



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université de Echahid Hamma Lakhdar El Oued

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire en vue de l'obtention du diplôme de Master en mathématiques
Spécialité: **Mathématique**

Intitulée:

Sur le théorème de point fixe de Monch est
ses Application

Préparé par :
BOUTA AOUATEF
LARGUET TAMADHER

Soutenu le: 29 /05 /2025

publiquement devant le jury composé de:

Mr. HAMROUNI AHMED MCA	Université d' El Oued	Encadreur
Mr.FARHAT MOHAMED EL SAID	Université d` El Oued	président
Mr.GHABSSI HUSSEIN	université d`El Oued	Examineur

Année universitaire: 2024/2025

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail :

A le père cher .

A la mère chère .

A les frères et sœurs.

A toute la famille.

A tous les amis .

Remerciements

En premier lieu , nous remercions Allah qui nous a donné le courage et la volonté afin d'accomplir ce modeste travail . Nos vifs remerciements vont aussi à l'encadreur en ce **Dr. HAMROUNI AHMED** pour son aide continue , ses précieux conseils et être patient avec nous .

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail .

Nous remercions à tous les enseignants du département mathématique pour toute l'aide apportée à nous durant notre trajet scolaire

Nous remercions les parents généreux pour leur soutien et leur encouragement à atteindre les plus hauts rangs.

Enfin , nous adressons nos remerciements à tous ceux qui nous ont aidés ou de loin

Table des matières

Notations	iii
1 Préliminaires	3
1.1 Espaces de Banach	3
1.1.1 Espaces métriques	3
1.1.1.1 Suites dans les espaces métriques	4
1.1.1.2 Continuité dans l'espace métrique	4
1.1.2 Espaces de Banach	5
1.1.3 Compacité et convexité	5
1.2 Théorèmes de point fixe	6
1.2.1 Théorème de Brouwer	7
1.2.2 Théorème de Schauder	7
1.2.3 Théorème de Darbo	7
1.2.4 Théorème de Sadovski	7
1.2.5 Théorème de Mönch	7
1.3 Mesures de non-compacité	8
1.3.1 Mesure de Kuratowski	9
1.4 Rappel sur le calcul fractionnaire	11
1.4.1 Fonctions utiles	11
1.4.2 Intégrale fractionnaire	11
1.4.3 Dérivées fractionnaires	12
1.4.3.1 Dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville	12
1.4.3.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	12
2 Application 1	18
2.1 Position du problème	18
2.2 Existence des solutions	19
2.3 Exemple	27

3 Application2	29
3.1 Position du problème	29
3.2 Exemple	35
Conclusion	37

Table des matières

Ω : ensemble non vide.

$\overline{\Omega}$: la fermeture de Ω .

$\partial\Omega$: la frontière de Ω

\mathbb{R} : l'ensemble des nombres réels.

\mathbb{N} : l'ensemble des nombres naturels.

\mathbb{C} : l'ensemble des nombres complexes.

$[\alpha]$: désigne la partie entière de α

$C([a, b], \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

$B(x_0, r)$: la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r .

$\overline{B(x_0, r)}$: la boule fermée de centre x_0 et de rayon r .

$\text{conv}\Omega$: l'enveloppe convexe d'un ensemble Ω .

$\overline{\text{conv}\Omega}$: l'enveloppe convexe fermé d'un ensemble Ω .

$|\cdot|$: valeur absolue ou module.

$\alpha(\cdot), \mu(\cdot), \gamma(\cdot)$: la mesure de non-compacité de Kuratowski ou Hausdorff.

$\text{diam}(A)$: diamètre de l'ensemble A .

$\|\cdot\|_\infty := \sup\{\|x(t)\| : t \in I\}$

$AC([a, b])$: l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$

$AC^n([a, b]) : \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a, b]), k = 0 \dots n - 1, f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}$

MNC : mesure non-compacité.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les théorèmes du point fixe sont parmi les théories les plus importantes et les plus largement utilisées dans les problèmes d'équations différentielles, en particulier pour prouver l'existence et l'unicité des solutions. Depuis l'émergence des théories du point fixe, elles ont été utilisées dans de nombreux problèmes d'analyse non linéaire et dans des problèmes de physique, de chimie, de biologie et autres.

Les théorèmes du point fixe sont souvent basés sur certaines propriétés (telles que la continuité complète, la monotonie, la contraction....) que l'application considérée doit satisfaire. Les célèbres théorèmes de point fixe sont le théorème de Banach, théorème de Schaefer et l'alternative non linéaire de Leary- Schauder. Le théorème du point fixe de Mönch est une extension des théorèmes du point fixe de Brouwer, de Schauder et de Darbo.

le théorème de point fixe de Mönch combiné avec la mesure de non compacité de Kuratowski. C'est l'une des méthodes les plus efficaces pour prouver l'existence de solutions aux équations différentielles, en particulier aux équations différentielles d'ordres fractionnaires.

Ce mémoire comprend trois chapitres.

Le première chapitre intitulé "Preliminaires", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.

-La section 1, sera consacrée aux différentes définitions de base.

Espaces métriques, espaces de Banach, compacité, convexité et lemme d'Ascoli-Arzéla.

-La section 2, sera réservée à un petit rappel sur la mesure de non compacité au sens de Kuratowski et de Hausdorff.

-La section 3, nous donnons quelques théorèmes de point fixe.

-La section 4, sous le titre calcul fractionnaire, sera consacrée aux définitions et résultats (lemmes) importants concernant la théorie du dérivée et intégrales fractionnaires.

Dans le **deuxième chapitre** nous avons utilisé la théorie de Mönch pour étudier l'existence et l'unicité des solutions au problème aux limites pour des équations fractionnaires de type Caputo suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) & , 0 \leq t \leq 1, \quad 2 < \alpha \leq 3 \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue et D^α est la norme Dérivée d'ordre fractionnaire Caputo.

Dans **Le troisième chapitre** nous avons utilisé la théorie de Mönch pour étudier l'existence et l'unicité des solutions au problème aux limites pour des équations fractionnaires avec conditions initiales intégrales suivant :

$$3.1 \begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) + f(t, x(t), {}^c D^\alpha) = 0, & 0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2 \\ ax(0) - bx'(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 g(s, x(s)) ds + \lambda \end{cases}$$

où ${}^c D^\alpha$, est la dèrivée fractionnaire de caputo, et f, g

$$f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}), a, b, \lambda \in \mathbb{R}_+, a + b > 0 \text{ et } \frac{a}{a+b} < \alpha - 1$$

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude des quelques équations différentielles en utilisant Point fixé de Möch. On transformer la solution du problème d'équation différentielle en une solution de problème pour le point fixe en adaptant les hypothèses des deux problèmes. Finalement, on donnera des exemples pour voir l'utilité du notre résultat.

Puis on donne une conclusion du travail effectué.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, définitions, résultats, lemmes et théorèmes nécessaires qui sont utiles pour la suite de cette étude. La plupart de ces définitions se trouvent dans [12] et [7].

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Espaces métriques

On dispose sur \mathbb{R} de la distance usuelle

$$d : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \longmapsto d(x, y) = |x - y|.$$

On l'utilise pour définir la convergence des suites et la continuité des fonctions. Le but ici est de généraliser cette notion.

