



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Problème de contact avec
mémoire longue et usure**

Présenté par:
AMANALLAH SOUMEIA
GADI ZINEB

Soutenu publiquement devant le jury composé de

ABDELAZIZ AZEB	MCB	Président	Univ. El Oued
AHMED			
Mohammed SalahMesai	MAB	Rapporteur	Univ. El Oued
AounMAB			
BACHIR DOUIB	MAA	Examineur	Univ. El Oued

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la

Recherche scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL-OUED

MEMOIRE

Présentée à la faculté des Sciences exactes

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Option: Mathématiques Appliquées

Par

Thème

Problème aux limites en piézoélectricité avec usure

soutenu publiquement le: / / 2018

devant le jury composé de:

Président Mr.

Encadreur Mr. Mohammed Salah Mesai Aoun

Examineur Mr.

Remerciements

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance et nos remerciements les plus profonds à MOHAMMED SALAH MESAI AOUN, maître assistant à l'université de Hamma Lakhdar El-Oued, pour nous avoir proposé ce passionnant sujet, nous avoir aiguillé dans notre recherche, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi le soutien très précieux tout au long de cette étude.

Comme nous tenons à remercier vivement à ABDELAZIZ AZEB AHMED, maître de conférences à l'université de Hamma Lakhdar El-Oued pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de ce mémoire.

Nos remerciements vont également à BACHIR DOUIB, maître assistant à l'université de Hamma Lakhdar El-Oued, d'avoir accepté de juger notre travail.

Nous tenons aussi à manifester toute notre gratitude envers tous les membres du comité scientifique.

Enfin, nos remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction	iv
Notations	vii
1 Rappels d'analyse	1
1.1 Espaces fonctionnels	1
1.1.1 Rappels et compléments	2
1.1.2 Espaces de Sopolov	5
1.2 Espaces fonctionnels pour la mécanique	6
1.3 Eléments d'analyse non linéaire	9
1.3.1 Opérateurs fortement monotones	9
1.3.2 inéquation variationnelle de type elliptique	10
1.3.3 Lemme de Gronwall	10
2 Modélisation	12
2.1 Cadre physique et modèles mathématiques	12
2.1.1 Cadre physique	12
2.1.2 Notations	13
2.1.3 Modèles mathématiques	14
2.2 Lois de comportement	15
2.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques.	15
2.2.2 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mé- moire longue.	16

2.3	Conditions de contact	16
2.4	Lois des frottements	17
3	Problème de contact quasistatique en électro-viscoélasticité avec mémoire longue et usure	18
3.1	Formulation mécanique du problème	19
3.2	Formulation variationnelle	22
3.3	Existence et unicité de la solution	25
	Conclusion	40
	Bibliographie	41

Introduction

Les mathématiques et la mécanique ont été des partenaires complémentaires depuis le temps de Newton, et l'histoire des sciences montre beaucoup de preuves de l'influence bénéfique de ces domaines l'un sur l'autre. Le contact entre corps déformables abondant dans l'industrie et la vie quotidienne.

En raison de l'importance industrielle des procédés physiques qui ont lieu lors d'un contact, un effort considérable a été fait dans leur modélisation, l'analyse, analyse numérique et simulations numériques, et par conséquent, la théorie mathématique de la mécanique de contact a fait des progrès impressionnants ces derniers temps.

Dans la science des matériaux, l'usure des surfaces désigne le phénomène de dégradation des couches superficielles d'un solide sous l'action mécanique du milieu extérieur. L'usure dans les systèmes coulissants est souvent très lente mais persistante, continue et cumulative. Les aspérités sous de fortes contraintes de contact peuvent se déformer plastiquement ou se briser. Dans le premier cas, la morphologie de surface change et, par conséquent, la contrainte de contact normale et la traction de frottement sont affectées.

Pour modéliser l'usure des surfaces de contact on introduit une fonction d'usure, qui tient compte de la profondeur, dans la direction normale, du matériau retiré. Par conséquent, elle rend compte de la variation de la géométrie de surface et représente la quantité cumulée de matériau éliminé, par unité de surface. Pour plus des détails, voir par exemple [15, 16].

Les matériaux piézoélectriques ont été découverts au début du siècle par les époux Curie. Ce sont des diélectriques particuliers qui permettent de transformer l'énergie de déformation élastique en énergie électrique, et inversement. Plus précisément, la piézoélectricité est la capacité de certains matériaux à se polariser lorsqu'ils sont contraints mécaniquement, la charge apparaissant à leur surface étant proportionnelle à la déformation engendrée.

L'effet piézoélectrique inverse est l'obtention d'une déformation par application d'un champ électrique.

Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT (plomb, zirconate, titanate) qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie.

De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de capteurs (capteur de pression etc.) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, nanomanipulateur). L'utilisation de la piézoélectricité a explosé ces dernières années et est en pleine expansion. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa est une valeur inestimable pour les transducteurs acoustique, l'échographie médicale, et pour la haute précision des pompes et des moteurs. Des performances piézoélectriques élevées ont également ouvert de nouvelles possibilités de “récupération d'énergie”, en utilisant le mouvement ambiant et les vibrations pour produire de l'électricité où les piles ou autres sources d'énergie sont impraticables ou indisponibles [1, 5].

L'objectif de ce mémoire est de proposer une contribution à l'étude d'un problème aux limites en mécanique de contact avec usure. En effet nous considérons la lois de comportement non linéaires pour des matériaux électro-viscoélastiques dans le processus quasi-statique; les conditions de contact sont avec compliance normale. nous commençons par décrire le problème mécanique de départ et, après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible du problème étudié.

Le manuscrit se compose de trois chapitres que nous décrivons brièvement.

Dans le premier chapitre, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Dans le deuxième chapitre on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites et de frottement.

Enfin, le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue et usure dans un processus quasistatique. Le problème se formule par un système qui comporte une inéquation variationnelle par rapport au champ des déplacements, une équation variationnelle par rapport au champ électrique et une équation différentielle d'ordre un par rapport à l'usure. On établit un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur des arguments des inéquations variationnelles et des arguments de point fixe.

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
Γ	la frontière de Ω supposée souvent régulière.
Γ_i ($i = \overline{1, 3}, a, b$)	une partie de la frontière Γ .
$mes \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue (d-1) dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v définies sur $\overline{\Omega}$.
$\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
$H = L^2(\Omega)^d$.	
$\mathcal{H} = L^2(\Omega)_s^{d \times d}$.	
$H_1 = H^1(\Omega)^d$.	
$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid Div \sigma \in H\}$.	
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
$H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$	
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes

$H^d = \{x = (x_i) \mid x_i \in H, i = \overline{1, d}\}$.	
$H_s^{d \times d} = \{x = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, d}\}$.	
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de H .
$\ \cdot\ _H$	la norme de H .
2^H	l'ensemble de toutes les parties de H .
H'	l'espace dual de H .

$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$ le produit de dualité entre H' et H .

$x_n \rightarrow x$ la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .

$x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .

$\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires et continues de H dans H .

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0, T; H)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H .

$C^1(0, T; H)$ l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H .

$L^p(0, T; H)$ l'espace des fonctions u mesurables de $(0, T)$ dans H telles que $\int_0^T |u(t)|_H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.

$W^{k,p}(0, T; H)$ l'espace de Sobolev de paramètres k et p .

Pour une fonction u , on note par

$\dot{u}, \ddot{u}$ les dérivées première et seconde de u par rapport au temps.

$\partial_i u$ la dérivée partielle de u par rapport à la i ème composante x_i .

∇u le gradient de u .

$\varepsilon(u)$ la partie symétrique du gradient de $u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$.

$Div u$ la divergence de u .

Si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$ l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2 .

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$ la norme de $\mathcal{L}(H^1, H^2)$.

Autres notations

S^d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$.

c une constante générique strictement positive.

p.p. presque partout.

Chapitre 1

Rappels d'analyse

Ce chapitre, dans lequel nous présentons les outils d'analyse fonctionnelle et des notations de la mécanique de contact, contient trois sections. Dans la première section nous faisons quelques rappels d'analyse comme, par exemple, un survol des propriétés fondamentales des espaces de Banach, de Hilbert ainsi que les espaces de type Sobolev. Dans la deuxième section, nous introduisons certains espaces fonctionnels pour la mécanique dont nous avons besoin dans l'étude des problèmes de contact que nous abordons dans le reste de ce mémoire. Dans la troisième section, nous présentons un bref rappel portant sur les opérateurs monotones. Puis, nous rappelons un résultat d'existence et d'unicité pour les inégalités variationnelles avec ce type d'opérateur et le lemme de Gronwall.

1.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire. Nous donnons aussi quelques propriétés utilisées dans la suite. Partout dans cette section, Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), de frontière Γ . Nous supposons que Ω est un domaine lipschitzien, c'est-à-dire que Γ est représentable localement comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$, Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ . Par ailleurs, nous considérons deux décompositions de Γ , $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$ avec $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$ telle que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_a, \Gamma_b$ sont mesurables et $mes\Gamma_1 > 0$, $mes\Gamma_a > 0$.

1.1.1 Rappels et compléments

Dans ce paragraphe nous faisons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles et vectorielles. Nous allons aborder les espaces de fonctions continues, continûment différentiables et les espaces L^P , qui nous permettront d'introduire les espaces spécifiques à la mécanique dans la suite. Tout d'abord, nous introduisons la notation classique

$$D^\alpha \cdot = \frac{D^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

dans laquelle figurent le multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et sa longueur $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Le cadre étant bien posé, commençons tout d'abord par les espaces de fonctions continues et continûment différentiables.

Espaces de fonctions continues et continûment différentiables. Nous notons par $C(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. Toute fonction de $C(\overline{\Omega})$ est bornée.

