

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR

EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Thème

[Théorème du point fixe de Krasnoselskii et leurs applications]

Présenté par:

Ben Amara Hassiba

Ghouli Hadjer

Herier El Kaima

Encadré par:

Beloul Said

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

*Merci avant tout **Dieu** de nous réconcilié Pour accomplir ce travail. Un spécial remercie à **nos parents** en reconnaissance pour tout ce qu'ils ont fait pour nous. Et pour leur soutien depuis toute notre carrière d'étude.*

*On remercie notre encadreur "**BELOUL SAID** ", pour sa patience et toute aide scientifique qui a nous apportée.*

*On remercie les professeurs qui nous ont fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de ce mémoire. Ainsi qu'à tous les professeurs de **l'université d'hamma lakhdar el oued**.*

*En fin, nous remercions toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce modeste travail particulièrement: "**M. Nour, M. Bachir, R. M. Om El Fadel**", et à toute la promotion **2014/2015** de Math.*

Table des matières

1	Préliminaires	2
1.1	Espaces métriques	2
1.1.1	Distances	2
1.1.2	Distances équivalentes	5
1.1.3	Espaces métriques	5
1.2	Les suites dans le espace métrique	6
1.2.1	Suite de Cauchy	6
1.2.2	Suite convergente	7
1.2.3	Suite bornée	7
1.3	Les espaces normé	8
1.3.1	Normé	8
1.3.2	Espace normé	8
1.4	L'application continue	9
1.4.1	La continuité	9
1.4.2	La continuité uniforme	9
1.4.3	Équicontinu	9
1.5	Les espaces compacts	9
1.5.1	L'espace métrique compact	9
1.5.2	L'espace séquentiellement compact	10
1.5.3	L'espace précompact	10
1.5.4	Le partie compacte	10
1.5.5	Relativement compacte	10

1.6	Les opérateurs	10
1.6.1	L'opérateur linéaire borné	10
1.6.2	L'opérateur compacte	11
1.7	Les espaces convexes	11
1.8	Les applications contractantes	12
1.8.1	Contraction large	14
2	Théorème du point fixe de Krasnoselskii	15
2.1	Théorème du point fixe de Banach	15
2.1.1	Théorème de l'application contractante	15
2.2	Le théorème du point fixe de Brouwer	18
2.2.1	Autre forme de théorème	18
2.3	Théorème du point fixe de Schauder	19
2.4	Théorème de Krasnoselskii	19
2.4.1	Théorème d'Arzela-Ascoli	19
2.4.2	Théorème de Krasnoselskii	22
2.5	Extension du théorème de Krasnoselskii	27
2.5.1	Théorème de Burton	27
2.5.2	Théorème de Krasnoselskii-Burton	28
3	La Application	30
3.1	Stabilité par le théorème de Krasnoselskii-Burton	30
3.1.1	Transformation et inversion de l'équation	31
3.1.2	Bornétude et convergence vers zéro des solutions	32
	Bibliographie	39

Introduction

La plupart des phénomènes naturels en physique, en chimie, en économie en biologie ou en mécanique ont un comportement non linéaire, de tels problèmes s'expriment, mathématiquement, sous forme d'équations différentielles non linéaires.

De nombreuses questions, liées à l'existence et à l'unicité de solutions de certains types d'équations peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une application appropriée définie sur un espace métrique. Un des plus important outils d'existence en analyse non linéaire est le théorème dit de Krasnoselskii (*voir* [7]). C'est un théorème hybride (combinant géométrie et topologie) établie en 1955 par Krasnoselskii. Ce résultat est captivant et possède un domaine d'application très étendu.

Ce mémoire contient une introduction et trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous intéressons à donner quelques notions préliminaires et définitions:

- *Espaces métriques*: Distances, espaces métrique.
- *Les suites dans le espace métrique*: Suite de Cauchy, suite convergente, suite bornée.
- *L'application continue*: La continuité, la continuité uniforme, équicontinu.
- *Les espaces compacts*: L'espace métrique compact, séquentiellement compact, pré-compact.
- *Les opérateurs*: L'opérateur linéaire borné, l'opérateur compact.
- *Les applications contractantes*: Contraction large.

Nous présentons dans Le deuxième chapitre, quelques résultats de la théorie du point fixe. A savoir le théorème du point fixe de Banach 1922 (de l'application contractante), celui de Brouwer 1912 (*voir* [1]) et Schauder 1930 (une généralisation théorème du point fixe de Brouwer) (*voir* [3]), et enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii. Ce

théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

Le troisième chapitre contient une application pratique du théorème de Krasnoselskii, pour montrer l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous commençons d'abord par rappeler quelques définitions, et faisons également un rappel de certains théorèmes et des résultats connus qui nous seront utiles dans les chapitres deuxième et troisième .

1.1 Espaces métriques

1.1.1 Distances

Définition 1.1.1 Soit E un ensemble non vide quelconque, une distance sur E est une

fonction $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$, définie sur le produit cartésien $E \times E$ à valeurs dans l'ensemble \mathbb{R}_+ des nombres réels, vérifiant les propriétés suivantes:

- a) $\forall u, v \in E : d(u, u) = 0$ et $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
- b) $\forall u, v \in E : d(u, v) = d(v, u)$ (symétrique).
- c) $\forall u, v, w \in E : d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (inégalité triangulaire).

pour $u \in E$ donné, le nombre réel positif $d(u, v)$ est appelé distance de u à v .

Exemple 1.1.1 Soit (E, d) un espace métrique.

1) la distance euclidienne : $E = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \sqrt{(u_1, v_1)^2 + (u_2, v_2)^2 + \dots + (u_n, v_n)^2} \\ &= \left(\sum_{1 \leq i \leq n} (u_i, v_i)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

2) la distance sup métrique:

$$d(u, v) = \sup_{1 \leq i \leq n} \{|(u_i - v_i)|\}$$

Exemple 1.1.2 Soit $E = C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ est continue sur } [0, 1]\}$

$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad (1.1.1)$$

$\forall f, g, h \in C([0, 1])$

a-

$$d(f, f) = \int_0^1 |f(x) - f(x)| dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0 \\ &\Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g \end{aligned}$$

b-

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_0^1 |g(x) - f(x)| dx = d(g, f) \end{aligned}$$

c-

$$\begin{aligned}
d(f, h) &= \int_0^1 |f(x) - h(x)| dx = \int_0^1 |f(x) - g(x) - h(x) + g(x)| dx \\
&= \int_0^1 |(f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x))| dx \\
&\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)| dx = d(f, g) + d(g, h)
\end{aligned}$$

Donc d est une distance.

Exemple 1.1.3 Soit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ distance sur E on pose :

$$\forall x, y : d(x, y) = \sup \{d_n(x, y); n \in \mathbb{N}\} \quad (1.1.2)$$

a-

$$\forall x \in E; d(x, x) = \sup \{d_n(x, x); n \in \mathbb{N}\}$$

On a:

$$\begin{aligned}
d_n(x, x) &= 0 \\
&\Leftrightarrow \sup \{d_n(x, x); n \in \mathbb{N}\} = 0 \Leftrightarrow d(x, x) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= 0; \forall x, y \in E \\
&\Leftrightarrow \sup \{d_n(x, y); n \in \mathbb{N}\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; d_n(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y
\end{aligned}$$

b-

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in E; d(y, x) &= \sup \{d_n(y, x); n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup \{d_n(x, y); n \in \mathbb{N}\} = d(x, y)
\end{aligned}$$

c-

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in E; d(x, z) &= \sup \{d_n(x, z); n \in \mathbb{N}\} \\ d(x, y) + d(y, z) &= \sup \{d_k(x, y) + d_m(y, z); k, m \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N} : d_n(x, z) \leq d_n(x, y) + d_n(y, z)$

Alors on pose : $n = m = k$

donc l'inégalité triangulaire est vérifiant.

Alors d est une distance .

