



N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'ELOUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Spectre étendu d'un opérateur
et quelques applications**

Présenté par: Otmani Noura

Soutenu devant le jury composé de

Mansour Abdelouahab
Fareh Abdelfeteh
Hadj Ammar Tidjani
Belhadi Ahfouda

MCA
MCB
MCB
MAB

Rapporteur
Président
Examineur
Examineur

Univ. d'El Oued
Univ. d'El Oued
Univ. d'El Oued
Univ. d'El Oued

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à témoigner notre reconnaissance à **Allah** tout puissant, de nous avoir donné la possibilité de terminer ce travail.

Ainsi, il nous fait plaisir que nous, au commencement de ce travail, présentons nos grands remerciements et estimons à notre encadreur, Dr "**Mansour Abdelouahab**", pour ses conseils et son encouragement durant la période de rédaction de ce travail.

En fin, il est important pour nous de remercier nos familles, nos parents, nos frères et nos sœurs, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.

Notations

H	espace de Hilbert.
X	espace de Banach.
$\langle ., . \rangle$	produit scalaire.
$\ .\ $	la norme.
T	l'opérateur linéaire.
$B(H)$	l'espace des opérateurs linéaires borné sur espace de Hilbert H .
I_H	l'opérateur identité.
O_H	l'opérateur nul.
T^*	l'opérateur adjoint de l'opérateur T .
T^{-1}	l'inverse d'un opérateur T .
$\sigma(T)$	l'ensemble spectrale de T .
$\rho(T)$	l'ensemble resolvente de T .
$\sigma_p(T)$	l'ensemble spectre ponctuel.
$\sigma_c(T)$	l'ensemble spectre continu.
$\sigma_r(T)$	l'ensemble spectre résiduel.
$\sigma_{ap}(T)$	l'ensemble spectre approximatif.

$R(\lambda, T)$ l'application resolvente de T .

$r(T)$ rayon spectral de T .

$EE(T)$ spectre étendu.

$C_{n,n}$ la continuite de fonction f et fonction dérivée $f', f'', \dots, f^n$.

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaire	2
1.1 Espace de Hilbert	2
1.1.1 Produit scalaire	2
1.1.2 Quelques propriétés	2
1.1.3 Convergence	4
1.2 Opérateurs linéaires sur espace de Hilbert	4
1.2.1 L' adjoint d'un opérateur	8
1.2.2 Quelques classes d' opérateurs	12
1.2.3 Opérateur auto-adjoint	14
1.2.4 commutateur d'un opérateur	15
2 Théorie spectrale des opérateurs	17
2.1 L'inverse d'un opérateur	17
2.2 Spectre d'un opérateur	21
2.2.1 La valeur propre d' un opérateur	21
2.2.2 Résolvante et spectre d'un opérateur	21
3 Spectre étendu	28
3.1 Préliminaires	28
3.2 Spectre étendu d'un opérateur	30
3.2.1 Relation entre le spectre ponctuel d'un opérateur et son spectre étendu	30
3.2.2 Relation entre le spectre approximatif d'un opérateur et son spectre étendu	31
3.2.3 Le comportement du spectre d'un opérateur au voisinage de 0	31
3.2.4 Le comportement du spectre périphérique d'un opérateur	33
4 Quelques cas où les solutions de l'équation $TR = \lambda RT$ sont des opérateurs nilpotents	35
4.1 Opérateurs super-expansifs	35
4.2 L'opérateur hypercyclicité, supercyclicité et Ω -hypercyclicité	38
4.3 Stabilité	40

Introduction

Dans ce memoire on s'intéresse au spectre étendu et quelques applications. Le spectre étendu de $T \in B(H)$ est :

$$EE(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \exists R \in B(H), \quad R \neq 0 \quad TR = \lambda RT\}.$$

On remarque que le spectre étendu d'un opérateur apparait dans quelques problème de physique mathématique. Pour justifier la terminologie spectrale, on donne quelques liens entre le spectre étendu d'un opérateur et d'autres spectres. On obtient par exemples les résultats suivants : Soit $T \in B(X)$. Alors on a

- $\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha \in \sigma_p(T)$, $\beta \in \sigma_p(T^*)/\{0\}\} \subset EE(T)$. Pour tout $\lambda \in EE(T)$,

$$\lambda\sigma(T) \cap \sigma_{ap}(T) \neq \emptyset.$$

- Si $TR = \lambda RT$ avec $|\lambda| \neq 1$ $\sigma(T) \neq 0$ et R injectif ou à image dense, alors $0 \in \sigma(T)$ et 0 n'est pas un point isolé de $\sigma(T)$.
- Si $TR = \lambda RT$ avec $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$, R à image dense et T à puissance bornées, alors

$$\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset 1 \Rightarrow T^n \longrightarrow 0 \text{ fortement}.$$

Le Théorème de Rosenblum [16] nous donne une relation entre le spectre étendu d'un opérateur et son spectre :

$$EE(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

Le spectre étendu a été utilisé dans plusieurs directions. Ce memoire est réparti en quatre chpitres. Le premier étant préliminaire sur espace de hilbert, quelques propriétés et les opérateurs linéaires et et définitions les opérateur linéaires et adjoint et auto-adjoint,et commutateur avec exmples et quelques classes.

Le deuxième chpitre constitue un théorie spectrale des opérateur, les définitions et les resultats sur le spectre d'un opérateur et resolvente. Dans le troisième chapitre qui constitue l'objet de ce mémoire à developper les relations entre le spectre étendu et d'autres spectres. Le dernier chapitre sera consacrée sur les application de spectre étendu.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Produit scalaire

Définition 1.1.1 Soit X un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, s'il existe un nombre complexe $Z = \langle x, y \rangle$ pour tout couple de vecteurs x et y dans X qui vérifie les conditions suivantes :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X \quad \text{et} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in X$;
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in X$;
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

alors $\langle x, y \rangle$ est dit produit scalaire de x et y ; et on note par $\langle ., . \rangle$ ou $\langle \quad | \quad \rangle$.

Définition 1.1.2 Soit X un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, s'il existe un nombre réel $a = \|x\|$, qui vérifie les conditions suivantes :

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X \quad \text{et} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{C}$.

on dit que $\|\cdot\|$ est une **norme**.

– Un tel espace X muni d'une norme $\|\cdot\|$ est dit espace vectoriel **normé**.

Définition 1.1.3 On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Nous verrons que cette application définit une norme sur un espace préhilbertien X .

1.1.2 Quelques propriétés

• **Inégalité de Schwarz** : pour tout $x, y \in X$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| ; \quad (1.1)$$

- **Loi de parallélogramme** : pour tout $x, y \in X$, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2); \quad (1.2)$$

- **Identité de polarisation** : pour tout $x, y \in X$ et $i \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2]. \quad (1.3)$$

Proposition 1.1.1 *Un espace préhilbertien X est un espace vectoriel normé avec la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ induit par le produit scalaire.*

Preuve. Le seul axiome non évident à démontrer est l' inégalité tringulaire.

On a

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + |\langle x, y \rangle| + |\langle y, x \rangle| + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle;$$

de l' inégalité de Schwarz, on déduit que :

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|;$$

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2;$$

$$\Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

■

Définition 1.1.4 *Un espace préhilbertien muni de la norme induite par le produit scalaire est dit un espace de **Hilbert**.*

Exemple 1.1.1

1. *L'espace euclidien*

$$\mathbb{C}^k = \{x = (x_1, \dots, x_k); x_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, k\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^k x_i \bar{y}_i,$$

est un espace de Hilbert;

2. *L'espace*

$$l^2 = \left\{ x = (x_j)_j; x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.5 *Si $g, h \in H$, on dit que g et h sont **orthogonaux**, et on écrit $g \perp h$ si $\langle g, h \rangle = 0$. Si M est une partie de H , l'**orthogonal** de M est défini par :*

$$M^\perp = \{h \in H \quad t.q. \quad \forall g \in H, \quad h \perp g\} = \{h \in H \quad t.q. \quad \forall g \in H, \quad \langle g, h \rangle = 0\}.$$

1.1.3 Convergence

Définition 1.1.6 On considère une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace normé X . On dit que :

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ fortement convergente vers $x \in X$ si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$;
2. De Cauchy si $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n, m \rightarrow \infty$.

Définition 1.1.7 Un espace normé X est dit complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

Définition 1.1.8 Dans un espace préhilbertien X , une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dit faiblement convergente vers x si $\forall y \in X \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

1.2 Opérateurs linéaires sur espace de Hilbert

Définition 1.2.1 Une application $T : H \rightarrow H$; H est un espace de Hilbert, est dit **opérateur linéaire** si et seulement si T satisfait les deux conditions suivantes :

(i) **Additivité** :

$$T(x + y) = Tx + Ty \quad \forall x, y \in H;$$

(ii) **Homogénéité** :

$$T(\lambda x) = \lambda \cdot Tx \quad \forall x \in H, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Notations :

- On note d'habitude les opérateurs par $T, R, S, A, U, \dots$
- Pour alléger les écritures, l'image d'un vecteur $x \in H$ par l'opérateur T sera généralement notée Tx .
- I_H : l'opérateur identité dans H ;

$$\begin{array}{ccc} I_H : H & \rightarrow & H \\ x & \rightarrow & I_H x = x. \end{array}$$

- O_H : l'opérateur nul dans H ;

$$\begin{array}{ccc} O_H : H & \rightarrow & H \\ x & \rightarrow & O_H x = 0. \end{array}$$

- On notera $\ker T$ le noyau de l'opérateur T ; i.e.

$$\ker(T) = \{x \in H; \quad Tx = 0\}$$

et aussi noté parfois $N(T)$.

- $Im(T)$ désignera l'image de H par T . On le notera aussi $T(H)$; i.e.

$$Im(T) = \{Tx; \quad x \in H\}$$

et aussi noté parfois $R(T)$.

Définition 1.2.2 Soient T et S deux opérateurs linéaire. On dit que T et S sont égaux si et seulement si $Tx = Sx$ for all $x \in H$ on note alors, $T = S$.

Exemple 1.2.1

1. Soit $H = L^2([0, 1])$ et

$$\begin{array}{ccc} T : H & \rightarrow & H \\ f & \rightarrow & Tf(x) = \int_0^1 (x-t)f(t) dt. \end{array}$$

2. L'opérateur de **multiplication** :

$$\begin{array}{ccc} M : H & \rightarrow & H \\ f & \rightarrow & Mf(x) = x.f(t) \quad \forall x \in [0, 1]. \end{array}$$

3. L'opérateur de **Volterra** :

$$\begin{array}{ccc} V : \mathbb{C}([0, 1]) & \rightarrow & \mathbb{C}([0, 1]) \\ f & \rightarrow & Vf(x) = \int_0^x k(x, t)f(t) dt. \end{array}$$

où $k(x, t)$ est une fonction en x et t (noyau).

