رقم الترتيب:
رقم التسلسل:

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الوادي

كلية العلوم والتكنولوجيا

قسم رياضيات وإعلام آلي

مذكرة تخرج لنيل شهادة

ليسانس أكاديمي

الميدان: رياضيات وإعلام آلي

شعبة:رياضيات

تخصص: نمذجة رياضية ومحاكاة عددية

من إعداد الطلبة:

عمار بن إعمارة

الأمين هقي

الموضوع

مدخل إلي نظرية الحلقات

نوقشة يوم: 2014/06/18

أمام اللجنة المكونة من:

مسعي عون محمد الصالح	أ.م.(ب)	رئيسا
سعيد عامر مزيان	أ.م.(ب)	عضوا
أحمد الشايع	أ.م.(ب)	مشرفا

الموسم الجامعي : 2014/2013

شكر وعرفان

مصداقا لقوله تعالى: " وإذ تأذن ربكم لئن شكرتم لأزيدنكم ولئن كفرتم إن عذابي لشديد "سورة إبراهيم(الآية: 07) نحمد الله عز وجل أن وفقنا لإتمام هذا العمل المتواضع

و عملاً بقوله صلى الله عليه وسلم:"من لم يشكر الناس لم يشكر الله" رواه أحمد، والترميذي

نتقدم بالشكر الجزيل والعرفان بالجميل إلى كل من ساعدنا وساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الدراسي

كما نشكر الأستاذ المشرف الشايع أحمد الذي لم يبخل علينا بنصائحه وتوجيهاته في سبيل إنجاز هذا البحث.

ولا ننسى كل من ساهم سواء من قريب أو بعيد ولم يبخل علينا بمعلوماته وإمكانيات لإعداد هذه المذكرة.

الإهداء

قال تعالى :" ربنا إغفر لي ولوالدي وللمؤمنين يوم يقوم الحساب " سورة إبراهيم

إلى سندي ومصدر قوتي وكبريائي، إلى فخري وإعتزازي إلى أمي وأبي، إخوتي وأخواتي.

إلى كل الأهل والأقارب "أخوالي، خالاتي ، عمي، عماتي "

إلى كل من ساعدني في إنجاز هذه المذكرة

إلى من أخشى ألا أنصفهم حقهم أترابي أصدقائي وأحبائي ورفقاء الدراسة

إلى كل من سيتصفح هذه المذكرة

الفهرس:

الفصل الثالث:

مقدمـــــــــة

ممّا لا شك فيه أن موضوع الجبر من المواضيع المهمة ولاسيما في عصرنا الحاضر ليس في الرياضيات فقط بل في الفيزياء والكيمياء وعلم الحاسوب و غيرها.

و مساهمة في تقديم الخدمة فقد ارتأينا أن نتقدم ببحثنا هذا تحت عنوان مدخل إلي نظرية الحلقات ، وقد توخينا فيه السهولة التي تسمح لزملائنا الطلبة الاستفادة منه وذلك عند عرض المفاهيم المجردة و البراهين . وقد دعم هذا العمل بالأمثلة المتنوعة في كل فصل ، التي تساعد الطلبة على الفهم والاستيعاب و الوصول إلى الهدف المنشود.

تطرقنا في عملنا هذا إلى ثلاثة فصول حيث تناولنا في :

الفصل الأول: أهم المفاهيم العامة التي استخدمت في هذا الموضوع بداية بالمجموعات ثم العلاقات وأنواعها لنصل إلي أصناف التكافؤ التي تبنى بها عناصر حلقة القسمة و نذكر بنظرية كانتور حول الأعداد الصحيحة، ثم نبدأ بتعريف الحلقة والحساب المتعلق بها لنتم هذا الفصل بالعناصر القابل للقلب والقابلة للاختزال وقواسم الصفر ثم الحلقة التامة والحقل.

