q_m}{pm}$.

نظرية 2ــ2ــ1ــ2:

أي كسر منتهي يساوي عدداً قياسيا. و بالعكس أي عدد قياسي غير صحيح يمكن التعبير عنه بكسر مستمر منتهي $[a_1,a_2\ldots a_{n+1}]$ حيث $a_{n+1} > 1$.

2 ــ2ــ2ــ الكسور المستمرة غير المنتهية:

تعريف 6:

يقال عن كسر مستمر غير منتهي $[a_0, a_1,\ldots]$ أنه كسر غير منتهي، إذا كان $a_i \in \mathbb{Z}^+$ من أجل كل $a_0 \in \mathbb{Z}, i \ge 1$.

تعريف 7:

إذا كان $X = [a_0, a_1,\ldots]$ كسرا مستمرا غير منتهيا، فإن:

$$X = \lim_{m\to\infty} C_m = \lim_{m\to\infty}[a_0 , a_1, \ldots a_m]$$

2ــ2ــ3ــ الكسر الدوري المستمر:

الكسر الدوري المستمر هو كسر مستمر على الشكل: $[a_0 ,a_1,\ldots,a_m ,\overline{b_1, \ldots , b_n}]$ حيث $\overline{b_1, \ldots , b_n}$ يعني تكرار الأعداد $b_1, b_2\ldots,b_n$ إلى مالا نهاية، ويسمى n طول الدورة.

وإذا كان $m = 0$ فيسمى $[b_1, b_2\ldots,b_n]$ كسر دوري مستمر صرف أو بحت.

$[a_0, a_1, \ldots]$ كسر دوري إذا وفقط إذا كان $r \in \mathbb{N}$ بحيث $a_m = a_{m+r}$.

نظرية 2ــ2ــ3ــ1:

بفرض $a_0, a_1,\ldots$ متتالية لانهائية من الأعداد الصحيحة، حيث أن $a_i > 0$ عندما تكون $i > 1$ ينتج أن $\lim_{m\to+\infty}[a_1, a_2, a_3 \ldots a_m]$ موجودة وتساوي عددا غير قياسي.

نظرية 2ــ2ــ3ــ2: (الكسر المستمر لعدد غير قياسي)

نفرض أن s عدد حقيقي ولنفرض أن $S_1 = S$ و $a_1 = [S_1]$ بفرض S_i و a_i معرفان لقيم $i = 1, 2\ldots m$ فإذا كان S_i لا يساوي a_i فنعرف s_{i+1}، a_{i+1} كما يلي:

$$s_{i+1} = \frac{1}{s_i - a_i} \quad , \; a_i + 1 = [s_i + 1]$$

فإذا كان s عددا قياسيا فهذه العملية ستنتهي عند تعرف قيمة ما ولتكن a_m و نحصل على

$s = [a_1, \ldots a_m]$ و إذا كان s عددا غير قياسي فإن متتالية غير منتهية الحدود من a ستعرف و

$$s = [a_1 \ldots . a_m]$$

2ــ3ــ مبرهنة فيرما الصغرى:

يعرف الصينيون قبل أكثر من 2000 سنة بأن $(2^p -2)$ يقبل القسمة على p لأي عدد أوليp وقد عمم فيرما تلك الحقيقة بدون إثبات عام 1640م إلى ما يسمى مبرهنة فيرما الصغيرة "fermat's little théorème" و التي تنص على أن "إذا كان a عددا صحيحا لا يقبل القسمة على العدد الأولي p فإن $(a^{p-1} -1)$ يقبل القسمة على p".

وقد حصل الألماني ليبنز على نفس النتيجة وأثبتها بالاستقراء الرياضي سنة 1683م "ولم ينشر البرهان".

أما أول إثبات منشور لتلك المبرهنة فقد كان لأويلر سنة 1736م، ثم عمم أويلر تلك المبرهنة سنة 1760م.

نظرية فيرما: (الصورة الثانية) [3]

إذا كان p عدد أولي فإن لكل عدد صحيح نسبي a:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

إذا أخذ a وضرب في نفسه p مرة ثم طرح منه a فالعدد الناتج من هذه العمليات يقبل القسمة على p.

نظرية:

إذا كان p عددا أوليا وكان $p \nmid a$ فإن:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

2ــ4ــ المنحنيات الناقصة:

تعريف 8: [6]

المنحنى الناقصي E المعرف في الحقل $\mathbb{K}$ هو منحى أملس يعطي بمعادلة فيستراص:

$$(E) : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4 x + a_6 \quad (1.1)$$

والمعاملات a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 تنتمي إلى $\mathbb{K}$.

العبارة "منحنى أملس" تعني أن الخاصية التالية تكون محققة إذا كان $(x,y) \in \bar{k}^2$ تحقق المعادلة (1.1) إذا الأعداد $2y + a_1x + a_3$ و $3x^2 + 2a_2x + a_4 - a_1y$

ليست كلها معدومة.

إذا كانت الثنائية $(x, y) \in \bar{k}^2$ تحقق المعادلة (1.1) نقول أن (x, y) هي نقط من المنحني.