4. Soit H est un vecteur dans $\mathbb{C}^2$

$$\begin{array}{ccc} T : H & \rightarrow & H \\ U & \rightarrow & V = TU = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U ; \end{array}$$

$$\text{soit } U = \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}, \quad TU = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.3 L'opérateur T définit sur un espace de Hilbert est dit **borné** s'il existe un $c > 0$ tel que :

$$\|Tx\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in H \quad (1.4)$$

Exemple 1.2.2

1. $I : \mathbb{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}([0, 1])$
est bien borné car :

$$\|Ix\| = \|x\| \leq c \|x\| ; \forall c \geq 1.$$

2. Soit $H = L^2([0, 1])$

$$\begin{array}{ccc} T : H & \rightarrow & H \\ f & \rightarrow & Tf(x) = \int_0^1 (x-t)f(t)dt. \end{array}$$

T est borné car :

$$\begin{aligned} \|Tf\|^2 &= \int_0^1 |Tf(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \int_0^x (x-t)f(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |x-t|^2 dt \right) dx + \int_0^1 \int_0^x |f(t)|^2 dt dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} \int_0^x |f(t)|^2 dt \right] dx \leq \frac{1}{3} \|f\|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|Tf\|^2 &\leq \frac{1}{3} \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2 \\ \Rightarrow \|Tf\| &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|, \quad (c = \frac{1}{\sqrt{3}}). \end{aligned}$$

3. L'opérateur de multiplication T défini sur l'espace $\mathbb{C}([1, 2])$, alors :

$$\begin{aligned} \|Tf\| &= \sup_{x \in [1, 2]} |(Tf)x| \\ &= \sup_{x \in [1, 2]} |xf(x)| \\ &\leq 2 \|f\| \quad (c = 2) \quad \forall f \in \mathbb{C}([1, 2]) \end{aligned}$$

donc T est borné.

Définition 1.2.4 On dit que un opérateur T est inférieurement borné si :

$$\exists k > 0 \quad \|Tx\| \geq k \|x\| \quad \forall x \in H. \quad (1.5)$$

Remarque 1.2.1 On dénote par $B(H)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Hilbert H .

Définition 1.2.5 On définit la norme de l'opérateur $T \in B(H)$ par :

$$\|T\| = \inf \{c > 0 : \|Tx\| \leq c \|x\| ; \forall x \in H\} \quad (1.6)$$

Théorème 1.2.1 Soit $T \in B(H)$ la norme de T est donnée par :

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\|, x \in H; \|x\| = 1\}$$

Preuve. T borné $\Rightarrow \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$, $\forall x \in H$. On pose $a = \sup \{\|Tx\|, x \in H; \|x\| = 1\}$; si : $\|x\| = 1 \quad \|Tx\| \leq \|T\|$; si on passe au supremum :

$$\sup \{\|Tx\|, \|x\|_{x \in H} = 1\} \leq \sup \|T\| = \|T\|$$

D' où $a \leq \|T\|$.

maintenant montrons que : $\|T\| \leq a$

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in H : \|Tx\| &= \left\| T \|x\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\| \left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\|. \\ \|Tx\| &\leq \left\| T \|x\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \sup \left\| T \|x\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \\ &\Rightarrow \sup \|Ty\|_{\|y\|=1} \geq \|T\|. \end{aligned}$$

D' où

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\|, x \in H; \|x\| = 1\}.$$

■

Théorème 1.2.2 Soit T un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H , Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) T est borné.

(ii) T est continue sur H .

(iii) T est continue sur un point $x_0 \in H$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit T borné vecteur quelconque dans H x_n une suite converge vers x_0 comme :

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_0\|$$

$$(x_n \rightarrow x_0) \Rightarrow (\{Tx_n\} \rightarrow Tx_0)$$

D' où la continuité de T .

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit T continu en $x_0 \in H$

supposons que T est non borné (i.e : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \neq 0$ vecteur dans H : $\|Tx_n\| > n \|x_n\|$). On pose $y_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|}$; $\|y_n\| = \frac{1}{n}$ Or $y_n \rightarrow 0$ alors $y_n + x_0 \rightarrow x_0$ mais

$$\|T(y_n + x_0) - T(x_0)\| = \|Ty_n\| = \left\| T \frac{x_n}{n \|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n \|x_n\|} \|Tx_n\| > \frac{n \|x_n\|}{n \|x_n\|} = 1$$

D' où

$$\|T(y_n + x_0) - T(x_0)\| > 1, \forall y_n$$

D' où T n' est pas continu en x_0 , d' où la contradiction donc T est borné. ■

Théorème 1.2.3 [7] Soit H un espace de Hilbert, et f une forme linéaire continue sur H . Il existe un vecteur $a \in H$ et un seul, tel que :

$$\forall x \in H, f(x) = \langle a, x \rangle.$$

1.2.1 L' adjoint d'un opérateur

Théorème 1.2.4 Soit $T \in B(H)$,il existe un unique opérateur $T^* \in B(H)$, pour tout $x, y \in H$, on ait

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle. \quad (1.7)$$

Preuve. Soit y donné dans H , l'application $x \rightarrow \langle Tx, y \rangle$ est forme linéaire continue sur H . Par le théorème (1.2.3), il suit qu' il existe un unique $z \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, on ait $\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle$. On note $z = T^*y$. T^* est bien défini, et ce de manière unique, en tant qu' application de H dans H car pour y donné, on définit z , l'image de y par T^* , de façon unique. Montrons que T^* est linéaire :

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\ &= \langle Tx, \alpha y_1 \rangle + \langle Tx, \beta y_2 \rangle = \bar{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle x, T^*y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle x, T^*y_2 \rangle = \langle x, \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2 \rangle \end{aligned}$$

d' où pour tout $x \in H$,

$$\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle = \langle x, \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2 \rangle$$

Montrons maintenant que T^* est borné.

$$\begin{aligned} \|T^*y\|^2 &= \langle T^*y, T^*y \rangle = \langle TT^*y, y \rangle \leq \|TT^*y\| \|y\| \leq \|T\| \|T^*y\| \|y\| \\ \Rightarrow \|T^*y\| &\leq \|T\| \|y\| \Rightarrow T^* \text{ est borné et de plus} \end{aligned}$$

$$\|T^*\| \leq \|T\| \quad (1.8)$$

il suit que $T^* \in B(H)$. ■

Définition 1.2.6 L' opérateur T^* définit ci-dessus est appelé l' opérateur adjoint de T .

Exemple 1.2.3 1. L' adjoint de l' opérateur identité I_H est $I_H^* = I_H$ car :

$$\langle I_H x, y \rangle = \langle x, I_H^* y \rangle \quad \forall x, y \in H$$

2. Soit $\mathbb{C}^2$ est $\{e_1, e_2\}$ base authonormé

et $T = (a_{ij})$ est matrice, l' adjoint de l'opérateur T est $T^* = (\overline{a_{ji}})$

soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$a_{11}x_1\overline{y_1} + a_{12}x_2\overline{y_1} + a_{21}x_1\overline{y_2} + a_{22}x_2\overline{y_2} = \overline{b_{11}}\overline{y_1}x_1 + \overline{b_{12}}\overline{y_2}x_1 + \overline{b_{21}}\overline{y_1}x_2 + \overline{b_{22}}\overline{y_2}x_2$$

$$a_{11} = \overline{b_{11}}, a_{12} = \overline{b_{21}}, a_{21} = \overline{b_{12}} \quad \text{et} \quad a_{22} = \overline{b_{22}}.$$

donc $[b_{ij}] = [\overline{a_{ji}}]$.

3. On considère opérateur shift $S : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ défini par :

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Soit (x_n) et (y_n) dans $l^2(\mathbb{C})$: Alors

$$\begin{aligned} \langle S^*x_n, y_n \rangle &= \langle x_n, Sy_n \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, \dots), (0, y_1, y_2, \dots) \rangle \\ &= x_2\overline{y_1} + x_3\overline{y_2} + \dots \\ &= \langle (x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle \end{aligned}$$

Alors S^* est défini par :

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

Théorème 1.2.5 Soit $T, S \in B(H)$ T^*, S^* leurs adjoints (respectivement), alors on a les propriétés suivantes :

1. $(T^*)^* = T$.
2. $(T + S)^* = T^* + S^*$.
3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.
4. $\|T^*\| = \|T\|$.
5. $(TS)^* = S^*T^*$.

Preuve.

1. Soit $x, y \in H$.

$$\langle x, (T^*)^* y \rangle = \langle T^* x, y \rangle = \overline{\langle y, T^* x \rangle} = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \langle x, Ty \rangle.$$

d'où :

$$(T^*)^* = T.$$

2. Soit $x, y \in H$.

$$\langle x, (T + S)^* y \rangle = \langle (T + S)x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle + \langle Sx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle + \langle x, S^* y \rangle = \langle x, (T^* + S^*) y \rangle$$

d'où

$$(T + S)^* = T^* + S^*.$$

3. Soit $x, y \in H, \alpha \in \mathbb{C}$.

$$\langle \alpha Tx, y \rangle = \alpha \langle Tx, y \rangle = \alpha \langle x, T^* y \rangle = \langle x, \bar{\alpha} T^* y \rangle.$$

d'où

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*.$$

4. En combinant avec (1.8) :

$$\begin{aligned} \|T^*\|^* &\leq \|T\|^* \\ \Rightarrow \|T\| &\leq \|T^*\|. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Donc (1.8) et (1.9) $\Rightarrow \|T^*\| = \|T\|$

5. Soit $x, y \in H$

$$\langle TSx, y \rangle = \langle Sx, T^* y \rangle = \langle x, S^* T^* y \rangle.$$

d'où

$$(TS)^* = S^* T^*.$$

■

Corollaire 1.2.1 Pour $T \in B(H)$ on a :

1. $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$;
2. $T^*T = 0 \Leftrightarrow T = 0$.

Preuve.

1.

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

$$\|Tx\|^2 = |\langle Tx, Tx \rangle| = |\langle x, T^*Tx \rangle| \leq \|x\| \|T^*T\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2;$$

$$\|Tx\| \leq \|T^*T\|^{1/2} \|x\|;$$

passon

$$\|T\| \leq \|T^*T\|^{1/2};$$

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\|;$$

d'où $\|T^*T\| = \|T\|^2$. la deuxième égalité changer T par T^* .

2. on montre si $T^*T = 0$ alors $T = 0$

$$\|T^*T\| = 0 \Leftrightarrow \langle T^*Tx, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H$$

$$\Leftrightarrow \langle Tx, Tx \rangle = 0 \quad \forall x \in H$$

$$\Leftrightarrow Tx = 0 \quad \forall x \in H$$

Réciproquement, si $T = 0$ alors $TT^* = 0$

$$T = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \quad \forall x \in H$$

$$\langle Tx, Tx \rangle = 0 \quad \forall x \in H$$

$$\langle T^*Tx, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H$$

$$\Leftrightarrow T^*T = 0.$$

■

Théorème 1.2.6 Soit $T \in B(H)$; $\langle Tx, x \rangle = 0 \Rightarrow T \equiv 0 \quad \forall x \in H$.

Preuve. Comme

$$\langle T(x+y), x+y \rangle = 0$$

on voit que

$$\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle = 0 \quad (x, y \in H) \tag{1.10}$$

On remplace y par iy en (1.10), le résultat est

$$-i \langle Tx, y \rangle + i \langle Ty, x \rangle = 0 \tag{1.11}$$

Multiplions (1.11) par i et additionne à (1.10) on trouve :

$$\langle Tx, y \rangle = 0 \tag{1.12}$$

on pose

$$y = Tx$$

(1.12) donne $\|Tx\|^2 = 0$, alors

$$Tx = 0, \quad \forall x \in H$$

Donc

$$T = 0.$$

■

Théorème 1.2.7 Soit $T \in B(H)$, les assertions suivantes sont équivalents :

- (i) $T = 0$;
- (ii) $\langle Tx, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H$;
- (iii) $\langle Tx, y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in H$.