الفصل الثاني: فهو مكرس للمثاليات بدأ بالتعريف ثم المثالي المولد بمجموعة والعمليات المرتبطة بها كجمع و ضرب المثاليات وكذلك تصنيف بعض المثليات.

الفصل الثالث: يعرض بعض المبرهنات والنظريات حول الايزومورفيزم وهذا بعد التعرف على عناصر حلقة القسمة، والحلقة $\mathbb{Z}$ وخصائصها التي تعتبر وجه من تطبيقات نظرية الحلقة وكذالك حلقة كثيرات الحدود التي تم التفصيل فيها .

الفصـــــل الأول

عموميـــــات

1.1ـ المجموعات وخصائصها

1.1.1ـ تعريف المجموعة

نسمي مجموعة كل تجمع لأشياء تربطها خاصية مشتركة. تدعي هذه الأشياء بعناصر المجموعة .

يرمز عادة للمجموعة بالأحرف اللاتينية الكبيرة مثل $A,B,C,D,X,Y,...$ ويرمز لعناصرها بالأحرف اللاتينية الصغيرة مثل $a,b,c,d,\mathrm{x},\mathrm{y},...$.

تتعين المجموعة إذا عرفت جميع عناصرها، ويمكن عندئذ كتابة المجموعة بذكر جميع عناصرها بين حاضنتين من الشكل $\{\ \}$ مثل: $A=\{a,b,c\}$.

تتعين المجموعة أيضا بذكر خاصية يمكننا بواسطتها تمييز عناصرها.

مثل: $A=\{x: \text{فردي } x\}$، و نقرأ A مجموعة العناصر x بحيث x هو عدد فردي.

إذا كانت A مجموعة ما وإذا كان a عنصرا ما منها، فإننا نقول إن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A ، ونعبر عن ذلك بالشكل : $a\in A$

أما إذا لم يكن b عنصرا من عناصر المجموعة A، فإننا نقول إن العنصر b لا ينتمي إلى المجموعة A، ونعبر عن ذلك بالشكل : $b\notin A$

2.1.1ـ الاحتواء:

نقول عن مجموعة أنها محتواة في مجموعة F إذا كان كل عنصر من E هو عنصر من F
ونكتب:

$$E\subset F\Leftrightarrow \forall x:(x\in E\Rightarrow x\in F)$$

3.1.1ـ مجموعة أجزاء مجموعة:

هي مجموعة كل المجموعات المحتواة في المجموعة E وتكون مجموعة جديدة ونرمز لها بالرمز $P(E)$ وأن

$$A\subset E\Leftrightarrow A\in P(E)$$

4.1.1ـ المتممة :

لتكن E مجموعة و A جزء منها. نسمي متممة A بالنسبة لـ E مجموعة عناصر E التي لا تنتمي إلى A ونرمز لها بالرمز C_E^A و نكتب:

$$C_E^A=\{x\in E: x\notin A\}$$

5.1.1ـ التقاطع:

تقاطع مجموعتين E و F هو مجموعة العناصر المشتركة بينها ونرمز له بـ $E\cap F$

$$E\cap F=\{\mathrm{x}:\mathrm{x}\in E\wedge \mathrm{x}\in F\}$$

6.1.1ـ الإتحاد:

إتحاد مجموعتين E و F هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى واحدة منهما على الأقل ونرمز له بـ $E \cup F$ بعبارة أخرى:

$$E \cup F = \{x : x \in E \vee x \in F\}$$

ملاحظة: الإتحاد والتقاطع عمليتان تجميعيتان وتوزيعيتان على بعضها

2.1ـ العلاقات في المجموعات

لتكن $\Re$ علاقة ثنائية معرفة في مجموعة غير خالية E نقول عن العلاقة $\Re$ أنها:

1 – انعكاسية: إذا كان: $\forall x \in E : x \Re x$

2 – تناظرية : إذا كان : $\forall x, y \in E : x \Re y \Rightarrow y \Re x$

3–ضد تناظرية : إذا كان : $\forall x, y \in E : (x \Re y \wedge y \Re x) \Rightarrow x = y$