نضع:

$$P(x, y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6$$

الشرط "منحنى أملس" في التعريف يؤكد انه إذا كان:

$(x_1, y_1) \in \bar{k}^2$ و $p(x_1 ,y_1) = 0$

إذا الشعاع $\frac{\partial p}{\partial x}(x_1, y_1), \frac{\partial p}{\partial y}(x_1, y_1)$ غير المعدوم.

نأخذ $k = \mathbb{R}$، نضع:

$$E_1 : y^2 = x^3 + x \quad , \quad E_2 : y^2 = x^3 + x^2$$

المنحنيين E_1 و E_2 معرفين جيدا في $\mathbb{R}$ حيث أن كل المعاملات حقيقية. المنحنى E_1 أملس أي:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}(x, y), \frac{\partial p}{\partial y}(x, y)\right) = (0,0)$$

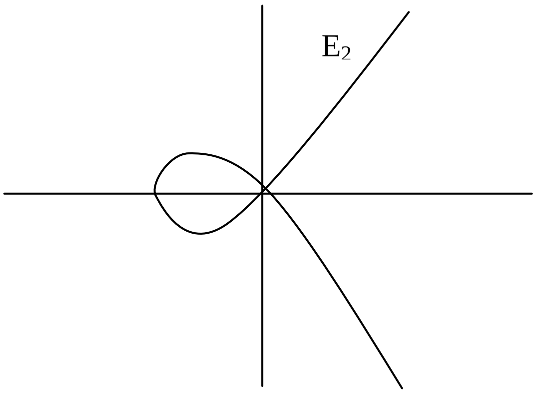
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 1 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{i}{\sqrt{3}} \\ y = 0 \end{cases}$$

غير هذه النقط $\left(\pm \frac{i}{x} = \sqrt{3}, 0\right)$ لا تنتمي إلى المنحني إذا E_1 منحنى ناقصي.

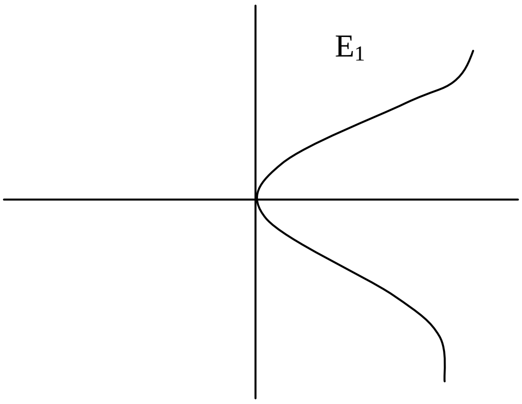
بالنسبة للمنحني E_2، النقطة (0، 0) تنتمي إلى المنحني.

ونتحقق بسهولة أن $0 = (0,0) \frac{\partial p}{\partial y} = (0,0) \frac{\partial p}{\partial x}$ ونقول إذا أن النقطة (0 ,0) هي نقطة وحيدة.

إذا المنحني E_2 ليس أملس وليس منحني ناقصي.



الشكل E_2



الشكل E_1

منحنى الشكل E_1 أملس و منحنى الشكل E_2 يملك نقطة وحيدة (نقطة مضاعفة هي $(0,0)$).

نأخذ: $E : y^2 = x^3 + a$ حيث $a \in k$

لنتحقق أنه إذا كان $k \neq 2, 3$ إذا كان E منحني ناقصي إذا وفقط إذا كان $a \neq 0$.

- إذا كان $card(k) = 2$، $(0, a^{1/2})$ نقطة وحيدة من E ($a^{1/2}$ تمثل الجذر التربيعي لــ a في $\bar{k}$) المنحني E ليس منحني ناقصي.
- إذا كان $card(k) = 3$، $(-a^{1/3}, 0)$ هي نقطة وحيدة في E ($a^{1/3}$ تمثل الجذر التكعيبي لــ a في $\bar{k}$) المنحني E ليس منحني ناقصي.

2ــ5ــ المعادلات الديوفنتينية:

2ــ5ــ1ــ ثلاثية فيثاغورث:

هي معادلات يقل عددها عن عدد المجاهيل الواردة فيها، وبالتالي قد يكون لها عدد كبير من الحلول الممكنة وهي حلول عددية صحيحة.

تعريف 9:

تسمى ثلاثي الأعداد الصحيحة الموجبة (x ,y , z) بثلاثية فيثاغورث في حالة ما تحقق المعادلات الديوفنتينية

$$x^2 + y^2 = z^2$$

الثلاثية تسمى أصلية في حالة وجود عدد صحيح أكبر من 1 يقسم كل من z, y, x.

نظرية: [2]

إذا كانت (x, y, z) ثلاثية فيثاغورث الأصلية حيث u زوجي، فيوجد عددان صحيـــحان موجـــبان أوليان نسبيا v, u لا يكـــون كلاهما فرديا $v > u$ حيث أن:

$$x = 2uv , y = u^2-v^2 , z = u^2 + v^2$$

وبالعكس إذا كان v, u أي زوج من الأعداد الصحيحة كما هو مذكور في الجزء السابق وكان x ,z, y معرفة بهذه المعادلات الثلاثة، فإن (x, z, y) تكون ثلاثية فيثاغورث الأصلية حيث x زوجي.