1.1.2 Distances équivalentes

Parfois deux distances différentes d_1 et d_2 sur un même ensemble E sont assez “ ressemblantes” pour que les espaces métrique (E, d_1) et (E, d_2) possèdent les mêmes propriétés pour certains objets mathématiques définis par d_1 d'une part, par d_2 d'autre part.

Définition 1.1.2 Soient d_1 et d_2 deux distances sur un même ensemble E , elles sont dites

équivalentes s'il existe deux constantes réelles $n > 0$ et $m > 0$ telle que:

$$\begin{aligned} \forall u, v \in E : nd_1(u, v) &\leq d_2(u, v) \leq md_1(u, v) \\ \iff n &\leq \frac{d_2(u, v)}{d_1(u, v)} \leq m \quad (u \neq v) \end{aligned}$$

1.1.3 Espaces métriques

Définition 1.1.3 Un espace métrique est un couple constitué par un ensemble non vide E , et par une distance d sur E , on dit que E est muni de la distance d , un espace métrique est noté (E, d) ou E_d .

1.2 Les suites dans le espace métrique

1.2.1 Suite de Cauchy

Définition 1.2.1 [4] Soit (E, d) un espace métrique, une suite (x_n) dans E est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Exemple 1.2.1 La suite qui définit par: $x_n = \frac{1}{n}$; por tout $n \in \mathbb{N}^*$ est une suite de Cauchy.

Preuve. On a $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ vérifiant : $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$$\text{On pose } m \geq n \quad \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon,$$

$$\text{donc: } 0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \text{ car } \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

Alors:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

$$\text{Donc } \forall n, m \geq \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

$$d(x_n, x_m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$$

D'où (x_n) est de Cauchy. ■

Exemple 1.2.2 la suite $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est pas de Cauchy.

Preuve. x_n ne pas de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \text{ tel que } d(x_n, x_m) \geq \varepsilon^2$$

On posse:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, n = N \text{ et } m = 2N,$$

donc:

$$\begin{aligned}
 d(x_n, x_m) &= d(x_N, x_{2N}) = x_{2N} - x_N \\
 &= \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2N}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}\right) \\
 &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \\
 &\geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \dots + \frac{1}{2N} = N \left(\frac{1}{2N}\right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Alors: $d(x_n, x_m) \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$.

D'où (x_n) n'est pas de Cauchy. ■

1.2.2 Suite convergente

Définition 1.2.2 Soit (E, d) un espace métrique, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E est dite

convergente s'il existe $x \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \rightarrow x$, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq N : d(x_n, x) \leq \varepsilon$$

Remarque 1.2.1 S'il n'existe aucun $x \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \rightarrow x$, dit (x_n) est divergente.

1.2.3 Suite bornée

Définition 1.2.3 Soit (E, d) un espace métrique, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E est dite bornée si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n, k \in \mathbb{N}; n \geq N : d(x_{n+k}, x_n) \leq \varepsilon$$

Proposition 1.2.1 [8] (x_n) Suite convergente $\Rightarrow (x_n)$ de Cauchy $\Rightarrow (x_n)$ est bornée.

Définition 1.2.4 Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans E converge.

1.3 Les espaces normé

1.3.1 Normé

Définition 1.3.1 [4] Une norme sur un espace vectoriel E (sur le corps \mathbb{k}), est une fonction continue de E dans \mathbb{R}^+ noté par:

$$x \rightarrow \|x\|$$

vérifiant les propriétés suivantes:

- 1) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow (x = 0)$ (séparation).
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{k}, x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité).
- 3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité du triangle).

Remarque 1.3.1 $|\lambda|$ désigne respectivement la valeur absolue si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou module si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

1.3.2 Espace normé

Définition 1.3.2 Tout espace vectoriel E sur $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , muni d'une norme, est appelé espace vectoriel normé.

Proposition 1.3.1 Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définie par:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Cependant, un espace métrique n'est pas toujours un espace normé même s'il possède une structure vectorielle, car une distance n'est pas souvent associée à une norme.

Définition 1.3.3 Un espace de Banach est un espace normé complet pour la distance associée à sa norme.

Exemple 1.3.1 $L^p(\Omega)$ $\Omega = [0,1]$ et $1 \leq p < \infty$

associée par:

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

1.4 L'application continue

1.4.1 La continuité

Définition 1.4.1 Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et la fonction $f : E \rightarrow F$

On dit que:

1) f est continue au point $x_0 \in E$ si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2) f est continue sur E si elle est continue en chaque point de E .

1.4.2 La continuité uniforme

Définition 1.4.2 Soit f une application de $M \subset E$ dans E , on dit f est uniformément continue sur E si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in E^2 : |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

1.4.3 Équicontinu

Définition 1.4.3 L'ensemble M (l'ensemble de fonctions continues) est équicontinu si l'ensemble $M(x_0) = \{f(x_0), f \in M\}$ est équicontinu pour tout $x_0 \in X$.

i.e:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \forall x \in X, \forall f \in M, x \in V \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$$

1.5 Les espaces compacts

1.5.1 L'espace métrique compact

Définition 1.5.1 [4] Un espace métrique (E, d) est compact si de tout recouvrement de E par des ouverts B on peut extraire un recouvrement fini.

Autrement dit compact si $S \subset B$ (ouverte) tel que $E = \cup_{B \in S} B$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et B_1, B_2, \dots, B_n des ouverts de S tels que $E = B_1 \cup B_2 \dots \cup B_n$.

1.5.2 L'espace séquentiellement compact

Définition 1.5.2 *Un espace métrique (E, d) est séquentiellement compact si de toute suite on peut extraire une suite qui converge dans E .*

1.5.3 L'espace précompact

Définition 1.5.3 *Un espace métrique (E, d) est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et x_1, x_2, \dots, x_n , n points de E tel que:*

$$E = B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \dots \cup B(x_n, \varepsilon) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(x_i, \varepsilon)$$

1.5.4 La partie compacte

Définition 1.5.4 *Une partie M d'un espace métrique (E, d) est dite compacte si toute*

suite $\{x_n\}$ de M admet une sous suite convergente vers une limite appartenant à M .

1.5.5 Relativement compacte

Définition 1.5.5 *Un espace métrique (E, d) est relativement compacte si toute suite de E admet une sous suite convergente vers une limite appartenant à E .*

i.e: si la fermeture de E est compacte.

1.6 Les opérateurs

1.6.1 L'opérateur linéaire borné

Définition 1.6.1 *soient E et F deux espaces vectoriels normés, on appelle opérateur linéaire borné toute application linéaire continue de E dans F .*

1.6.2 L'opérateur compacte

Définition 1.6.2 Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $T \in L(E, F)$ on dit que T est un opérateur compact si et seulement si une des trois hypothèses équivalentes, suivantes est vérifiée :

- 1) toute image d'un borné de E est relativement compact dans F .
- 2) $T(B_E(0, 1))$ est relativement compact dans F .
- 3) de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E on peut extraire une sous suite telle que $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans F quand $k \rightarrow \infty$.

L'ensemble des opérateurs compacts est noté $K(E, F)$.

1.7 Les espaces convexes

Définition 1.7.1 Soit (E, d) un espace métrique, un ensemble M de E est dite convexe si est seulement si:

$$\forall x, y \in M, \forall \alpha \in [0, 1] : \alpha x + (1 - \alpha)y \in M$$

Définition 1.7.2 Soit $M \subseteq E$ la fonction $f : M \rightarrow E$ est dite convexe si est seulement si: $\forall x, y \in M, \forall \alpha \in [0, 1] : f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$

Définition 1.7.3 Soit $M \subseteq E$ la fonction $f : M \rightarrow E$ est dite concave si $-f$ est convexe.

Exemple 1.7.1 Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble quelconque.

On définit le noyau K de M l'ensemble défini par:

$$K = \{x \in M \text{ tel que: } \forall y \in M : [x, y] \subseteq M\}$$

$$z \in [x, y] \Leftrightarrow \exists t \in]0, 1[: z = tx + (1 - t)y$$

Alors K est convexe.