4– متعدية: إذا كان: $\forall x, y, z \in E : (x \Re y \wedge y \Re z) \Rightarrow x \Re z$

1.2.1ـ علاقات التكافؤ

نقول عن $\Re$ علاقة ثنائية في مجموعة غير خالية E إنها علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية، تناظرية، متعدية

ونسمي صنف التكافؤ $\dot{x}$: $\dot{x} = \{y \in E : x \Re y\}$

المجموعات المرتبة:

لتكن E مجموعة غير جالية و $\Re$ علاقة ثنائية معرفة على E نقول عن $\Re$ إنها علاقة ترتيب إذا كانت انعكاسية، ضد تناظرية، متعدية

نرمز عادة لعلاقة الترتيب بالرمز $\leq$ و عندئذ تسمى الثنائية $(E,\leq)$ بالمجموعة المرتبة.

3.1ـ المجموعات القابلة للعد:

إن أبسط المجموعات غير المنتهية هي مجموعة الأعداد الطبيعية. نسمي مجموعة قابلة للعد كل مجموعة يمكن أن نجد لها تقابلا بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية. بعبارة أخرى فإننا نعرف مجوعة قابلة للعد على أنها مجموعة يمكن ترقيم عناصرها ووضعها على شكل متتالية غير منتهية $a_1, a_2, \ldots, a_n$

–خاصية1:

كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد مجموعة منتهية أو قابلة للعد.

–خاصية2:

إن كل اتحاد منته أو قابل للعد لمجموعات قابلة للعد مجموعة قابلة للعد.

– خاصية3:

كل مجموعة غير منتهية تحوي مجموعة جزئية قابلة للعد.

4.1ـ الأعداد الأصلية:

ليكن F,E مجموعتان كيفية

1.4.1ـ تعريف:

نقول أن E و F لهما نفس الأصلي إذا وجد تقابل f بينهما ونرمز بذالك $|F|=|E|$
ونقول أن E و F لهما نفس القوة.

2.4.1ـ تعريف:

أ- نقول أن E مجموعة منتهية إذا وجد عدد طبيعي n بحيث $|E|=n$.

ب- نقول أن E مجموعة لا منتهية إذا كانت غير منتهية.

ملاحظة:

إذا كانت $E=\varnothing$ فإن $|E|=0$

3.4.1ـ نظرية كانتور:

لتكن A و B مجموعتين كيفيتين.

إذا وجد تباين f من A علي المجموعة B، وتباين g من المجموعة B علي المجموعة A، فإن المجموعتين A B متساويتا القوة و نكتب $|A|=|B|$.

5.1ـ الزمرة:

ظهر مفهوم الزمرة في القرن 19 عند حل معادلات (متعدد الحدود) وكان العالم الفرنسي (GALOIS) أول من استعمل كلمة زمرة (GROUPE)، عند تأمل زمرة تباديل جذور معادلات كهذه، وقد ظهرت بديهيات الزمرة بوضعها الحالي أول مرة في 1902 وينسب ذلك إلى العالم الأمريكي (Hintington).

1.5.1ـ مفهوم الزمرة :

هي إحدى أهم الأفكار التي تظهر في مواضيع مختلفة مثل التحليل والطبولوجيا، وهي أداة مهمة تستخدم في ميكانيك الكم وعلم البلورات وبمجالات كثيرة أخرى.

2.5.1ـ تعاريف :

تعريف العملية الداخلية:

لتكن E مجموعة ، نسمي (*) قانون تركيب داخلي أو (عملية داخلية) على E : كل تطبيق f من E×E نحو E معرف ب : $\forall x,y\in E: f(x,y)=x*y$

تعريف الزمرة:

لتكن A مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية $(*)$.