Définition 1.1. *Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :*

1. $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (séparation).
2. $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$, (symétrie).
3. $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (inégalité triangulaire).

Le couple (E, d) est appelé un espace métrique.

Seconde inégalité triangulaire :

$$\forall x, y, z \in E, |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

Définition 1.2. *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E . On dit que A est bornée si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall (x, y) \in A^2, \text{ on a } d(x, y) \leq M.$$

Définition 1.3. Dans un espace métrique (E, d) , on appelle boule ouverte (resp. boule fermé) de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\} \quad (\text{resp. } B_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}).$$

Définition 1.4. Soit A une partie non vide et bornée de E .

On appelle diamètre de A le nombre $\delta(A)$ tel que

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y).$$

1.1.1.1 Suites dans les espaces métriques

Définition 1.5 (Convergence).

Soit (E, d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \in E$ une suite de points de E .

Soit $x \in E$. On dit que $(x_n)_n \in E$ converge vers x si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Définition 1.6 (Suite de Cauchy).

Une suite $(x_n)_n \in E$ est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \text{telque} \quad n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.

Définition 1.7 (Espace métrique complet). On dit que l'espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

1.1.1.2 Continuité dans l'espace métrique

Définition 1.8. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow E'$ est une application, on dit que f est continue en $a \in E$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, d(x, a) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.1. L'application f est continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point a de E .

Définition 1.9 (Applications lipschitziennes).

Une application $f : (E, d_E) \longrightarrow (E', d_{E'})$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, d_{E'}(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$

Remarque 1.2. Si la constante $k < 1$, on dit que f est une contraction.

1.1.2 Espaces de Banach

Dans tout le chapitre \mathbb{K} représente le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 1.10 (Norme).

Soit X un espace vectoriel. Une norme sur E est une application de E dans \mathbb{R}_+ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tous x, y dans E et tout α dans \mathbb{K} :

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité),
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.11 (Espace vectoriel normé).

Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$, noté $(E, \|\cdot\|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.

Remarque 1.3. Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.

Proposition 1.2. Soit A une partie de E et x un élément de E . Alors x est un élément de A si et seulement si x est une limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des éléments de A .

Définition 1.12. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(E', \|\cdot\|_{E'})$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow E'$ est une application, on dit que f est continue en $a \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_{E'} < \varepsilon.$$

1.1.3 Compacité et convexité

Définition 1.13 (Compacité). Un ensemble A de E est compact si de toute suite d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de A .

Proposition 1.3.

1. Si A est compact, alors A est fermé et borné.
2. Si V est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.

On peut en fait énoncer un résultat bien plus général qui souligne la différence entre la dimension finie et la dimension infinie.

Théorème 1.1. [7] La boule unité fermée de V est compacte si et seulement si V est de dimension finie.

Définition 1.14. Un ensemble A de E est faiblement compact si de toute suite d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite converge faiblement vers un élément de A .

Définition 1.15. *On dit que partie A de E relativement compact (faiblement relativement compact) si et seulement si \overline{A} est compact (faiblement compact).*

Soient E, F deux espaces de Banach et Ω une partie non vide de E .

Définition 1.16 (L'application compacte). *Une application $f : \Omega \subseteq E \longrightarrow F$ est dite compacte si et seulement si l'image de tout ensemble borné X de Ω est un ensemble relativement compact de F , c'est-à-dire, $\overline{f(X)}$ est compact.*

Définition 1.17. *Une sous-ensemble X d'un espace vectoriel normé E est dit convexe si et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in X.$$

Autrement dit, un ensemble est convexe s'il contient tout segment passant par deux de ses points.

Lemme 1.1 (d'Ascoli-Arzela). *[15] Soit (E, d) un espace métrique compact, (F, d') un espace métrique complet. Une partie A de $C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si*

1. *l'ensemble A est borné, i.e. il existe une constante $K > 0$ Tel que*

$$\|f(x)\| \leq K \text{ pour tout } x \in E \text{ et tout } f \in A.$$

2. *A est équicontinue, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in E \quad \text{et} \quad \forall f \in A.$$

3. *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact.*

1.2 Théorèmes de point fixe

Dans cette section, Nous allons juste nous concentrer sur plusieurs théorèmes du point fixe que nous appliquerons dans l'étude de l'existence des solutions aux problèmes proposés. Dans ce section on présente la théorème de Darbo et quelques ses généralisations qui étudie l'existance du point fixe des applications continues sur un sous-ensembles non vides, bornes, fermes et convexes des espaces de Banach. Maintenant nous rappelons le théorème de point fixe suivant qui est une version du point fixe classique théorème pour les applications lipschitziennes dans le contexte des mesures de non-compacité.

1.2.1 Théorème de Brouwer

En 1912, Brouwer a énoncé son célèbre théorème qui est bien connu dans la théorie du point fixe. Ce théorème a beaucoup d'applications dans l'analyse.

Théorème 1.2. [14] *Soit A un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe de \mathbb{R}^n et $n \geq 1$. Si l'application $F : A \rightarrow A$ est continue, alors, F admet au moins un point fixe dans A .*

1.2.2 Théorème de Schauder

Plus tard en 1930, Schauder a prolongé le théorème de Brouwer au cas de dimension infinie.

Théorème 1.3. [14] *Soit X un espace de Banach réel; A une partie non vide, convexe, fermée et bornée de X . Si l'application $F : A \rightarrow A$ est compacte, alors F admet au moins un point fixe dans A .*

1.2.3 Théorème de Darbo

En 1955, Darbo a formulé la généralisation suivante du théorème de Schauder.

Théorème 1.4. [9];[11] *Soit Ω un sous-ensemble non vide, borne, ferme et convexe d'espace Banach E et $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une k -contraction stricte d'ensembles, alors T admet au moins un point fixe dans Ω .*

1.2.4 Théorème de Sadovski

En 1967, Sadovski a généralisé le théorème de Darbo pour les application condensante.

Théorème 1.5. [14] *Soit Ω un sous-ensemble non vide, borne, ferme et convexe d'espace Banach E et $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une application condensante. Alors, T admet un point fixe dans Ω .*

1.2.5 Théorème de Mönch

En 1980, Mönch a généralisé les théorèmes du point fixe de Schauder, de Darbo et de Sadowski dans le théorème suivant :

Théorème 1.6. [8] Soit D un sous espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach, tel que $0 \in D$ et soit N une application continue de D dans D .

Si l'implication :

$$V = \overline{\text{conv}}N(V) \text{ ou } V = N(V) \cup 0 \Rightarrow \gamma(V) = 0.$$

est vérifiée pour tout sous ensemble V de D , alors N admet un point fixe dans D .

1.3 Mesures de non-compacité

Dans cette section, nous définissons les mesures les plus connues de non-compacité et de rappel brièvement certaines de leurs propriétés de base.

Considérons E est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$. On noté par M_E la famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de E et par N_E sa sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts.