Théorème 1.2.8 Soit $T \in B(H)$, alors on a

- 1. $\ker T = (\operatorname{Im}(T^*))^\perp$.
- 2. $\overline{\operatorname{Im}(T)} = (\ker(T^*))^\perp$.

Preuve.

- 1. On a

$$\begin{aligned} \ker T &= \{x \in H \mid Tx = 0\} = \{x \in H \mid \forall y \in H, (Tx, y) = 0\} \\ &= \{x \in H \mid \forall y \in H, (x, T^*y) = 0\} = (\operatorname{Im}(T^*))^\perp. \end{aligned}$$

- 2. D'après le 1., on a

$$(\ker(T^*))^\perp = (\operatorname{Im}(T)^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Im}(T)},$$

d'où le résultat.

■

1.2.2 Quelques classes d'opérateurs

Soit T un opérateur dans $B(H)$, on dit que T est :

* **Positive** : si et seulement si $\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$ et on note $T > 0$.

Exemple 1.2.4 I_H l'opérateur identité et O_H : l'opérateur nul sont opérateurs positifs car : si $x \in H$ alors

$$\langle I_H, x \rangle = \langle x, x \rangle \geq 0;$$

$$\langle O_H, x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0.$$

* **Isométrie** : si et seulement si $T^*T = I_H$ (opérateur identité).

Exemple 1.2.5 L'opérateur de décalage S (ou shift) est un opérateur isométrie, car pour

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, \dots) &= (0, x_1, x_2, \dots) \\ S^*(x_1, x_2, \dots) &= (x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

On a :

$$S^*S(x_1, x_2, \dots) = S^*(0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$$

Alors, $S^*S = I_H$.

* **Unitaire** : si et seulement si $T^*T = TT^* = I_H$.

Exemple 1.2.6 Soit $H = L^2[0, 1]$ définissons un opérateur U sur H par

$$\begin{aligned} (U)[x(t)] &= x(1-t) \\ \langle Ux, x \rangle &= \langle x(1-t), x \rangle = \langle x, x \rangle = \langle x, (1-t)^{-1}x \rangle = \langle x, U^*x \rangle \end{aligned}$$

donc $UU^* = U^*U = I_H$ d'où, U est Unitaire.

* **Projection** : si et seulement si $T^2 = T$.

* **Projection orthogonale** : si et seulement si $T^2 = T = T^*$.

Exemple 1.2.7 Soit l'opérateur T défini par :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (x_1, 0, x_3) \end{aligned}$$

On peut vérifier que

$$T^*(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3)$$

Alors,

$$T(x_1, x_2, x_3) = T^*(x_1, x_2, x_3) = T^2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3)$$

donc T est une projection orthogonale.

* **Anti-hermitien** : si et seulement si $T^* = -T$.

Exemple 1.2.8 Soit H un espace de Hilbert, T est un opérateur tel que :

$$Tx = ix \quad , \quad \forall x \in H, \quad i \in \mathbb{C}$$

on a

$$\begin{aligned} \langle Tx, x \rangle &= \langle ix, x \rangle = i \langle x, x \rangle = \langle x, -ix \rangle = \langle x, T^*x \rangle \\ T^*x &= -ix = -Tx \end{aligned}$$

d'où $T^* = -T$, donc T est anti-hermitien.

* **Normal** : si et seulement si $T^*T = TT^*$.

Exemple 1.2.9

1. La multiplication T_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L^2([0, 1])$, car

$$T_\varphi : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1], \varphi \in \mathbf{C}([0, 1])$$

$$(T_\varphi f)(t) = \varphi(t)f(t)$$

On a

$$\langle T_\varphi f, g \rangle = \langle f, T_\varphi g \rangle, \forall f, g \in L^2([0, 1])$$

$$\langle \varphi(t)f(t), g(t) \rangle = \left\langle f(t), \overline{\varphi(t)}g(t) \right\rangle$$

donc

$$(T^* \varphi g)(t) = \overline{\varphi(t)}g(t)$$

d'où

$$T^* \varphi = T_{\overline{\varphi}}$$

Alors,

$$T_\varphi^* T_\varphi = T_{\overline{\varphi}} T_\varphi = T_\varphi T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi T_\varphi^*$$

Donc T_φ est un opérateur normal.

2. Soit l'opérateur shift

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

pour $(x_1, x_2, \dots) \in L^2(\mathbb{C})$ On a montré précédemment que $S^*S = I_H$, et

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

d'où

$$SS^*(x_1, x_2, \dots) = S(x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$$

Alors $S^*S \neq SS^*$, donc S n'est pas normal.

* **Hyponormal** : si et seulement si $T^*T - TT^* \geq 0$.

1.2.3 Opérateur auto-adjoint

Définition 1.2.7 Un opérateur T est dit auto-adjoint si $T = T^*$, i.e.

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in H. \quad (1.13)$$

Exemple 1.2.10 1. Considérons l'opérateur T défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$(Tx)(t) = e^{-|t|}x(t)$$

T est un opérateur borné auto-adjoint. En effet ,

$$\begin{aligned}\langle Ax, y \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} x(t) \overline{y(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{[e^{-|t|} y(t)]} dt \\ &= \langle x, Ay \rangle.\end{aligned}$$

2. L'opérateur identité I_H est un opérateur auto-adjoint car $I_H^* = I_H$

$$\langle I_H x, y \rangle = \langle x, I_H^* y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

3. Soit la matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ tel que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On remarque $A = A^*$ donc A est auto-adjoint.

Proposition 1.2.1 Soit $T \in B(H)$ alors T est auto-adjoint si et seulement si le produit scalaire $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$.

Preuve. Soit T est un opérateur auto-adjoint dans $B(H)$ (i.e : $T^* = T$) si T auto-adjoint alors $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$.

$$\begin{aligned}\langle Tx, x \rangle &= \langle x, T^* x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} \\ \Rightarrow \quad \langle Tx, x \rangle &\in \mathbb{R}, \forall x \in H.\end{aligned}$$

Réciproquement, si $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ alors T est auto-adjoint.
soit $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle T^* x, x \rangle$$

$\forall x \in H \quad T^* = T$. Donc T est auto-adjoint. ■

1.2.4 commutateur d'un opérateur

Définition 1.2.8 Soit $T \in B(H)$, on dit que $\{T\}'$ est l'ensemble des commutateurs de T (commutant de T) si $\{T\}'$ donné par $\{T\}' = \{S \in B(H) : TS = ST\}$.

propriétés :

1. $T \in \{S\}' \Leftrightarrow S \in \{T\}'$.
2. $\{T\}'' = \left\{ \{T\}' \right\}'$;
 $\{T\}'' = \left\{ R \in B(H) : R \in \{S\}', S \in \{T\}' \right\}$.
3. $\{T\}''$ est une sous algèbre commutative dans $B(H)$.
4. tout polynôme en T est appartenant à $\{T\}''$.

Théorème 1.2.9 Si $T \in B(H)$;

- (i) T est un opérateur auto-adjoint alors λT est un auto-adjoint $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- (ii) T_1, T_2 sont deux opérateurs auto-adjoints alors $T_1 + T_2$ est un auto-adjoint;
- (iii) T_1, T_2 sont deux opérateurs auto-adjoints et $T_1 \cdot T_2$ est auto-adjoint si et seulement si $T_1 \in \{T_2\}'$.

Preuve.

- (i) T est un opérateur auto-adjoint alors,
montrons que

$$(\lambda T)^* = \lambda T \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

on a $\forall x \in H$

$$\langle \lambda T x, x \rangle = \lambda \langle T x, x \rangle = \lambda \langle x, T^* x \rangle = \lambda \langle x, T x \rangle = \langle x, \lambda T x \rangle.$$

Donc λT est un auto-adjoint $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

- (ii) T_1, T_2 deux opérateurs auto-adjoints alors,
montrons que $T_1 + T_2$ est un auto-adjoint.

Alors on :

$$\langle (T_1 + T_2) x, x \rangle = \langle x, (T_1 + T_2)^* x \rangle = \langle x, (T_1^* + T_2^*) x \rangle = \langle x, (T_1 + T_2) x \rangle.$$

D'où $(T_1 + T_2) = (T_1 + T_2)^*$, donc $T_1 + T_2$ est un auto-adjoint.

- (iii) $T_1 \cdot T_2$ est un auto-adjoint si et seulement si $T_1 \in \{T_2\}'$
alors on a

$$(T_1 \cdot T_2)^* = T_1 \cdot T_2$$

$T_2^* \cdot T_1^* = T_2 \cdot T_1$, car T_1, T_2 sont deux opérateurs auto-adjoints.

Le résultat est : $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$.

■

Chapitre 2

Théorie spectrale des opérateurs

2.1 L'inverse d'un opérateur

Définition 2.1.1 Soit $T \in B(H)$ on dit que T est inversible s'il existe un opérateur $S \in B(H)$, qui vérifie

$$T.S = S.T = I_H \quad (2.1)$$

l'identité sur H . S sera dit l'inverse de T et on note $S = T^{-1}$.

Remarque 2.1.1

1. On peut utiliser l'inversibilité d'un opérateur T pour résoudre les problèmes : equation ou système. Soit l'equation : $AX = B$, où A et B sont deux opérateurs donnés et X inconnu, si A est inversible, alors :
l'equation $A^{-1}AX = A^{-1}B$ d'où $IX = A^{-1}B$ donc $X = A^{-1}B$
2. pour résoudre le système :

$$\begin{cases} a_1x + a_2y &= c_1 \\ b_1x + b_2y &= c_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

les a_i et b_i sont donnés et le couple (x, y) est inconnu.

le système (2.2) sera sous la forme $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

si on pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

alors $AX = C \Leftrightarrow$ si A inversible $\Rightarrow X = A^{-1} \cdot C$.

Exemple 2.1.1

1. L'opérateur I_H est inversible, et $I_H^{-1} = I_H$.
2. Soit $h \in \mathbb{C} [0, 1]$ soit $T_h \in B(L^2 [0, 1])$ défini par

$$(T_h)(t) = h(t)g(t)$$

si $f \in \mathbb{C}[0, 1]$ définit par $f(t) = 1 + t$ alors T_f est inversible.
 soit $k(t) = \frac{1}{1+t}$ alors $K \in \mathbb{C}[0, 1]$ et

$$(T_k T_f g)(t) = (T_k f g)(t) = k(t) f(t) g(t) = g(t),$$

pour tout $t \in [0, 1]$ alors $(T_k T_f)g = g \quad \forall g \in L^2[0, 1] \quad T_k T_f = I \quad T_f T_k = I$

alors T_f est inversible $T_f^{-1} = T_k$.