نقول إن $(A,*)$ لها بنية زمرة إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

أ- العملية $(*)$ تجميعية : $\forall x,y,z\in A: x*(y*z)=(x*y)*z$

ب- يوجد في A عنصر حيادي: $\exists e\in A,\forall x\in A: x*e=e*x=x$

ت- لكل عنصر من A نظير x': $\forall x\in A,\exists x': x*x'=x'*x=e$

ملاحظات :

1- إذا كانت الزمرة A ضربية نرمز لها بـ : $(A,\cdot)$ و نعبر عن نظير x بـ x^{-1}

2- أما إذا كانت جمعية نرمز لها بـ : $(A,+)$ ونعبر عن نظير x بـ $(-x)$

3- نقول إن الزمرة A تبديلية إذا كان : $\forall(a,b)\in A\times A: a.b=b.a$

3.5.1ـ الزمر الجزئية :

لتكن $(A,*)$ زمرة عنصرها الحيادي e ، H جزء غير خال من A,

نقول عن H إنها زمرة جزئية من A إذا تحقق ما يلي:

1- شرط الاستقرار: $\forall x,y\in H: x*y\in H$

2- شرط وجود النظير: $\forall x\in H,\exists x'\in H$ حيث x' نظير x في A

و نكتب $H\le A$ للتعبير على أن H زمرة جزئية من A .

ملاحظة :

لكل زمرة $(A,*)$ زمرتان جزئيتان بديهيتان هما $(A,*),(\{e_A\},*)$

6.1ـ الحلقات:

يعتبر ديفيد هلبرت أول من استخدم مصطلح الحلقة ولم يظهر التعريف المجرد للحلقة كما نراه إلا في العقد الثاني من القرن العشرين.

1.6.1ـ تعريف الحلقة:

نسمّي حلقة كل ثلاثية $(A,+,\cdot)$ حيث $(A,+)$ زمرة تبديلية و $(\cdot)$ عملية داخلية في A، تجميعية وتوزيعية بالنسبة للعملية $(+)$ أي:

$$\forall a,b\in A: a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$
$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$$

تسمّى العملية $(+)$ بالجمع عنصرها الحيادي يرمز له بالرمز (0) أو (0_A) ويسمى بصفر الحلقة وتسمى العملية $(\cdot)$ بالضرب وغالبا ما نكتب ab عوض $a\cdot b$

ملاحظات:

1) $(+)$ ،$(\cdot)$ تمثلان عمليتين مجردتين وليستا عمليتي الجمع والضرب الاعتياديتين ولو أننا نسميهما بالجمع والضرب.
2) إذا قبلت عملية الضرب عنصرا حياديا نرمز له بالرمز (1) أو 1_A عندئذ نقول إن الحلقة $(A,+,\cdot)$ واحدية.
3) إذا كانت عملية الضرب تبديلية فإننا نقول إن الحلقة $(A,+,\cdot)$ تبديلية.

أمثلة:

$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ هي حلقات تبديلية واحدية حيث $(+)$،$(\cdot)$ هما الجمع والضرب العاديان.

- في كل ما يلي نعتبر كل الحلقات واحدية إلا إذا ورد العكس.

بعض قواعد الحساب في حلقة:

لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة

لدينا:

1) (أ) $\forall a,b,c \in A : a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$

(ب) $(b-c)\cdot a=b\cdot a-c\cdot a$

2) $\forall a \in A: \quad a\cdot 0_A=0_A\cdot a=0_A$

3) $$\forall a\in A,\forall n\in\mathbb{Z}:\quad na=\begin{cases}\underbrace{a+a+......+a}_{n\text{ مرة}} & n>0\\ 0 & n=0\\ \underbrace{(-a)+(-a)+......+(-a)}_{(-n)\text{ مرة}} & n<0\end{cases}$$

- لنثبت 1):

لدينا:

$$\begin{aligned}a\cdot(b-c)+a\cdot c&=a\cdot((b-c)+c)\\&=a\cdot\left(b+\left(\underbrace{-c+c}_{0''}\right)\right)\\&=a\cdot b\end{aligned}$$

وبالتركيب بنظير $a\cdot c$ (بالنسبة للجمع) نحصل على:

$$a\cdot(b-c)+a\cdot c-a\cdot c=a\cdot b-a\cdot c$$
$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$$

وبنفس الطريقة نبرهن على المساواة (ب)

- أما 2) فبرهنها بوضع $b=c$ في (أ).