Par ailleurs, l'espace $C(\overline{\Omega})$ est de Banach s'il est muni de la norme

$$|v|_{C(\overline{\Omega})} = \sup \{ |v(x)|, x \in \overline{\Omega} \} \equiv \max \{ |v(x)|, x \in \overline{\Omega} \}.$$

Pour tout entier m , $C^m(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\overline{\Omega}$, i.e.

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{ v \in C(\overline{\Omega}); D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq m \}.$$

C'est également un espace de Banach muni de la norme

$$|v|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{C(\overline{\Omega})}$$

Par ailleurs, nous introduisons l'espace $C^\infty(\Omega)$ des fonctions infiniment différentiables

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \{ v \in C(\overline{\Omega}); v \in C^m(\overline{\Omega}) \quad \forall m \in \mathbb{N} \}.$$

$C_0^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ensemble Ω à support inclus dans Ω , i.e.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{ v \in C^\infty(\overline{\Omega}); \text{supp } v \subset \Omega \},$$

où le support d'une fonction v se définit de la façon suivante

$$\text{supp} v = \overline{\{x \in \Omega, \ v(x) \neq 0\}}.$$

La fonction v est dite à support compact dans Ω si son support $\text{supp} v$ est un sous-ensemble propre de l'ensemble Ω . Il est clair que l'inclusion $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ est valable.

Les espaces $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$. Soit $0 < T < +\infty$ et soit $(X, |\cdot|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment dérivables sur $[0, T]$ avec valeur dans X respectivement, avec les normes

$$|v|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} |v(t)|_X,$$

$$|v|_{C^1(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} |v(t)|_X + \max_{t \in [0, T]} |\dot{v}(t)|_X.$$

Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Définition 1.1.1. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous-ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $|u_n(t) - u(t)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $t \in [0, T] - E$.

Définition 1.1.2. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable dans $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{du}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de u dans t_0 , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} (u(t_0 + h) - u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0) \right|_X = 0$$

Définition 1.1.3. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T |u_n(t) - u(t)|_X dt = 0$$

Théorème 1.1.4. (Bochner) Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurable et intégrable si et seulement si $t \rightarrow |u(t)|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable. Dans ce cas

$$\left| \int_0^T u(t) dt \right|_X \leq \int_0^T |u(t)|_X dt.$$

Les espaces L^p . Soit $p \in [1, +\infty[$. De façon usuelle, nous désignons par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables et p -intégrables au sens de la mesure de Lebesgue définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme $|\cdot|_{L^p(\Omega)}$.

L'espace $L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Muni de la norme

$$|v|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| < \infty$$

il est également de Banach.

Soit $p \in [1, \infty]$. Alors le conjugué de p , noté q , est défini par

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 & \text{si } p < \infty \\ q = \infty & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$. Alors, l'inégalité suivante, dite de Hölder, a lieu

$$\int_{\Omega} |u(x) v(x)| dx \leq |u|_{L^p(\Omega)} |v|_{L^q(\Omega)}.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert s'il est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, correspondant à l'inégalité de Hölder pour $p = 2$, est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x) v(x)| dx \leq |u|_{L^2(\Omega)} |v|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Les espaces vectoriels $L^p(0, T; X)$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : (0, T) \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \rightarrow |u(t)|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$|u|_{L^p(0, T; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T |u(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \inf \{c > 0 / |u(t)|_X < c \text{ p.p. } t \in (0, T)\} & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

Proposition 1.1.5. (1) $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) est un espace de Banach.

(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$; alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous faisons quelques rappels sur les espaces de Sobolev.

Espaces de Sobolev $W^{k, p}(\Omega)$. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. Nous définissons les espaces de Sobolev par l'égalité

$$W^{k, p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha(u) \in L^p(\Omega) \text{ avec } 0 \leq |\alpha| \leq k \right\},$$

les espaces $W^{k, p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach, muni de la norme

$$|u|_{W^{k, p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, $W^{k, 2}(\Omega)$ sera noté par $H^k(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

Pour $k = 1$ l'espace $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ / } \partial_i u \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, d \right\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)}$$

et la norme associée

$$|u|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega)$$

$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte (Théorème de Rellich),

$$\begin{cases} \text{il existe une application linéaire et continue } \gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma) \\ \text{telle que } \gamma u = u|_{\Gamma} \text{ pour tout } u \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ (Théorème de trace Sobolev)} \end{cases}$$

Remarque 1.1.1. L'application γ s'appelle application de trace ; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$. On note que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact. L'application de trace n'est pas surjective. L'image de $H^1(\Omega)$ par cette application est notée $H^{1/2}(\Gamma)$; c'est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ qui est de Hilbert pour la structure transportée par γ . Son dual sera noté $H^{-1/2}(\Gamma)$. Pour plus de détails voir [3, 5].

Espaces vectoriels de Sobolev $W^{k,p}(0, T; X)$. Nous utilisons la notation classique

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X) \mid u^{(i)} \in L^p(0, T; X) \quad 0 \leq i \leq k\}$$

afin de désigner les espaces vectoriels de Sobolev pour $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$, $u^{(i)}$ étant la dérivée d'ordre i de u .

Dans le cas particulier où $p = 2$, si $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace de Hilbert, l'espace $H^k(0, T; X) = W^{k,2}(0, T; X)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(0, T; X)} = \sum_{0 \leq i \leq k} \int_0^T (u^{(i)}(t), v^{(i)}(t))_X dt.$$

Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev nous pouvons nous référer à [3].

1.2 Espaces fonctionnels pour la mécanique

L'analyse variationnelle des problèmes de piézoélectrique nécessite l'introduction d'espaces de fonctions spécifiques. Nous donnons dans ce paragraphe les espaces ainsi que quelques unes de leurs propriétés.

On introduit les espaces suivants:

$$\begin{cases} H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 = \{u = (u_i) \mid \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}, \\ \mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \text{Div} \sigma \in H\}. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Les espaces H , $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{cases} (u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (\text{Div} \sigma, \text{Div} \tau)_H, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$, $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div} \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H , $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont notées par $|\cdot|_H$, $|\cdot|_{\mathcal{H}}$, $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$, respectivement. Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner γv la trace de v sur Γ .

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par $H_{\Gamma} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$; ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$.

Nous introduisons à présent un sous-espace fermé de H_1 , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (1.2.3)$$

Puisque $\text{mes} \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V ; il existe une constante $c_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq c_K |v|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (1.2.4)$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [12].

Sur V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V, \quad (1.2.5)$$

et soit $|\cdot|_V$ la norme associée; c'est-à-dire

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V. \quad (1.2.6)$$

Par l'inégalité de Korn et (1.2.6), il vient que $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ est un espace de Hilbert.

En outre, d'après (1.2.4), (1.2.6) et le théorème de trace de Sobolev, trouvons qu'il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 |v|_V \quad \forall v \in V. \quad (1.2.7)$$

On introduit également les espaces suivants

$$W = \{ \phi \in H^1(\Omega) \mid \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}, \quad (1.2.8)$$

$$\mathcal{W} = \{ D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), \operatorname{div} D \in L^2(\Omega) \}, \quad (1.2.9)$$

où $\operatorname{div} D = (D_{i,i})$. Ces espaces W et $\mathcal{W}$ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi, \phi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \phi)_H, \quad (D, E)_{\mathcal{W}} = (D, E)_H + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{L^2(\Omega)}, \quad (1.2.10)$$

soient $|\cdot|_W$ et $|\cdot|_{\mathcal{W}}$ les normes associées; c'est-à-dire

$$|\phi|_W = |\nabla \phi|_H, \quad |D|_{\mathcal{W}}^2 = |D|_H^2 + |\operatorname{div} D|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.2.11)$$

Puisque $\operatorname{mes} \Gamma_a > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c_F > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_a telle que

$$|\nabla \phi|_H \geq c_F |\phi|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in W. \quad (1.2.12)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée dans [11].

Pour des détails sur les résultats de cette section nous renvoyons par exemple aux référence [14].

1.3 Eléments d'analyse non linéaire

Dans cette section, nous présentons quelques éléments d'analyse fonctionnelle. Nous introduisons également quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles qui interviennent dans l'étude des problèmes considérés par la suite. Pour finir, nous rappelons le lemme de Gronwall qui sera utilisé plus tard.

1.3.1 Opérateurs fortement monotones

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $|\cdot|_X$. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire.

Définition 1.3.1. *L'opérateur A est dit :*

(1) *monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

(2) *fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m |u - v|_X^2 \quad \forall u, v \in X;$$

(3) *de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que*

$$|Au - Av|_X \leq M |u - v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Théorème 1.3.2. (Théorème du point fixe) *Soit X un espace de Banach, $A : X \rightarrow X$ un opérateur satisfait (3) avec $0 < M < 1$. L'opérateur A admet un point fixe unique $x \in X$, c'est-à-dire $Ax = x$ et nous appelons A un opérateur contractant.*

Définition 1.3.3. *Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow R$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$|a(u, v)| \leq c |u|_X |v|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.3.4. *Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow R$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$a(u, u) \geq m |u|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

Théorème 1.3.5. (Théorème de Lax-Milgram). Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in X$ qui satisfait

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in X.$$

1.3.2 inéquation variationnelle de type elliptique

Nous allons rappeler dans ce paragraphe un résultat sur une inéquations variationnelle de type elliptique.

Définition 1.3.6. La fonction $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$ et si elle ne prend jamais la valeur $-\infty$.

Définition 1.3.7. La fonction $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement en u de l'espace X si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de X convergeant vers u dans X , elle vérifie

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} j(u_n) \geq j(u)$$

Théorème 1.3.8. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce suivante

$$\text{trouver } u \in X : (Au, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in X.$$

admet une solution unique.