Lemme 2.1.1 Soit $T_1, T_2 \in B(H)$ si T_1 et T_2 sont inversibles alors

$$(T_1 T_2)^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}.$$

Lemme 2.1.2 Soit $T \in B(H)$ est inversible alors

$$\forall x \in H \quad \|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1} \|x\|.$$

Preuve. $\forall x \in H$ on a $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|$,
 alors

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|} \leq \|Tx\|$$

donc

$$\|T^{-1}\|^{-1} \|x\| \leq \|Tx\|.$$

■

Théorème 2.1.1 Un opérateur $T \in B(H)$ est inversible si et seulement si T^* est inversible, et alors on a

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Preuve. Si $T \in B(H)$ est inversible alors, on a T inversible $\Leftrightarrow T^{-1}T = TT^{-1} = I_H$,
 on passe à l'adjoint

$$(T^{-1})^* T^* = (TT^{-1})^* = I_H^* = I_H,$$

et

$$T^* (T^{-1})^* = (T^{-1})^* T^* = I_H$$

d'où $T^* \in B(H)$ est inversible et

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Réciproquement, si $T^* \in B(H)$ est inversible alors l'étape précédente montre que $(T^*)^* = T \in B(H)$ est inversible. ■

Théorème 2.1.2 Si $T \in B(H)$ tel que $\|T\| < 1$, alors $I_H - T$ est inversible, de plus

$$(I_H - T)^{-1} = \sum_{n \geq 0} T^n.$$

Preuve. Posons $U = I_H - T$. On a $T = I_H - U$. Comme $\|U\| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|U\|^n$ converge. Comme

$$\|U^n\| \leq \|U\|^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} U^n$ est absolument convergente. L'espace $B(H)$ étant complet, et soit la série : $V = \sum_{n=0}^{\infty} U^n$ converge dans $B(H)$.

On montre que

$$(I_H - U)V = V(I_H - U) = I_H \quad (2.3)$$

on remplace V par $\sum_{n=0}^{\infty} U^n$ en (2.3), le résultat est :

$$(I_H - U)V = (I_H - U) \sum_{n=0}^{\infty} U^n$$

on trouve

$$= \sum_{n=0}^{\infty} U^n - \sum_{n=0}^{\infty} U^{n+1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U^n \right) I_H - \left(\sum_{n=0}^{\infty} U^n \right) U \quad (2.4)$$

(2.4) donne $\sum_{n=0}^{\infty} U^n (I_H - U) = V(I_H - U)$, donc $T = I_H - U$ est inversible et $V = T^{-1}$. ■

Corollaire 2.1.1 Le groupe $GLB(H)$ des éléments inversibles de $B(H)$ est ouvert.

Preuve. Soit $T \in GLB(H)$ et soit $\eta = \|T^{-1}\|^{-1}$. $GLB(H)$ est ouvert : si $\|T - S\| < \eta$ alors $S \in GLB(H)$.

soit $\|T - S\| < \eta$ alors

$$\|(T - S)T^{-1}\| = \|I_H - ST^{-1}\| \leq \|T - S\| \|T\|^{-1} < \|T^{-1}\|^{-1} \|T^{-1}\| = 1.$$

d'où $I_H - (T - S)T^{-1}$ est inversible par théorème 2.1.2.

donc

$$I_H - (T - S)T^{-1} = I_H - (I_H - ST^{-1}) = ST^{-1}.$$

$S = ST^{-1}T$ est inversible par conséquent par Lemme 2.1.1. alors $S \in B(H)$.

■

Lemme 2.1.3 Soit $T \in B(H)$, si T est inférieurement borné alors son image $Im(T)$ est fermé.

Preuve. Soit $T \in B(H)$ tel que $\exists k > 0 \|Tx\| \geq k \|x\| ; \forall x \in H$.

soit $y_n \in Im(T)$ $y_n = Tx_n$ tel que $y_n \rightarrow y_0$.

$$\|y_m - y_n\| = \|Tx_m - Tx_n\| = \|T(x_m - x_n)\| \geq k \|x_m - x_n\|.$$

$\{y_n\}$ est de Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}$ l'est aussi.

$\{x_n\}$ est de Cauchy dans un Hilbert donc elle est convergente vers un $x_0 \in H$
on a

$$\begin{aligned}\|y_0 - Tx_0\| &= \|y_0 - Tx_n + Tx_n - Tx_0\| \leq \|Tx_n - y_0\| + \|Tx_n - Tx_0\| \\ &\leq \|y_n - y_0\| + \|T\| \|x_n - x_0\| \rightarrow 0_{n \rightarrow +\infty}\end{aligned}$$

donc $y_0 = Tx_0 \Rightarrow y_0 \in \text{Im}(T)$ donc $\text{Im}(T)$ est fermé. ($\overline{\text{Im}(T)} = \text{Im}(T)$). ■

Théorème 2.1.3 Soit $T \in B(H)$, H est Hilbert, T est inversible si et seulement si

(i) T est inférieurement borné; (i.e. $\exists \alpha > 0 \quad \|Tx\| \geq \alpha \|x\| \quad \forall x \in H$).

(ii) $\text{Im}(T)$ est dense dans H ($\overline{\text{Im}(T)} = H$).

Preuve.

On montre que T est inversible $\Rightarrow \overline{\text{Im}(T)} = H$,

soit $y \in H \Rightarrow \exists x \in H$ tel que : $x = T^{-1}y$ (i.e. $y = Tx$), alors $H = T = \text{Im}(T)$,

donc $\overline{\text{Im}(T)} = H$.

On montre que T est inversible $\Rightarrow T$ est inférieurement borné,

On a $x = T^{-1}Tx \Rightarrow \|x\| = \|T^{-1}Tx\|, \quad \forall x \in H$

alors $\|x\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|$

d'où $\frac{1}{\|T^{-1}\|} \|x\| \leq \|Tx\|$

$\Rightarrow \exists k > 0 \quad (k = \frac{1}{\|T^{-1}\|}) : \|Tx\| \geq k \|x\|, \forall x \in H$

Donc T est inférieurement borné.

Réciproquement, si T est inversible a lieu, on a $H = \text{Im}(T) \subset \overline{\text{Im}(T)} \subset H$.

Donc $\overline{\text{Im}(T)} = \text{Im}(T) = H$ ($\text{Im}(T)$ est fermé dans H), ce qui donne le résultat.

Si $Tx_1 = Tx_2$, alors

$$0 = \|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \geq k \|x_1 - x_2\| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Alors : $\forall y \in H$, il existe unique $x \in H$: $y = Tx$, il existe une transformation :

$$\begin{aligned}S : H &\rightarrow H \\ y &\rightarrow x; \\ Sy &= x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y\| &= \|Tx\| \geq c\|x\| > 0 \\ \|y\| \geq c\|Sy\| &\Rightarrow \|Sy\| \leq \frac{1}{c}\|y\|\end{aligned}$$

d'où

$$\|S\| \leq \frac{1}{c}$$

et $STx = Tx = y \quad \forall y \in H$ d'où, $TS = ST = I$ donc, T est inversible et son inverse S . ■

2.2 Spectre d'un opérateur

2.2.1 La valeur propre d'un opérateur

Définition 2.2.1 Soit $T \in B(H)$, le nombre complexe λ est dit valeur propre de T s'il existe un vecteur x dans H (s'appelle vecteur propre associé à λ) tel que

$$(T - \lambda I_H)x = 0, \quad Tx = \lambda x. \quad (2.5)$$

Remarque 2.2.1

1. x n'est pas unique car tout vecteur αx , $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ vérifie (2.5)

$$T(\alpha x) = \alpha Tx = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x)$$

αx est un vecteur propre associé aussi à λ .

2. pour un vecteur $x \neq 0$ fixe : λ est unique, en effet :

si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valeur propre associé à x

$$Tx = \lambda_1 x, Tx = \lambda_2 x \Rightarrow \lambda_1 x = \lambda_2 x$$

Donc, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Théorème 2.2.1 Pour $T \in B(H)$, H est un Hilbert si T est auto-adjoint, alors toutes les valeurs propres de T sont réelles.

Preuve. Soit T auto-adjoint dans $B(H)$ et λ une valeur propre de T (i.e. $Tx = \lambda x, x \neq 0$)

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

mais $x \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. ■

2.2.2 Résolvante et spectre d'un opérateur

Définition 2.2.2 Soit $T \in B(H)$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble résolvant de T si $T - \lambda I_H$ est une bijection de H dans H et que $(T - \lambda I_H)^{-1} \in B(H)$.

L'ensemble résolvant de T est noté $\rho(T)$. (i.e.)

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I_H \text{ inversible}\}$$

Définition 2.2.3 Soit $T \in B(H)$, on appelle spectre de T et on note $\sigma(T)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(T)$. le spectre de T est donc l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I_H$ non inversible, ceci équivalant à définir $\sigma(T)$ comme l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I_H$ n'est pas bijective. (i.e.)

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I_H \text{ non inversible}\};$$

Remarque 2.2.2

$$\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}$$

$$\sigma(T) \cap \rho(T) = \emptyset$$

Définition 2.2.4 On appelle spectre ponctuel de T l'ensemble des valeurs propres de T , noté $\sigma_p(T)$ tel que

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T), \quad T - \lambda I_H \text{ non injectif}\}.$$

Remarque 2.2.3 Lorsque H est dimension finie, alors $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. Mais si H est dimension infinie, on a $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Exemple 2.2.1 Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ défini par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

On a

$$\det(A - \lambda I_H) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 4)$$

$$\det(A - \lambda I_H) = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \quad \text{ou} \quad \lambda = -4$$

Alors,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{4, -4\}.$$

Définition 2.2.5 On appelle spectre continu de T et on note par $\sigma_c(T)$, l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \sigma(T), \quad T - \lambda I_H \text{ injectif} \quad \text{et} \quad \text{Im}(T - \lambda I_H) \neq \overline{\text{Im}(T - \lambda I_H)} = H \right\}.$$

Définition 2.2.6 On appelle spectre résiduel de T et on note par $\sigma_r(T)$, l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \sigma(T), \quad T - \lambda I_H \text{ injectif} \quad \text{et} \quad \overline{\text{Im}(T - \lambda I_H)} \neq H \right\}.$$

Définition 2.2.7 On appelle spectre approximatif de T et on note par $\sigma_{ap}(T)$, l'ensemble

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I_H \text{ n'est pas inférieurement borné}\}.$$

Remarque 2.2.4 Le spectre $\sigma(T)$ est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Exemple 2.2.2

1. Sur l'espace $H = L^2([0, 1])$, on considère l'opérateur de multiplication par x

$$T(f)(x) = xf(x),$$

on a $\|T\| = 1$ et donc

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \leq 1\}$$

Si λ est en dehors de l'intervalle $[0, 1]$, la fonction $x \mapsto (x - \lambda)^{-1}$ est borné sur l'intervalle $[0, 1]$ et l'opérateur T par cette fonction est borné, c'est l'inverse de $T - \lambda I_H$. Donc

$$\sigma(T) \subset [0, 1].$$

D'autre part, la relation $Tf - \lambda f = 0$ implique que f est nulle sauf éventuellement au point λ , l'opérateur T n'admet donc pas de valeur propre $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Enfin, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, l'opérateur $T - \lambda I_H$ n'est pas surjectif, puisque l'unique solution de l'équation $Tf - \lambda f = 1$ est la fonction $(x - \lambda)^{-1}$ qui n'appartient pas à $L^2([0, 1])$.

En conclusion

$$\sigma(T) = [0, 1] \quad \text{et} \quad \sigma_p(T) = \emptyset.$$

2. Considérons dans l'espace $l^2(\mathbb{C})$ l'opérateur shift défini par :

$$S : x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \longrightarrow S(x) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Cet opérateur n'a pas de valeurs propres.

Car l'opérateur S^{-1} est borné, mais il n'est défini dans $l^2(\mathbb{C})$ que sur le sous-espace $x_1 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$ est un point du spectre de cet opérateur.