Preuve.

$$\forall a, b \in K \forall t \in]0, 1[\Rightarrow ta + (1 - t)b \in K \tag{1.7.1}$$

On à clair :

$$a \in K \Leftrightarrow [a, x] \subset M; \forall x \in M$$

Et:

$$b \in K \Leftrightarrow [b, x] \subset M; \forall x \in M$$

d'après (1.7.1) :

$$\begin{aligned} z &\in [ta + (1-t)b, x] \Leftrightarrow \\ z &= \alpha(ta + (1-t)b) + (1-\alpha)x; \forall \alpha \in]0, 1[\\ &= (\alpha t)a + \alpha(1-t)b + (1-\alpha)x \\ &= (\alpha t)a + (1-\alpha t) \left[\frac{\alpha(1-t)}{(1-\alpha t)}b + \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha t)}x \right] \end{aligned}$$

Et :

$$w = \frac{\alpha(1-t)}{(1-\alpha t)}b + \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha t)}x \in [b, x]$$

$$\frac{\alpha(1-t)}{(1-\alpha t)} + \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha t)} = 1$$

Alors: $z = (\alpha t)a + (1-\alpha t)w \in [a, w] \subset M$

Donc K convexe. ■

1.8 Les applications contractantes

Définition 1.8.1 Soit (E, d) un espace métrique, une application $T : E \rightarrow E$ est dite :

1) Lipschitzienne (ou k -Lipschitzienne) si est seulement si il existe une constante $k \geq 0$ vérifie :[9]

$$\forall x, y \in E : d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

2) contraction si est seulement si :

elle est k -Lipschitzienne et $0 < k < 1$, c'est à dire:

$$\forall x, y \in E : d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \text{ avec } 0 < k < 1.$$

3) non expansive si est seulement si elle est 1-Lipschitzienne.

4) contractive si est seulement si :

$$\forall x, y \in E : d(T(x), T(y)) < d(x, y).$$

5) isométrie est seulement si :

$$\forall x, y \in E : d(T(x), T(y)) = d(x, y).$$

Remarque 1.8.1 *Il est clair que : si T est non expansive alors elle est Lipschitzienne.*

Exemple 1.8.1

$$E = \left[\frac{1}{2}, 2 \right], \quad d = |\cdot|, \quad T(x) = \frac{1}{x}$$

T est k -Lipschitzien.

Preuve.

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \\ &= \frac{1}{|xy|} |x - y| \\ \frac{1}{4} &\leq xy \leq 4 \\ \Rightarrow |T(x) - T(y)| &\leq 4|x - y| \end{aligned}$$

Donc T est 4-Lipschitzien. ■

Exemple 1.8.2

$$E = \mathbb{R}, \quad d = |\cdot|, \quad T(x) = \frac{x}{3} + 7$$

T est une contraction.

Preuve.

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= \left| \frac{x}{3} + 7 - \frac{y}{3} - 7 \right| \\ &= \frac{1}{3} |x - y| \end{aligned}$$

$K = \frac{1}{3} \in]0, 1[$; T est une contraction. ■

1.8.1 Contraction large

Définition 1.8.2 Soit (E, d) un espace métrique et une application $T : E \rightarrow E$.

T est une contraction large si pour tout $\psi, \varphi \in E$ avec $\varphi \neq \psi$ alors $d(T\psi, T\varphi) < d(\psi, \varphi)$ et si pour tout chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 1$ tel que:

$$[\psi, \varphi \in T, d(\psi, \varphi) \geq \varepsilon] \Rightarrow d(T\psi, T\varphi) \leq \delta d(\psi, \varphi).$$

Finissant ce paragraphe par la remarque suivante:

Remarque 1.8.2 f contractante $\Rightarrow f$ Lipschitzienne $\Rightarrow f$ uniformément continue $\Rightarrow f$ continue.

Chapitre 2

Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe de Brouwer (valable en dimension finie) puis le théorème du point fixe de Schauder (qui est la "généralisation" en dimension infinie).

Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

2.1.1 Théorème de l'application contractante

Théorème 2.1.1 (*Théorème du point fixe de Banach(1922)*)[2]

Soit (E, d) un espace métrique complet, toute contraction T d'un espace métrique complet E non vide dans lui-même admet un point fixe et un seul .

De plus nous avons la propriété suivante qui est importante :

Proposition 2.1.1 [6]

Si $x_0 \in E$ et $x_n = Tx_{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

et

$$d(x_n, x) \leq K^n(1 - K)^{-1}d(x_1, x_0), n \geq 1$$

x étant le point fixe de T .

Démonstration. ■

a) L'existence

On va utiliser la méthode dite des approximations successive.

Soit x_0 un point quelconque de E , posons:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f_2(x_0), \dots, x_n = f(x_{n-1}) = f_n(x_0), \dots$$

Nous formons ainsi une suite infinie $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ d'éléments de E .

Nous allons montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Comme f est une contraction, on a la suite des inégalités :

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0))$$

$$\leq kd(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1))$$

$$\leq kd(x_2, x_1)$$

$$\leq k^2d(x_1, x_0)$$

.

.

.

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}))$$

$$\leq kd(x_n, x_{n-1})$$

$$\leq k^n d(x_1, x_0)$$

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\leq (k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + k + 1)k^n d(x_1, x_0)$$

$(k^p + k^{p-1} + \dots + k + 1)$ somme de $(p + 1)$ terme d'une suite géométrique.

Alors:

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{1 - k^{p+1}}{1 - k} k^n d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0)$$

On en déduit bien que $d(x_{n+p}, x_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par suite, elle admet une limite a , alors x_n tend vers a on voit que $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers $f(a)$ d'après la continuité de f , et comme x_{n+1} tend aussi vers a , on a bien $a = f(a)$, et a est un point fixe.

b) L'unicité

Supposons que f admet deux point fixe a et b :

$$a \neq b \quad f(a) = a \quad \text{et} \quad f(b) = b$$

$$d(a, b) = d(f(a), f(b))$$

f contraction $0 < k < 1$

$$d(a, b) \leq kd(a, b) < d(a, b)$$

On suppose que $a \neq b$ alors $d(a, b) \neq 0$ donne $k \geq 1$
est une contradiction, alors $a = b$.

Remarque 2.1.1 *L'unicité du point fixe est évidente, même si E n'est pas complet.*

Conclusion 2.1.1 *Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe.*

En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$.

Ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

2.2 Le théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation.

Définition 2.2.1 *On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute application continue $T : E \rightarrow E$ possède un point fixe.*

On note par B_n la boule unité fermée de E^n .

On a le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 (Brouwer 1912)[1]

La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Comme ce théorème est déjà démontré pour n pair [voir 1], il ne reste plus qu'à montrer que si B_{n+1} a la propriété du point fixe, alors B_n l'a aussi.

Soient la fonction $f : B_n \rightarrow B_n$ continue et π la projection définie par :

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

On a alors $\pi(B_{n+1}) = B_n$, et de plus $f \circ \pi$ est continue de B_{n+1} dans $B_n \subset B_{n+1}$.

Donc, il existe $y \in B_{n+1}$ tel que $(f \circ \pi)(y) = y$. Alors $y \in B_n$ donc $\pi(y) = y$. On en déduit que y est un point fixe de f sur B_n . ■

2.2.1 Autre forme de théorème

La plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :

Dans le plan : Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe.

Remarque 2.2.1 *Il est possible de généraliser à toute dimension finie.*

Dans un espace euclidien : Toute application T continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Il peut encore être un peu plus général.

Convexe compact : Toute application T continue d'un convexe compact M d'un espace euclidien à valeur dans M admet un point fixe.

2.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le Théorème du Point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Schauder a généralisé le résultat de Brouwer en dimension infinie. Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 (Schauder 1930)[3]

Soit E un espace de Banach et $M \subset E$ un convexe, non vide et compact.

Alors toute application continue $T : M \rightarrow M$ possède un point fixe dans M .