1.3.3 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.3.9. Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $a = 0$, $n = 1$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.3.10. *Soit $m \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\phi(t) \leq \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\phi(t) \leq c \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour avoir plus détails sur les rappels figurant dans ce paragraphe, on pourra consulter par exemple [14].

Chapitre 2

Modélisation

Dans ce chapitre, nous introduisons dans un premier temps le cadre physique des problèmes de contact ainsi qu'un bref rappel sur la mécanique des milieux continus et le comportement des solides déformables (lois électro-visoélastiques). Puis, nous présentons les différentes conditions aux limites de contact avec frottement qui sera utilisée dans le chapitre suivant.

2.1 Cadre physique et modèles mathématiques

Dans cette section, nous fixons le cadre physique, puis nous établissons le modèle mathématique qui servira de base pour l'étude du problème de contact entre un corps piézoélectrique déformable avec mémoire longue et une fondation.

2.1.1 Cadre physique

Nous considérons un corps matériel déformable qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), avec une surface de frontière régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a et Γ_b , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $mes\Gamma_1 > 0$, $mes(\Gamma_a) > 0$ et $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques de densité volumiques q_0 . Nous supposons que f_2 et f_0 varient très

lentement par rapport au temps. Le corps est soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_a de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2 , agissent sur la partie Γ_b . Soit $T > 0$ et soit $[0; T]$ l'intervalle de temps en question. Γ_3 correspond à la partie du corps déformable susceptible d'entrer en contact avec une fondation mobile, constituée d'un corps rigide couvert d'une couche molle.

2.1.2 Notations

Nous désignons par S^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), “.”, $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et S^d . Ainsi,

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, & |v| &= (v.v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & |\tau| &= (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in S^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet.

On note par $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ des déplacements, $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$ le champ des contraintes, $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ le champ potentiel électrique, $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ des déplacements électriques et $w : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction d'usure, $\varepsilon(u)$ et $E(\varphi)$ le champ des déformations linéarisées et le champ électrique.

Pour un vecteur u , nous désignons par u_ν et u_τ les composantes normale et tangentielle

$$u_\nu = u.\nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu. \quad (2.1.1)$$

Pour le champ des contraintes σ , nous notons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma\nu)_\tau,$$

donc

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu. \quad (2.1.2)$$

En utilisant (2.1.1) et (2.1.2), on a la relation

$$(\sigma\nu).u = \sigma_\nu u_\nu + \sigma_\tau.u_\tau, \quad (2.1.3)$$

qui va intervenir tout au long de cette thèse pour établir les formulations variationnelles des problèmes mécaniques.

En outre, $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}$ désigne le champ des accélérations. Nous rappelons que les opérateurs de déformation et de divergence sont donnés par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Dans ce mémoire, le champ électrique est donné par

$$E(\varphi) = -\nabla \varphi,$$

soit encore

$$E(\varphi) = (E_i(\varphi)), \quad E_i(\varphi) = -\varphi_{,i}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Nous passons maintenant à la description le modèle mathématique associé au cadre physique ci-dessus.

2.1.3 Modèles mathématiques

Nous commençons avec les modèles mathématiques qui décrit l'évolution du corps. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre des efforts extérieurs et le tenseur des accélérations pour un système quelconque conduit à l'équation de mouvement de Cauchy

$$\text{Div} \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.4)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse. Les processus d'évolution définis par (2.1.4) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un processus statique. Dans le cas où le champ des vitesses varie lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé, nous sommes en présence d'un processus quasistatique. Dans ces deux cas l'équation (2.1.4) devient

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T).$$

Dans le cas d'un matériau piézoélectrique, nous avons une nouvelle inconnue, le champ électrique E , d'où la nécessité d'introduire une autre équation d'équilibre pour la gérer. C'est l'équation de Maxwell-Gauss ou équation de conservation de la charge

$$\operatorname{div} D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (2.1.5)$$

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui-même; c'est l'objet des lois de comportement.

2.2 Lois de comportement

Dans cette section, nous considérons les lois de comportement pour les matériaux électro-viscoélastiques. Ces lois sont utilisées dans de nombreux ouvrages portant notamment sur l'étude mathématique des problèmes de contact.

2.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques.

Un matériau est dit électro-viscoélastique si sa loi de comportement est de la forme

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{F}\varepsilon(u) - \mathcal{E}^*E(\varphi), \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

dans laquelle interviennent l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S^d \rightarrow S^d$, l'opérateur d'élasticité $\mathcal{F} : \Omega \times S^d \rightarrow S^d$ non linéaires, $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ est le champ électrique, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et $B = (B_{ij})$ est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$ où $e_{ijk}^* = e_{kij}$, dénote le transposé du tenseur $\mathcal{E}$ tel que

$$\mathcal{E}\sigma.v = \sigma.\mathcal{E}^*v \quad \forall \sigma \in S^d, v \in \mathbb{R}^d.$$

Par ailleurs, nous notons que les deux opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ dépendent aussi de la variable spatiale x , mais pour simplicité, nous ne signalons pas explicitement cette dépendance, par

conséquent, tout ce qui suit est valable pour les matériaux non-homogènes. Nous utilisons respectivement les notations $\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u})$ et $\mathcal{F}\varepsilon(u)$ pour $\mathcal{A}(x, \varepsilon(\dot{u}))$ et $\mathcal{F}(x, \varepsilon(u))$. En particulier, nous supposons que le tenseur des contraintes σ est une fonction linéaire du tenseur des petites déformations ε et du gradient du potentiel électrique ou le champ électrique E , c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + f_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u) + e_{ijk}^*\varphi_{,k},$$

où $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes a_{ijkl} s'appellent coefficients de viscosité et $\mathcal{F} = (f_{ijkl})$ est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes f_{ijkl} s'appellent coefficients d'élasticité et $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur des constantes piézoélectriques. Dans le cas non-homogène a_{ijkl} , f_{ijkl} et e_{ijk} dépendent du point $x \in \Omega$ et dans le cas homogène a_{ijkl} , f_{ijkl} et e_{ijk} sont des constantes.

2.2.2 Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue.

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{F}(\varepsilon(u), \beta) + \int_0^t M(t-s)\varepsilon(u(s))ds - \mathcal{E}^*E(\varphi), \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi), \end{cases} \quad (2.2.2)$$

où $M = (M_{ij})$ est un tenseur de relaxation. Si $M = 0$, on retrouve la lois électro-viscoélastique donnée par (2.2.1).

Nous passons maintenant aux conditions de contact utilisées dans le chapitre 3.

2.3 Conditions de contact

Dans cette section, nous allons introduire les conditions de contact utilisées dans le problème aux limites que nous allons considérer dans ce mémoire. On définit maintenant les conditions aux limites mécaniques et électriques sur chaque partie de Γ .

La condition aux limites de déplacement. Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie Γ_1 , le champ des déplacements y est par conséquent nul

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T).$$

La condition aux limites de traction. Une traction surfacique de densité f_2 agit sur Γ_2 et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T),$$

Les conditions aux limites électriques. Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 & \text{sur} & \Gamma_a \times (0, T), \\ D.\nu &= q_2 & \text{sur} & \Gamma_b \times (0, T), \end{aligned}$$

2.4 Lois des frottements

Dans cette section nous allons introduire les lois de frottement qui seront utilisées par la suite dans ce mémoire. Ces lois sont représentées par des relations entre la composante tangentielle du champ de contraintes σ_τ , la composante normale du champ de contraintes σ_ν et le déplacement normal ou le déplacement tangentiel.

a). Loi d'Archard

L'évolution de la fonction d'usure w est décrite par la loi d'Archard suivante

$$\dot{w} = -k_1 v^* \sigma_\nu.$$

Ici k_1 est un coefficient d'usure strictement positif, v^* représente la vitesse de la fondation.

b). Loi de frottement avec usure et compliance normale

Nous supposons maintenant que la contrainte normale satisfait une loi de compliance normale avec usure

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - h - w) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T).$$

où p_ν est une fonction positive, h représente le gap entre le corps et la fondation, et u_ν est le déplacement normal.

La contrainte tangentielle satisfait une loi de type Coulomb suivante

$$\begin{aligned} \sigma_\tau &= -\lambda(v^* - u_\tau), \\ |\sigma_\tau| &= p_\tau(u_\nu - h - w). \end{aligned}$$

Où λ est une constante strictement positive, u_τ représente le déplacement tangentiel.

Chapitre 3

Problème de contact quasistatique en électro-viscoélasticité avec mémoire longue et usure

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude théorique d'un problème de contact avec frottement entre un corps de loi constitutive électro-viscoélastique avec mémoire longue et une fondation déformable mobile. Nous prenons en considération l'usure des surfaces de contact. Ceci revient en fait, à introduire une nouvelle variable, la fonction d'usure, satisfaisant la loi d'Archard et de ce fait le problème est quasistatique.

Le problème est formulé par un système d'équations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau, une équation différentielle modélisant la fonction d'usure et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre comporte trois sections. Dans la première section, nous écrivons le problème mécanique et nous précisons les hypothèses adéquates sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle. Puis, dans la deuxième section, nous énonçons la formulation variationnelle du problème mécanique. Ensuite, dans la troisième section, nous énonçons et nous démontrons notre résultat principal d'existence et d'unicité de la solution faible, Les techniques employées sont basées sur les résultats des inéquations variationnelles de type elliptique et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments de point fixe.

3.1 Formulation mécanique du problème

Nous considérons que le corps est électro-viscoélastique, plus exactement nous utilisons une loi de comportement de la forme (2.2.2). En ce qui concerne le contact, nous modélisons par une compliance normale et usure.