3. Soit I_H est un opérateur identité, si $\mu \in \mathbb{C}$ alors

$$\sigma(\mu I_H) = \{\mu\}.$$

Si $\tau \in \mathbb{C}$ et τI_H n'est pas inversible alors $\tau = 0$.

$$\begin{aligned} \sigma(\mu I_H) &= \{\lambda \in \mathbb{C} / \mu I_H - \lambda I_H \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} / (\mu - \lambda) I_H \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\mu\}. \end{aligned}$$

Définition 2.2.8 On appelle application résolvante de T :

$$\begin{array}{ccc} R(., T) : \mathbb{C} & \rightarrow & B(H) \\ \lambda & \rightarrow & R(\lambda, T) = (\lambda I_H - T)^{-1} \end{array}$$

L'opérateur $(\lambda I_H - T)^{-1}$ est appelé la résolvante de T en λ .

Théorème 2.2.2 Soit $T \in B(H)$, l'application résolvante de T :
 $R(\lambda, T) = (\lambda I_H - T)^{-1}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}(\lambda, \mu \in \rho(T))$

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\mu, T)R(\lambda, T).$$

2. $R(., T)$ est une application analytique sur $\rho(T)$.

3. si $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|$; alors $\lambda \in \rho(T)$ et $R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$.

4. $\frac{d^n R}{d\lambda^n}(\lambda, T) = (-1)^n n! R^{n+1}(\lambda, T) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda \in \rho(T)$.

Preuve.

1.

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) - R(\mu, T) &= (\lambda I_H - T)^{-1} - (\mu I_H - T)^{-1} \\ &= (\lambda I_H - T)^{-1} [I_H - (\lambda I_H - T)(\mu I_H - T)^{-1}] \\ &= (\lambda I_H - T)^{-1} [(\mu I_H - T) - (\lambda I_H - T)] (\mu I_H - T)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T). \end{aligned}$$

2. Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$, $D(\lambda_0, \|R(\lambda, T)\|^{-1})$ est disque centre λ_0 et rayon r ; $r = \|R(\lambda_0, T)\|^{-1}$ alors $\lambda \in D$

On a :

$$\lambda I_H - T = [I_H - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T)] (\lambda_0 I_H - T)$$

On a :

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T)\| = |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0, T)\| < 1$$

car $|\lambda_0 - \lambda| < r$

donc d'après Théorème(2.1.2) $I_H - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T)$ est un inversible.

D'où l'inversible de $(\lambda I_H - T)$ car $(\lambda_0 I_H - T)$ est inversible.

Et on a :

$$R(\lambda, T) = (\lambda I_H - T)^{-1} = (\lambda_0 I_H - T)^{-1} [I_H - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T)]^{-1}$$

et la série

$$[I_H - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T)]^{-1} = \sum_{n \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^n;$$

est normalement convergente dans $B(H)$ (série de Newman), ce qui permet de définir l'opérateur $R(\lambda, T)$ par :

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) &= R(\lambda_0, T) \sum_{n \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, T)^{n+1} \end{aligned}$$

d'où $R(., T)$ est application analytique sur $\rho(T)$.

3. Si $|\lambda| > \|T\|$ alors $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda|} > \frac{\|T\|}{|\lambda|}$$

$\Rightarrow \|\lambda^{-1}T\| < 1$ d'après théorème 2.2. $I_H - \lambda^{-1}T$ est inversible, i.e. et on a

$$(I_H - \lambda^{-1}T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}T)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) &= (\lambda I_H - T)^{-1} = [\lambda(I_H - \lambda^{-1}T)]^{-1} = \lambda^{-1}(I_H - \lambda^{-1}T)^{-1}. \\ &= \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}. \end{aligned}$$

4. Par récurrence :

$$\begin{aligned} n=1 \quad \frac{dR}{d\lambda}(\lambda, T) &= \frac{d}{d\lambda}(\lambda I_H - T)^{-1} \\ &= -(\lambda I_H - T)^{-2} = -R(\lambda, T)^2 \end{aligned}$$

supposons que c'est vrai jusqu'à l'ordre k :

$$\frac{d^k R}{d\lambda^k}(\lambda, t) = (-1)^k k! R(\lambda, t)^{k+1}$$

et montre la relation pour $k+1$

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1} R}{d\lambda^{k+1}}(\lambda, t) &= \frac{d}{d\lambda} [(-1)^k k! (\lambda I_H - T)^{-k-1}] \\ &= (-1)^k k! (k+1) (\lambda I_H - T)^{-k-2} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! (\lambda I_H - T)^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! R(\lambda, T)^{k+2} \end{aligned}$$

d'où la relation de série.

■

Théorème 2.2.3 Soit $T \in B(H)$; l'ensemble $\rho(T)$ est un ouvert.

Preuve. Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$ alors $T - \lambda_0 I_H$ est inversible .

soit $\lambda \in \mathbb{C}$, On a :

$$\begin{aligned} T - \lambda I_H &= T - \lambda_0 I_H - (\lambda - \lambda_0) I_H \\ &= (T - \lambda_0 I_H) [I_H - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, T)] \end{aligned}$$

$T - \lambda_0 I$ est inversible, $T - \lambda I_H$ est inversible si $I_H - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, T)$ l'est.
(i.e. $\|(\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, T)\| < 1$)

autrement dit :

$$|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, T)\|^{-1}$$

donc si $\lambda_0 \in \rho(T)$ le disque $S_r(\lambda_0)$ du rayon $r = \|R(\lambda_0, T)\|^{-1}$ et de centre λ_0 est continue dans $\rho(T)$.

D'où $\rho(T)$ est ouvert. ■

Corollaire 2.2.1 Soit $T \in B(H)$, l'ensemble $\sigma(T)$ est un fermé.

Lemme 2.2.1 Soit $T \in B(H)$, λ valeur propre de T , alors $\lambda \in \sigma(T)$.

Preuve. Soit λ valeur propre de T alors $\exists x \neq 0$:

$$Tx = \lambda x \Leftrightarrow (T - \lambda I_H)x = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(T - \lambda I_H) \quad x \neq 0;$$

$\Leftrightarrow \ker(T - \lambda I_H) \neq \{0\}$ non injectif.

Donc $T - \lambda I_H$ est non inversible et alors $\lambda \in \sigma(T)$. ■

Théorème 2.2.4 Si $U \in B(H)$, alors on a :

1. U unitaire alors $\sigma(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$;
2. U auto-adjoint alors $\sigma(U) \subset \mathbb{R}$.

Preuve.

1. Soit U un opérateur unitaire si et seulement si $UU^* = U^*U = I_H$
soit $\lambda \in \sigma(U)$; $|\lambda| = 1$
soit

$$x, y \in H \quad \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, I_H y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

pour

$$x \in H : \quad \|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \|x\|^2$$

$$\|Ux\|^2 = \|x\|^2.$$

D'où U est isometrie .

$$\|U\| = \sup \{\|Ux\|\} = 1 \quad \text{alors} \quad \|U\| = 1.$$

$$\lambda \in \sigma(U); \quad \text{alors} : \quad |\lambda| \leq 1$$

d'autre part si $|\lambda| < 1$ alors

$$\|\lambda U^*\| \leq |\lambda| \|U^*\| < 1.$$

Car

$$\|U^*\| = \|U\| = 1.$$

Donc

$$\lambda I_H - U = -U(I_H - \lambda U^*)$$

car $U^*U = I$ alors d'après théorème(2.1.2) $I_H - \lambda U^*$ est inversible, et par conséquent $\lambda I_H - U$ l'est. alors $\lambda \notin \sigma(U)$ d'où la contradiction et donc

$$|\lambda| \geq 1 \quad (2.7)$$

de (2.7) et (2.6) on a : $|\lambda| = 1$.

2. Soit $U \in B(H)$ auto-adjoint ($U^* = U$); $\sigma(U) \subset \mathbb{R}$
i.e. $\lambda \in \sigma(U)$ alors $\lambda \in \mathbb{R}$. ($\lambda = \alpha + i\beta \Rightarrow \beta = 0$).

$\|(U - \lambda I_H)x\|^2 = \langle (U - \lambda I_H)x, (U - \lambda I_H)x \rangle$
 $= \langle (U - \alpha)x - i\beta x, (U - \alpha)x - i\beta x \rangle = \|(U - \alpha)x\|^2 + \|\beta x\|^2 - i\beta \langle x, (U - \alpha)x \rangle + i\beta \langle (U - \alpha)x, x \rangle$
Or $U^* = U$ alors $(U - \alpha)^* = U^* - \alpha = U - \alpha$.
Donc

$$\|(U - \lambda I_H)x\|^2 = \|(U - \alpha)x\|^2 + \|\beta x\|^2 - i\beta \langle x, (U - \alpha)x \rangle + i\beta \langle (U - \alpha)x, x \rangle.$$

D'où

$$\|(U - \lambda I_H)x\|^2 = \|(U - \alpha)x\|^2 + \beta \|x\|^2$$

alors $\|(U - \lambda I_H)x\|^2 > \beta \|x\|^2$.

Donc

$$\|(U - \lambda I_H)x\| > \beta \|x\|$$

si $\beta \neq 0$ alors $U - \lambda I_H$ est inférieurement borné donc inversible.

alors $\lambda \notin \sigma(U)$ d'où la contradiction, donc $\beta = 0$; alors $\lambda \in \mathbb{R}$ $\sigma(U) \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.2.9 Soit $T \in B(H)$, On appelle rayon spectral de T , et on note $r(T)$, la quantité

$$r(T) = \sup \{ |\lambda| ; \lambda \in \sigma(T) \}.$$

Exemple 2.2.3 Sur l'espace $H = L^2([0, 1])$, on considère l'opérateur de multiplication par x

$$T(f)(x) = xf(x),$$

on a $\|T\| = 1$ et donc

$$\sigma(T) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \leq 1 \}$$

alors, $\sigma(T) = [0, 1]$, donc $r(T) = 1$.

Chapitre 3

Spectre étendu

Dans ce chapitre, on définit le spectre étendu d'un opérateur et consacrée à développer les relations entre le spectre étendu et d'autre spectre. Le spectre étendu utilise dans but de donner des critères d'hypercyclicité du même type que celui de Godefroy-Shapiro.

3.1 Préliminaires

Définition 3.1.1 Soit H est espace de Hilbert et X un sous-ensemble de H . Un vecteur $T \in H$ s'appelle cyclique pour tout X si l'ensemble $\{AT; A \in X\}$ est dense de H , c-à-d, si $\overline{\{AT; A \in X\}} = H$.

Définition 3.1.2 Soit $T \in B(X)$. On rappelle qu'un opérateur T est hypercyclique s'il existe x dans X , tel que $\text{Orb}(T, x) = \{T^n x, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X . Le vecteur x sera alors un vecteur hypercyclique pour T .

On remarque qu'un opérateur $T \in B(X)$ n'a pas de sous-ensemble invariant si tout les vecteurs de X sont hypercyclique pour T .

Définition 3.1.3 Soit $T \in B(X)$. On dit que un opérateur T est sypercyclique s'il existe x dans X , tel que $\{\mu T^n x, n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{C}\}$ est dense dans X .

Définition 3.1.4 Soit $T \in B(X)$.

On dit que un opérateur T est Ω -hypercyclique s'il existe x dans X , tel que $\{F_n^\Omega(T)nx, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X . Le vecteur x sera dit Ω -hypercyclique pour T .