مثال:

أوجد كل ثلاثيات فيثاغورث الأصلية حيث $x = 28$.

نعلم أن $x = 2uv$ و بالتالي فإن $uv = 14$ الإحتمالات الوحيدة التي تحقق النظرية هي $u=14$ ، $v = 1$ و $u = 7$ ، $v = 2$ و هــذه تؤدي إلى الثلاثيات (197, 19, 28)، (53 , 45, 28) على الترتيب.

2ــ5ــ2ــ مجموع مربعين أو أكثر:

بدأت دراسة مسألة تحليل عدد طبيعي إلى مجموع مربعات أعداد طبيعية من قبل ديوفنتش وطورت من قبل الرياضيين العرب في القرن العاشر للميلاد.

نظرية 2ــ5ــ2ــ1: (مجموع مربعين)

إذا كان k أي عدد صحيح فإن:

$$k^2 \equiv 0 \quad \text{أو} \quad 1 \ (mod\ 4)$$

نظرية 2ـ5ـ2ـ2:

العدد الصحيح الموجب n يمكن كتابته كمجموع مربعين إذا وفقط إذا كان ليس هناك عدد يطابق $3 \pmod 4$ يظهر عددا فرديا من المرات عند تحليل n إلى أعداد أولية.

مثال:

عبر عن 130 كمجموع مربعين

يمكن كتابة كل من 10، 13 كمجموع مربعين.

وفي الحقيقة يأخذ: $a = 1, b = 3 , c = 2 , d = 3$ نحصل على:

$$130 = (ad + bc)^2 + (ac + bd)^2 = (2 + 9)^2 + (3 - 6)^2 = 11^2 + (-3)^2$$

الفصل الثالث:

تطبيقات نظرية الأعداد

تمهيد:

في هذا الفصل سنتطرق إلى برهان نظرية لاجرانج لمجموع أربعة مربعات و مبرهنة فيرما الأخيرة والمحطات الرئيسية في برهانها، وكذلك تطبيق الكسور المستمرة لكثيرات الحدود والدالة اللوغارتمية وكذا الدالة الأسية مع تطبيق هذه الأخيرة في حساب دالة الخطأ لغوص.

3ــ1ــ نظرية لانجرانج (مجموع أربعة مربعات): [2]

أي عدد صحيح موجب يمكن كتابته كمجموع أربعة مربعات.

البرهان:

رأينا أنه من الكافي إثبات أن أي عدد أولي يطابق $3(\mathrm{mod}\ 4)$ من مجموع أربعة مربعات. لفرض أن p هو هذا العدد الأولي إذا يوجد عدد صحيح k و $k < p$ حيث أن kp هو مجموع أربعة مربعات (بالفعل البرهان من هذه النقطة فصاعداً يصلح لأي عدد أولي فردي يوجد به مثل هذا العدد k) من بين كل الأعداد الصحية k نفرض أن m هو أصغرها و لهذا يكون لدينا.

$$mp = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad ,0 < m < p - 1$$

أولاً:

نوضح أن m عدد فردي، إذا كان m زوجي فالأعداد a ,b, c, d بالضبط يكون منها: لا شيء، أو إثنين أو أربعة أعداد زوجية، فإذا كان إثنان منها زوجي فنفرضهما من جديد a, b ومعنى هذا أنه في أية حال فإن:

$c + d$، $c - d$، $a + b$، $a - b$ كلها أعداد زوجية، ولكن ذلك يعطي:

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} = \frac{m}{2}p$$

وذلك يناقض كون m أصغر الأعداد k.

فإذا كان $m = 1$ فقد تم كل شيء، لأن p سيكون مجموع أربعة مربعات، نفرض $m > 1$ حيث أن الأعداد المتتالية:

$$\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}+1, \dots, 0.1, \dots, \frac{m-1}{2}$$

تكون نظاما باقيا كاملاً (مقياس m) فنستطيع اختيار عناصر A, B, C, D من بينها (حيث يكون الحد المطلق لأي منها أصغر من $\frac{m}{2}$) حيث:

$$A \equiv a.B \equiv b.C \equiv c.D \pmod{m}$$

أي أن:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = mp \equiv 0 \pmod{m}$$

نفرض أن:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = nm \qquad (2)$$

لاحظ أن $n > 0$، فإن كان A, B, C, D كلها أصفار فإن m يقسم كلا م a, b, c, d و لكن من ذلك m يقسم $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = mp$ وهذا مستحيل لأن $1 < m < p$ لاحظ أيضا أن

$$nm = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 < 4\left(\frac{m}{2}\right)^2 = m^2$$

وبذلك يكون $n < m$.

من (1) و (2) و باستخدام المتطابقة الأصلية للنظرية المساعدة (1) ينتج أن:

$$(mp)(nm) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

عندما يكون:

$$w = aA + bB + cC + dD \equiv a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = mp \equiv 0 \pmod{n}$$
$$x = aB - bA - cD + dc \equiv ab - ba + cd - dc \equiv 0 \pmod{m}$$
$$y = ac - bD - cA + dB \equiv ac - bc + bd \equiv 0 \pmod{m}$$
$$z = aD - bc - cB + dA \equiv ad - bc + cd \equiv 0 \pmod{m}$$

و لكن ذلك يعطي:

$$rp = \left(\frac{W}{m}\right)^2 + \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{Y}{m}\right)^2 + \left(\frac{z}{m}\right)^2$$

وهذا يناقض كون m أصغر الأعداد k لأن $0 < r < m$.