Sous ces considérations, le problème électro-mécanique que nous étudions est le suivant.

Problème P. *Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S^d$, le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ des déplacements électriques $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et la fonction d'usure $w : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tels que*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{F}(\varepsilon(u)) + \int_0^t M(t-s)\varepsilon(u(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - B\nabla\varphi \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.2)$$

$$\text{Div}\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.3)$$

$$\text{div}D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.1.5)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.1.6)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - h - w), \\ |\sigma_\tau| = p_\tau(u_\nu - h - w), \\ \sigma_\tau = -\lambda(v^* - u_\tau), \quad \lambda \geq 0 \\ \dot{w} = -k_1 v^* \sigma_\nu. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.7)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (3.1.8)$$

$$D \cdot \nu = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.1.9)$$

$$u(0) = u_0, \quad w(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.1.10)$$

Ici et ci-dessous, afin de simplifier la notation, nous ne signalons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions de la variable spatiale x . Nous décrivons maintenant les équations et les conditions aux limites du problème P.

Tout d'abord, les équations (3.1.1) et (3.1.2) représentent la loi de comportement électro-viscoélastique non linéaire à mémoire longue où $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de viscosité, $\mathcal{F}$

représente l'opérateur d'élasticité et $M = (M_{ij})$ est le tenseur de la relaxation. L'équation (3.1.3) représente l'équation de l'équilibre. Nous supposons que le processus est quasistatique et, par conséquent, nous négligeons le terme d'inertie dans l'équation du mouvement, la relation (3.1.4) représente l'équation de conservation de la charge, tandis que les conditions (3.1.5) et (3.1.6) sont la condition de déplacement et la condition de traction, respectivement. Les conditions (3.1.7) représentent les conditions aux limites avec compliance normale et usure. Les équations (3.1.8) et (3.1.9) sont les conditions aux limites électriques et pour finir (3.1.10) représentent les conditions initiales.

Pour l'étude du problème mécanique (3.1.1) – (3.1.10) on considère les hypothèses suivantes: L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S^d \rightarrow S^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \quad \text{sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in S^d. \\ \text{(d) L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.11)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F} : \Omega \times S^d \times \mathbb{R} \rightarrow S^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{F}} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } x \rightarrow \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable} \\ \quad \text{sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in S^d. \\ \text{(c) L'application } x \rightarrow \mathcal{F}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.12)$$

La fonction de compliance normale $p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($r = \nu, \tau$) satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_r > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_r(x, u_1) - p_r(x, u_2)| \leq L_r |u_1 - u_2| \\ \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } x \rightarrow p_r(x, u) \\ \quad \text{est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p_r(x, u) = 0 \text{ pour tout } u \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.1.13)$$

Le tenseur diélectrique $B = (b_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } B(x)E = (b_{ij}(x)E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) } b_{ij} = b_{ji}, \quad b_{ij} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) Il existe une constante } m_B > 0 \text{ telle que} \\ \quad BE \cdot E \geq m_B |E|^2 \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1.14)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E} : \Omega \times S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E}(x)\tau = (e_{ijk}(x)\tau_{jk}) \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in S^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(b) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.1.15)$$

Le tenseur de relaxation $M = (M_{ij})$ satisfait

$$M \in C(0, T; \mathcal{H}). \quad (3.1.16)$$

Les forces volumiques f_0 et les tractions surfaciques f_2 ont la régularité

$$f_0 \in C(0, T; H), \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (3.1.17)$$

De même, la densité de charge volumique q_0 et surfacique q_2 satisfont

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_b)), \quad q_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (3.1.18)$$

La fonction de gap h vérifie la condition

$$h \in L^2(\Gamma_3), \quad h \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (3.1.19)$$

Finalement, le champ initial des déplacements u_0 satisfait

$$u_0 \in V. \quad (3.1.20)$$

Nous définissons la fonction $f : [0, T] \rightarrow V$ par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da, \quad (3.1.21)$$

la fonction $q : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(q(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \phi da, \quad (3.1.22)$$

Les conditions (2.1.23) et (2.1.24) impliquent

$$f \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (3.1.23)$$

Finalement, nous définissons la fonctionnelle $j : V \times V \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} j(u, v, w) &= \int_{\Gamma_3} p_{\nu}(u_{\nu} - h - w) v_{\nu} da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} p_{\tau}(u_{\nu} - h - w) |v_{\tau} - v^*| da, \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

pour tout $u, v \in V$, $w \in L^2(\Gamma_3)$ et $t \in [0, T]$.

La fonctionnelle $j : V \times V \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

pour tout $u, v \in V$ et $w \in L^2(\Gamma_3)$

$$v \rightarrow j(u, v, w) \text{ est propre, convexe et semicontinue sur } V. \quad (3.1.25)$$

3.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous allons donner la formulation variationnelle du problème P.

Nous supposons dans ce qui suit que le couple $(u, \sigma) \in V \times \mathcal{H}$ sont des fonctions suffisamment régulières, nous utilisons la formule de Green

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - \dot{u}) dx + \int_{\Omega} \text{Div} \sigma \cdot (v - \dot{u}) dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da \quad \forall v \in H_1,$$

nous trouvons

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - \dot{u}) dx + \int_{\Omega} \text{Div} \sigma \cdot (v - \dot{u}) dx = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da \quad \forall v \in V,$$

en utilisant la définition de l'espace V avec (2.1.6), (2.1.7) et (2.1.4), nous obtenons

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - \dot{u}) dx = \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - \dot{u}) dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u}) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) da \quad \forall v \in V$$

On a

$$\sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) = \sigma_{\nu} (v - \dot{u})_{\nu} + \sigma_{\tau} \cdot (v - \dot{u})_{\tau}$$

donc sur Γ_3 nous avons

$$\sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) = -p_{\nu} (u_{\nu} - h - w) v_{\nu} + p_{\nu} (u_{\nu} - h - w) \dot{u}_{\nu} + \sigma_{\tau} \cdot (v - \dot{u})_{\tau},$$

alors

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau} \cdot (v - \dot{u})_{\tau} &= \sigma_{\tau} \cdot (v_{\tau} - v^* + v^* - \dot{u}_{\tau}) \\ &= \sigma_{\tau} \cdot (v_{\tau} - v^*) + \sigma_{\tau} \cdot (v^* - \dot{u}_{\tau}), \end{aligned}$$

puisque

$$\sigma_{\tau} \cdot (v_{\tau} - v^*) \geq -|\sigma_{\tau}| |v_{\tau} - v^*|$$

et

$$|\sigma_{\tau}| = p_{\tau} (u_{\nu} - h - w)$$

nous obtenons

$$\sigma_{\tau} \cdot (v_{\tau} - v^*) \geq -p_{\tau} (u_{\nu} - h - w) |v_{\tau} - v^*|.$$

D'autre part, nous avons

$$\sigma_{\tau} \cdot (v^* - \dot{u}_{\tau}) = |\sigma_{\tau}| |v^* - \dot{u}_{\tau}|,$$

alors

$$\begin{aligned} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) &\geq -p_{\nu} (u_{\nu} - h - w) v_{\nu} + p_{\nu} (u_{\nu} - h - w) \dot{u}_{\nu} \\ &\quad - p_{\tau} (u_{\nu} - h - w) |v_{\tau} - v^*| + p_{\tau} (u_{\nu} - h - w) |\dot{u}_{\tau} - v^*| \\ &= [p_{\nu} (u_{\nu} - h - w) \dot{u}_{\nu} + p_{\tau} (u_{\nu} - h - w) |\dot{u}_{\tau} - v^*|] \\ &\quad - [p_{\nu} (u_{\nu} - h - w) v_{\nu} + p_{\tau} (u_{\nu} - h - w) |v_{\tau} - v^*|]. \end{aligned}$$

D'où

$$(\sigma, \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + j(u, v, w) - j(u, \dot{u}, w) \geq (f(t), v - \dot{u})_V. \quad (3.2.1)$$

En outre, Soit $(\varphi, D) \in W \times \mathcal{W}$ un couple des fonctions suffisamment régulières, nous employons la formule de Green

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D \cdot \phi dx = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \phi da \quad \forall \phi \in W.$$

de (3.1.4) et la définition de W , nous trouvons

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} q_0 \phi dx = \int_{\Gamma_b} D \cdot \nu \phi da \quad \forall \phi \in W,$$

puisque

$$\int_{\Gamma_b} D \cdot \nu \phi da = \int_{\Gamma_3} D \cdot \nu \phi da + \int_{\Gamma_b - \Gamma_3} D \cdot \nu \phi da \quad \forall \phi \in W,$$

de (3.1.9) et (3.1.18) nous obtenons

$$\int_{\Gamma_b} D \cdot \nu \phi da = \int_{\Gamma_b - \Gamma_3} q_2 \phi da \quad \forall \phi \in W,$$

donc

$$D \cdot \nabla \phi dx = - \int_{\Omega} q_0 \phi dx + \int_{\Gamma_b} q_2 \phi da$$

de (3.1.22) nous obtenons

$$(D, \nabla \phi)_H = -(q, \phi)_W. \quad (3.2.2)$$

De (3.1.1), (3.1.2), (3.1.7) et (3.2.1) – (3.2.2), nous obtenons la formulation variationnelle du problème P.