Définition 3.1.5 Soit $T \in B(H)$. On appelle de T et on note $|T|$ l'unique $S \in B(H)$ tel que $S = TT^*$, l'est à dire que $|T| = \sqrt{T^*T}$

Théorème 3.1.1 (Godefroy-Shapiro)

Soit $T \in B(T)$. On définit

$$H_-(T) = \text{span}\{x; \exists \lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1, Tx = \lambda x\},$$

et

$$H_+(T) = \text{span}\{x; \exists \lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > 1, Tx = \lambda x\},$$

si $H_-(T)$ et $H_+(T)$ sont denses dans X , T est hypercyclique. On rappelle qu'un opérateur T est hypercyclique s'il existe x dans X tel que $\text{Orb}(T, x) = \{T^n x, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X . le vecteur x sera alors un vecteur hypercyclique pour T . On remarque qu'un opérateur $T \in B(X)$ n'a pas de sous-ensemble invariant si tout les vecteur de X sont hypercyclique pour T .

Lemme 3.1.1 Soit $T \in B(X)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. T est hypercyclique.
2. T a un G_δ dense de vecteurs hypercycliques.
3. Pour U, V ouverts non vides de X , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n(U) \cap V$ est non vide.

Preuve. Si x est un vecteur hypercyclique pour T , tous les éléments de l'orbite de T sont hypercycliques et donc les vecteurs hypercycliques de T sont denses dans X . Soient $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts de X et $hc(T)$ l'ensemble des vecteurs hypercycliques de T . On remarque que

$$hc(T) = \bigcap_m \bigcup_n T^{-n}(B_m).$$

Posons $G_m = \bigcup_n T^{-n}(B_m)$. La continuité de T nous dit que les G_m sont ouverts et donc, si $hc(T)$ est non vide, $hc(T)$ est un G_δ dense. On a donc (1) $\Leftrightarrow$ (2). Pour la suite, la condition (3) est équivalente à G_m dense, c'est à dire à $hc(T)$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses. Donc le Théorème de Baire et la condition (3) nous donne (2) et dans, chaque G_m doit être dense et (3) est vraie. ■

Définition 3.1.6 Pour $T \in B(T)$, on définit $H_-(T)$ et $H_+(T)$ comme étant les espaces vectoriels engendrés par les noyaux $\text{Ker}(T - \lambda I)$ pour les λ de module respectivement strictement inférieur à 1 et strictement supérieur à 1.

Théorème 3.1.2 Soit $T \in B(X)$. Si $H_+(T)$ et $H_-(T)$ sont denses dans X , alors T est hypercyclique.

Soient U, V deux ouverts non-vide de X , v_+ un vecteur appartenant à $H_+(T) \cap V$ et u_- un vecteur appartenant à $H_-(T) \cap U$. On peut écrire $v_+ = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$ avec $T v_i = \lambda v_i$ où $|\lambda_i| > 1$. On a alors de façon évidente

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^{-n} v_i + u_- \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} u_-.$$

$$T^n \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^{-n} v_i + u_- \right) \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} v_+.$$

Donc pour n assez grand, $T^n(\sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^{-n} v_i + u_-) \in T^n(U) \cap V$. Le lemme précédent nous donne alors le résultat.

3.2 Spectre étendu d'un opérateur

Définition 3.2.1 On définit le spectre étendu de $T \in B(X)$ par :

$$EE(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists R \in B(X), R \neq 0, TR = \lambda RT\}.$$

Si on a l'équation $TR = \lambda RT$, l'opérateur R sera appelé opérateur propre de T associé à la valeur propre étendue λ . On dira aussi que $T\lambda$ -commute avec R .

On remarquons que le spectre étendu d'un opérateur apparaît dans quelques problème de physique mathématique. Pour justifier la terminologie spectrale, on donne quelques liens entre le spectre étendu d'un opérateur et d'autres spectres. Le Théorème de Rosenblum [16] nous donne une relation entre le spectre étendu d'un opérateur et son spectre :

$$EE(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}.$$

Exemple 3.2.1

1. Soit V est l'opérateur de volterra sur $L^2[0, 1]$ définit par :

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt, \text{ alors } \sigma(V) = \{0\}, \text{ donc}$$

$$EE(V) =]0, \infty[.$$

2. On considère opérateur shift $S : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ défini par :

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Donc $EE(T) = \mathbb{C}$.

3.2.1 Relation entre le spectre ponctuel d'un opérateur et son spectre étendu

La proposition suivante donne un lien entre le spectre étendu et le spectre ponctuel d'un opérateur.

Lemme 3.2.1 Soit $T \in B(X)$. Alors on a

$$\left\{ \frac{\alpha}{\beta}; \alpha \in \sigma_p(T), \beta \in \sigma_p(T^*) - \{0\} \right\} \subset EE(T).$$

On remarque que si T agit sur un espace de dimension finie, ces deux ensembles sont égaux (voir [5]).

Preuve. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $x_0 \in X - \{0\}$ et $y_0^* \in X^* - \{0\}$ tels que $Tx_0 = \alpha x_0$ et $T^*y_0^* = \beta y_0^*$. On définit l'opérateur R sur X par $Rx = \langle x, y_0^* \rangle x_0$, pour tout $x \in X$. On a alors

$$TRx = \langle x, y_0^* \rangle Tx_0 = \alpha \langle x, y_0^* \rangle x_0,$$

et

$$\frac{\alpha}{\beta}RTx = \frac{\alpha}{\beta}\langle Tx, y_0^* \rangle x_0 = \frac{\alpha}{\beta}\langle x, T^*y_0^* \rangle x_0 = \alpha\langle x, y_0^* \rangle x_0.$$

Ainsi on obtient $TR = \frac{\alpha}{\beta}RT$ et $\frac{\alpha}{\beta}$ est bien contenu dans $EE(T)$. ■

On voit donc que si 1 est dans le spectre ponctuel de T^* , le spectre ponctuel de T est inclus dans son spectre étendu. Mais ce n'est pas le cas en général. En effet si on prend $T = \lambda I$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, on a alors $\sigma_p(T) = \{\lambda\}$ mais $EE(T) = \{1\}$.

3.2.2 Relation entre le spectre approximatif d'un opérateur et son spectre étendu

Voici une relation entre le spectre d'un opérateur et le spectre d'une extension de cet opérateur.

Définition 3.2.2 Soit $T \in B(X)$. Une extension $(\tilde{X}, \tilde{T})$ de (X, T) consiste en un espace de Banach $\tilde{X}$ dans lequel X est inclus grâce à une isométrie i et un opérateur borné $\tilde{T}$ sur $\tilde{X}$ tel que $\tilde{T} \circ i = i \circ T$.

Lemme 3.2.2 Soient $T \in B(X)$ et $(\tilde{X}, \tilde{T})$ une extension de (X, T) . Alors pour tout $\lambda \in EE(T)$,

$$\lambda\sigma(T) \cap \sigma(\tilde{T}) \neq \emptyset.$$

Preuve. Si on a $TR = \lambda RT$ et $\tilde{T} \circ i = i \circ T$ avec i injectif, alors on a

$$\tilde{T} \circ iR = i \circ TR = \lambda iRT,$$

avec $iR \neq 0$. Un théorème de Rosenblum [16] nous donne alors le résultat. ■

Corollaire 3.2.1 Soit $T \in B(X)$. Pour tout $\lambda \in EE(T)$, on a

$$\lambda\sigma(T) \cap \sigma_{ap}(T) \neq \emptyset.$$

3.2.3 Le comportement du spectre d'un opérateur au voisinage de 0

S'il existe un opérateur propre à image dense ou injectif associé à une valeur propre de module différent de 1, on obtient une sorte de rigidité sur le spectre.

Théorème 3.2.1 Soit $T \in B(X)$. Si $TR = \lambda RT$ avec $|\lambda| \neq 1$, $\sigma(T) \neq \{0\}$ et R injectif ou à image dense, alors $0 \in \sigma(T)$ et 0 n'est pas un point isolé de $\sigma(T)$.

Preuve. On peut supposer qu'on a $TR = \lambda RT$ avec $|\lambda| \neq 1$ et R à image dense. Si T était inversible, R serait nilpotent et donc ne serait pas à image dense. Donc $0 \in \sigma(T)$. Si 0 est isolé dans $\sigma(T)$, d'après [13], $X = K(T) \oplus H_0(T)$ où

$$K(T) = \{x \in X, \exists (x_n)_{n \geq 0}, \exists c > 0; x = x_0, x_n = Tx_{n+1} \text{ et } \|x_n\| \leq c^n \|x\|, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

et

$$H_0(T) = \{x \in X, \lim_n \rightarrow \infty \|T^n x\|^{1/n} = 0\}.$$

Montrons que R laisse invariant ces deux sous-espaces.

Soit $x \in K(T)$. Il existe donc une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $x = x_0, Tx_{n+1} = x_n$ et il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n\| \leq c^n \|x\|.$$

On définit $x'_n = \lambda^{-n} Rx_n$. On a alors $x'_0 = Rx$, $x'_n = Tx'_{n+1}$ et il existe une constante $c' > 0$ telle que $\|x'_n\| \leq c' \|Rx\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc on trouve $R(K(T)) \subset K(T)$. Soit $x \in H_0(T)$. Alors pour tout $\mu \neq 0$, $\sum_{n \geq 0} \mu^{-n} \|T^n x\|$ converge. Ainsi pour tout $\mu \neq 0$,

$$\sum_{n \geq 0} \mu^{-n} |\lambda|^n \|RT^n x\|$$

converge, ce qui revient à dire que pour tout $\mu \neq 0$, $\sum_{n \geq 0} \mu^{-n} \|T^n Rx\|$ converge, et Rx est dans $H_0(T)$. On obtient donc $R(H_0(T)) \subset H_0(T)$. Donc dans $X = K(T) \oplus H_0(T)$, on peut décomposer T en $T_1 \oplus T_2$ et R en $R_1 \oplus R_2$. L'équation $TR = \lambda RT$ implique alors que $T_1 R_1 = \lambda R_1 T_1$ et $T_2 R_2 = \lambda R_2 T_2$.

Mais T_1 est inversible et $|\lambda| \neq 1$. En utilisant [12], on obtient que R_1 est nilpotent et R ne peut pas être à image dense.

Cela nous donne une contradiction et donc 0 n'est pas isolé dans $\sigma(T)$. ■

On rappelle que $T \in B(X)$ est une transformée quasi-affine de $S \in (BX)$ s'il existe un opérateur $R \in B(X)$ injectif et à image dense tel que

$$TR = RS.$$

On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.2 Soit $T \in (BX)$. Si $\sigma(T) \neq \{0\}$ et s'il existe λ de module différent de 1 tel que T est une transformée quasi-affine de λT , alors 0 est dans $\sigma(T)$ et 0 n'est pas un point isolé de $\sigma(T)$.

On dit que λ est un point de Riesz de $\sigma(T)$ s'il est un point isolé de $\sigma(T)$ et si l'espace de Riesz associé à λ est de dimension finie.

Corollaire 3.2.3 Soit $T \in B(H)$. Si 0 est un point de Riesz de $\sigma(T)$, $EE(T) = \mathbb{C}$.

Preuve. En reprenant les notations du Théorème (3.2.1), si 0 est isolé dans $\sigma(T)$ alors dans $H_0(T) \oplus K(T)$, T peut se décomposer en $T_1 \oplus T_2$. $H_0(T)$ est un espace de dimension finie. Ainsi, T_1 est un opérateur non inversible sur un espace de dimension finie. D'après [5], $EE(T_1) = \mathbb{C}$. Cela implique que $EE(T) = \mathbb{C}$. ■

Théorème 3.2.2 Si $T \in B(X)$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $R \in B(X)$ à image dense tels que $TR = \lambda RT$.