3ـ2ـ مبرهنة فيرما الأخيرة: (مراحل برهانها) [1]

كان بيير دي فيرما الخبير في نظرية الأعداد في القرن السابع عشر كثيرا ما يكتب للرياضيتين آخرين ويسألهم ما إذا كانت لديهم البراعة التي تمكنهم من الحصول على حلول تضارع حلوله. قد صاغ أكثر تحدياته شهرة، وهي مبرهنته الأخيرة بينما كان يدرس كتاب "الأرثيماطيقا" الذي ألفه ديوفانتوس، وقد أكد فيرما أنه لا توجد أي حلول غير تافهة للمعادلة : $a^n + b^n = c^n$.

حيث n صحيح أكبر من 2 وقد كتب فيرما على هامش الإرثماطيقا تعليقا عذب الرياضياتيين على مدى ثلاث قرون "**لدي إثبات بحق هذه المبرهنة، ولكن هذا الهامش ضيق لا يتسع له**"

بعد عقد من الجهة المركز أثبت "ويلز" من جامعة برنستون مبرهنة فيرما الخيرة الشهيرة عام 1994 ولإتمام حساباته التي ملأت 100 صفحة، كان عليه أن يعتمد على الكثير من الأفكار الحديثة في الرياضيات وان يضيف إليها، وعلى الخصوص كان عليه أن يبرهن عل صحة مخمنة شيموار و تانياما بالنسبة إلى مجموعة جزئية من المنحنيات الناقصة التي تعين بمعادلات تكعيبية كالمعادلات $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$.

في الخمسينات طور "شيموا" و "تانياما" فكرة ساعدت أخيرا على برهان ويلز وقد تضمنت مضمنتها الصيغ المقياسية، و هي دوال في الأعداد المركبة $(x + iy)$ حيث x, y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$ لقد إقترح الباحثان أن كل منحني ناقصي يمكن ربطه بصيغة مقياسية بحيث تتفق متسلسلة L الإثنتين للمنحني.

تابعت "جيرمان" دراستها تحت اسم مستعار وهو "مسيو لو بلان " وقد توصلت إلى أول إختراق مهم في القرن التاسع عشر، إلى أن أثبتت مبرهنة قطعت بها شوطاً طويلا نحو حل معادلة فيرما عند ما يكون كل من n و $(n + 12)$ عدد أوليا وتكون n أكبر من 2.

في عام 1984م اقترح "فراي" إستراتيجية جديدة للتصدي لمبرهنة فيرما الأخيرة. نفرض أن العددين A, B ينتجان من رفع عددين صحيحين إلى القوة n وأن $A + B$ هو أيضا القوة n لعدد صحيح ثالث، أي أن A, B هما حل لمعادلة فيرما ويمكن عندئذ استخدام A ,B كمعاملين في معادلة منحني ناقصي معين

$y^2 = x(x - A)(x + B)$ و"مميز" هذا المنحني الناقصي $A^2B^2(A + B)^2$ هو أيضا عدد صحيح مرفوع إلى القوة n لقد اعتقد فراي أن مثل هذا المنحني الناقصي لا يمكن أن يكون مقياسا.

وبعبارة أخرى أشار فراي إلى أنه إذا أمكن البرهان على صحة شيموارا وتانياما أو على أن جميع المنحنيات الناقصة مقياسية، فقد يمكن البرهان على انه ليس للمعادلة التكعيبية $y^2 = x(x - A)(x + B)$ حل.

وعندئذ يستحيل وجود حل لمعادلة فيرما وبذلك يكون قد تم البرهان على صحة مبرهنة صحة فيرما الأخيرة.

تابع "ريبت" عمل فراي وبرهن عام 1986م على استحالة أن يكون المنحني الناقصي مقياسا إذا كان مميزه عددا صحيحا مرفوعا إلى قوة صحيحة n، ويعتمد برهان "ريبت" على طريقة هندسية "الجمع" النقاط على منحنى ناقصي.

والفكرة هي أن المستقيم المار بالنقطتين p_2, p_1 على المنحني الناقصي سيقطع هذا المنحني في نقطة ثالثة p_3 بعد ذلك تعكس هذه النقطة الجديدة في المحور x للحصول على النقطة Q التي تسمى مجموع p_2, p_1 و بينما تكون جميع النقاط الواقع على المنحني الناقصي مجموعة لا نهائية فإنه توجد مجموعات منتهية لنقاط تتميز بخصية أساسية هي أن مجموع كل نقطتين في المجموعة هو نفسه نقطة في المجموعة.

وهذه المجموعات المنتهية تتبع قواعد معينة، وبالتالي تكوِّن ما يسمى زمرة. وإذا كان المنحني الناقصي مقياسيا، فإن النقاط التي تنتمي إلى الزمر المحدودة تكون بالمثل مقياسية. وما أثبته ريبت هو أن زمرة محدودة معينة لمنحني فراي ليست مقياسية وبالتالي فإن المنحني كله ليس مقياسيا.