Ou de manière équivalente :

Soit E un espace de Banach et $M \subset E$ un fermé, borné, convexe et non vide.

Alors toute application compacte $T : M \rightarrow M$ possède un point fixe dans M .

2.4 Théorème de Krasnoselskii

En 1955 Krasnoselskii a observé que dans un bon nombre de problèmes, l'intégration d'un opérateur différentiel perturbé donne naissance à une somme de deux applications, une contraction et une application compacte. Il déclare alors (l'inversion d'un opérateur différentiel perturbé génère la somme d'une contraction et une application compacte).

2.4.1 Théorème d'Arzela-Ascoli

Théorème 2.4.1 [5]

Soit (E, d) un espace métrique compact et soit (F, δ) un espace métrique quelconque. On considère l'espace métrique $C^0(E, F)$ des applications $f, g : E \rightarrow F$ continue sur E , muni de la distance uniforme $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in E} \delta(f(x), g(x))$, soit M une partie de $C_\infty(E, F)$, alors:

$$M \text{ est relativement compact} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) M \text{ équicontinue sur } E. \\ 2) \forall x \in E, \text{ l'ensemble } H(x) = \{f(x) / f \in M\} \\ \text{est relativement compact dans } (F, \delta). \end{cases}$$

Exemple 2.4.1 Soit $g : ([0, 1]) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ application continue et considérons l'équation intégrale

$$u(t) \rightarrow \int_0^t g(s, u(s)) ds \quad t \in [0, 1]$$

alors l'opérateur de Hammerstein:

$$G : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

$$u \rightarrow Gu \text{ tel que } Gu(t) = \int_0^t g(s, u(s)) ds$$

est compact.

Preuve. Il faut montrer que G est continue et l'image de tout borné est relativement compact.

$E = C([0, 1], \mathbb{R})$ est un espace de Banach muni de la norme de sup.

1- G continue:

Soit $(u_n)_n \subset E$ est une suite telle que:

$$\|u_n - u\| = \sup_{x \in [0, 1]} |u_n(x) - u(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Comme g est continue et la convergence de (u_n) vers u est uniforme, on en déduit que:

$$g(\cdot, u_n(\cdot)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(\cdot, u(\cdot))$$

et donc

$$(Gu_n)(t) = \int_0^t g(s, u_n(s)) ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t g(s, u(s)) ds = Gu(t)$$

alors G continue.

2- L'image de tout borné est relativement compact.

Soit $A \subset E$ borné et $B = G(A) \subset E$ on a:

a) B est uniformément borné.

En effet, $\forall \nu \in B, \exists u \in A : \nu = G(u)$.

Alors:

$$\nu(t) = Gu(t) = \int_0^t g(s, u(s)) ds, t \in [0, 1]$$

Comme A est borné, il existe $M > 0$ telle que $\|u\| \leq M, \forall u \in A$.

i.e: $|u(s)| \leq M, \forall s \in [0, 1]$ et $\forall u \in A$. Comme g est continue, il est borné

sur le compact $[-M, +M]$ et donc il existe $K > 0$ telle que:

$$|g(s, u(s))| \leq K, \forall s \in [0, 1] \quad (2.4.1)$$

Alors:

$$|\nu(t)| = |Gu(t)| \leq K \int_0^t ds = Kt \leq K, \forall t \in [0, 1]$$

Donc B est borné.

b) B est équicontinue.

On a: $\forall \nu \in B$

$$\begin{aligned} |\nu(t_1) - \nu(t_2)| &= \left| \int_0^{t_1} g(s, u_n(s)) ds - \int_0^{t_2} g(s, u_n(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_1}^{t_2} g(s, u_n(s)) ds \right| \end{aligned}$$

d'après (2.4.1):

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} g(s, u_n(s)) ds \right| &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} k ds \right| \\ &= K |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \leq \frac{\varepsilon}{k}$ telle que, $\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$:

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |\nu(t_1) - \nu(t_2)| \leq k\delta \leq \varepsilon, \forall \nu \in B$$

d'où l'équicontinuité de B .

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli $\left\{ \begin{array}{l} B \text{ borné} \\ B \text{ équicontine} \end{array} \right. \Rightarrow B \text{ relativement compact.}$

Donc l'opérateur G est compact. ■

2.4.2 Théorème de Krasnoselskii

Théorème 2.4.2 [7]

Soit Y un espace de Banach, et D un ensemble non vide, fermé, borné et convexe de Y et soient U et C deux opérateurs de D dans Y , vérifie les conditions suivantes :

- $Ux + Cy \in D, \forall x, y \in D$.
- U est une contraction (k étant la constante de contraction).
- C est compact et continue.

alors il existe $x \in D$ tel que $Ux + Cx = x$.

Remarque 2.4.1 Si $U = 0$ alors ce théorème coïncide avec le principe de l'application contractante de Banach, et si $C = 0$ il coïncide avec le théorème de Schauder.

Démonstration. ■

On peut démontrer ce théorème de deux méthodes:

1) Première méthode:

(la condition de théorème de Schauder)

U est une contraction, soit y fixe dans D , L'opérateur $Zx + Cy$ admet une solution unique

z dans D . On définit l'application F par :

$$\begin{aligned} F & : D \rightarrow D \\ y & \rightarrow Fy = z \\ Fy & = Uy + Cy \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

On a $F(D) \subset D$ donc F applique D dans D , on montre que F est compact et continue.

F continue Soit y_n un point de D alors on a:

$$Fy = UFy + Cy$$

$$Fy_n = UFy_n + Cy_n \tag{2.4.3}$$

$$\begin{aligned} Fy - Fy_n &= UFy + Cy - (UFy_n + Cy_n) \\ &= UFy - UFy_n + Cy - Cy_n \\ \| Fy - Fy_n \| &= \| UFy - UFy_n + Cy - Cy_n \| \\ \| Fy - Fy_n \| &\leq \| UFy - UFy_n \| + \| Cy - Cy_n \| \\ \| Fy - Fy_n \| &\leq k \| Fy - Fy_n \| + \| Cy - Cy_n \| \\ (1 - k) \| Fy - Fy_n \| &\leq \| Cy - Cy_n \| \\ \| Fy - Fy_n \| &\leq \frac{1}{1 - k} \| Cy - Cy_n \| \end{aligned}$$

Donc F est continue.

$F(D)$ est relativement compact on montre que Fy_1, Fy_2, \dots, Fy_n est un ε -réseau fini de $F(D)$.

i.e :

$$F(D) \subset \bigcup_{i=1}^n B(Fy_i, \varepsilon)$$

Comme C est compact donc $C(D)$ est relativement compact .

$$\Gamma = \{Cy_1, Cy_2, \dots, Cy_n\}$$

$\forall y \in C(D), \exists y_1 \in \Gamma : d(y, y_1) < \varepsilon$ implique que Cy_1 compact, on peut écrire :

$$\forall y \in C(D), \exists y_2 \in C(D) : d(y, Cy_2) \leq d(y, Cy_1) + d(Cy_1, Cy_2) \leq 2\varepsilon$$

Donc il existe 2ε -réseau de $C(D)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (1 - k) \varepsilon\text{-réseau } Cy_1, Cy_2, \dots, Cy_n$$

i.e: les boules

$$C(D) \subset \bigcup_{k=1}^n B(Fy_k, (1-k)\varepsilon)$$

Comme $\|Fy - Fy_n\| \leq \frac{1}{1-k} \|Cy - Cy_n\|$ alors Fy_1, Fy_2, \dots, Fy_n est un ε -réseau de $F(D)$, et ça implique que $F(D)$ est totalement borné ce qui donne que $F(D)$ est relativement compacte, donc F est compact.