Problème PV. *Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \longrightarrow V$, et le champ des contraintes $\sigma : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$, le potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, le champ des déplacements électriques $D : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$ et la fonction d'usure $w : [0, T] \longrightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que*

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{F}(\varepsilon(u(t))) + \int_0^t M(t-s)\varepsilon(u(s))ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \quad (3.2.3)$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v, w(t)) - j(u(t), \dot{u}(t), w(t)) \quad (3.2.4)$$

$$\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V,$$

$$D(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - B \nabla \varphi(t), \quad (3.2.5)$$

$$(D(t), \nabla \phi)_H = -(q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (3.2.6)$$

$$\dot{w}(t) = -k_1 v^* \sigma_{\nu}(t), \quad (3.2.7)$$

$$u(0) = u_0, \quad w(0) = 0, \quad (3.2.8)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

La solvabilité unique du Problème PV sera démontrée dans la section suivante. $(u, \sigma, \varphi, D, w)$ qui satisfait (3.2.3) – (3.2.8) s'appelle solution faible de Problème P.

3.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous énonçons et prouvons le résultat de l'existence et d'unicité suivant.

Théorème 3.3.1. *Supposons que les hypothèses (3.1.11)-(3.1.20) sont satisfaites, le problème PV admet une solution unique $\{u, \sigma, \varphi, D, w\}$ ayant la régularité*

$$u \in C^1(0, T; V), \quad (3.3.1)$$

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (3.3.2)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (3.3.3)$$

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}), \quad (3.3.4)$$

$$w \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_3)). \quad (3.3.5)$$

Nous concluons de ce qui précède que le Problème P admet une solution faible unique $\{u, \sigma, \varphi, D, w\}$, à condition que les hypothèses du Théorème 3.3.1 sont satisfaites.

La démonstration du théorème 3.3.1 sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans la suite de cette section que (3.1.11) – (3.1.20) sont vérifiés, c désigne une constante positive qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, M, B, p_\nu, p_\tau$ et T dont la valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Dans la première étape, nous supposons que les fonctions $w \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$, $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ et $g \in C(0, T; V)$ sont données et nous construisons le problème intermédiaire suivant.

Problème PV_{wηg}. *trouver le champ des déplacements $v_{w\eta g} : [0, T] \rightarrow V$ et le champ des contraintes $\sigma_{w\eta g} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tels que, pour tout $t \in [0, T]$,*

$$\sigma_{w\eta g}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(v_{w\eta g}(t)) + \eta(t), \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned}
& (\sigma_{w\eta g}(t), \varepsilon(v - v_{w\eta g}(t)))_{\mathcal{H}} \\
& + j(g(t), v, w(t)) - j(g(t), v_{w\eta g}(t), w(t)) \\
& \geq (f(t), v - v_{w\eta g}(t))_V \quad \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Lemme 3.3.2. $PV_{w\eta g}$ a une solution unique tel que

$$v_{w\eta g} \in C(0, T; V), \quad \sigma_{w\eta g} \in C(0, T; \mathcal{H}_1). \tag{3.3.8}$$

Preuve. Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V$ tel que

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \tag{3.3.9}$$

L'opérateur A est fortement monotone et de Lipschitz sur V . En effet, en utilisant (3.3.9), l'hypothèse (3.1.11) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour tout $u, v \in V$, nous avons

$$\begin{aligned}
(Au - Av, u - v)_V &= (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(u) - \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\
&\leq |\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(u) - \varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \\
&\leq L_{\mathcal{A}} |\varepsilon(u) - \varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq L_{\mathcal{A}} |u - v|_V^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$|Au - Av|_V \leq L_{\mathcal{A}} |u - v|_V,$$

qui prouve que A est Lipschitz sur V .

En outre, pour tout $u, v \in V$, nous avons

$$\begin{aligned}
(Au - Av, u - v)_V &= (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(u) - \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\
&\geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon(u) - \varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\geq m_{\mathcal{A}} |u - v|_V^2,
\end{aligned}$$

c'est à dire que A est un opérateur fortement monotone sur V .

Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir un élément $F \in C(0, T; V)$ par

$$(F(t), v)_V = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \tag{3.3.10}$$

puisque l'opérateur A est Lipschitz et fortement monotone sur V et de (3.1.25), nous concluons d'après un résultat standard sur les inéquations variationnelles elliptique de deuxième espèce (voir le théorème 1.3.8) qu'il existe une fonction unique $v_{w\eta g}(t) \in V$, qui satisfait

$$\begin{aligned} & (Av_{w\eta g}(t), v - v_{w\eta g}(t))_V \\ & + j(g(t), v, w(t)) - j(g(t), v_{w\eta g}(t), w(t)) \\ & \geq (F(t), v - v_{w\eta g}(t))_V \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

en combinant (3.3.6), (3.3.9) et (3.3.10) – (3.3.11), nous déduisons que $v_{w\eta g}$ est une solution unique de $PV_{w\eta g}$.

Nous utilisons la relation (3.3.6), l'hypothèse (3.1.11) et les propriétés du tenseur de déformations à obtenir que $\sigma_{w\eta g}(t) \in \mathcal{H}$. Puisque $v = v_{w\eta g}(t) \pm \Phi$ satisfait (3.3.7), où $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$ est arbitraire, en utilisant la définition (3.1.21) nous trouvons

$$\text{Div} \sigma_{w\eta g}(t) + f_0(t) = 0.$$

Avec l'hypothèse (3.1.17) sur la régularité de f_0 , nous voyons que

$$\text{Div} \sigma_{w\eta g} \in C(0, T; H). \quad (3.3.12)$$

Alors que $\sigma_{g w \eta}(t) \in \mathcal{H}_1$. Dans la suite nous allons voir que

$$v_{w\eta g} \in C(0, T; V), \quad \sigma_{w\eta g} \in C(0, T; \mathcal{H}_1).$$

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ et pour simplifier les notations nous posons $v_{w\eta g}(t_i) = v_i$, $g(t_i) = g_i$, $w(t_i) = w_i$, $\eta(t_i) = \eta_i$, $f(t_i) = f_i$, $\sigma_{w\eta g}(t_i) = \sigma_i$ pour $i = 1, 2$.

En appliquant l'inéquation (3.3.11) pour $t = t_1$ nous obtenons

$$\begin{aligned} & (Av_1, v - v_1)_V + j(g_1, v, w_1) - j(g_1, v_1, w_1) \\ & \geq (f_1, v - v_1)_V - (\eta_1, \varepsilon(v - v_1))_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

et pour $t = t_2$ nous trouvons

$$\begin{aligned} & (Av_2, v - v_2)_V + j(g_2, v, w_2) - j(g_2, v_2, w_2) \\ & \geq (f_2, v - v_2)_V - (\eta_2, \varepsilon(v - v_2))_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

nous remplaçons v par v_2 dans (3.3.13) et v par v_1 dans (3.3.14) et faisons la soustraction

$$\begin{aligned} & (Av_1 - Av_2, v_1 - v_2)_V \\ & \leq j(g_1, v_2, w_1) - j(g_1, v_1, w_1) + j(g_2, v_1, w_2) - j(g_2, v_2, w_2) \\ & \quad + (f_1 - f_2, v_1 - v_2)_V + (\eta_2 - \eta_1, \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} |v_1 - v_2|_V^2 & \leq |j(g_1, v_2, w_1) - j(g_1, v_1, w_1) \\ & \quad + j(g_2, v_1, w_2) - j(g_2, v_2, w_2)| \\ & \quad + (|f_1 - f_2|_V + |\eta_1 - \eta_2|_{\mathcal{H}}) |v_1 - v_2|_V. \end{aligned}$$

De (3.1.24), nous avons

$$\begin{aligned} & |j(g_1, v_2, w_1) - j(g_1, v_1, w_1) + j(g_2, v_1, w_2) - j(g_2, v_2, w_2)| \\ & = \left| \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (g_{1\nu} - h - w_1) v_{2\nu} da - \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (g_{1\nu} - h - w_1) v_{1\nu} da \right. \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} p_{\tau} (g_{1\nu} - h - w_1) |v_{2\tau} - v^*| da - \int_{\Gamma_3} p_{\tau} (g_{1\nu} - h - w_1) |v_{1\tau} - v^*| da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (g_{2\nu} - h - w_2) v_{1\nu} da - \int_{\Gamma_3} p_{\nu} (g_{2\nu} - h - w_2) v_{2\nu} da \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_3} p_{\tau} (g_{2\nu} - h - w_2) |v_{1\tau} - v^*| da - \int_{\Gamma_3} p_{\tau} (g_{2\nu} - h - w_2) |v_{2\tau} - v^*| da \right| \\ & \leq \int_{\Gamma_3} |p_{\nu} (g_{1\nu} - h - w_1) - p_{\nu} (g_{2\nu} - h - w_2)| |v_{1\nu} - v_{2\nu}| da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} |p_{\tau} (g_{1\nu} - h - w_1) - p_{\tau} (g_{2\nu} - h - w_2)| ||v_{1\tau} - v^*| - |v_{2\tau} - v^*|| da. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de trace de Sobolev, l'argument $|u_i| \leq |u|$ ($i = \nu, \tau$) $\forall u, v \in \mathbb{R}^d$ et les hypothèses sur p_{ν} , p_{τ} et après quelques opérations élémentaires, nous obtenons

$$\begin{aligned} & |j(g_1, v_2, w_1) - j(g_1, v_1, w_1) + j(g_2, v_1, w_2) - j(g_2, v_2, w_2)| \\ & \leq L_{\nu} c_0^2 |g_1 - g_2|_V |v_1 - v_2|_V + L_{\nu} c_0 |w_1 - w_2|_{L^2(\Gamma_3)} |v_1 - v_2|_V \\ & \quad + L_{\tau} c_0^2 |g_1 - g_2|_V |v_1 - v_2|_V + L_{\tau} c_0 |w_1 - w_2|_{L^2(\Gamma_3)} |v_1 - v_2|_V \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} |v_1 - v_2|_V &\leq (L_\nu + L_\tau) c_0^2 |g_1 - g_2|_V + (L_\nu + L_\tau) c_0 |w_1 - w_2|_V \\ &\quad + |f_1 - f_2|_V + |\eta_1 - \eta_2|_{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

d'après la régularité de $\{g, w, f, \eta\}$ nous pouvons écrire

$$v_{w\eta g} \in C(0, T; V).$$

D'autre part, de (3.3.6) pour $t = t_1$ nous avons

$$\sigma_1 = \mathcal{A}\varepsilon(v_1) + \eta_1,$$

et pour $t = t_2$ nous avons

$$\sigma_2 = \mathcal{A}\varepsilon(v_2) + \eta_2,$$

par l'utilisation de (3.1.11), nous allons arriver à

$$|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} \leq c(|v_1 - v_2|_V + |\eta_1 - \eta_2|_{\mathcal{H}})$$

d'après la régularité de $\{v, \eta\}$ et (3.3.12) nous concluons que

$$\sigma_{w\eta g} \in C(0, T; \mathcal{H}_1).$$

Ce qui termine la preuve du lemme 3.3.2. □

Soit $w \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$, $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ et $g \in C(0, T; V)$ sont données. Nous définissons maintenant l'opérateur $\Lambda_{w\eta} : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$ par

$$\Lambda_{w\eta} g(t) = u_0 + \int_0^t v_{w\eta g}(s) ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.3.16)$$

où $v_{w\eta g}$ est la solution du problème PV $_{w\eta g}$.