2.6.1ـ الحلقات الجزئية:

لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة، وليكن $B \neq \varnothing$ جزءا من A. نقول إن B حلقة جزئية من الحلقة $(A,+,\cdot)$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

1) $(B,+)$ زمرة جزئية من $(A,+)$

2) B مستقرة بعملية الضرب أي: $\forall x,y \in B : x \cdot y \in B$

مثال:

إن $(A,+,\cdot)$ و $(\{0\},+,\cdot)$ حلقة جزئية من الحلقة $(A,+,\cdot)$

وإن الحلقة $\mathbb{Z}$ حلقة جزئية من الحلقة $\mathbb{Q}$

3.6.1ـ بعض العناصر الخاصة في حلقة:

لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة

a) **قاسم الصفر:** نقول عن عنصرين a و b من A إنهما قاسمان للصفر إذا وفقط إذا كان: $a\cdot b = 0_A$ مع $a \neq 0_A$ ،$b \neq 0_A$

b) **العنصر عديم القوة:** نقول عن $a \in A$ إنه عنصر عديم القوة إذا وفقط إذا كان: $\exists m \in \mathbb{N}^* / a^m = 0_A$

حيث: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot ..... \cdot a}_{m \text{ مرة}}$

عندئذ أصغر عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ يحقق $a^n = 0$ نسميه "**دليل عديم القوة**"

c) **العنصر القابل للقلب:** نفرض أن A حلقة واحدية $(1_A \neq 0_A)$ وليكن $a \in A$ نقول عن a إنه قابل للقلب في A إذا وفقط إذا:

$\exists b \in A : a \cdot b = b \cdot a = 1_A$

b نسميه مقلوب a في A ونرمز له دائما بالرمز a^{-1}، ونرمز للعناصر القابلة للقلب بـA^*

d) **العنصر غير القابل للاختزال في** A: نفرض أن A حلقة واحدية تبديلية، نقول عن عصر $p \in A$ أنه غير قابل للاختزال في A إذا وفقط إذا كان:

1) p عنصر ليس قابلا للقلب $(p \notin A^*)$

2) كل قاسم لـ p هو إما قابل للقلب في A أو مشارك لـ p بمعنى:

$(q \in A$ و q يقسم $p) \Leftrightarrow q \in A^* \vee p = u \cdot q$ بحيث $u \in A^*$

وإذا كان p لا يحقق أحد الشرطين نقول أنه قابل للاختزال.

مثال:

العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}$ هي $U(\mathbb{Z}) = \{-1,+1\}$، أمّا العناصر غير القابلة للاختزال في $\mathbb{Z}$ هي $\pm P$ مع $P \in \mathbb{N}^*$ و P أولي.

e)الحلقة التامة:

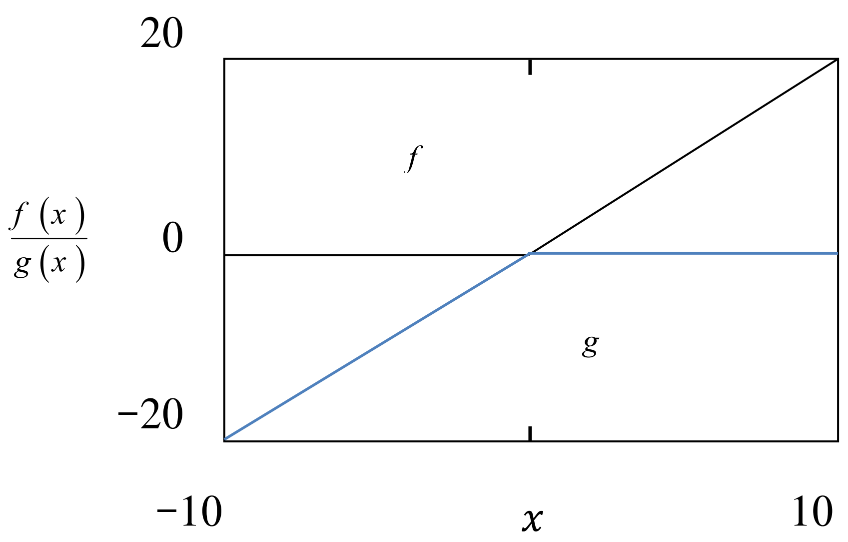
لتكن A حلقة تبديلية بحيث $A \neq \{0\}$، نقول عن A إنها تامة إذا كانت لا تحوي قواسم الصفر (0).

مثال:

1. حلقة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة تامة.
2. في الحلقة $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,.\right)$، لنعتبر التابعين المعرفين بالشكل :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \begin{cases} f(x) = x + |x| \\ g(x) = x - |x| \end{cases}$$

بيانهما موضح بالشكل :



من جهة أخرى لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x)\cdot g(x) = 0$$

أي أن $fg = 0$ و $f \neq 0, g \neq 0$ ، إذن f, g قواسم للصفر

3. لتكن E مجموعة ، إن الحلقة $(p(E),\Delta,\cap)$ غير تامة إذا كان $|E| > 0$.

مع العلم أن $\cap$: يرمز لتقاطع المجموعات .

و Δ : يرمز للفرق التناظري.

f)الحقل (الجسم) :

تعريف:

نسمي حقلا كل حلقة واحدية $(A,+,\cdot)$ و جميع عناصر المجموعة $A^* = A/\{0_A\}$ تقبل عنصر نظير بالنسبة لعملية الضرب

ملاحظة:

إذا كانت $(\cdot)$ تبديلية نقول $(A,+,\cdot)$ حقلا تبديلي .

أمثلة:

1) $(\mathbb{R},+,\times)$ حقل تبديلي
2) $(\mathbb{Z},+,\times)$ ليست حقل
3) $(\mathbb{Q},+,\times)$ حقل تبديلي

الفصـــــل الثـــــاني

المثـــــاليات

1.2ـ المثاليات:

لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة I , مجموعة غير خالية من A .

1.1.2ـ تعاريف :

تعريف:

نقول عن I إنه مثالي من A من اليمين إذا وفقط إذا:

1) $(I,+)$ زمرة جزئية من $(A,+)$: $\forall x,y \in I : x-y \in I$

2) $\forall x \in I, \forall a \in A : a\cdot x \in I$

أما المثالي من اليسار يكون الاختلاف في الشرط الثاني

$\forall x \in I, \forall a \in A : x\cdot a \in I$

ونقول عن I إنه مثالي من A إذا كان مثاليا من اليمين ومن اليسار.

أمثلة:

1) إذا كان $n \in \mathbb{Z}$ فإن $n\mathbb{Z}$ تكون مثاليا من الحلقة $(\mathbb{Z},+,\cdot)$.

2) إن $\mathbb{Z}$ ليست مثاليا من $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ولا من الحلقة $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

3) المجموعة $B=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ هي مثالي من الحلقة $\left\{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\bar{+},\bar{\cdot}\right\}$

ملاحظة:

1− في حالة حلقة تبديلية يفقد الوصفان " من اليمين " و " من اليسار" أهميتهما.