F est continue et compact d'après le théorème de Schauder on conclure qu'il existe $y \in D$ tel que $Fy = y$ pour $x \in D$:

$$Ux + Cx = x$$

2) Deuxième méthode:

On pose $T = U + S$ et $Tx = Ux + Sx$, on peut démontrer que $Tx = x$

$$\begin{aligned} Tx &= x \\ \Leftrightarrow Ux + Sx &= x \\ \Leftrightarrow Sx &= x - Ux \\ \Leftrightarrow Sx &= (I - U)x \end{aligned}$$

Si $(I - U)$ est bijective alors il admet un inverse $(I - U)^{-1}$ (l'homéomorphisme de Banach)

$(I - U)^{-1}$ est continue alors

$$x = (I - U)^{-1}Sx \Leftrightarrow Tx = (I - U)^{-1}Sx$$

Donc T vérifie la condition de Schauder, alors il existe $x \in D$ tel que $Tx = x$.

1) $(I - U)$ bijective de D dans $S(D)$

Soit $y \in D$ vérifie $y = Uy + Sx$, on considère la suite (y_p) tel que

$$y_{p+1} = Uy_p + Sx \text{ ((}y_p\text{) est une suite de Cauchy)}$$

$$\begin{aligned} \|y_{p+q} - y_p\| &= \|Uy_{p+q-1} - Uy_{p-1}\| \\ &\leq k \|y_{p+q-1} - y_{p-1}\| \text{ (}U \text{ contraction)} \\ &\leq k^p \|y_q - y_0\| \rightarrow 0 \text{ (}0 < k < 1\text{)} \end{aligned}$$

(y_p) est une suite de Cauchy tend vers y .

Alors:

$$y = Uy + Sx \Rightarrow Sx = (I - U)y, y \in D$$

$$(I - U)(D) \subset S(D)$$

Donc $(I - U)$ est bijective.

Si $(I - U)(D) \subsetneq S(D) \exists y \in D$ tel que $y - Uy \notin S(D)$, implique que :

$y - Uy \neq Sx$ donc $I - U$ surjective de D dans $S(D)$

$(I - U)$ est injective $(I - U)y_1 = (I - U)y_2$.

Et on a:

$$|Uy_1 - Uy_2| \leq k|y_1 - y_2|$$

Donc:

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| &\leq k|y_1 - y_2| \\ \Rightarrow y_1 - y_2 &= 0 \text{ car } 0 < k < 1 \end{aligned}$$

$y_1 = y_2$ ce que donne $(I - U)$ est injective.

Donc elle est bijective et $(I - U)(D) \subset S(D)$

2) $(I - U)^{-1}$ continue:

On pose $z_n = (I - U)^{-1}(x_n)$, et on démontre que :

$$(I - U)^{-1}(x_n) \rightarrow (I - U)^{-1}(x) : x_n \rightarrow x$$

(z_n) est une suite de Cauchy ?

$$z_{n+m} - z_n = z_{n+m} - Uz_{n+m} + z_{n+m} - Uz_n + Uz_n - z_n$$

$$\|z_{n+m} - z_n\| \leq \frac{k}{c} \|x_{n+m} - x_n\| \rightarrow 0$$

U est un contraction, (z_n) suite de Cauchy converge vers z , où $x = z - U(z)$ alors

:

$$\|(z_n - Uz_n) - (z - Uz)\| \rightarrow 0$$

Donc : $(I - U)^{-1}$ est continue.

On a $T(x) = (I - U)^{-1}S(x)$, $(I - U)^{-1}$ est continue, et S est continue et compact alors T est Continue et compact, D est fermé depuis le théorème de Schauder, T admet un point fixe verifie $T(x) = x$.

i.e:

$$\begin{aligned}(I - U)^{-1}Sx &= x \\ x &= (U + S)x = Ux + Sx.\end{aligned}$$

On peut utilisé la lemme suivant pour démontrer la théorème de Krasnoselskii :

Lemme 2.4.1 [1] *Si $(H, \|\cdot\|)$ est un espace normé, $M \subset H$ et $T : M \rightarrow H$ une application contractante, alors $(I - B)$ est un homéomorphisme de M sur $(I - B)M$. En outre, si $(I - B)M$ est précompact, alors M l'est également.*

Preuve. Il est clair que $I - T$ est continue. Comme T est une contraction, alors pour tout $x, y \in M, x \neq y$

$$\begin{aligned}\|(I - T)x - (I - T)y\| &= \|(x - y) - (Tx - Ty)\| \\ &\geq \|x - y\| - \|Tx - Ty\| \geq \|x - y\| - \alpha \|x - y\| \\ &\geq (1 - \alpha) \|x - y\|\end{aligned}$$

Où $\alpha \in [0, 1]$. Ceci montre que $(I - T)^{-1}$ existe et est continue. Cette dernière inégalité-montre aussi que si x_1, x_2, \dots, x_n est un ε -net pour M , alors $(1 - T)_{x_1}, (1 - T)_{x_2}, \dots, (1 - T)_{x_n}$ est un $(1 - \alpha)\varepsilon$ -net pour $(I - T)M$. ■

Preuve. (théorème de Krasnoselskii)

Pour chaque $y \in M$ fixé, l'application

$$z = Bz + Ay$$

Possède une solution unique $z \in M$, puisque $z \rightarrow Bz + Ay$ définit une contractionde M dans lui même .

Ainsi, $z = (I - B)^{-1}Ay$ est un élément de M .

Par le lemme(2.4.1), l'application $(I - B)^{-1}A$ est continue et compacte de M dans M . D'après le Théorème du Schauder, $(I - B)^{-1}A$ possède un point fixe y dans M .

Ce point y est l'élément cherché. ■

Remarque 2.4.2 *La théorème de Krasnoselskii peut être formulé d'une façon plus générale, considérant d'un seul opérateur $F : D \times N(D) \rightarrow D$ tel que N et un opérateur de D dans D .*

$$F(x, y) = Ux + y, N(x) = Cx$$

- 1) F est une contraction en x pour tout $y \in N(D)$.
- 2) F est une contraction en y_x par rapport à $x \in D$.
- 3) N est compact et continue. Alors sous ces conditions.

$x = F(x, N(x))$ a une solution dans D .

La condition $Ux + Sy \in D$ de théorème de Krasnoselskii être remplacé par $Ux + Sx \in D (\forall x \in D)$.

2.5 Extension du théorème de Krasnoselskii

Soit U et S deux opérateurs dans D tel que:

- 1) U est une φ -contraction (φ continue).
- 2) S est compact et continue .
- 3) $Ux + Sy \in D \forall x, y \in D$.

alors il existe x dans D tel que $x = Ux + Sx$.

Remarque 2.5.1 *La contraction est un cas particulier de la φ -contraction.*

2.5.1 Théorème de Burton

Théorème 2.5.1 [1]

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $T : E \rightarrow E$ une contraction large. On suppose qu'il existe $x \in E$ et $L > 0$ tq $d(x, B^n x) \leq L, \forall n \geq 1$.

Alors T admet un point fixe unique dans E .

Preuve. Soit $x \in E$ et engendrons la suite $\{B^n x\}_{n \geq 1}$. de toute évidence si cette suite est de Cauchy. Alors la limite sera un point fixe pour B .

Supposons alors que $\{B^n x\}_{n \geq 1}$ n'est pas de Cauchy, alors:

$\exists \varepsilon > 0$, tel que pour $K \in \mathbb{N}, \exists n_k, m_k \geq K$ avec $m_k > n_k$ et $d(B^{m_k} x, B^{n_k} x) \geq \varepsilon$.

Ainsi:

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq d(B^{m_k}x, B^{n_k}x) \\ &\leq d(B^{m_k-1}x, B^{n_k-1}x) \\ &\leq \dots \leq d(B^{m_k-n_k}x, x)\end{aligned}$$

Comme B est une contraction large, alors pour cet $\varepsilon > 0$, $\exists \delta < 1$ tel que:

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq d(B^{m_k}x, B^{n_k}x) \\ &\leq \delta d(B^{m_k-1}x, B^{n_k-1}x) \\ &\leq \dots \leq \delta d(B^{m_k-n_k}x, x) \leq \delta^{n_k} L\end{aligned}$$

mais $\delta < 1$, cela produira, pour n_k assez large, une contradiction.