Lemme 3.3.3. *L'opérateur $\Lambda_{w\eta}$ a un point fixe unique $g_{w\eta} \in C(0, T; V)$.*

Preuve. Soit pour tout g_1, g_2 de $C(0, T; V)$

$$v_1 = v_{w\eta g_1}, \quad v_2 = v_{w\eta g_2}.$$

de (3.3.16) la définition de $\Lambda_{w\eta}$, nous avons

$$|\Lambda_{w\eta} g_1(t) - \Lambda_{w\eta} g_2(t)|_V \leq \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V ds$$

en employant (3.3.15) nous obtenons

$$m_{\mathcal{A}} |v_1(t) - v_2(t)|_V \leq (L_\nu + L_\tau) c_0^2 |g_1(t) - g_2(t)|_V$$

donc

$$|\Lambda_{w\eta} g_1(t) - \Lambda_{w\eta} g_2(t)|_V \leq c \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\Lambda_{w\eta}^m g_1 - \Lambda_{w\eta}^m g_2|_{C(0,T;V)} \leq \frac{(cT)^m}{m!} |g_1 - g_2|_{C(0,T;V)}.$$

$\Lambda_{w\eta}^m$ est un opérateur contractant dans l'espace de Banach $C(0, T; V)$, donc $\Lambda_{w\eta}$ a un point fixe unique $g_{w\eta} \in C(0, T; V)$. $\square$

Maintenant nous considérons le problème suivant.

Problem $PV_{w\eta}$. *Trouver le champ des déplacements $u_{w\eta} : [0, T] \rightarrow V$ tel que pour tout $t \in [0, T]$,*

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{w\eta}(t)), \varepsilon(v - \dot{u}_{w\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + j(u_{w\eta}(t), v, w(t)) - j(u_{w\eta}(t), \dot{u}_{w\eta}(t), w(t)) \\ & + (\eta(t), \varepsilon(v - \dot{u}_{w\eta}(t)))_{\mathcal{H}} \geq (f(t), v - \dot{u}_{w\eta}(t))_V \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

$$u_{w\eta}(0) = u_0. \quad (3.3.18)$$

Pour le problem $PV_{w\eta}$ nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.4. *Le problème $PV_{w\eta}$ a une solution unique $u_{w\eta}$ qui satisfait la régularité (3.3.1).*

Preuve. Soit $w \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ et $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$, nous notons par $g_{w\eta} \in C(0, T; V)$ le point fixe guaranté par le Lemme 3.3.3 et soit $u_{w\eta}$ la fonctions définies par

$$u_{w\eta} = u_0 + \int_0^t v_{w\eta g_{w\eta}}(s) ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.3.19)$$

comme $g_{w\eta}$ est le point fixe de $\Lambda_{w\eta}$, donc

$$\Lambda_{w\eta} g_{w\eta} = g_{w\eta}, \quad (3.3.20)$$

de (3.3.16) la définition de $\Lambda_{w\eta}$ et (3.3.19) – (3.3.20) nous trouvons

$$g_{w\eta} = u_{w\eta}. \quad (3.3.21)$$

Soit $v_{w\eta}$ la fonctions définies par

$$v_{w\eta} = v_{w\eta g_{w\eta}}. \quad (3.3.22)$$

De (3.3.19) la définition de $u_{w\eta}$ et (3.3.22) nous obtenons

$$\dot{u}_{w\eta} = v_{w\eta}. \quad (3.3.23)$$

pour $g = g_{w\eta}$, combinons (3.3.6) – (3.3.7) et (3.3.21) – (3.3.23) nous trouvons que $u_{w\eta}$ est la solution unique de $PV_{w\eta}$, en plus de ça la relation (3.3.23) et la régularité de $v_{w\eta}$ nous donne $u_{w\eta} \in C^1(0, T; V)$. $\square$

Dans la deuxième étape, soit $w \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ et $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$, nous utilisons le champ des déplacements $u_{w\eta}$ qui est définie par (3.3.19) et qui est la solution unique de $PV_{w\eta}$.

Nous considérons le problème variationnelle suivant.

Problème $QV_{w\eta}$. Trouver le potentiel électrique $\varphi_{w\eta} : [0, T] \rightarrow W$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$(B\nabla\varphi_{w\eta}(t), \nabla\phi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(u_{w\eta}(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (3.3.24)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.5. $QV_{w\eta}$ a une solution unique $\varphi_{w\eta}$ qui satisfait la régularité (3.3.3).

Preuve. Soit $t \in [0, T]$. Nous définissons la forme bilinéaire $b(., .) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$b(\varphi, \phi) = (B\nabla\varphi, \nabla\phi)_H \quad \forall \varphi, \phi \in W. \quad (3.3.25)$$

De (3.3.14), (3.3.25), (1.2.11) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$b(\varphi, \phi) = b(\phi, \varphi), \quad |b(\varphi, \phi)| \leq c |\varphi|_W |\phi|_W, \quad b(\varphi, \varphi) \geq c |\varphi|_W^2 \quad \forall \varphi, \phi \in W,$$

c'est-à-dire que la forme bilinéaire b est continue, symétrique et coercive sur W .

Cependant, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, on peut définir une forme linéaire continue $l_{w\eta} : W \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$l_{w\eta}(\phi) = (q(t), \phi)_W + (\mathcal{E}\varepsilon(u_{w\eta}(t)), \nabla\phi)_H \quad \forall \phi \in W,$$

On applique le théorème de Lax-Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique $\varphi_{w\eta} \in W$ tel que

$$\begin{aligned} b(\varphi_{w\eta}, \phi) &= l_{w\eta}(\phi) \\ &= (q(t), \phi)_W + (\mathcal{E}\varepsilon(u_{w\eta}(t)), \nabla\phi)_H \quad \forall \phi \in W, \end{aligned}$$

Nous concluons alors que $\varphi_{w\eta}$ est une solution unique de $QV_{w\eta}$.

Dans la suite, nous allons vérifier que $\varphi_{w\eta} \in C(0, T; W)$. Pour $t_1, t_2 \in [0, T]$ nous adoptons les notations suivantes $\varphi_{w\eta}(t_i) = \varphi_i$, $u_{w\eta}(t_i) = u_i$ et $q(t_i) = q_i$ ($i = 1, 2$).

En utilisant (3.3.24) pour $t = t_1$ nous avons

$$(B\nabla\varphi_1, \nabla\phi)_H = (\mathcal{E}\varepsilon(u_1), \nabla\phi)_H + (q_1(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W,$$

et pour $t = t_2$ nous avons

$$(B\nabla\varphi_2, \nabla\phi)_H = (\mathcal{E}\varepsilon(u_2), \nabla\phi)_H + (q_2(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W,$$

nous faisons la soustraction des égalités précédentes avec $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$ et en utilisant les hypothèses (3.1.14), (3.1.15) sur B , $\mathcal{E}$ et l'inégalité de Cahchy-Schwartz pour obtenir

$$m_B |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \leq c_{\mathcal{E}} |u_1 - u_2|_V |\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W |\varphi_1 - \varphi_2|_W \quad (3.3.26)$$

où $c_{\mathcal{E}}$ est une constante positive dépend au tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$.