Définition 1.18. [1, 2] On dit que application $\mu : M_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une mesure de non-compacité dans E s'il satisfait aux conditions suivantes :

1. La famille $\ker \mu = \{X \in M_E : \mu(X) = 0\}$ est non vide et $\ker \mu \subset N_E$.
2. $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.
3. $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$.
4. $\mu(\text{Conv}X) = \mu(X)$.
5. $\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y)$ pour $\lambda \in [0, 1]$.
6. Si $\{X_n\}_{n \geq 1}$ est une suite imbriquée. d'ensembles fermés de M_E tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0$, alors l'ensemble d'intersection $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ est non vide.

La famille $\ker \mu$ décrit dans 1 est appelée le noyau de la mesure de non-compacité μ .

En remarquant l'ensemble d'intersection X_∞ est un membre du noyau $\ker \mu$.

En effet, puisque $\mu(X_\infty) \leq \mu(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mu(X_\infty) = 0$.

Cela donne $X_\infty \in \ker \mu$.

Dans la suite, nous allons utiliser des mesures de non-compacité ayant des propriétés supplémentaires.

Une mesure est dite sous linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

7. $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$
8. $\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y).$

On dit qu'une mesure de non-compacité μ a la propriété maximale si

$$9. \mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}.$$

Une mesure de non-compacité sous-linéaire μ qui a le maximum et est telle que $\ker \mu = N_E$ est appelé une mesure régulière.

Proposition 1.4. [3] *Invariance sous traduction : Soit X ensemble borné*

$$\mu(X + x_0) = \mu(X), \text{ pour tout } x_0 \in E$$

Dans cette section, nous définissons les mesures de non-compacité les plus connues et rappelons brièvement certaines de leurs propriétés de base. On commence par définir les mesures de non compacité de Kuratowski et nous allons donner leurs propriétés fondamentales.

Soit E un espace métrique et Ω un sous ensemble non vide, borné de

1.3.1 Mesure de Kuratowski

Définition 1.19. [3] *La mesure de non compacité de Kuratowski, de l'ensemble Ω , notée $\alpha(\Omega)$ est l'inf des nombres $d > 0$, tel que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur à d , i.e.,*

$$\alpha(\Omega) = \inf \left\{ d > 0, \Omega = \bigcap_{i=1}^n \Omega_i \quad \text{tel que} \quad \delta(\Omega_i) \leq d \right\}.$$

La fonction α définie sur l'ensemble des sous-ensembles non vide et borné de (X, d) est appelé mesure de non-compacte de Kuratowski.

Proposition 1.5. [3] *Soit Ω, Ω_1 et Ω_2 des sous-ensembles non vides et bornés d'un ensemble espace métrique (X, d) . alors*

1. $\alpha(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \bar{\Omega}$ est compact, où $\bar{\Omega}$ désigne la fermeture de Ω .
2. $\alpha(\Omega) = \bar{\Omega}$.
3. $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2)$.
4. $\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}$.
5. $\alpha(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \min\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}$.

Proposition 1.6. [3] Soit Ω, Ω_1 et Ω_2 des sous-ensembles non vides et bornés d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ sur \mathbb{F} ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Alors

1. $\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2)$.
2. $\alpha(\Omega + x) = \alpha(\Omega), \forall x \in X$.
3. $\alpha(\lambda\Omega) = |\lambda|\alpha(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{F}$.
4. $\alpha(\text{conv}\Omega) = \alpha(\Omega)$ où $\text{conv}(\Omega)$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble Ω .

Lemme 1.2. [5] Soit D un sous-ensemble borné d'un espace de Banach X . Si $f : X \rightarrow X$ est une application de la forme $L+T$, où L est une application linéaire et T est complètement continue.

Alors,

$$\alpha(f(D)) = \alpha[f(\overline{\text{conv}}([D \cup \{\theta\}])].$$

Lemme 1.3. [2] Soit C un sous-ensemble borné, fermé et convexe dans l'espace du Banach $C(J, E)$, pour tout V de C borné et équicontinu, on a $\alpha(V(x))$ est continu et que

$$\alpha\left(\int_J V(x)dx\right) \leq \int_J \alpha(V(x))dx.$$

Lemme 1.4. [10] Si $V \subset C(J, E)$ est un ensemble borné et équicontinu, alors

i. la fonction $v : t \mapsto \alpha(V(t))$ est continue sur J , et $\|v\| = \sup_{0 \leq t \leq T} (\alpha(V(t)))$

ii.

$$\alpha\left(\int_0^T x(s)ds : x \in V\right) \leq \int_0^T \alpha(V(s))ds, \text{ où } V(s) = \{x(s) : x \in V\}, s \in J.$$

Lemme 1.5. [13] Soit D un sous-ensemble borné, fermé et convexe de l'espace de Banach $C(J, X)$, G une fonction continue sur $J \times J$ et f une fonction de $J \times X \rightarrow X$ qui satisfait les conditions de Carathéodory, et supposons qu'il existe $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ tel que, pour chaque $t \in J$ et chaque ensemble bornée $B \subset X$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mu(f(J_{t,h} \times B)) \leq p(t)\mu(B); \text{ ici } J_{t,h} = [t-h, t] \cap J.$$

Si V est un sous-ensemble équicontinu de D , alors

$$\mu\left(\left\{\int_J K(s,t)f(s,y(s))ds : y \in V\right\}\right) \leq \int_J \|K(t,s)\| p(s)\mu(V(s))ds.$$

1.4 Rappel sur le calcul fractionnaire

Le concept de dérivée fractionnaire est apparu pour la première fois dans une célèbre correspondance entre G.A. de L'Hospital et G.W. Leibniz, en 1695.

Beaucoup de mathématiciens ont développé ce domaine. Au cours des soixante dernières années, le calcul fractionnaire avait joué un rôle très important dans divers domaines tels que la physique, la chimie, la mécanique, électricité, biologie, économie, théorie du contrôle, traitement du signal et de l'image, biophysique, phénomènes de flux sanguin, aérodynamique, ajustement de données expérimentales, etc. Le plus important de ces modèles sont celles décrites par des équations différentielles contenant des dérivés d'ordre fractionnaire.

De nouvelles théories et méthodes sont donc nécessaires à développer spécifiquement, dont l'enquête devient plus difficile. En comparant avec la théorie classique des équations différentielles, les recherches sur la théorie des équations différentielles fractionnaires n'en sont qu'à leur stade initial de développement.

1.4.1 Fonctions utiles

La fonction Gamma

Définition 1.20. *On appelle fonction Gamma eulérienne (où intégrale eulérienne de seconde espèce) la fonction notée Γ définie par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

où α est un nombre complexe quelconque tel que $\text{Re}(\alpha) > 0$.

Proposition 1.7. *Nous avons la relation suivante :*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

En particulier, nous avons

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.4.2 Intégrale fractionnaire

Définition 1.21. *[6] L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $f \in C([a, b])$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est définie par*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Proposition 1.8. *Nous avons les propriétés suivantes :*

- i) $I^0 f(t) = f(t)$.
- ii) $I^\alpha I^\beta f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$.
- iii) *l'opérateur intégral I^α est linéaire.*

$$I^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I^\alpha f(t) + I^\alpha g(t), \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$\text{iiii) } \frac{d}{dt}(I^\alpha f)(t) = I^{\alpha-1} f(t).$$

1.4.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, dans cette partie on va citer celles qui sont les plus utilisées dans les applications.