كشف ويلز في محاضرة عامة عن برهانه الأول لمبرهنة فيرما الأخيرة في الشهر 1993/6. ولكن، لم يمض وقت طويل حتى اكتشف المراجعون خطأ جسيما في البرهان. ناقش ويلز الخطأ مع تلميذه السابق "تايلور" فقط، وقد حاولا معا إصلاح الطريقة التي استخدمها ويلز في برهانه المذكور واستخدما بدورهما وسائل سبق أن عزف ويلز عن استخدامها. وأخيرا، وجدا التعديل الأساسي لبرهان ويلز الأول، وكان ذلك بتاريخ 1994/09/19.

كانت الصعوبة هي إثبات أن كل منحن ناقصي في مجموعة ويلز الجزئية مقياسي. ومن أجل ذلك، استعان ويلز بالخاصية الزّمْرِيّة للنقاط الواقعة على المنحنيات الناقصية، وطبّق مبرهنة "لانگلاندز" (من معهد الدراسات المتقدمة في پرنستون) و "تانل" (من جامعة روتجرز). تبين هذه المبرهنة أنه توجد، لكل منحن ناقصي في

مجموعة ويلز زمرة معينة مقياسية من نقاط المنحني. والزمرة التي نتحدَّث عنها لها 9 عناصر فقط وبالتالي فقد يُظن أن مقياسيتها تُعبِّر عن خطوة أولية صغيرة للغاية نحو إثبات المقياسية التامة. إذا تَمَكَّنَ من الوصول إلى زمرة كبيرة كبرا لا نهائيا وأثبت أنها أيضا مقياسية، فإن ذلك يكافئ البرهان على أن المنحني بأكمله مقياسي. وفي نهاية الأمر تحقق ويلز أن برهانه قد اكتمل وفي 1995/06/23 أعلن نتيجة في مؤتمر عقد بمعهد نيوتن للعلوم الرياضتية في كمبريدج.

3ـ2ـ1ـ حالات خاصة من مبرهنة فيرما الأخيرة:

1− في حالة $k > 2$:

فالمعادلة $x^k + y^k = z^k$ ....(1)

ليس لها حل في الأعداد الصحيحة الموجبة.

وسنبرهن هنا على الحالة $k = 4$.

$x^4 + y^4 = w^2$ ....(2)

ليس لها حل في الأعداد الصحيحة الموجبة وهذا يؤدي إلى حالة $k = 4$ لآخر نظرية لفيرما لأنه إذا كان (1) له حل عند $k = 4$ فبوضع $w = z^2$ يعطي حل للمعادلة (2) والبرهان يعتمد على تحاليلنا لثلاثيات فيثاغورث.

البرهان:

سنبدأ بتوضيح أنه إذا كان للمعادلة (2) حل في الأعداد الصحيحة الموجبة x, y, z فإن لها حل آخر x, y, w في الأعداد الصحيحة الموجبة حيث : $W < w$.

الحالة (1):

بعض الأعداد الأولية تقسم كلا من x, y, w أي أن p^4 تقسم $x^2 + y^2 = w^2$ و التي نرى أن p^2 تقسم w، أي أن:

$$\left(\frac{x}{p}\right)^4 + \left(\frac{y}{p}\right)^4 = \left(\frac{w}{p^2}\right)^2$$

ولهذا فإن:

$$w = \frac{w}{p^2}\ , y = \frac{y}{p}\ , x = \frac{x}{p}$$

يكون حلا آخر و $W < w$

الحالة (2):

لايوجد عدد أولي يقسم كلا من x, y, w

وبالتالي فمن:

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = w^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نجد أن x^2, y^2, w تكون ثلاثية فيثاغورث أصلية.

من نظرية الأعداد الصحيحة الموجب n يمكن كتابته كمجموع مربعين، نستنتج أن x^2, y^2, w (وكذلك x, y, w) أولية نسبيا كأزواج وأنه بالضبط واحد منx^2, y^2 يكون زوجياً و w يكون فرديا. ولنفرض أن x^2 زوجي ولهذا فإن x زوجي و y فردي.

بتطبيق نظرية ثلاثية فيثاغورث على (3) فإنه يوجد عددان أوليان نسبيا وموجبان v ,u حيث :

$$x^2 = 2uv\ , y^2 = u^2 = v^2\ , w = u^2 + v^2$$

نطبق الآن نفس النظرية على المعادلة:

$$y^2 + v^2 = u^2$$

$$x^4 + y^4 = r^2 + s^2 = u = w^2$$

فنرى أن y ,v ,u تكون ثلاثية فيثاغورث أصلية أخرى وحيث إننا نعلم أن y فردي فلابد أن يكون لدينا v زوجي وu فردي أي أنه يوجد عددان أوليان نسبيا و موجبان s, r حيث أن.

$$y = r^2 - g^2,\ v = 2rs,\ u = r^2 + s^2$$

والآن وحيث أن $\left(u, \frac{v}{2}\right) = 1$ وبدراسة التحليل إلى عوامل أولية لطرفي المعادلة$\left(\frac{v}{2}\right) u = \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

نرى أنه لابد أن يوجد عددان صحيحان موجب z, w بحيث w^2 $u = z^2, \frac{v}{2} =$وبالطريقة نفسها ولان

$(r, s) = 1$ فمن المعادلة $rs = \frac{v}{2} = z^2$.

$$x^4 + y^4 = r^2 + s^2 = u = w^2$$

عندما تكون w, y, x أعداد صحيحة موجبة أيضا و

$$W = u^2 + v^2 = w^4 + v^2 > w^4 \geq w$$

من المعادلة (4) نرى أنه لدينا حل آخر للمعادلة (2) بـــ $w < w$ كما هو مفروض في بداية هذا البرهان.