Alors que l'inégalité (3.3.26) devient

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq c(|u_1 - u_2|_V + |q_1 - q_2|_W). \quad (3.3.27)$$

Puisque $u \in C^1(0, T; V)$, $q \in C(0, T; W)$ l'estimation (3.3.27) nous permet d'écrire

$$\varphi_{w\eta} \in C(0, T; W).$$

Ce qui termine la preuve du lemme 3.3.5. □

Maintenant, pour $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : C(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow C(0, T; \mathcal{H}),$$

défini par: pour chaque $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$

$$\Lambda\eta(t) = \mathcal{F}(\varepsilon(u_{w\eta}(t))) + \int_0^t M(t-s)\varepsilon(u_{w\eta}(s))ds$$

$$+\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{w\eta}(t), \quad (3.3.28)$$

Ici, pour tout $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$; $u_{w\eta}$ et $\varphi_{w\eta}$ représentent le champ des déplacements et le champ potentiel électrique obtenus dans les lemmes 3.3.4 et 3.3.5 respectivement. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.6. *Il existe un élément unique $\eta^* \in C(0, T; \mathcal{H})$ tel que*

$$\Lambda\eta^* = \eta^*.$$

Preuve. Soient η_1 et $\eta_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$. Nous utilisons les notations $u_{w\eta_i} = u_i$, $\dot{u}_{w\eta_i} = v_i$ et $\varphi_{w\eta_i} = \varphi_i$ pour $i = 1, 2$. En employant (3.3.28) nous avons

$$\begin{aligned} |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)| &= |\mathcal{F}(\varepsilon(u_1(t))) - \mathcal{F}(\varepsilon(u_2(t)))| \\ &+ \int_0^t |M(t-s)(\varepsilon(u_1(s)) - \varepsilon(u_2(s)))| ds \\ &+ |\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(t) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(t)|, \end{aligned}$$

de (3.1.12) et (2.1.15) – (3.1.16) nous obtenons

$$\begin{aligned} |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)| &\leq L_{\mathcal{F}}(|\varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t))|) \\ &+ c_M \int_0^t |\varepsilon(u_1(s)) - \varepsilon(u_2(s))| ds \\ &+ c_{\mathcal{E}^*} |\nabla(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))| \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

où c_M et $c_{\mathcal{E}^*}$ sont constantes dépendantes à M et $\mathcal{E}^*$ respectivement.

En mettant l'inégalité (3.3.29) à la puissance deux, utilisons les arguments

$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad \left(\int_0^t |\varepsilon(u(s))| ds \right)^2 \leq \int_0^t |\varepsilon(u(s))|^2 ds,$$

et intégrons par rapport à x , utilisons (1.2.11) et (1.2.6) nous trouvons

$$\begin{aligned} |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 &\leq c(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \\ &+ \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2). \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

En plus, nous employons (3.3.17) pour $\eta = \eta_1$ puis $\eta = \eta_2$ et nous faisons la soustraction de ces inégalités nous trouvons

$$(\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \leq j(u_1, v_2, w) - j(u_1, v_1, w)$$

$$+j(u_2, v_1, w) - j(u_2, v_2, w) - (\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_V, \quad (3.3.31)$$

de (3.1.11) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous avons

$$m_{\mathcal{A}} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{\mathcal{H}} |v_1(t) - v_2(t)|_V$$

$$|j(u_1, v_2, w) - j(u_1, v_1, w) + j(u_2, v_1, w) - j(u_2, v_2, w)|$$

Maintenant de (3.1.24) la définition de la fonctionnelle j nous avons

$$\begin{aligned} & |j(u_1, v_2, w) - j(u_1, v_1, w) + j(u_2, v_1, w) - j(u_2, v_2, w)| \\ & \leq \left| \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{1\nu} - h - w) v_{2\nu} - p_\nu(u_{1\nu} - h - w) v_{1\nu} da \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{2\nu} - h - w) v_{1\nu} - p_\nu(u_{2\nu} - h - w) v_{2\nu} da \right| \\ & + \int_{\Gamma_3} |p_\tau(u_{1\nu} - h - w) |v_{2\tau} - v^*| - p_\tau(u_{1\nu} - h - w) |v_{1\tau} - v^*| \\ & \quad + p_\nu(u_{2\nu} - h - w) |v_{1\tau} - v^*| - p_\nu(u_{2\nu} - h - w) |v_{2\tau} - v^*| | da \end{aligned}$$

nous utilisons les hypothèses (3.1.13) sur p_ν , p_τ et après quelques calculs nous obtenons

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 & \leq c_0^2 (L_\nu + L_\tau) |u_1(t) - u_2(t)|_V |v_1(t) - v_2(t)|_V \\ & + |\eta_2(s) - \eta_1(s)|_{\mathcal{H}} |v_1(s) - v_2(s)|_V, \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

donc

$$|v_1(t) - v_2(t)|_V \leq c (|u_1(t) - u_2(t)|_V + |\eta_2(t) - \eta_1(t)|_{\mathcal{H}}).$$

grâce à l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ et l'intégration par rapport au temps nous allons arriver à

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\eta_2(s) - \eta_1(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds \quad (3.3.33)$$

Nous savons que

$$u_i(t) = u_i(0) + \int_0^t v_i(s) ds \quad i = 1, 2,$$

et

$$u_1(0) = u_2(0) = u_0,$$

donc

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds, \quad (3.3.34)$$

nous combinons (3.3.33) avec (3.3.34) pour obtenir

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |\eta_2(s) - \eta_1(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds \quad (3.3.35)$$

en appliquant le lemme de Granwall dans l'inégalité (3.3.35) nous déduisons que

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds. \quad (3.3.36)$$

Pour le potentiel électrique, nous utilisons (3.3.24) pour $\eta = \eta_1$, obtenons

$$(B\nabla\varphi_1, \nabla\phi)_H = (\mathcal{E}\varepsilon(u_1), \nabla\phi)_H + (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (3.3.37)$$

et pour $\eta = \eta_2$, nous avons

$$(B\nabla\varphi_2, \nabla\phi)_H = (\mathcal{E}\varepsilon(u_2), \nabla\phi)_H + (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (3.3.38)$$

nous posons $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$ et faisons la soustraction de (3.3.37) et (3.3.38), trouvons

$$(B\nabla(\varphi_1 - \varphi_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H = (\mathcal{E}\varepsilon(u_1 - u_2), \nabla(\varphi_1 - \varphi_2))_H$$

de (3.1.14) – (3.1.15) nous avons

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c |u_1(t) - u_2(t)|_V. \quad (3.3.39)$$

Nous combinons (3.3.36), (3.3.39) avec (3.3.30) nous obtenons

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\Lambda^m\eta_1 - \Lambda^m\eta_2|_{C(0,T;\mathcal{H})}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\eta_1 - \eta_2|_{C(0,T;\mathcal{H})}^2,$$

nous déduisons que si m suffisamment grand, l'opérateur Λ^m est un contractant sur l'espace de Banach $C(0, T; \mathcal{H})$, donc, Λ^m possède un point fixe unique $\eta^* \in C(0, T; \mathcal{H})$ et par conséquent η^* est l'unique point fixe de Λ . $\square$

Soit $w \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Dans la quatrième étape nous considérons le problème variationnelle suivant.

Problem PV_w . Trouver le champ des déplacements $u_w : [0, T] \rightarrow V$, le champ des contraintes $\sigma_w : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, le champ de potentiel électrique $\varphi_w : [0, T] \rightarrow W$ et le champ des déplacements électriques $D_w : [0, T] \rightarrow H$ tels que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\sigma_w(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_w(t)) + \mathcal{F}(\varepsilon(u_w(t))) + \int_0^t M(t-s)\varepsilon(u_w(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_w(t), \quad (3.3.40)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_w(t), \varepsilon(v - \dot{u}_w(t)))_{\mathcal{H}} + j(u_w(t), v, w(t)) \\ & - j(u_w(t), \dot{u}_w(t), w(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}_w(t))_V \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

$$D_w(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u_w(t)) - B\nabla\varphi_w(t), \quad (3.3.42)$$

$$(D_w(t), \nabla\phi)_H = -(q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, \quad (3.3.43)$$

$$u_w(0) = u_0. \quad (3.3.44)$$

Lemme 3.3.7. Le problème PV_w admet une unique solution $\{u_w, \sigma_w, \varphi_w, D_w\}$ qui satisfait (3.3.1) – (3.3.4).

Preuve. Soit $\eta^* \in C(0, T; \mathcal{H})$ le point fixe de Λ qui est défini par (3.3.28) nous adobtons les notations

$$u_w = u_{w\eta^*}, \varphi_w = \varphi_{w\eta^*}. \quad (3.3.45)$$

qui sont les solutions des problèmes $PV_{w\eta}$ et $QV_{w\eta}$ obtenues dans les lemmes 3.3.4 et 3.3.5 respectivement pour $\eta = \eta^*$.

Soit pour tout $t \in [0, T]$ nous posons

$$\begin{aligned} \sigma_w(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_w(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u_w(t)) + \int_0^t M(t-s)\varepsilon(u_w(s))ds \\ &+ \mathcal{E}^*\nabla\varphi_w(t) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

$$D_w(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u_w(t)) - B\nabla\varphi_w(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.47)$$

Nous montrons que $(u_w, \sigma_w, \varphi_w, D_w)$ satisfaisant (3.3.40) – (3.3.44) et la régularité (3.3.1) – (3.3.4). En effet, nous écrivons (3.3.17) pour $\eta = \eta^*$ et en utilisant (3.3.45), nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_w(t)), \varepsilon(v - \dot{u}_w(t)))_{\mathcal{H}} + j(u_w(t), v, w(t)) - j(u_w(t), \dot{u}_w(t), w(t)) \\ & + (\eta^*(t), \varepsilon(v - \dot{u}_w(t)))_{\mathcal{H}} \geq (f(t), v - \dot{u}_w(t))_V \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

Nous combinons l'égalité $\Lambda\eta^* = \eta^*$ et (3.3.28) pour obtenir

$$\eta^*(t) = \mathcal{F}(\varepsilon(u_w(t))) + \int_0^t M(t-s)\varepsilon(u_w(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_w(t), \quad (3.3.49)$$

De (3.3.46), (3.3.48) et (3.3.49), nous avons

$$\begin{aligned} & (\sigma_w(t), \varepsilon(v - \dot{u}_w(t)))_{\mathcal{H}} + j(u_w(t), v, w(t)) - j(u_w(t), \dot{u}_w(t), w(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}_w(t))_V \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \end{aligned} \quad (3.3.50)$$

Nous écrivons (3.3.24) pour $\eta = \eta^*$ et en employant (3.3.47), nous obtenons

$$(D_w(t), \nabla\phi)_H = -(q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T) \quad (3.3.51)$$

Maintenant, de (3.3.46), (3.3.47), (3.3.50) et (3.3.51) avec la condition initiale (3.3.44) et d'après les lemmes 3.3.4 et 3.3.5, nous concluons que $(u_w, \sigma_w, \varphi_w, D_w)$ est une solution de PV_w , l'unicité de cette solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ . $\square$

Nous considérons maintenant l'opérateur $\mathcal{T} : C(0, T; L^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\mathcal{T}w(t) = -k_1 v^* \int_0^t (\sigma_w)_\nu(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.3.52)$$

L'étape finale de la démonstration du théorème 3.3.1 est le résultat suivant.