1.4.3.1 Dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville

Définition 1.22. [6] *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n - 1 \leq \alpha < n$) au sens de **Riemann-Liouville** est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-\alpha} f(t)) = D^n I^{n-\alpha} f(t). \end{aligned}$$

ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désignant la partie entière de α .

1.4.3.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.23. [6] *Pour une fonction donnée f sur l'intervalle $[a, b]$ la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de **Caputo** de f , d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*

$${}^cD^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds$$

ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désignant la partie entière de α .

Propriétés

Nous donnons les propriétés suivant :

1. La relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

On suppose que $n - 1 < \alpha < n, m, n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ et ${}^{RL} D^\alpha f(t)$ existe, alors

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots; n - 1$; on aura :

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t).$$

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue on a :

$${}^c D^\alpha I^\alpha f = f \text{ et } I_a^{\alpha c} D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}.$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

3. Non-commutativité

On suppose que $n - 1 < \alpha < n, m, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe, alors :

$${}^c D^\alpha D^m f(t) = {}^c D^{\alpha+m} f(t) \neq D^m {}^c D^\alpha f(t).$$

4. Soit $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe alors :

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$

5. Linéarité.

La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire.

Soit $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha, \lambda \in \mathbb{C}$:

$${}^c D^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^c D^\alpha f(t) + {}^c D^\alpha g(t).$$

Exemple 1.1. La différentiation de la fonction constante pour l'opérateur de Caputo est

$${}^c D^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} c^{(n)} dx = 0.$$

Alors ${}^c D^\alpha c = 0$, $c = \text{const.}$

Et pour Riemann-Liouville :

$${}^{RL} D^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0, \quad c = \text{const.}$$

Lemme 1.6. Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielles

$${}^c D^\alpha f(t) = 0$$

admet le solution

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}$$

telque : $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n = [\alpha] + 1$.

ou

$$f(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_N t^{\alpha-N},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, N, N = [\alpha] + 1$.

Démonstration. Supposons que ${}^c D^\alpha f(t) = 0$,

d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient

$$I^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(s) ds = 0;$$

puisque $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \neq 0$; on a

$$\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(s) ds = 0;$$

et par suite

$$t^{n-\alpha-1} * f^{(n)}(s) = 0.$$

on applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité

$$L \left(t^{n-\alpha-1} * f^{(n)}(t) \right) (s) = L(0)(s) = 0.$$

Posant $F(s) = L(f)(s)$, on obtient

$$\frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}} \left(s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \right) = 0,$$

alors

$$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0) = 0.$$

Donc

$$F(s) = \sum_{k=1}^n s^{-k} f^{(k-1)}(0)$$

on applique maintenant la transformée inverse de Laplace :

$$L^{-1}(F(s)) = L^{-1}\left(\sum_{k=1}^n s^{-k} f^{(k-1)}(0)\right)(t)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(0) L^{-1}(s^{-k})(t) \\ &= \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(0) \cdot \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $i = k - 1$, on trouve

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} t^i,$$

pour $c_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$ on a :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i.$$

Supposons maintenant que

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i,$$

et en appliquant l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo aux deux

membres de l'égalité.

$$\begin{aligned}
{}^c D^\alpha f(t) &= {}^c D^\alpha \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i {}^c D^\alpha t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right) t^i.
\end{aligned}$$

Puisque $(0 \leq i \leq n-1 < n)$, on a

$${}^c D^\alpha f(t) = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Lemme 1.7. *Soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha c} D^\alpha f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n = [\alpha] + 1$

ou

$$I^{\alpha c} D^\alpha f(t) = f(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_N t^N$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, N$ et $N = [\alpha] + 1$

Démonstration. On a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo

$${}^c D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(t),$$

on applique l'opérateur de l'intégral fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$I_0^{\alpha c} D^\alpha f(t) = I^\alpha I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = I^{nRL} D^n f(t)$$

$$= f(t) - \sum_{j=1}^n \frac{t^{n-j}}{\alpha(n-j+1)} f^{(n-j)}(0).$$

par le changement de variable $k = n - j$ on obtient :

$$I^{\alpha c} D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0)$$

$$= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k.$$

avec $c_k = -\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

□

Chapitre 2

Application 1

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier l'existence de solutions pour les problèmes aux limites avec les équations différentielles d'ordre fractionnaire, et cela en utilisant le théorème du point fixe de Mönch.

2.1 Position du problème

L'objet principal de ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions pour le problème au limite d'ordre fractionnaires suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & 0 \leq t \leq 1, \quad 2 < \alpha \leq 3 \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Lemme 2.1. *Supposons que $g \in C([0, 1])$.*

Soit $2 < \alpha \leq 3$ et $x \in C([0, 1])$. La solution unique du problème aux limites fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) + g(t) = 0, & 0 \leq t \leq 1, \quad 2 < \alpha \leq 3 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

donnée par

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)h(s)ds \quad (2.1.3)$$

où G est une fonction de Green donnée par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Démonstration.

Par lemme 1.7 on réduit (2.1.2) à une équation intégrale équivalente

$$x(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2}.$$

Pour certaines constantes $c_1, c_2 \in X$.

Conditions de (2.1.3) donne

$$x(0) = c_2 = 0 \text{ et } x(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} g(s) ds + c_1 = 0$$

alors

$$c_1 = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} g(s) ds.$$

Alors la solution de (2.1.2) est :

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} g(s) ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} g(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} g(s) ds \\ &= \int_0^t \frac{t^{\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s) ds + \int_t^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s) ds. \\ &= \int_0^1 G(t, s) g(s) ds \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. □

2.2 Existence des solutions

Pour prouver l'existence de solutions, nous avons besoin de ces lemmes.

Lemme 2.2. *Supposons que $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par $h(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \geq 1$. Alors, pour tout $t, s \in [0, 1]$,*

$$|t^\alpha - s^\alpha| \leq \alpha |t - s|.$$

La preuve dépend de :

On prend $t, s \in [0, 1]$ avec $t > s$. En appliquant le théorème de la valeur moyenne à la fonction h sur l'intervalle $[s, t]$.

Lemme 2.3. *La fonction de Green $G(t, s)$ apparaissant dans le lemme 2.1 satisfait :*

(a) *La fonction $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.*

(b) *Pour tout $t, s, \tau \in [0, 1]$,*

$$|G(t, s) - G(\tau, s)| \leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} |t - \tau|.$$

Démonstration.

(a) Il est évident.

(b) Pour $s \in [0, 1]$ fixed, on prend $t, \tau \in [0, 1]$. On peut distinguer trois cas.

Cas 1 : $t, \tau \leq s$.

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} |G(t, s) - G(\tau, s)| &= \left| \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\tau^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |t^{\alpha-1} - \tau^{\alpha-1}| (1-s)^{\alpha-1} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |t^{\alpha-1} - \tau^{\alpha-1}|. \end{aligned}$$

Depuis $2 < \alpha \leq 3$, par Lemma 2.2, on en déduit

$$|G(t, s) - G(\tau, s)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |t^{\alpha-1} - \tau^{\alpha-1}| \leq \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} |t - \tau| \leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} |t - \tau|.$$

Cas 2 : $t, \tau \geq s$.