تعتبر مناقشتنا حتى الآن إيجابية بالكامل و قد وضحنا أنه إذا أعطى حل y, x للمعادلة (2) في الأعداد الصحيحة الموجبة أيضا حيث $W < w$ ولكننا لا نريد التوقف عند هذا الحد فمن w, y, x نستطيع إيجاد حل ثالث w', y', x' بـــ $W' < w$ وفي الحقيقة إذا أعطى حل نستطيع إيجاد متتالية لا نهائية من الحلول بالخاصية:

$$w > W > W' > W'' > \ldots > 0$$

من الواضح أن ذلك مستحيل لأنه لا يمكن أن يكون لدينا متتالية تناقصية لانهائية من الأعداد الصحيحة الموجبة وبالتالي لا يوجد حل.

طريقة البرهان المستخدمة هنا تنسب لفيرما وتعرف بطريقة النزول اللانهائي " Methed of infirietedescnts" ويمكن تنظيم المناقشة كبرهان غير مباشر يعتمد على فكرة أن أية مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة الموجبة لها أصغر عنصر وبافتراض أنه يوجد حل في الأعداد الصحيحة للمعادلة (2) لنفرض أن w, y, x بـــ $W < w$ يعطي تناقض وبما أن الفكرة التي تقول أن أي مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة لها أصغر عنصر (تسمى مبدأ الترتيب الجيد) "well-odoingprunciple" وتكون متكافئة للاستنتاج الرياضي و النزول اللانهائي يمكن دراسته على أنه نوع من الاستنتاج.

3ــ3 الكسر المستمر لكثيرات الحدود: [5]

لنأخذ المثال التالي لمعادلة كثير حدود من الدرجة الثانية $x^2 - bx - c = 0$ ونحاول تحليلها في صورة كسر مستمر:

نقسم على x ونعيد ترتيب المعادلة بحيث نحصل على x في أحد الأطراف وتصبح بالصورة.

$$x = b + \frac{c}{x}$$

نكون قد حصلنا على كسر مستمر ولا نهائي لكثيرة الحدود وذلك لأن لدينا x في المقام على الطرف الأيمن والتي يمكن تعويضها بقيمة x في صورة تكرارية كما يلي:

$$x = b + \frac{c}{x} = b + \frac{c}{b+\frac{c}{x}} = b + \frac{c}{b+\frac{c}{b+\frac{c}{x}}} = b + \frac{c}{b+\frac{c}{b+\frac{c}{\ddots}}}$$

3ـ3ـ1ـ تطبيق الجذر التربيعي:

عندما ننظر لهذه الصورة فإننا قد لا ندرك مدى أهميتها سوى عند البحث في تطبيق لها. لنعد إلى كثير الحدود الأصلية: $x^2 - bx - c = 0$ ولنقم بتحليلها بالقانون العام:

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$$

ثم نقارن هذه النتيجة بدالة الكسر المستمر مع أخذ الجزء المنطقي وهو الموجب في حالتنا حتى تتحقق المساواة.

$$\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} = b + \frac{c}{b+\frac{c}{b+\frac{c}{\ddots}}}$$

أي أن:

$$\sqrt{\frac{b^2}{4} + c} = \frac{b}{2} + \frac{c}{b+\frac{c}{b+\frac{c}{\ddots}}}$$

لتبسيط الأمور أكثر سنجعل $b = 2a$ فتصبح العلاقة السابقة بالصورة التالية:

$$\sqrt{a^2 + c} = a + \frac{c}{2a+\frac{c}{2a+\frac{c}{\ddots}}}$$

لقد اكتشفنا للتو طريقة عامة لإيجاد الجذر التربيعي لأي عدد حقيق موجب.

مثال:

الجذر التربيعي للعدد 5 يمكن كتابته في صورة كسر مستمر.

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{\ddots}}} \approx 2\,x\,\frac{5}{21}$$

وبقدر ما يزداد عمق الكسر المستمر بقدر ما نحصل على دقة أعلى لحساب الجذر التربيعي بواسطة آلة بسيطة لا تدعم الجذور، يمكن مثلا إثبات أن:

$$\sqrt{5} \approx 2\,\frac{23184}{98209}$$

أن أهم ما يميز الكسر المستمر هو إمكانية اللامحدودة في تقريب أعداد غير نسبية في صورة أعداد نسبية.

3ــ3ــ2ــ تحويل الكسر المستمر:

يمكن تحويل الكسر المستمر من صورة لأخرى عبر الضرب بسطاً ومقاماً وهذا قد يكون مفيداً، لنفرض الكسر المستمر المعمم.