2− المثالي هو حلقة جزئية والعكس ليس صحيحا وذلك حسب المثال التالي:

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة جزئية للحلقة $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ولكنها ليست مثاليا لأن $\mathbb{Z}$ ليست مستقرة بالنسبة للضرب بعناصر في $\mathbb{Q}$ مثلا: $5\in\mathbb{Z}$ ، $1/2 \in \mathbb{Q}$ ولكن $5\left(1/2\right)=5/2 \notin \mathbb{Z}$

جمع وضرب المثاليات:

إذا كان $(I,+,\cdot)$،$(J,+,\cdot)$ مثاليين للحلقة التبديلية $(A,+,\cdot)$ فإن: كل من $(I+J,+,\cdot)$، $(I\cdot J,+,\cdot)$ هو مثالي للحلقة $(A,+,\cdot)$ بحيث:

$$I+J=\{x+y \,/\, x\in I, y\in J\}$$

$$I\cdot J=\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,/\, n\in\mathbb{N}^*, x_i\in I, y_i\in J\right\}$$

البرهان:

من الواضح أن كلا من $I+J$، $I\cdot J$ مجموعة غير خالية، وليكن r عنصرا في A وكل من $a+b$، $c+d$ عنصرا في $I+J$ حيث $b,d\in J\wedge a,c\in I$ عندئذ: $a-c\in I, b-d\in J$

ولدينا: $(a+b)-(c+d)=(a-c)+(b-d)\in I+J$

و $r\cdot(a+b)=r\cdot a+r\cdot b\in I+J$

إذن: $(I+J,+,\cdot)$ مثالي للحلقة $(A,+,\cdot)$

وللبرهنة على أن $(I\cdot J,+,\cdot)$ مثالي للحلقة $(A,+,\cdot)$ نفرض r عنصرا في A وكلا من $y=\sum_{j=1}^{m}c_jd_j, x=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ عنصرا في $I\cdot J$ حيث $a_i,c_j\in I, b_i,d_j\in J$ عندئذ:

$$x-y=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\sum_{j=1}^{m}c_jd_j \;\; / \;\; 1\leq i\leq n ، 1\leq j\leq m$$

$$x-y=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\beta_i \quad \text{حيث} \quad k=Max(n,m)$$

وعليه فإن: $x-y\in I\cdot J$ وأن $r\cdot x=r\cdot\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n}(r\cdot a_i)\cdot b_i\in I\cdot J$

إذن $(I\cdot J,+,\cdot)$ مثالي للحلقة $(A,+,\cdot)$

2.1.2- المثالي المولد بمجموعة:

تعريف: ليكن S جزءا غير خال من حلقة A. المثالي المولد بـ S هو أصغر مثالي "بمفهوم الإحتواء " ، من A يحوي S ونعبر عنه بـ $\langle S\rangle$،

نظرية:

في حلقة تبديلية A و S جزء غير خال من A. لدينا:

$$\langle S\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \;/\; n\in\mathbb{N}^*, a_i\in A, x_i\in S, \forall i:1\leq i\leq n\right\}$$

أي كل المجاميع المنتهية لعناصر من الشكل ax $a\in A, x\in S,$.

البرهان:

نضع الطرف الأيمن يساوي K ونثبت أن $K=\langle S\rangle$.

لدينا $1\in A$، واضح أن $\forall x\in S: \; x=1\cdot x\in K$ أي أن $\phi\neq S\subseteq K$.

بالاعتماد على تعريف المثالي وكون الحلقة تبديلية يمكن إثبات أن K مثالي من A يحوي S ومنه $\langle S\rangle\subseteq K$.

من جهة أخرى ليكن x من K ، $x=\sum_{1\leq i\leq n}a_ix_i$ مع $n\in\mathbb{N}$ منته و $\forall i: a_i\in A, x_i\in S$؛ كل مثالي من A يحوي S فهو يحوي a_ix_i مهما كان I وبالتالي يحوي x ، إذن $x\in\langle S\rangle$ ومنه $K\subseteq\langle S\rangle$. إذن $K=\langle S\rangle$.