Dans ce cas, nous avons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} |G(t, s) - G(\tau, s)| &= \left| \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\tau^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \\ &\leq \left| \frac{(t^{\alpha-1} - \tau^{\alpha-1})(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| + \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1} - (\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \\ &\leq \left| \frac{(t^{\alpha-1} - \tau^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)} \right| + \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1} - (\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)}|t - \tau| + \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)}|t - s - (\tau - s)| \\ &= \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)}|t - \tau|. \end{aligned}$$

Cas 3 : $\tau \leq s \leq t$. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} |G(t, s) - G(\tau, s)| &\leq \left| \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - \tau^{\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| + \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|t^{\alpha-1} - \tau^{\alpha-1}||1-s|^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|(t-s)^{\alpha-1}| \\ &\leq \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)}|t - \tau| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1} \\ &= \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)}(t - \tau) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Alors $\tau \leq s \leq t$, $t - s \leq t - \tau$ et par conséquent

$$(t-s)^{\alpha-1} \leq (t-\tau)^{\alpha-1} \leq (t-\tau),$$

parce que $1 < \alpha - 1$ et $0 \leq t - \tau \leq 1$.

Donc,

$$\begin{aligned} |G(t, s) - G(\tau, s)| &\leq \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)}(t - \tau) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t - \tau)^{\alpha-1} \\ &\leq \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)}(t - \tau) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t - \tau) \\ &\leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(t - \tau) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}|t - \tau| \leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)}|t - \tau|, \end{aligned}$$

où la dernière égalité a été obtenue en tenant compte du fait que $2 < \alpha \leq 3$.
Ceci complète la preuve. \square

Pour établir notre principal résultat concernant l'existence de solutions de (2.1.1), nous imposons des conditions appropriées aux fonctions impliquées dans ce problème.

Nous considérons les hypothèses suivantes :

(A1) : La fonction $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et satisfait

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \varphi(|x - y|),$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et $x, y \in \mathbb{R}_+$, où $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction non décroissante et, de plus, φ est continu à $t_0 = 0$.

(A2) : Pour chaque $t \in J$ et chaque ensemble borné $B \subset E$, nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mu(f(J_{t,h} \times B)) \leq p(t)\mu(B); \text{ ici } J_{t,h} = [t - h, t] \cap J.$$

où μ est une mesure de non-compacité.

(A3) : Il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)}(\varphi(r_0) + M) \leq r_0,$$

où $M = \sup\{|f(t, 0)| : t \in [0, 1]\}$.

Théorème 2.1. *Supposons que les hypothèses (A1) - (A3) se vérifient. Si*

$$K \int_0^1 p(s)ds < 1, \tag{2.2.1}$$

alors le problème au limite (2.1.1) a au moins une solution dans X .

Démonstration.

Considérons le cône $P = \{u \in H_1[0, 1] : u \geq 0\}$.

On voit facilement que P est fermé dans $H_1[0, 1]$ et, par conséquent, (P, d) est un espace métrique complet, où $d(x, y) = \|x - y\|_1$.

Maintenant, on considère l'opérateur T défini sur P par

$$(Tx)(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds.$$

et $D_{r_0} = \{x \in C([0; 1]; X) : \|x\|_1 \leq r_0\}$, D_{r_0} est bornée, fermé et convexe.

Clairement, les points fixes de l'opérateur T sont des solutions du problème (2.1.1).

Nous montrerons que T satisfait les hypothèses du théorème 2.1.

La preuve sera donnée en trois étapes.

Etape 1 : T est continu pour la norme $\|\cdot\|$.

Pour ce faire, nous fixons $x \in P \cap D_{r_0}$ et soit (x_n) est une suite, $(x_n) \subset P \cap D_{r_0}$ tel que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$ et nous devons prouver que $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} Tx$.

En fait, nous prenons $t, \tau \in [0, 1]$ avec $t \neq \tau$. Ensuite, nous avons :

$$\begin{aligned} & |[(Tx_n)(t) - (Tx)(t)] - [(Tx_n)(\tau) - (Tx)(\tau)]| \\ &= \left| \left(\int_0^1 G(t, s)f(s, x_n(s))ds - \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s))ds \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_0^1 G(\tau, s)f(s, x_n(s))ds - \int_0^1 G(\tau, s)f(s, x(s))ds \right) \right| \\ &= \left| \int_0^1 G(t, s)(f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)))ds - \int_0^1 G(\tau, s)(f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)))ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 (G(t, s) - G(\tau, s))(f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)))ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |G(t, s) - G(\tau, s)||f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))|ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} |t - \tau| \int_0^1 \varphi(|x_n(s) - x(s)|) ds \\ &\leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \varphi(\|x_n - x\|_\infty) ds \leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} \varphi(\|x_n - x\|_\infty) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (A1) et (A3).

Donc,

$$\begin{aligned} &\|Tx_n - Tx\|_1 \\ &= |(Tx_n)(0) - (Tx)(0)| + \sup \left\{ \frac{[(Tx_n)(t) - (Tx)(t)] - [(Tx_n)(\tau) - (Tx)(\tau)]}{|t - \tau|} \right\} \\ &\leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} \varphi(\|x_n - x\|_1) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé cela $(Tx_n)(0) = (Tx)(0) = 0$.

Depuis $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et en tenant compte du fait que φ est continue a $t_0 = 0$, nous en déduisons $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} Tx$.

Par conséquent, T est continu.

Etape 2 : Dans cette étape on va montrer que D_r est invariante par T donc nous allons montrer que $T(D_r) \subset D_r$.

Soit $x \in D_r$ nous montrons que $Tx \in D_r$.

Nous avons, pour chacun $t \in [0, 1]$, par (A1) et (a) de Lemme 2.3, pour $x \geq 0$, nous avons $Tx \geq 0$. Dans la suite, nous prouvons que si $x \in H_1[0, 1]$ alors $Tx \in H_1[0, 1]$.

De plus, pour $x \in H_1[0, 1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \|Tx\|_1 &= |(Tx)(0)| + \sup \left\{ \frac{(Tx)(t) - (Tx)(\tau)}{|t - \tau|} : t, \tau \in [0, 1], t \neq \tau \right\} \\ &\leq \left| \int_0^1 |G(0, s) f(s, x(s))| ds \right| + \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} [\varphi(\|x\|_1) + M]. \end{aligned}$$

Par $G(0, s) = 0$ et (A3)

$$\|Tx\|_1 \leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} [\varphi(\|x\|_1) + M] \leq r_0$$

il s'ensuit que pour chaque $t \in [0, 1]$ nous avons

$$\|Tx(t)\| \leq r_0 \text{ ce qui implique } T(D_r) \subset D_r.$$

. **Etap 3 :** $T(D_{r_0})$ est borné et équicontinu.

Selon l'étape 2, nous avons

$$T(D_{r_0}) = \{T(x) : x \in D_{r_0}\} \subset D_{r_0}.$$

Donc, pour chaque $x \in D_{r_0}$ nous avons $\|T(x)\|_\infty \leq r_0$, ce qui signifie que $T(D_{r_0})$ est borné.