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{\ddots\cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

عند ضرب الكسر الأول في الأعلى (بسطاً ومقاماً) في معامل وليكن c_1 فهذا لا يؤثر على صحة الكسر المستمر، يمكننا أيضا ضرب الكسر التالي بسطاً ومقاماً في معامل آخر c_2 وهكذا حتى نحصل للكسر الأدنى

$[b_n, a_n]$ ونضربه في معامل c_m سنحصل بالنهاية على الصورة المكافئة التالية:

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{\ddots\cfrac{b_n}{a_n}}}} = a_0 + \cfrac{b_1c_1}{a_1c_1+\cfrac{b_2c_2}{a_2c_2+\cfrac{b_3c_3}{\ddots\cfrac{b_nc_n-c_n}{a_n-c_n}}}}$$

أو بصورة مبسطة:

$$[a_0, b_1, a_1, b_2, a_2,\ldots b_n, a_n] = [a_0, b_1c_1, a_1c_1, b_2c_1c_2, a_2c_2\ldots b_nc_{n-1}c_n, a_nc_n]$$

مجموع مقاليب متعاكسة الإشارة:

لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_m$ أعداد حقيقية لا صفرية بحيث $a_i \neq a_{i-1}$ بجمع قيم i الطبيعية فإن:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{a_1}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{a_1^2}{a_2-a_1+\cfrac{a_2^2}{a_3-a_2+\ddots\cfrac{a_{n-1}^2}{a_m-a_{m-1}}}}}$$

3ـــ4ـــ تطبيق الكسر المستمر للدالة الأسية واللوغاريتمية:

3ـــ4ـــ1ـــ تطبيق اللوغاريتم:

نعلم من منشور تايلور الطبيعي:

$$\ln(1+x)=\frac{x^1}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}x^i}{i}$$

يمكن إعادة كتابة هذا المنشور بصورة كسر مستمر بالإفادة من العلاقة مجاميع المقاليبب إشارات مخالفة كمايلي:

$$\ln(1+x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}x^i}{i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{ix^{-i}}$$

$$=\cfrac{1}{1x^{-1}+\cfrac{1^2x^{-2}}{2x^{-2}-1x^{-1}+\cfrac{2^2-x^{-4}}{3x^{-3}-2x^{-2}+\cfrac{3^2x^{-6}}{\ddots}}}}$$

$$=\cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x}{2-1x\cfrac{2^2x}{3-2x+\cfrac{3^2x}{\ddots}}}}$$

العلاقة الأخيرة تم تبسيطها عبر ضرب كل كسر بسطا ومقاما في مقلوب معامله a^{-i} حيث نعلم أن ذلك لا يؤثر على الحل من خاصية التحويل التي شرحناها سابقا.

مثال:

الحالة الخاصة والمميزة للوغاريتم في صورة كسر مستمر هي لوغاريتم 2 حيث

$$\ln(2)=\ln(1+1)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{1\cfrac{2^2}{1+\cfrac{3^2}{\ddots}}}}$$

مجموع مقاليب مضاريب متعاكسة الاشارة (متطابقة اويلر):

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{a_1a_2\ldots\ldots a_i}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{a_1}{a_2-1+\cfrac{a_2}{a_{n-1}-1+\cfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}}}}}$$

تعرف هذه الصورة بمتطابقة أويلر وقد تختلف صورها في بعض الكتب.

3ــ4ــ2ــ العدد الطبيعي e:

إذا كانت $a_1 = 1, a_2 = 2,\ldots a_i = i$

$$e^{-1}=1-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i\,!}=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{\ddots}}}}}$$

كذلك e من مقلوب الكسر المستمر

$$e=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{\ddots}}}}}}$$

يمكن تبسيط e أكثر بإعادة ترتيب التعبير الأصلي بحيث يصبح

$$1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{\ddots}}}}}$$

يطرح 1 من الطرفين نحصل على:

$$\frac{e}{e-1}-1=\frac{e-(e-1)}{e-1}=\frac{1}{e-1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{\ddots}}}}$$

وبإيجاد المقلوب مرة أخيرة وإضافة 1 للطرفين نحصل على:

$$e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{\ddots}}}}$$

3 ــ4ــ3ــ تطبيق الدالة الأسية:

لاحظ أن منشور الدالة الأسية هو:

$$e^{-x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} x^i}{i\,!}$$

يمكن كتابة هذا المنشور في صورة كسر مستمر كما يلي:

$$e^{-1} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \ldots.$$

$$= 1 - \frac{1}{(1x^{-1})} + \frac{1}{(1x^{-1})(2x^{-1})} - \frac{1}{(1x^{-1})(2x^{-1})(3x^{-1})} \ldots.$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{(1x^{-1})(2x^{-1})\ldots(ix^{-1})}$$

$$= 1 - \cfrac{1}{1x^{-1} + \cfrac{1x^{-1}}{2x^{-1} - 1 + \cfrac{2x^{-1}}{3x^{-1} - 1 + \cfrac{3x^{-1}}{\ddots}}}}$$

$$= 1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{1x}{2 - x + \cfrac{2x}{3 - x + \cfrac{3x}{\ddots}}}}$$

في التعبير الأخير حصلنا عليه بضرب كل بسط ومقام في x لحساب e^x سنبدل x بـــ $-x$ لنحصل على:

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{1x}{2 + x - \cfrac{2x}{3 + x - \cfrac{3x}{\ddots}}}}$$

نريد حساب دالة الخطأ $er\,f(z)$ لغوص المعرفة بـــ:

$$er\,f(z) = \frac{2}{1} \int_0^z e^{-t2} dt$$

وذلك بطريقة الكسور المستمرة.