1. Si T à puissances bornées et non-stable alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément de $\sigma(T)$ sur le cercle $C(0, \frac{1}{|\lambda|^n})$.

2. Si $\sigma(T)$ a un point isolé μ , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\mu}{\lambda^n} \in \sigma(T).$$

De plus, λ ne peut pas appartenir á un certain ouvert contenant 1.

Corollaire 3.2.4 soit $T \in B(X)$ á puissances bornées et $C_{1,\cdot}$. Alors pour tout λ dans $EE(T)$,

$$\lambda\sigma(T) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset.$$

Corollaire 3.2.5 Soit $T \in B(X)$ á puissances bornées et $C_{*,\cdot}$. Soit $\lambda \in EE(T)$. Alors, $\lambda\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, λ , n'admet pas d'opérateur prope assoicé à image dense.

3.2.4 Le comportement du spectre périphérique d'un opérateur

On donne quelques liens entre le comportement du spectre périphérique Γ d'un opérateur et son spectre étendu.

Proposition 3.2.1 Soit $T \in B(X)$. Si $TR = \lambda RT$ avec $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$, R á image dense et T á puissances bornées, alors

$$\Gamma(T) \subset \{1\} \Rightarrow T^n \rightarrow 0 \text{ fortement.}$$

Preuve. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $y \in X$ tel que

$$\|x - Ry\| \leq \varepsilon.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|T^n x\| |1 - \lambda| &= \|T^n x - \lambda T^n x\| \\ &\leq \|T^n x - T^{n+1} x\| + \|T^{n+1} x - \lambda T^n x\| \\ &\leq \|T^n x - T^{n+1} x\| \|x\| + \|(\frac{T}{\lambda})^{n+1} x - (\frac{T}{\lambda})^n x\| \\ &\leq \|T^n x - T^{n+1} x\| \|x\| + \|((\frac{T}{\lambda})^{n+1} - (\frac{T}{\lambda})^n)(x - Ry)\| \\ &\quad + \|((\frac{T}{\lambda})^{n+1} - (\frac{T}{\lambda})^n) Ry\| \\ &\leq \|T^n - T^{n+1}\| \|x\| + 2 \sup \|T^n\| \varepsilon + \|R(T^n - T^{n+1})y\| \\ &\leq \|T^n - T^{n+1}\| \|x\| + 2 \sup \|T^n\| \varepsilon + \|R\| \|T^n - T^{n+1}\| \|y\|. \end{aligned}$$

Or d'après le Théorème de Katznelson-Tzafriri [11], $\Gamma(T) \subset \{1\}$ implique que $\|T^n - T^{n+1}\|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Le dernier terme de l'inégalité précédente tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc T est stable.

■

Proposition 3.2.2 Soit $T \in B(X)$. Si $TR = \lambda RT$ avec $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$, R surjectif et T à puissances bornées, alors $\Gamma(T)$ ne peut pas être l'ensemble des zéros d'une fonction $g(z) = \sum a_n z^n$ qui est de synthèse spectrale par rapport à $\Gamma(T)$ sauf si $\Gamma(T)$ est invariant par rotation.

Preuve. On suppose que $\Gamma(T)$ est l'ensemble des zéros d'une fonction $g(z) = \sum a_n z^n$ qui est de synthèse spectrale par rapport à $\Gamma(T)$. On a d'après

$$\|g(T)T^n\| \rightarrow 0.$$

D'après le Théorème de l'application ouverte, il existe $c > 0$ tel que quelque soit $x \in X$, il existe $y \in X$ tel que $x = Ry$ et $\|y\| \leq c\|x\|$. On a lors

$$\begin{aligned} \|g(\frac{T}{\lambda})(\frac{T}{\lambda})^n x\| &= \|\sum a_m (\frac{T}{\lambda})^m (\frac{T}{\lambda})^n Ry\| \\ &= \|R \sum a_m T^m T^n y\| \\ &\leq \|R\| \|g(T)T^n\| c\|x\|. \end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{T}{\lambda}) &\subset \{g = 0\} = \Gamma(T). \\ \|g(\frac{T}{\lambda})\frac{T^n}{\lambda}\| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Cela implique

$$\Gamma(\frac{T}{\lambda}) \subset \{g = 0\} = \Gamma(T).$$

Donc on a $\frac{\Gamma(T)}{\lambda} = \Gamma(T)$ et $\Gamma(T)$ est invariant par rotation ■

Remarque 3.2.1 La proposition précédente montre que si T a un opérateur propre surjectif associé à une valeur propre étendue de module 1 et différente de 1, alors le spectre périphérique de T est soit invariant par rotation, soit vide, soit a un cardinal infini. En effet, si $\Gamma(T)$ est de cardinal fini et non-invariant par translation, alors la fonction $g(z) = \prod_{\mu \in \Gamma}(z - \mu)$ est de synthèse spectrale par rapport à Γ . Cela contredit la proposition précédente.

Chapitre 4

Quelques cas où les solutions de l'équation $TR = \lambda RT$ sont des opérateurs nilpotents

On rappelle le résultat de Lambert.

Théorème 4.0.3 *Si $T \in B(X)$ est inversible, alors tout opérateur propre associé à une valeur propre étendue de module $\neq 1$ est nilpotent. De plus, $EE(T)$ est inclus dans un anneau.*

Voici quelques classes d'opérateurs dont le comportement du spectre étendu est similaire.

4.1 Opérateurs super-expansifs

Définition 4.1.1 *On dit que $T \in B(X)$ est super-expansif si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x, x_0, \dots, x_{n-1} \in X$, l'égalité*

$$T^n x = x_0 + Tx_1 + \dots + T^{n-1}x_{n-1},$$

implique toujours que

$$\|x\| \leq \|x_0\| + \|x_1\| + \dots + \|x_{n-1}\|.$$

Théorème 4.1.1 *Soit $T \in B(X)$ super-expansif. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$EE(T) \subset \mathbb{C} - D(0, \varepsilon).$$

En particulier, tout opérateur propre associé à une valeur propre étendue de module strictement plus petit que 1 est nilpotent.

Preuve. *On reprend une construction de [2]*

La relation d'équivalence : On pose $X_0 = X$

times $\mathbb{Z}$ et en définit $(x, t) \sim (y, s)$ s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $s + m$ et $t + m$ sont dans $\mathbb{N}$ et

$$T^{s+m}x = T^{t+m}y.$$

On pose $X_1 = X_0 / \sim$ et classe contenant (x, t) sera notée $[x, t]$. Chaque classe contient un élément (x, t) avec $t \in \mathbb{N}$.

Les opérations : On définit pour tout $x, y \in X, t, s \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$,

$$[x, t] + [y, s] = [T^s x + T^t y, s + t],$$

$$\alpha[x, t] = [\alpha x, t].$$

Avec ces opérations, X_1 devient un espace vectoriel.

La norme : On définit pour tout $x \in X$ et $t \in \mathbb{N}$,

$$\|[x, t]\| = \inf \left\{ \sum_{i=0}^n \|x_i\|; n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n [x_i, i] = [x, t] \right\}.$$

On vérifie comme dans [2] que c'est une norme. Les opérateurs : On définit

$$\Pi : x \rightarrow [x, 0],$$

l'inclusion (injective) de X dans X_1 et l'opérateur inversible sur X_1

$$S[x, t] = [x, t - 1].$$

Ces opérateurs sont bien définis (voir [2]) et

$$S\Pi = \Pi T.$$

On complète X_1 en un espace de Banach Y .

Supposons qu'on ait $TR = \lambda RT$ avec $|\lambda| < 1$ et $R \neq 0$. On définit pour tout $x \in X$ et $t \in \mathbb{N}$

$$R'[x, t] = [\lambda^t R x, t].$$

R' bien défini : Si on a $[x, t] = [y, s]$ pour $x, y \in X$ et $t, s \in \mathbb{N}$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m + t$ et $m + s$ sont dans $\mathbb{N}$ et

$$T^{m+s} x = T^{m+t} y.$$

On a donc

$$RT^{m+s} x = RT^{m+t} y \Rightarrow \frac{1}{\lambda^{m+s}} T^{m+s} R x = \frac{1}{\lambda^{m+t}} T^{m+t} R y,$$

$$\Rightarrow T^{m+s} \lambda^t R x = T^{m+t} \lambda^s R y,$$

$$\Rightarrow [\lambda^t R x, t] = [\lambda^s R y, s].$$

R' est donc bien défini.

R' est linéaire : Soient $x, y \in X$ et $t, s \in \mathbb{N}$, on vérifie seulement que $R'([x, t] +$

$$[y, s]) = R'[x, t] + R'[y, s] :$$

$$\begin{aligned} R'([x, t] + [y, s]) &= R'[T^s x + T^t y, s + t] \\ &= [\lambda^{s+t} R T^s x + \lambda^{s+t} R T^t y, s + t] \\ &= [\lambda^t T^s R x + \lambda^s T^t R y, s + t] \\ &= [\lambda^t R x, t] + [\lambda^s R y, s] \\ &= R'[x, t] + R'[y, s] \end{aligned}$$

R' est borné : Soit $x \in X$ et $t \in \mathbb{N}$, si on a

$$[x, t] = \sum_{i=0}^n [x_i, i],$$

alors on a

$$R'[x, t] = \sum_{i=0}^n R'[x_i, i] = \sum_{i=0}^n [\lambda^i R x_i, i].$$

Ainsi par définition de la norme, on a trouve

$$\begin{aligned} |R'[x, t]| &\leq \sum_{i=0}^n \|\lambda^i R x_i\| \\ &\leq \|R\| |x, t|, \end{aligned}$$

car $|\lambda| < 1$. R' est donc bien borné.

$\lambda \in EE(S)$: On a

$$SR'[x, t] = S[\lambda^t R x, t] = [\lambda^t R x, t - 1]$$

et

$$\lambda R' S[x, t] = \lambda R'[x, t - 1] = \lambda [\lambda^{t-1} R x, t - 1] = [\lambda^t R x, t - 1].$$

Ainsi, $SR' = \lambda R' S$ et λ est dans spectre étendu de S .

S étant inversible, nous dit que le spectre étendu de S est contenu dans un anneau. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $EE(T) \subset \mathbb{C} - D(0, \varepsilon)$.

Si R n'était pas nilpotent, on aurait $TR^n = \lambda^n R^n T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $R^n \neq 0$ et donc $\lambda^n \in EE(T)$. Le fait pouvoir prendre $|\lambda^n|$ aussi petit qu'on veut est une contradiction avec le fait que $EE(T) \subset \mathbb{C} - D(0, \varepsilon)$. Donc R est nilpotent. ■

4.2 L'opérateur hypercyclicité, supercyclicité et Ω -hypercyclicité

Proposition 4.2.1 *Si T est hypercyclique sur X , alors*

$$EE(T) \subset \overline{D(0, r(T))}.$$

Preuve. Supposons que λ soit dans $EE(T)$. Il existe donc un opérateur R dans X non nul tel que $TR = \lambda RT$. Supposons $\lambda \neq 0$, cela implique que

$$RT^n = \frac{1}{\lambda^n} T^n R,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a

$$R(\text{orb}(T, x)) = \text{orb}\left(\frac{1}{\lambda}T, Rx\right).$$

Si on prend pour x un vecteur hypercyclique de T , l'ensemble de gauche de la dernière égalité est dense dans l'image de R et est donc non-borné. Par contre si choisit $\frac{\|T\|}{|\lambda|} \leq 1$, c'est à dire

$$\|T\| \leq |\lambda|,$$

l'ensemble de droite est alors borné par $\|R\|\|x\|$. Ainsi, si T est hypercyclique et si $\lambda \in EE(T)$, $|\lambda| < \|T\|$.