Soit $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $t_1 < t_2$ et soit $x \in T(D_r)$ alors

$$\begin{aligned} \|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)\| &= \left\| \int_0^1 G(t_2, s) f(s, x(s)) ds - \int_0^1 G(t_1, s) f(s, x(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 \|G(t_2, s) - G(t_1, s)\| |f(s, x(s))| ds \right\| \\ &\leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} |t_2 - t_1| \cdot \int_0^1 [|f(s, x(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|] ds \\ &\leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} |t_2 - t_1| \int_0^1 [\varphi(|x(s)|) + |f(s, 0)|] ds \\ &\leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} |t_2 - t_1| \int_0^1 [\varphi(\|x\|_\infty) + |f(s, 0)|] ds \\ &\leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} |t_2 - t_1| \int_0^1 [\varphi(\|x\|_1) + M] ds \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} [\varphi(|x|_1) + M] |t_2 - t_1|,$$

où nous avons utilisé (b) Lemme 2.3, (A1) et le fait que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Comme $t_2 \rightarrow t_1$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend à zéro. donc T est équicontinu.

Soit $V \subset TD_r$, tel que :

$V = \{Tx, x \in D_r\}$ ou $V \subset \overline{\text{conv}}(T(V) \cup \{0\})$ et $K = \max\{G(t, s), t, s \in [0, 1]\}$ le sous-ensemble V est borné et équicontinu, d'où la fonction $v : t \rightarrow \mu(v(t)) \in \mathbb{R}$ est continu sur $[0, 1]$. En utilisant le lemme 1.5 et (A2) et les propriétés de la mesure μ , nous avons, pour chaque $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} v(t) = \mu(V(t)) &\leq \mu(T(V)(t) \cup \{0\}) \\ &\leq \mu(T(V)(t)) \end{aligned}$$

parce que

$$\mu(T(V) \cup \{0\}) = \max\{\mu(T(V)), \mu(\{0\})\}.$$

D'autre part nous avons

$$T(v)(t) = \left\{ \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds, x \in V \right\}.$$

Alors

$$v(t) < \mu(T(V)(t)) = \mu\left(\int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds, x \in V\right)$$

en utilisant le lemme 1.5

$$\begin{aligned} \mu(T(V)(t)) &\leq \int_0^1 \|G(t, s)\| p(s) \mu(V(s)) ds \\ &\leq K \int_0^1 p(s) v(s) ds. \\ &\leq \|v\|_\infty K \int_0^1 p(s) ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_\infty K \int_0^1 p(s) ds.$$

Par (2.2.1), nous obtenons $\|v\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $v(t) = 0$ pour chaque $t \in [0, 1]$, puis $V(t)$ est relativement compact dans X . Vu le théorème d'Ascoli-Arzela, V est relativement compact en D_r .

Appliquant maintenant le théorème 1.6 de Mönch, nous concluons que T a un point fixe qui est une solution du problème (2.1.1).

Ceci complète la preuve. □

2.3 Exemple

Considérons le problème aux limites d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^{\frac{5}{2}} x(t) = \frac{1}{6} \sqrt{t} + \arctan(x(t)), & t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Notez que le problème (2.3.1) est un cas particulier de problème (2.1.1) avec $\alpha = 5/2$ et $f(t, x) = \frac{1}{6} \sqrt{t} + \arctan(x(t))$.

Il est clair que $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et f est continu.

De plus, compte tenu du fait que $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq \arctan(|x - y|)$ pour $x, y \in \mathbb{R}_+$ (voir [?]), on a :

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq \arctan(|x - y|).$$

Cela prouve que l'hypothèse (A1) du théorème 2.1 est satisfaite de la fonction $\varphi(t) = \arctan(t)$ qui est non décroissant et continu.

L'inégalité apparaissant dans l'hypothèse (A2) du théorème 2.1 a pour expression

$$\frac{2(\frac{5}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{5}{2})} (\arctan(r_0) + \frac{1}{6}) \leq r_0$$

puisque

$$M = \sup\{|f(t, 0)| : t \in [0, 1]\} = \sup\{(\frac{1}{6})\sqrt{t} : t \in [0, 1]\} = \frac{1}{6}.$$

La dernière inégalité est

$$\frac{3}{1.33} (\arctan(r_0) + \frac{1}{6}) \leq r_0$$

et il est facile de vérifier que $r_0 = 5$ le satisfait.

De plus, depuis $x(t) = \frac{1}{6}\sqrt{t}$ et $f(t, x) = \frac{1}{6}\sqrt{t} + \arctan(x)$, est non décroissant par rapport à la deuxième variable, en utilisant le théorème 2.2, nous avons ce problème (2.3.1) a au moins une solution positive appartenant à $H_\beta[0, 1]$ avec $0 < \beta < 1$.

Chapitre 3

Application 2

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la théorie de Mönch pour étudier l'existence et l'unicité des solutions au problème aux limites pour des équations fractionnaires avec conditions initiales intégrales

3.1 Position du problème

Considérons le problème de Cauchy d'ordre fractionnaire.

$$3.1 \begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) + f(t, x(t), {}^c D^\alpha x) = 0, 0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2 \\ ax(0) - bx'(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 g(s, x(s)) ds + \lambda \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où ${}^c D^\alpha$, est la dérivée fractionnaire de Caputo, et f, g

$$f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a, b, \lambda \in \mathbb{R}_+, a + b > 0 \text{ et } \frac{a}{a+b} < \alpha - 1$$

Lemme 3.1. *une fonction $x(t)$ une fonction x est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds + \frac{at + b}{a + b} + \int_0^1 g(s) ds + \frac{at + b}{a + b} \lambda, \quad (3.1.2)$$

où G est fonction de Green donnée par :

$$3.2 G(t, s) = \frac{1}{(a + b)\Gamma(\alpha)} \cdot \begin{cases} (a + b)(t - s)^{\alpha-1} + (at + b)(1 - s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ (at + b)(1 - s)^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

si et seulement si x est une solution du problème aux limites fractionnaires

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = -f(t), 0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2 \\ ax(0) - bx'(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 g(s)ds + \lambda \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Démonstration. Supposons que $x(t)$ satisfait (2.1), alors d'après le lemme 2.8 nous avons

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds + c_0 + c_1 t, \\ x'(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha-2} f(s)ds + c_1 \end{aligned}$$

pour certains constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

En appliquant les Conditions aux limites (2.1) , on a

$$ac_0 - bc_1 = 0,$$

et

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s)ds + c_0 + c_1 = \int_0^1 g(s)ds + \lambda.$$

donc

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{b}{a+b} \left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s)ds + \int_0^1 g(s)ds + \lambda \right] \\ c_1 &= \frac{b}{a+b} \left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s)ds + \int_0^1 g(s)ds + \lambda \right] \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution du problème (2.1) est

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds + \frac{b}{a+b} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds + \int_0^1 h(s)ds \right] \\ &+ \frac{at+b}{a+b} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds + \int_0^1 g(s)ds + \lambda \right] \\ &\times \int_0^1 \left[\frac{(at+b)(1-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] f(s)ds + \int_0^1 \frac{(at+b)(1-s)^{\alpha-1}}{(a+b)\Gamma(\alpha)} f(s)ds \\ &+ \frac{(at+b)}{(a+b)} \int_0^1 g(s)ds + \frac{(at+b)}{(a+b)} \lambda \\ &= \int_0^1 G(t,s) f(s)ds + \frac{(at+b)}{(a+b)} \int_0^1 g(s)ds + \frac{(at+b)}{(a+b)} \lambda. \end{aligned}$$