D'où la conclusion. ■

Lemme 2.5.1 *Si $(S, \|\cdot\|)$ est un espace normé, si $M \subset S$ et $B : M \rightarrow S$ une contraction*

large, alors $(I - B)$ est un homéomorphisme de M dans $(I - B)M$.

2.5.2 Théorème de Krasnoselskii-Burton

Théorème 2.5.2 [1]

Soit S un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe, bornée et fermée de S . On suppose $A, B : M \rightarrow M$ sont deux applications telles que:

- 1) $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$.
- 2) A est continue et AM est contenu dans un compact .
- 3) B est une contraction large.

Alors $\exists x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*$.

Preuve. Pour chaque $y \in M$ fixé l'application $Hx = Bx + Ay$ est une contraction large sur M possédant un point fixe unique z (comme M est bornée l'existence du nombre L du Théorème (2.5.1) de Burton est assurée). Donc $z = Bz + Ay$ possède une unique solution.

Ainsi, $(I - B)z = Ay$.

Par le Lemme (2.5.1) $Py := (I - B)^{-1}Ay$ est continue de M dans M .

Mais, AM est contenu dans un sous ensemble compact de M et $(I - B)^{-1}$ est continue de AM dans M , il est alors bien connu que $(I - B)^{-1}AM$ est contenu dans un sous ensemble compact de M . Selon le Théorème (2.3.1) de Schauder, il existe un point fixe $x^* = (I - B)^{-1}Ax^*$

i.e:

$$Ax^* + Bx^* = x^*.$$

■

Chapitre 3

La Application

Dans ce chapitre, on discutera les résultats d'existence des solutions pour les inégalités variationnelles définies par des formes non linéaires sur un espace de Banach et pour lesquelles on peut appliquer le théorème de point fixe de Krasnoselskii.

3.1 Stabilité par le théorème de Krasnoselskii-Burton

Concrètement, ce travail concerne une classe d'équations qui s'exprime sous la forme suivante:[10]

$$x'(t) = -a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t - r(t)) + b(t)G(x(t), x(t - r(t))), t \geq 0, \quad (3.1.1)$$

avec une condition initiale:

$$x(t) = \psi(t), t \in [m_0, 0],$$

et

$$\psi \in C([m_0, 0], R), [m_0, 0] = \{u \leq 0; u = t - r(t), t \geq 0\}.$$

On suppose que $a, b \in C(R_+, R)$ avec $a(t) \geq 0, c \in C^1(R_+, R), h : R \rightarrow R$ une fonction continue par rapport à ses arguments, on suppose aussi que $h(0) = 0$ et $r \in C^2(R_+, R)$

tq:

$$r'(t) \neq 1, t \in R_+. \quad (3.1.2)$$

On suppose aussi que $G(t, x, y)$ est globalement Lipschitzienne par rapport à x et y , i.e., il existe des constantes positives N_1 et N_2 telles que:

$$|G(t, x, y) - G(t, z, w)| \leq N_1 \|x - z\| + N_2 \|y - w\|.$$

3.1.1 Transformation et inversion de l'équation

On doit donc inverser (3.1.1). Pour le faire, on va l'écrire sous une forme plus attractive afin d'exprimer l'équation sous une forme d'une équation intégrale à partir de laquelle on va définir une application de point fixe qui convient au théorème de point fixe de Krasnoselskii-Burton.

Lemme 3.1.1 [10] *Supposons vraie la condition (3.1.2). Si $x(t)$ est solution de l'équation (3.1.1) sur un intervalle $[0, \sigma]$ et satisfait la condition $x(t) = \psi(t)$ pour $t \in [m_0, 0]$ alors $x(t)$ est solution de l'équation intégrale:*

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \psi(-r(0)) \right] \exp^{-\int_0^t a(u) du} \\ & + \frac{c(0)}{1 - r'(0)} x(t - r(t)) - \int_0^t u(s) x(s - r(s)) \exp^{-\int_0^t a(u) du} ds \\ & + \int_0^t b(s) G(x(s), x(s - r(s))) \exp^{-\int_0^t a(u) du} ds \\ & + \int_0^t a(s) H(x(s)) \exp^{-\int_0^t a(u) du} ds, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

où

$$u(t) = \frac{(c'(t) + a(t)c(t))(1 - r'(t)) + c(t)r''(t)}{(1 - r'(t))^2} \quad (3.1.4)$$

et

$$H(x(t)) = x(t) - h(x(t)). \quad (3.1.5)$$

Inversement, si une fonction continue $x(t)$ est égale à $\psi(t)$ sur $[m_0, 0]$ et est solution de (3.1.3) sur un intervalle $[0, \tau]$ alors $x(t)$ est solution de l'équation (3.1.1) sur $[0, \tau]$.

Preuve. En rajoutant aux deux membres de l'équation (3.1.1) le terme $a(t)x(t)$ on aura $x'(t) + a(t)x(t) = a(t)x(t) - a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t - r(t)) + b(t)G(x(t), x(t - r(t)))$

Multiplions les deux côtés de (3.1.1) par $\left(\exp^{-\int_0^t a(u)du}\right)$ et puis en intégrant de 0 à t on obtient,

$$\begin{aligned} x(t) &= \psi(0) \exp^{-\int_0^t a(u)du} + \int_0^t a(s)[H(x(s))] \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\quad + \int_0^t c(s)x'(s - r(s)) \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\quad + \int_0^t b(s)G(r(s), r(s - r(s))) \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

On réécrit

$$\int_0^t c(s)x'(s - r(s)) \exp^{-\int_0^t a(u)du} ds = \int_0^t \frac{c(s)}{(1 - r'(s))} (1 - r'(s))x'(s - r(s)) \exp^{-\int_0^t a(u)du} ds.$$

En effectuant une intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t c(s)x'(s - r(s)) \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds &= \frac{c(t)}{(1 - r'(t))} x'(s - r(t)) \\ &\quad - \frac{c(0)}{(1 - r'(0))} \psi(-r(0)) \exp^{-\int_0^t a(u)du} \\ &\quad - \int_0^t u(s)x(s - r(s)) \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

où $u(s)$ est donnée par l'expression (3.1.4).

Enfin, en substituant (3.1.7) dans (3.1.6) on aboutit à (3.1.3). Inversement, supposons qu'une fonction continue $x(t)$ est égale à $\psi(t)$ sur $[m_0, 0]$ et est solution de (3.1.3) sur un intervalle $[0, \tau]$. Alors, $x(t)$ est différentiable sur $[0, \tau]$. La dérivé de (3.1.3) redonne (3.1.1).

■

3.1.2 Bornétude et convergence vers zéro des solutions

Pour appliquer le théorème de Krasnoselskii-Burton, on doit choisir un un espace de Banach convenable dépendant sur la donnée initiale ψ et construire deux applications, une contraction large et une application compacte qui obéissent aux conditions du théorème. Pour cela,

3.1. Stabilité par le théorème de Krasnoselskii-Burton

considérons S l'espace de Banach de fonctions continues et bornées $\varphi : [m_0, \infty[\rightarrow R$ muni de la norme du suprémum $\|\cdot\|$. [10]

Soit $L > 0$ et définissons l'ensemble:

$$S_\psi := \{\varphi \in S/\varphi \text{ Lipschitzienne, } \varphi(t) \leq L, t \in [m_0, \infty[, \varphi(t) = \psi(t) \text{ si } t \in [m_0, 0] \text{ et } \varphi(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty\}. \quad (3.1.8)$$

S est convexe, borné et de Banach avec la norme $\|\cdot\|$. [voir 10]

Pour $\varphi \in S_\psi$ et $t \geq 0$, définissons les applications A, B et F sur S_ψ par:

$$\begin{aligned} A\varphi(t) : &= \frac{c(t)}{1 - r'(t)}\varphi(t - r(t)) + \int_0^t b(s)G(\varphi(s), \varphi(s - r(s))) \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &+ \int_0^t u(s)\varphi(s - r(s)) \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$B\varphi(t) := [\psi(0) - c(0)1 - r'(0)\psi(-r(0))] \exp^{-\int_0^t a(u)du} + \int_0^t a(s)H(\varphi(s)) \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds, \quad (3.1.10)$$

et

$$F\varphi(t) := A\varphi(t) + B\varphi(t). \quad (3.1.11)$$

Si on sera capable de montrer que F possède un point fixe φ sur l'espace S_ψ , alors ce point φ va vérifier automatiquement, $x(t, 0, \psi) = \varphi(t)$ pour $t \geq 0$, $x(t, 0, \psi) = \psi(t)$ sur $[m_0, 0]$, $x(t, 0, \psi)$ et sera solution de (3.1.1) et aussi $x(t, 0, \psi) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$.