Or d'après un résultat d'Ansari, T^n est aussi hypercyclique. La première partie de la preuve et les équations $T^n R = \lambda^n R T^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous donnent $|\lambda^n| < \|T^n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient le résultat en passant à la limite. ■

Corollaire 4.2.1 *Si T est hypercyclique sur X , tout opérateur propre associé à une valeur propre de module strictement supérieur à 1 est nilpotent.*

Proposition 4.2.2 *Soit $T \in B(H)$ supercyclique tel que $\sigma_p(T^*) = \{\alpha\}$. Alors tout opérateur propre associé à une valeur propre de module strictement plus grand que 1 est nilpotent.*

Preuve. Soit T un opérateur supercyclique sur H tel que $\sigma_p(T^*) = \{\alpha\}$, et soit $\lambda \in EE(T)$ et $R \in B(X)$ tels que $TR = \lambda RT$. Supposons que $|\lambda| > 1$.

Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\lambda^n| > \frac{\|T\|}{|\alpha|}$. On va alors montrer que $R^{3n} = 0$.

Comme $\sigma_p(T^*) = \{\alpha\}$, T se décompose en $T' \oplus \alpha I_{\mathbb{C}}$ dans une décomposition de la forme $H' \oplus \mathbb{C}$. De plus, T est supercyclique si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\frac{T'}{\alpha}$ est hypercyclique.

Regardons maintenant ce que nous donne l'équation $TR = \lambda RT$. On pose dans

$H' \oplus \mathbb{C}$, $R^n = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & aI \end{pmatrix}$. On a alors

$$\lambda^n R^n T = \lambda^n \begin{pmatrix} R_1 T' & \alpha R_2 \\ R_3 T' & a\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^n R = \begin{pmatrix} T' R_1 & T' R_2 \\ \alpha R_3 & \alpha a \end{pmatrix}.$$

On a donc $a = 0$ et $T'R_1 = \lambda^n R_1 T'$.

Supposons que R_1 soit nul. R^n s'écrit alors $\begin{pmatrix} 0 & R_2 \\ R_3 & 0 \end{pmatrix}$; mais les équations $T'R_2 = \lambda^n \alpha R_2$ et $\lambda^n R_3 T' = \alpha R_3$ nous donnent

$$\alpha \lambda^{2n} R_3 R_2 = R_3 R_2.$$

On trouve alors $R_3 R_2 = 0$ et $R^{3n} = 0$.

Supposons maintenant que $R_1 \neq 0$, on obtient alors l'équation

$$\frac{T'}{\alpha} R_1 = \lambda^n R_1 \frac{T'}{\alpha}$$

avec R_1 non-nul et $\frac{T'}{\alpha}$ hypercyclique. D'après le théorème précédent, on a

$$|\lambda^n| \leq \frac{\|T'\|}{|\alpha|}.$$

Cela nous donne une contradiction avec les hypothèses. Ainsi R_1 est nul et $R^3 n = 0$.

A chaque ouvert connexe Ω non vide ayant une fermeture compacte et une frontière rectifiable, on peut associer les polyômes de Faber $\{F_n^\Omega, n \in \mathbb{N}\}$ (voir [1]). On dit que $T \in B(X)$ est Ω -hypercyclique s'il existe x tel que $\{F_n^\Omega(T)x, n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans X . Le vecteur x sera dit Ω -hypercyclique pour T . ■

Proposition 4.2.3 Soit $T \in B(X)$ et $\lambda \in EE(T)$. Alors quelque soit Ω ouvert connexe non vide ayant une fermeture compacte et une frontière rectifiable tel que

$$\sigma\left(\frac{T}{\lambda}\right) \subset \Omega$$

T n'est pas Ω -hypercyclique.

Preuve. Si on a l'équation $TR = \lambda RT$, alors on a

$$\frac{\Omega}{n} \left(\frac{T}{\lambda}\right) R = R \frac{\Omega}{n}(T),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après [1], $\sigma\left(\frac{T}{\lambda}\right) \subset \Omega$ implique qu'on a pour tout $x \in X$, $x^* \in X^*$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle x^*, F_n^\Omega\left(\frac{T}{\lambda}\right) Rx \rangle = \langle x^*, R F_n^\Omega(T) \rangle \rightarrow 0.$$

Supposons qu'on peut choisir x Ω -hypercyclique pour T et prenons $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $y \in X$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|F_n^\Omega(T)x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|x^*\|\|R\|}$$

et

$$|\langle x^*, R F_n^\Omega(T)x \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|\langle x^*, Ry \rangle| &\leq |\langle x^*, R(y - F_n^\Omega(T)x) \rangle| + |\langle x^*, RF_n^\Omega(T)x \rangle| \\
&\leq \|x^*\| \|R\| \|y - F_n^\Omega(T)x\| + |\langle x^*, RF_n^\Omega(T)x \rangle| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

On trouve finalement $|\langle x^*, Ry \rangle| = 0$ pour tout $y \in X$ et $x^* \in X^*$. Ainsi on obtient $R = 0$ ce qui est impossible. T n'est donc pas Ω -hypercyclique. ■

Corollaire 4.2.2 Soit T un opérateur Ω -hypercyclique sur X pour $0 \in \Omega$. Alors $EE(T)$ est borné.

Corollaire 4.2.3 Si T est Ω -hypercyclique sur X pour $0 \in \Omega$ tout opérateur propre associé à des valeurs propres étendues de module strictement plus grand que 1 est nilpotent.

4.3 Stabilité

Voici quelques liens entre le comportement des puissances d'un opérateur et son spectre étendu.

Proposition 4.3.1 Soit $T \in C_{1,\cdot}$. Alors toute valeur propre étendue de module < 1 n'admet que des opérateurs propres associés nilpotents.

Preuve. Si on a l'équation $TR = \lambda RT$ avec $|\lambda| < 1$, alors on a

$$TR^m = \lambda^m R^m T,$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Si $|\lambda| < 1$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\lambda^m T\| < 1,$$

ainsi $T^m R^m x = R^m (\lambda^m T)^n x \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ pour tout x de X . Mais $T \in C_{1,\cdot}$, donc $R^m = 0$ et R est nilpotent. ■

On a un résultat analogue pour les classes $C_{\cdot,1}$ et $C_{1,1}$. On regarde maintenant ce qui se passe si on prend un opérateur à puissances bornées.

Lemme 4.3.1 Soit $T \in B(X)$ à puissances bornées. Si on a l'équation $TR = \lambda RT$ avec $|\lambda| < 1$, alors on a $T^n R x \rightarrow 0$ pour tout $x \in X$. En particulier, si R est à image dense alors $T \in C_{0,\cdot}$.

Preuve. $TR = \lambda RT$ implique $T^n R = \lambda^n R T^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors l'existence d'une constante $M > 0$ tel que

$$\left\| \frac{T^n}{\lambda^n} R x \right\| = \|R T^n x\| \leq M \|R\| \|x\|.$$

Donc $\|T^n R x\| \leq M \|R\| \|x\| |\lambda^n| \rightarrow 0$.

Supposons R à image dense. Alors H_0 qui est fermé, contient l'image de R . Donc $H_0 = X$ et T est stable. ■

Corollaire 4.3.1 Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ à puissances bornées et $C_{1,\cdot}$. Alors

$$EE(T) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}.$$

Preuve. Supposons que λ soit une valeur propre étendue de T telle que $|\lambda| < 1$. D'après le lemme précédent, $T^n Rx \rightarrow 0$ pour tout $x \in X$. Or $T \in C_{1,\cdot}$ implique que $R = 0$ ce qui est une contradiction. ■

Remarquons que le spectre étendu d'un shift tronqué d'ordre n (qui est $C_{0,0}$) est $\mathbb{C}$, avec pour tout $\lambda \neq 0$, un opérateur propre associé $R_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\frac{1}{\lambda}x_1, \frac{1}{\lambda^2}x_2, \dots, \frac{1}{\lambda^n}x_n)$ qui est inversible.

Bibliographie

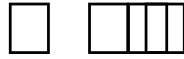
- [1] **Badea. C, Givaux. S**, Faber-hyperclic operators *Israel Math. J.* à paraître.
- [2] **Badea. C, Muller. V**, Growth conditions and inverse producing extensions *J. Op. Th.* 54 (2005) 415-439.
- [3] **Ricker.w**, Extended spectral operator , copyright by increst, 1983.
- [4] **Birkhoff. G**, Démonstration d'un Théorème élémentaire sur les fonctions entières. *C. R. Acad. Sci. Paris* 189 (1929) 473-475.
- [5] **Biswas. A, Petrovic. S**, On extented eigenvalues of operators. *Int. Eq. Op. Th.* 55 (2006), 233-248.
- [6] **Bryan P. Rynne et Martin. Youngson**, Introduction to operator theory and invariant subspaces.
- [7] **Boccara. H**, Analyse fonctionnelle, Edition Marketing, Paris, 1984.
- [8] **David Manceau et Stéphane Maingot**, Théorie spectrale.
- [9] **Godefroy. G, Shapiro. J**, Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.* 98 (1991), 229-269.
- [10] **Jean-Philippe Nicolas**, Analyse complexe et analyse spectrale.
- [11] **Katznelson. Y, Tzafriri. L**, On power bounded operators *J. of Funct. Anal.* 68 (1986), 313-328.
- [12] **Lauric. V**, Operators α - commuting with a compact operator. *Proceedings of the AMS.* 125(1997), 2379-2384.
- [13] **Mbekhta. M**, Partial isometries and generalized inverses. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 70 (2004), 767-781.
- [14] **Pierre Petitcuvot**, Problèmes de similarité et spectre étendu d' un opérateur, 2008.
- [15] **Read. C. J**, Spectrum reducing extension for one operator on a Banach space. *Trans. Ames. Math. Soc* 308 (1988), 413-429.
- [16] **Rosenblum. M**, On the operator equation $BX - XA = Q$. *Duke Math. J.* 23 (1956), 263-269.
- [17] **Vu. Q. P**, A short proof of the Ykatzn elson's and L.Tzafriri's theorem *proc. of the AMS* 115 (1992), 1023-1024.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons intéressé en particulier aux spectre étendu et quelque applications.

On commencé par quelques préliminaires sur les opérateurs linéaire bornés et leurs propriétés, notions initiales et les Théorème fondamentaux sur laquelle construire les opérateurs et resolvante de spectre d'un opérateur.

Après on a étudié le spectre étendu, ainsi la relation entre le spectre étendu d'un opérateur et son spectre et nous avons donné quelques applications.



هذه المذكرة تتعلق بالطيف الممدد و بعض تطبيقاته . نبدأ ببعض التمهيدات حول
المؤثرات الخطية المحدودة و خصائصها، مفاهيم أساسية و نظريات رئيسية حول
المؤثرات و الطيف الممدد.

ثم ندرس الطيف الممدد، أيضا العلاقة بين الطيف الممدد و طيف المؤثر، و أخيرا
بعض تطبيقات الطيف الممدد.