La preuve est complète

□

Maintenant, nous supposons que :

(H₁) Il existe $K > 0$ et $L > 0$ tels que

$$|f(t, x(t), u(t)) - f(t, y(t), v(t))|_{\infty} \leq K\|x - y\|_{\infty}$$

(H₂) et pour chaque sous-ensemble borné A et B de X , on a

$$\mu(f(t, A, B)) \leq K\mu(A) + L\mu(B).$$

(H₃) Il existe $N > 0$ tel que Il existe $\phi \in L^{\infty}([0, 1])$, tel que

$$\|g(t, x(t)) - g(t, y(t))\| \leq N\|x - y\|.$$

(H₄) Et pour chaque sous-ensemble borné C de X , on a

$$\mu(g(t, C)) \leq N\mu(C).$$

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses (H₁) – (H₄) le problème (3.1.1) a une solution à condition que*

$$\frac{2K}{(2-L)\Gamma(\alpha+1)} + N < 1$$

Démonstration. Transformons le problème (3.1.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $T : X = C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow ([0, 1], \mathbb{R})$ défini par

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s), {}^c D^{\alpha}x(t))ds + \frac{at+b}{a+b} \int_0^1 g(s, x(s))ds + \frac{at+b}{a+b}\lambda.$$

Clairement, les points fixes de T sont des solutions du problème (3.1.1). Nous montrons que T satisfait les hypothèses du Théorème 3. 1 (Mönch) La démonstration sera donnée en trois étapes.

Étape 1. T est continu.

Soit (x_n) une suite telle que $x_n \rightarrow x$ dans $C([0, 1], \mathbb{R})$. Alors, pour chaque $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |T(x_n)(t) - T(x)(t)| &\leq \int_0^1 |G(t, s)| |f(s, x_n(s), {}^c D^{\alpha}x_n(t)) - f(s, x(s), {}^c D^{\alpha}x(t))| ds \\ &\quad + \frac{at+b}{a+b} \int_0^1 |g(s, x_n(s)) - g(s, x(s))| ds \end{aligned}$$

Les hypothèses (H₁) et (AH₃) donnent :

$$\begin{aligned}
|f(s, x_n(s), {}^c D^\alpha x_n(t)) - f(s, x(s), {}^c D^\alpha x(t))| &\leq K|x_n - x| + L|{}^c D^\alpha x_n(t) - {}^c D^\alpha x(t)| \\
&\leq K|x_n - x| + L|f(t, x_n(t), {}^c D^\alpha x_n(t)) - f(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t))|
\end{aligned}$$

alors,

$$|f(s, x_n(s), {}^c D^\alpha x_n(t)) - f(s, x(s), {}^c D^\alpha x(t))| \leq \frac{K}{L-1}|x_n - x|,$$

et

$$|g(t, x_n(t)) - g(t, x(t))| \leq |x_n(t) - x(t)|$$

Donc

$$|T(x_n(t)) - T(x(t))| \leq \frac{2K}{L-1+N}|x_n - x|$$

Puisque $x_n \rightarrow x$, pour chaque $t \in [0, 1]$, on obtient

$$\|T(x_n)(t) - T(x)(t)\| \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

Par conséquent, T est continu.

Soit r une constante telle que

$$r \geq \frac{1}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}(Kr + f_0) + Nr + g_0 + \lambda,$$

où

$$f_0 = \sup_{t \in [0,1]} |f(t, 0, 0)|, \quad g_0 = \sup_{t \in [0,1]} |g(t, 0)|.$$

Soit $B_r = \{x \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \|x\| \leq r\}$. Il est clair que B_r est un sous-ensemble borné, fermé et convexe de X . **Etape 2.** $T(B_r) \subseteq B_r$.

Soit x un élément de B_r , nous montrons que $Tx \in B_r$. En effet, pour chaque $t \in [0, 1]$, on a

l'opérateur $T : X = C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow ([0, 1], \mathbb{R})$ défini par

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &= \left| \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s), {}^c D^\alpha x(t)) ds + \frac{at+b}{a+b} \int_0^1 g(s, x(s)) ds + \frac{at+b}{a+b} \lambda \right| \\
&\leq \int_0^1 |G(t, s) f(s, x(s), {}^c D^\alpha x(t))| ds + \frac{at+b}{a+b} \int_0^1 |g(s, x(s))| ds + \frac{at+b}{a+b} |\lambda|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha) + 1} |f(s, x(s), {}^c D^\alpha x(t))| + |g(s, x(s))| + \lambda.$$

D'après les hypothèses (H_1) et (H_3) , pour chaque $t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \|f(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t))\| &= \|f(t, x(t)) - f(t, 0, 0) + f(t, 0, 0)\| \\ &\leq \|f(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t)) - f(t, 0, 0)\| + \|f(t, 0, 0)\| \\ &\leq K\|x\| + L\|{}^c D^\alpha x(t)\| + f_0 \quad (3.1.5) \\ &\leq \frac{1}{L-1}(Kr + f_0), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|g(t, x(t))\| &= \|g(t, x(t)) - g(t, 0) + g(t, 0)\| \\ &\leq \|g(t, x(t)) - g(t, 0)\| + \|g(t, 0)\| \\ &\leq N\|x\| + g_0 \quad (3.1.6) \\ &\leq Nr + g_0 \end{aligned}$$

alors :

$$\|Tx(t)\| \leq \frac{2}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}(Kr + f_0) + (Nr + g_0) + \lambda \leq r.$$

Il en résulte que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\|Tx(t)\| \leq r$, ce qui implique que :

$$T(B_r) \subset B_r.$$

Etape 3. TB_r est borné et équicontinu.

D'après l'étape 2, on a

$$TB_r = \{Tx : x \in B_r\} \subset B_r.$$

Ainsi, pour tout $x \in B_r$, on a $\|T(x)\|_\infty \leq r$, ce qui implique que TB_r est borné. Soient $t_1, t_2 \in [0, 1]$ avec $t_1 < t_2$ et $x \in TB_r$, alors on a

$$\begin{aligned} &|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)| \\ &= \|f(s, x(s), {}^c D^\alpha x(t))\| \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| ds + \frac{a|t_1 - t_2|}{a+b} (g(t, x(t)) + \lambda). \end{aligned}$$

D'après (3.1.5) et (3.1.6), nous avons :

$$\|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)\| \leq \frac{1}{1-L}(Kr + f_0)|t_2^\alpha - t_1^\alpha| + \frac{a|t_1 - t_2|}{a+b}(Nr + g_0 + \lambda).$$

Comme $t_2 \rightarrow t_1$, le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro, donc T est uniformément continu (car continu sur un compact) et $|t_2 - t_1| \rightarrow 0$. Ainsi, TB_r est équicontinu.