Soit: $\alpha(t) := \frac{c(t)}{1 - r'(t)}$

et supposons qu'il existe des constantes $k_1, k_2, k_3 > 0$ qui, pour $0 \leq t_1 < t_2$, vérifient:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} a(u)du \right| \leq k_1 |t_2 - t_1|, \quad (3.1.12)$$

$$|r(t_2) - r(t_1)| \leq k_2 |t_2 - t_1| \quad (3.1.13)$$

et

$$|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \leq k_3 |t_2 - t_1| \quad (3.1.14)$$

Supposons que pour $t \geq 0$,

$$|u(t)| \leq \delta a(t), \quad (3.1.15)$$

$$(N_1 + N_2) |b(t)| \leq \beta a(t), \quad (3.1.16)$$

$$\sup_{t \geq 0} |\alpha(t)| = \alpha, \quad (3.1.17)$$

et que

$$J(\alpha + \beta + \delta) < 1, \quad (3.1.18)$$

$$\max(|H(-L)|, |H(L)|) \leq \frac{2L}{J}, \quad (3.1.19)$$

avec α, β, δ et J sont des constantes avec $J > 3$.

Choisissons $\gamma > 0$ assez petite de sorte que

$$\left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r(0)} \right| \right) \gamma \exp^{-\int_0^t a(u) du} + \frac{3L}{J} \leq L. \quad (3.1.20)$$

Ce choix de γ dans la relation (3.1.20) sera utilisé pour prouver que, si $\varepsilon = L$ et si $\|\psi\| < \gamma$ alors les solutions vont satisfaire $x(t, 0, \psi) < \varepsilon$.

Supposons aussi que:

$$t - r(t) \rightarrow \infty \text{ et } \int_0^t a(u) du \rightarrow \infty; \text{ lorsque } t \rightarrow \infty \quad (3.1.21)$$

$$\alpha(t) \rightarrow 0, \quad \frac{u(t)}{a(t)} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{b(t)}{a(t)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty. \quad (3.1.22)$$

Nous rappelons que l'application (3.1.5) $H(x(t)) = x(t) - h(x(t))$ est une large contraction sur S_ψ . la fonction $h : R \rightarrow R$ est continue sur $[-L, L]$ et différentiable sur $[-L, L]$ et

$$\sup_{t \in [-L, L]} |h'(t)| \leq 1.$$

Par plusieurs étapes on va montrer que les conditions du théorème (2.5.2) de Karsnoselskii-Burton sont vérifiées.

Lemme 3.1.2 *Supposons que (3.1.15), (3.1.18) et (3.1.21) sont valides. Si $\varphi \in S_\psi$ alors $|A\varphi(t)| \leq \frac{L}{J} < L$ où A est l'application donnée par (3.1.9). En outre, $A\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Preuve. 1) $A\varphi(t)$ est bornée par L :

En utilisant les conditions (3.1.15), (3.1.18) et l'expression (3.1.9) de A , on obtient:

$$\begin{aligned} |A\varphi(t)| &\leq \left| \frac{c(t)}{1-r(t)} \varphi(t-r(t)) \right| + \int_0^t |b(s)| |G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))| \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ &+ \int_0^t |u(s)\varphi(s-r(s))| \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds. \\ \Rightarrow |A\varphi(t)| &\leq \alpha L + \int_0^t (N_1 + N_2) |b(s)| L \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds + \int_0^t |u(s)| L \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ &\leq L \left(\alpha + \int_0^t \beta a(s) \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds + \int_0^t \delta a(s) \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds \right) \leq L(\alpha + \beta + \delta) \leq \frac{L}{J} \leq L. \end{aligned}$$

Alors AS_ψ est bornée par L .

2) $A\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$:

Il est clair que, d'ûe aux conditions $t-r(t) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$ de (3.1.21) et (3.1.17), le premier terme sur le côté droit de A tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

C'est à dire:

$$\left| \frac{c(t)}{1-r(t)} \varphi(t-r(t)) \right| \leq \alpha |\varphi(t-r(t))| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Il reste à montrer que les deux autres termes intégraux de A tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. Vers cela, soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisissons T de telle façon que $|\varphi(t-r(t))| < \varepsilon$ pour $t \geq T$:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t |u(s)\varphi(s-r(s))| \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds \right| \leq \int_0^T |u(s)\varphi(s-r(s))| \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ &+ \int_T^t |u(s)\varphi(s-r(s))| \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds \leq L \exp^{-\int_T^t a(u) du} \int_0^T |u(s)| \exp^{-\int_s^T a(u) du} ds \\ &+ \varepsilon \int_T^t |u(s)| \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds \leq L \exp^{-\int_T^t a(u) du} \delta + \varepsilon \delta. \end{aligned}$$

Le terme $L \exp^{-\int_T^t a(u) du} \delta \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow \infty$, arbitrairement due à la condition (3.1.21).

Le terme intégral restant de A converge vers zéro par une procédure similaire. Ceci achève la démonstration. ■

Lemme 3.1.3 *Supposons que les conditions (3.1.15), (3.1.19) et (3.1.21) sont valides. Pour A et B définies par (3.1.9) et (3.1.10) on a, si $\phi, \varphi \in S_\psi$ sont arbitraires, alors $|B\varphi + A\phi| \leq$*

3.1. Stabilité par le théorème de Krasnoselskii-Burton

L . En outre, B est une contraction large sur S_ψ possédant un point fixe unique dans S_ψ et $B\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Preuve. En utilisant les définitions (3.1.9) et (3.1.10) de A et B et en appliquant (3.1.15), (3.1.19), on obtient:

$$\begin{aligned} |B\varphi(t) + A\phi(t)| &\leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \|\psi\| \exp^{-\int_0^t a(u)du} + \alpha L \\ &+ \int_0^t (N_1 + N_2) |b(s)| L \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds + L \int_0^t |u(s)| \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds + \frac{2L}{J} \int_0^t a(s) \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \|\psi\| \exp^{-\int_0^t a(u)du} + L(\alpha + \beta + \delta) + \frac{2L}{J} \\ &\leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \|\psi\| \exp^{-\int_0^t a(u)du} + \frac{L}{J} + \frac{2L}{J}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en choisissant une fonction initiale ψ avec une amplitude assez réduite, disant $\|\psi\| < \gamma$, alors, de l'inégalité précédente et faisons référence à (3.1.20), on obtient

$$|B\varphi(t) + A\phi(t)| \leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \gamma \exp^{-\int_0^t a(u)du} + \frac{3L}{J} \leq L.$$

Mais $0 \in S_\psi$, on a aussi prouvé que $\|B\varphi(t)\| \leq L$. La preuve que $B\varphi$ est Lipschitzienne est similaire à celle de l'application $A\varphi$ ci-dessous. B est une contraction large sur S_ψ ayant un point fixe unique, $H(x(t)) = x(t) - h(x(t))$ est une large contraction sur S_ψ , on a trouvé ς tel que:

$$\begin{aligned} |B\varphi(t) - B\phi(t)| &\leq \int_0^t a(s) |(H\varphi)(s) - (H\phi)(s)| \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq \varsigma \int_0^t a(s) \|\varphi - \phi\| \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \leq \varsigma \|\varphi - \phi\|. \end{aligned}$$