لدينا:

$$e^{-t^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j\,!} t^{2j}$$

من (*) لدينا:

$$e^{-x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m\,!} x^m$$

وعليه يكون:

$$e^{-t^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j\,!} (t^2)^j$$

$$e^{-t^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j\,!} t^{2j}$$

إذن:

$$er\,f(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j\,!} \int_0^z t^{2j} dt$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j\,!} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)}$$

$$\frac{2z}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (z^2)^j}{j\,!\,(2j+1)}$$

$$\frac{2z}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^j}{j\,!\,(2j+1)}$$

$$er\,f(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -z^2\right)$$

حيث : $M(B, \gamma, Z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(B)j.z^j}{(\gamma)jxj\,!}$

تحويل كامر يكتب بالشكل:

$$er\,f(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{-z2} M\left(1, \frac{3}{2}, -z^2\right)$$

$$M(1,\gamma,Z) = \frac{1}{1-\frac{B_1 Z}{1-\frac{B_2 Z}{1-B_3 Z}}}$$

حيث: $M(\gamma\,,Z) = 1$

نضع

$$\hat{Z} = \sqrt{2}Z$$

$$er\,f(Z) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}Ze^{-z2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{\hat{Z}^2}{3+\frac{2\hat{Z}^2}{5-\frac{3\hat{Z}^2}{7+\frac{4\hat{Z}^2}{9-\ddots}}}}}$$

$$er\,f(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-z2}\,\frac{\hat{z}}{1-\frac{\hat{Z}^2}{3+\ddots}}$$

خاتمة:

لقد تطرقنا في هذه المذكرة إلى سرد خواص نظرية الأعداد بشكل علمي وعملي إلى جانب نظريات القسمة و الكسور المستمرة وكذا نظرية فيرما الكبرى ومراحل برهانها.

كما تناولنا الجانب التطبيقي لهذه النظريات، ونظرا لأهمية الموضوع نأمل الاستمرار في البحث ومواكبة المستجدات العالمية لتدعم نظرية الأعداد شتى فروع الرياضيات وبالأخص نظرية الألعاب أو المسائل التي تدرس فوضى الطبيعة إلى جانب العلوم الأخرى كالفيزياء والكيمياء.

هذا ويجدر الإشارة إلى أن موضوع نظرية الأعداد يزداد تشعبا وأهمية إذا ما طبق على القرآن الكريم واستخراج القواعد بشكل علمي، يكون لها الأثر الإيجابي لما تقتضيه ضروريات الحياة.

ملخص

تطرقنا في هذه البحث إلى نظرية الأعداد وكل القواعد والنظريات التي من شأنها أن تسهل دراسة الموضوع وبالأخص نظرية الأعداد الحقيقية التي تدرس الكسور المستمرة بنوعيها المنتهية وغير منتهية، مبرهنة فيرما الصغرى والمعادلات الديوفنتنية وكذلك المنحنيات الناقصية التي كان لها دور فعال في البرهان على مبرهنة فيرما الأخيرة.

وختمنا بتطبيقات عملية أظهرت مدى مساهمة نظرية الأعداد في مجال الرياضيات التطبيقية والعلوم الأخرى.

الكلمات المفتاحية:

الكسور المستمرة، المعادلات الديفونتنية، المنحنيات الناقصية، نظرية فيرما الصغرى، نظرية فيرما الكبرى.

Abstract:

We dealt with in this research to the theory of numbers and all the rules and theories that will facilitate the study of the subject and in particular the theory of the real numbers, which is studying continued fractions both types limited and unlimited, Fermat's Little Theorem and equations Diaphantine as well as elliptic curves, which was instrumental in the proof of Fermat's last theorem.

And we ended practical applications showed the extent of the contribution of number theory in the field of applied mathematics and other sciences.

Key words:

continued fractions, Diaphantine equations, elliptic curves, Fermat's Little Theorem, Fermat’s last theorem.

Résumé:

Nous avons abordé dans cette recherche de la théorie des nombres et toutes les règles et les théories qui faciliteront l'étude du sujet et en particulier la théorie des nombres réels, qui étudie les fractions continues deux types terminées et inachevé, théorème Ferma mineurs et équations Diaphantine ainsi que les courbes elliptiques, qui a joué un rôle dans la démonstration du dernier théorème de Fermat.

Et nous avons fini applications pratiques ont montré l'importance de la contribution de la théorie des nombres dans le domaine des mathématiques appliquées et d'autres sciences..

Mots clés:

Fractions continues, Equations Diaphantine, Courbes elliptiques, Petit théorème de Fermat, Dernier théorème de Fermat.