Soit $V \subset TB_r$, tel que $V = \{Tx : x \in B_r\}$, donc $V \subset \overline{\text{conv}}(T(V) \cup \{0\})$. Le sous-ensemble V est borné et équicontinu. D'après le Lemme 2, la fonction $v : t \mapsto \mu(V(t)) \in \mathbb{R}$ est continue sur $[0, 1]$. D'après le même lemme et les propriétés de la mesure de non-compacité μ , on a :

$$v(t) = \mu(V(t)) \leq \mu(TV(t) \cup \{0\}) \leq \mu(TV(t)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu(TV(t)) &= \mu(Tx(t), x \in V) \\ &= \mu \left(\left\{ \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s), {}^c D^\alpha x(t)) + \frac{at+b}{a+b} \int_0^1 g(s, x(s)) ds + \frac{at+b}{a+b} \lambda, x \in V \right\} \right). \\ &\leq \mu \left(\left\{ \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s), {}^c D^\alpha x(t)), x \in V \right\} \right) + \mu \left(\left\{ \frac{at+b}{a+b} \left(\int_0^1 g(s, x(s)) ds + \frac{at+b}{a+b} \lambda \right), x \in V \right\} \right). \\ &\leq \int_0^1 G(t, s) \mu(f(s, x(s), {}^c D^\alpha x(t))) + \frac{at+b}{a+b} \left(\int_0^1 \mu(g(s, x(s))) ds \right). \end{aligned}$$

Ainsi pour chaque $s \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \mu(\{f(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t)), x(t) \in V\}) &\leq K\mu(\{x(t), x \in v\}) + L\mu(\{f(t, x(t), {}^c D^\alpha x(t))\}) \\ &\leq \frac{K}{1-L}\mu(\{x(t)\}) = \frac{K}{1-L}v(t), \end{aligned}$$

et

$$\mu(g(t, v(t))) = \mu(\{g(t, x(t)), x(t) \in v(t)\}) \leq Nv(t).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mu(T(V)(t)) &\leq \frac{2K}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}\mu(v(t)) + \frac{at+b}{a+b}N\mu(v(t)) \\ &\leq \frac{2K}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}v(t) + \frac{at+b}{a+b}Nv(t) \\ &= \left(\frac{2K}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{at+b}{a+b}N \right) \|v\|_\infty. \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$\|v\|_\infty \leq \left(\frac{2K}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{at+b}{a+b}N \right) \|v\|_\infty.$$

Donc $\|v\|_\infty = 0$, ce qui signifie que $v(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, et donc $V(t)$ est relativement compact dans X . D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, V est relativement compact dans B_r .

En appliquant maintenant le théorème de Mönch, on conclut que T admet un point fixe, qui est une solution du problème (1).

Dans la suite, nous présentons les deux exemples suivants pour illustrer le théorème.

□

3.2 Exemple

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{3}{2}}x(t) = \frac{1}{10}(t\cos x - xe^t) + \frac{1}{9}\cos({}^cD^{\frac{3}{2}}x(t)) & t \in [0, 1] \\ x(0) - x'(0) = 0, \\ x(1) = \frac{1}{8} \int_0^1 se^{-s} ds \end{cases}$$

où

$$f(t, x, u) = \frac{1}{10}(t\cos x - xe^t) + \frac{1}{9}\cos({}^cD^{\frac{3}{2}}x(t)),$$

$$t \in [0, 1], x \in C([0, 1], \mathbb{R}),$$

$$g(s, x) = \frac{x(s)}{8}, g \in C([0, 1], \mathbb{R}), \alpha = \frac{3}{2}, a = 1, b = 1.$$

Clairement, $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{3} < \alpha - 1$, donc

$$\begin{aligned} |f(t, x, u) - f(t, y, v)| &\leq \frac{1}{10}|t|\|\cos x - \cos y\| + \frac{1}{10}|e^t|\|x - y\| + \frac{1}{9}\|\cos u - \cos v\|, \\ &\leq \frac{1}{10}|t|\|x - y\| + \frac{1}{10}|e^t|\|x - y\| + \frac{1}{9}\|u - v\|, \end{aligned}$$

$$|g(t, x) - g(t, y)| = \left| \frac{tx}{10} - \frac{ty}{10} \right| \leq \frac{t}{10}|x - y|.$$

Ainsi, toutes les conditions (H_1) , (H_3) sont satisfaites et

$$K = \frac{1+e}{10}, L = \frac{1}{9}, N = \frac{1}{8}.$$
$$\frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)} + N = \frac{3(1+e)}{10\sqrt{\pi}} + \frac{1}{8} < 1.$$

Par conséquent, le problème admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

Alors toutes les conditions du Théorème 2.1 sont satisfaites, et ainsi, le problème admet une solution dans X .

Conclusion générale

L'objectif de cet travail est d'utiliser le théorème du point fixe de Mönch pour étudier l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes d'équations différentielles.

Cette théorie de point fixé est souvent utilisée dans plusieurs branches de l'analyse non linéaire. Spécialement cette technique a prouvé qu'elle est un outil très utile dans l'existence de solutions de plusieurs types d'équations différentielles.

Pour obtenir l'existence des solutions, des conditions suffisantes seront considérées dans l'étude des différentes classes de ces problèmes aux limites.

Et nous allons essayer de présenter les résultats que nous avons obtenus grâce à notre étude de l'existence et de l'unicité de solutions à certaines des différents types des problèmes d'équations différentielles.

Y compris les équations différentielles d'ordre fractionnaire impliquant des dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville avec des conditions aux limites .

Et nous avons conclu ce travail en donnant des exemples pratiques de chaque problème pour confirmer ce travail.

Bibliographie

- [1] J. Banaś, *On measures of noncompactness in Banach spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae 21 (1980) 131-143.
- [2] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach spaces*, Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 60, Dekker, New York, 1980.
- [3] J. Banaś, M. Mursaleen, *Sequence Spaces and Measures of noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*. Springer, New Delhi (2014).
- [4] M. Belmekki, M. Benchohra, Existence results for fractional order semilinear functional differential equations with nondense domain, *Nonlinear Anal. : TMA*, 72(2010), 925-932.
- [5] S. Ishikawa, H. Fujita, Some Variants of Strict-Set-Contraction. Vol. 11 (1972) pp 83-87.
- [6] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory And Applications Of Fractional Differential Equations*, 2006
- [7] V. Millot, *Analyse et calcul différentiel* École Normale Supérieure 2015-2016.
- [8] H. Mönch, *Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces*, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, vol. 4, no. 5, pp. 985-999, 1980.
- [9] D. O'Regan, *Fixed Point Theorems for Nonlinear Operators*, *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 202 (1996) pp 413-432.
- [10] D. O'Regan, Y. J. Cho, Y. Q. Chen, *Topological Degree Theory and Applications*, Copyright 2006.
- [11] A. J. B. Potter, *A Fixed Point Theorem For Positive k-Set Contractions* *Proceedings of the Edinburgh, Mathematical.* Vol. 19 (1974), pp 93-102.
- [12] L. Schwartz, *Analyse Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Paris, 1993.
- [13] S. Szufła, *On the application of measure of noncompactness to existence theorems*. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 75 (1986), 1-14.
- [14] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Vol. I : Fixed Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.

- [15] Y. Zhou, X.H. Shen, L. Zhang :, Cauchy problem for fractional evolution equations with Caputo derivative, Eur. Phys. J. Special Topics 222, 1749 U¹⁷⁶⁵ (2013).