Pour démontrer que $B\varphi(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$, on applique (3.1.21) pour le premier terme et pour le deuxième terme on argumente par une méthode analogue à celle utilisée pour A . ■

Lemme 3.1.4 *Si les conditions (3.1.15), (3.1.18) sont satisfaites. Alors, l'application A est continue sur S_ψ .*

Preuve. Soient $\varphi, \phi \in S_\psi$, alors:

$$\begin{aligned}
 |A\varphi(t)| &\leq \alpha |\varphi(t - r(t)) - \phi(t - r(t))| + \\
 &\quad \left| \int_0^t b(s) [G(\varphi(s), \varphi(s - r(s))) - G(\phi(s), \phi(s - r(s)))] \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^t u(s) [\varphi(s - r(s)) - \phi(s - r(s))] \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \\
 &\leq \alpha \|\varphi - \phi\| + \int_0^t (N_1 + N_2) |b(s)| \|\varphi - \phi\| \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 &\quad + \|\varphi - \phi\| \int_0^t |u(s)| \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 &\leq (\alpha + \beta + \delta) \|\varphi - \phi\| \int_0^t a(s) \exp^{-\int_s^t a(u)du} ds \leq \frac{1}{J} \|\varphi - \phi\|
 \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, définissons $\eta = \varepsilon J$. Alors si $\|\varphi - \phi\| \leq \eta$ on aura

$$|A\varphi - A\phi| \leq \frac{1}{J} \|\varphi - \phi\| \leq \varepsilon.$$

Cela montre bien que A est continue. ■

Lemme 3.1.5 *Supposons que les conditions (3.1.12), (3.1.17) et (3.1.22) sont satisfaites. Alors, la fonction $A\varphi$ est Lipschitzienne et l'application A envoie S_ψ dans un sous ensemble compact de S_ψ .*

Preuve. Soit $\varphi \in S_\psi$ et soient $0 \leq t_1 < t_2$. Alors

$$\begin{aligned}
 |A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)| &\leq \left| \frac{c(t_2)}{1 - r'(t_2)} \varphi(t_2 - r(t_2)) - \frac{c(t_1)}{1 - r'(t_1)} \varphi(t_1 - r(t_1)) \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^{t_2} b(s) G(\varphi(s), \varphi(s - r(s))) \exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{t_1} b(s) G(\varphi(s), \varphi(s - r(s))) \exp^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^{t_2} u(s) \varphi(s - r(s)) \exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds - \int_0^{t_1} u(s) \varphi(s - r(s)) \exp^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right|.
 \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Des hypothèses (3.1.13),(3.1.14), on a

$$\begin{aligned}
 |\alpha(t_2)\varphi(t_2 - r(t_2)) - \alpha(t_1)\varphi(t_1 - r(t_1))| &\leq |\alpha(t_2)| |\varphi(t_2 - r(t_2)) - \varphi(t_1 - r(t_1))| \quad (3.1.24) \\
 + |\varphi(t_1 - r(t_1))| |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| &\leq \alpha K |(t_2 - t_1) - (r(t_2) - r(t_1))| + LK_3 |t_2 - t_1| \\
 &\leq (\alpha K + \alpha K K_2 + LK_3) |t_2 - t_1|
 \end{aligned}$$

où k est la constante de Lipschitz de φ . Des hypothèses (3.1.12) et (3.1.15), on en déduit:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_0^{t_2} u(s)\varphi(s - r(s)) \exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds - \int_0^{t_1} u(s)\varphi(s - r(s)) \exp^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \quad (3.1.25) \\
 = &\left| \int_0^{t_1} u(s)\varphi(s - r(s)) \exp^{-\int_s^{t_1} a(u)du} \left(\exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} - 1 \right) ds + \int_{t_1}^{t_2} u(s)\varphi(s - r(s)) \exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right| \\
 \leq &L \left| \exp^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} - 1 \right| \int_0^{t_1} \delta a(s) \exp^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds + L \int_{t_1}^{t_2} |u(s)| \exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \\
 \leq &L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + L \int_{t_1}^{t_2} \exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} d \left(\int_{t_1}^s |u(v)| dv \right) \\
 \leq &L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + L \left\{ \left[\exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} \int_{t_1}^s |u(v)| dv \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} a(s) \exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} \int_{t_1}^s |u(v)| dv ds \right\} \\
 \leq &L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + L \int_{t_1}^{t_2} |u(s)| ds \left(1 + \int_{t_1}^{t_2} a(s) \exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right) \leq L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + 2L \int_{t_1}^{t_2} |u(s)| ds \\
 \leq &L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + 2L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds \leq 3L\delta K_1 |t_2 - t_1|.
 \end{aligned}$$

De même, de (3.1.12) et (3.1.16), on obtient:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_0^{t_2} b(s)G(\varphi(s), \varphi(s - r(s))) \exp^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds - \int_0^{t_1} b(s)G(\varphi(s), \varphi(s - r(s))) \exp^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \\
 \leq &3L\beta K_1 |t_2 - t_1|. \quad (3.1.26)
 \end{aligned}$$

Ainsi, en substituant (3.1.24) , (3.1.25) dans (3.1.23), il vient:

$$\begin{aligned}
 |A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)| &\leq (\alpha K + \alpha K K_2 + L K_3) |t_2 - t_1| & (3.1.27) \\
 &+ 3L\delta K_1 |t_2 - t_1| + 3L\beta K_1 |t_2 - t_1| \\
 &\leq K |t_2 - t_1|
 \end{aligned}$$

Pour une certaine constante positive $K > 0$. Ceci montre bien que $A\varphi$ est lipschitzienne si φ l'est et que AS_ψ est équicontinue. Aussi, on remarque que pour une fonction arbitraire $\varphi \in S_\psi$ on aura:

$$\begin{aligned}
 |A\varphi(t)| &\leq \left| \frac{c(t)}{1 - r'(t)} \varphi(t - r(t)) \right| + \int_0^t |b(s)| |G(\varphi(s), \varphi(s - r(s)))| \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
 &+ \int_0^t |u(s)\varphi(s - r(s))| \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds \leq L\alpha(t) + \int_0^t (N_1 + N_2) L \int_0^t a(s) [|b(s)| / a(s)] \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
 &+ L \int_0^t a(s) [|u(s)| / a(s)] \exp^{-\int_s^t a(u) du} ds := q(t).
 \end{aligned}$$

En raison de (3.1.22) et en adoptant une méthode analogue à celle utilisée pour l'application A on voit que $q(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. L'ensemble AS_ψ réside dans un ensemble compact.

Toutes les conditions du Théorème de Krasnoselskii-Burton sont remplies. Par conséquent, il existe une solution pour (3.1.1) vérifiant $|x(t, 0, \psi)| \leq L$ et telle que $x(t, 0, \psi) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. ■

Bibliographie

- [1] Burton, T. A., Integral equations, implicit functions, and fixed points, Proc. Amer. Math. Soc,124 (1996), 2383-2390.
- [2] D.R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.
- [3] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.
- [4] J.Bass, Cours de Mathématiques (Tome 3), editers 120, boulevard saint-Germain,paris,1971.
- [5] K. Demling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg,1985.
- [6] L. SCHWARTZ: Analyse (deuxième partie) Topologie générale et analyse fonctionnelle, Edition HERMANY, PARIS 1970.
- [7] M.A. Krasnoselskii, Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Groningen,1964.
- [8] M. HITTA AMARA: Cours Licence de Topologie des espaces Métriques, Universit e 8 Mai 1945, Guelma 2008-2009.
- [9] Yves Sonntag; Topologie et analyse fonctionnelle, cours de licence avec 240 exercices et 30 problème corrigés.
- [10] Ishak DERRARDJIA, Thèse Doctorat (LMD)en mathématiques, université BADJI MOKHTAR - Annaba, 2014.