Lemme 3.3.8. *L'opérateur T a un point fixe unique $w^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$.*

Preuve. Soit $w_1, w_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ et $(u_{w_i}, \sigma_{w_i}, \varphi_{w_i}, D_{w_i})$ l'élément qui satisfait (3.3.40) – (3.3.44) pour $w = w_i$, $i = 1, 2$, nous utilisons les notations $u_i = u_{w_i}$, $v_i = \dot{u}_{w_i}$, $\sigma_i = \sigma_{w_i}$, $\varphi_i = \varphi_{w_i}$ et $D_i = D_{w_i}$. En plus, c est une constante positive qui dépend à k_1 et v^* .

en utilisant (3.3.48) et les mêmes arguments que nous avons utilisé pour avoir la relation (3.3.33) nous allons arriver à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \\ & \leq c \left(\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |w_1(s) - w_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

Puisque $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ nous avons

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds$$

nous combinons cette inégalité avec (3.3.53) trouvons

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds + c \int_0^t |w_1(s) - w_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (3.3.54)$$

en appliquant le lemme de Gronwall de (3.3.54) nous avons

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq c \int_0^t |w_1(s) - w_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (3.3.55)$$

en intégrant (3.3.55) par rapport au temps et combinons ce résultat avec (3.3.53) nous

pouvons écrire

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq c \int_0^t |w_1(s) - w_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (3.3.56)$$

En autre part, comme pour $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_i(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(u_i(t)) + \int_0^t M(t-s)\varepsilon(u_i(s))ds \\ &\quad + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_i(t) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

donc

$$|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 \leq c (|v_1(s) - v_2(s)|_V^2 + |u_1(s) - u_2(s)|_V^2)$$

nous intégrons l'inégalité précédente par rapport au temps

$$\int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds \leq c \left(\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2 ds \right).$$

Nous substituons (3.3.55) et (3.3.56)

$$\int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}}^2 ds \leq c \int_0^t |w_1(s) - w_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds. \quad (3.3.58)$$

De (3.3.52) et (3.3.58) nous déduisons que

$$|\mathcal{T}w_1(t) - \mathcal{T}w_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |w_1(s) - w_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\mathcal{T}^m w_1 - \mathcal{T}^m w_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |w_1 - w_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))}^2.$$

Pour m suffisamment grand l'opérateur $\mathcal{T}^m$ est un contractant sur l'espace de Banach $C(0, T; L^2(\Gamma_3))$, donc il a un point fixe unique $w^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ qui est aussi l'unique point fixe de $\mathcal{T}$. $\square$

Maintenant, nous pouvons établir la démonstration du théorème 3.3.1

Démonstration du théorème 3.3.1.

Existence. Soit $w^* \in C(0, T; L^2(\Gamma_3))$ le point fixe de l'opérateur $\mathcal{T}$ donné par (3.3.52).

Pour $w = w^*$, nous posons

$$u^* = u_{w^*}, \sigma^* = \sigma_{w^*}, \varphi^* = \varphi_{w^*}, D^* = D_{w^*}, \quad (3.3.59)$$

d'après le lemme 3.3.7, nous déduisons que $(u^*, \sigma^*, \varphi^*, D^*)$ est la solution unique de PV_w qui satisfait (3.3.1) – (3.3.4). En autre part, puisque

$$\mathcal{T}w^*(t) = w^*(t),$$

et de (3.3.52) nous avons

$$w^*(t) = -k_1 v^* \int_0^t (\sigma_{w^*})_\nu(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

alors que

$$\dot{w}^*(t) = -k_1 v^* (\sigma_{w^*})_\nu(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.3.60)$$

avec

$$w^*(0) = 0 \quad (3.3.61)$$

et des hypothèses sur p_ν , la régularité de σ_{w^*} nous avons

$$w^* \in C^1(0, T; L^2(\Gamma_3)) \quad (3.3.62)$$

nous concluons de (3.3.59) – (3.3.62) que $(u^*, \sigma^*, \varphi^*, D^*, w^*)$ est une solution de PV qui satisfait (3.3.1) – (3.3.5).

Unicité. L'unicité de la solution $(u^*, \sigma^*, \varphi^*, D^*, w^*)$ est une conséquence de l'unicité des points fixes de l'opérateur Λ et $\mathcal{T}$ qui sont définis par (3.3.28) et (3.3.52) respectivement.

$\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites de contact en électro mécanique (piézoélectricité), le problème est un problème mécanique de contact avec usure entre un corps électro-viscoélastique à mémoire longue et une base mobile.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Comme la frontière de corps et les données du problème ont des bonnes régularités; donc, la solution du problème mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution du problème précédent par l'utilisation des arguments suivants: inéquations variationnelles de type elliptique, équation variationnelle et point fixe.

Bibliographie

- [1] R. C. Batra and J. S. Yang, Saint Venant's principle in linear piezoelectricity, *Journal of Elasticity* 38 (1995), 209-218.
- [2] P. Bisenga, F. Lebon and F. Maceri, The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support, in *Contact Mechanics*, J.A.C. Martins and
- [3] H. Brézis, Equations et Inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier*, 18 (1968), 115-175.
- [4] M. Dalah and M. Sofonea Antiplane frictional contact of electro-viscoelasticity cylinders, *EDJE*, Vol. 2007 (2007), No. 161, 1-14.
- [5] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [6] T. Ikeda, *Fundamentals of piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford (1990).
- [7] Z. Lerguet, M. Shillor and M. Sofonea, A frictional contact problem for an electro-viscoelastic body, *EJDE*, Vol. 2007 (2007), No. 170, 1-16.
- [8] F. Maceri and P. Bisenga, The Unilateral frictionless contact of piezoelectric body with a rigid support, *Math. Comp. Modelling*, 28, (1998), 19-28.
- [9] J. A. C Martins and J. T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlinear Analysis TMA* 11 (1987), 407-428.

- [10] M.S. Mesai Aoun. Analyse mathématique de quelques problèmes aux limites en piézoélectricité: Mémoire de magistère, Université de Ouargla (2013).
- [11] J. Nečas, Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques, Masson, Paris (1967).
- [12] J. Nečas and I. Hlavaček, Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies: An Introduction, Elsevier, Amesterdam, (1981).
- [13] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction, *Journal of Elasticity* 51 (1998),105-126.
- [14] M. Selmani, A dynamic problem with adhesion and damage, electro-viscoelasticity with long-term memory. *Journal of inequalities in pure and applied mathematics* (2009).
- [15] M. Selmani and L. Selmani, A frictional contact problem with wear and damage for electro-viscoelastic materials, *Applications of Mathematics* Vol. 55, No. 2, pp. 89-109, 2010.
- [16] M. Selmani, Frictional contact problem with wear for electro-viscoelastic materials with long memory. *Bull. Belg. Math. Simon Stevin* 20 (2013), 461–479.
- [17] M. Selmani, A Frictional Contact Problem Involving Piezoelectric Materials with Long Memory, *Mediterranean Journal of Mathematics*, (2014).
- [18] M. Sofonea and R. Arhab, An electro-viscoelastic contact problem with adhesion, *Dynamics of Continuous Discret and Impulsive Systems*, 14, (2007), 577-991.
- [19] M. Sofonea and El H. Essoufi, Quasistatic frictional contact of viscoelastic piezoelectric body, *Ad . Math. Sci. Appl.*, 14, (2004), 613-631.
- [20] M. Sofonea and El H. Essoufi, A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction, *Mathematical Modelling and Analysis*, 9, (2004), 229-242.
- [21] N. Strömberg, L. Johansson and A. Klarbring, Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear *Int. J. Solids Structures* 33 (1996), 1817-1836.

ملخص

في هذه المذكرة درسنا وجود ووحدانية الحل لمسألة حدية في ميدان الضغطية الكهربائية, وهي مسألة تواصل بين جسم كهرو-لزج- مرن ذو ذاكرة طويلة بتلف معين للجسم مع قاعدة متحركة. استعملنا صيغة فريشول للحصول على المسألة التغيرية ثم برهنا عن وجود ووحدانية الحل بالحجج التالية: متراجحة تفاضلية ناقصية, معادلة تفاضلية, نقطة ثابتة. **الكلمات المفتاحية** متراجحة تفاضلية ناقصية, معادلة تفاضلية, نقطة ثابتة.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites en piézoélectricité. Le problème est un problème de contact entre un corps électro-visco-élastique à mémoire longue avec usure et une base mobile. On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle du problème. Puis, on a montré l'existence et l'unicité de la solution par les arguments suivants: inéquation variationnelle elliptique, équation différentielle et point fixe. **Mots clés:** inéquation variationnelle elliptique, équation différentielle et point fixe.

Abstract

In this thesis, we studied the existence and uniqueness of the solution of boundary contact problem in piezoelectricity. It is a contact problem between an electro-visco-elastic body with long memory and wear and a mobile base. We used the Green's formula for obtain the variational formulation of the problem and we proved the existence and uniqueness of the solution by the following arguments: elliptic variational inequality, differential equation and fixed point. **Key words:** elliptic variational inequality, differential equation and fixed point.