مثال: $S=\{2,6\}, A=\mathbb{Z}$.

من كون S تحوي عنصرين فقط وكون الجمع تبديلي لدينا: $\langle S\rangle=\{2a+6b:\quad a,b\in\mathbb{Z}\}=\langle 2\rangle+\langle 6\rangle$

لكن $\langle 2\rangle\subset\langle 6\rangle$ و $\langle 6\rangle,\langle 2\rangle$ زمر جزئية من $(\mathbb{Z},+)$ لذا $\langle 2\rangle=\langle 6\rangle+\langle 2\rangle$ ومنه $\langle S\rangle=\langle 2\rangle$.

وإذا كانت مجموعة أحادية ولتكن $S=\{a\}$ فإن:

$$\langle a\rangle=\langle S\rangle=\{r\cdot a\,/\,r\in A\}$$

ونسميه "المثالي الرئيسي " ونكتب $\langle a\rangle=a\cdot A$

مثال: $A=\mathbb{Z}$ $\quad S=\{3,6\}$

$$\begin{aligned}\langle S\rangle&=\{3\alpha+6\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{Z}\}\\&=\{3(\alpha+2\beta),\alpha,\beta\in\mathbb{Z}\}\\&\subseteq 3\mathbb{Z}\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى:

$$\begin{aligned}x\in 3\mathbb{Z}&\Rightarrow x=3k\,/\,k\in\mathbb{Z}\\&\Rightarrow x=3k+6\cdot 0\in\langle S\rangle\end{aligned}$$

إذن: $\langle\{3,6\}\rangle=3\mathbb{Z}$.

3.1.2ـ تصنيف بعض المثاليات:

• المثالي الأعظمي:

لتكن A حلقة و I مثالي منها، نقول إن I مثالي أعظمي في A إذا كان:

1) $I\neq A$

2) من أجل كل J مثالي من A لدينا

$$I\subset J\Rightarrow J=I\vee J=A$$

نظرية:

لتكن A حلقة تبديلية و I مثالي منها.

لدينا: I أعظمي في A إذا وفقط إذا $\frac{A}{I}$ حلقة تامة.

البرهان:

نفرض أن I أعظمي في A .

يكفي إثبات أن لكل عنصر غير معدوم من $\frac{A}{I}$ نظير (بالنسبة لعملية الضرب).

$I\neq A$، ليكن $I\neq a+I\in\frac{A}{I}$ (عنصر يختلف عن صفر الحلقة).

$I\neq a+I$ يؤدي إلى $a\notin I$. لدينا $I\subset\langle a\rangle+I,\quad I\neq\langle a\rangle+I$.

بما أن $\langle a\rangle+I$ مثالي من A و I أعظمي في A فإن $\langle a\rangle+I=A$.

لدينا $1\in A$، وهذا يؤدي إلى وجود $b\in A,u\in I$ بحيث $ab+u=1$.

$b\notin I$ لأنه في الحالة العكسية يصبح $1\in I$ وهذا يؤدي إلى أن $I=A$ تناقض.

إذن $(ab+u)+I=1+I$ ومنه $(a+I)(b+I)=ab+I=1+I$.

A تبديلية يؤدي إلى أن $\frac{A}{I}$ تبديلية وبالتالي $a+I$ يقبل مقلوبا، إذن $\frac{A}{I}$ حلقة تامة.

عكسيا، لدينا $0,1\in A$ و $\frac{A}{I}$ حلقة تامة إذن $I,1+I\in\frac{A}{I}$ وبالتالي $\left|\frac{A}{I}\right|\geq 2$.

$1\notin I$ لأن الحالة العكسية تؤدي إلى $A=I$ وهذا يستلزم $\left|\frac{A}{I}\right|=1$ تناقض.

إذن $I\neq A$.

ليكن J مثاليا من A بحيث $I\subset J,\quad J\neq I$ ونثبت $J=A$.

$J\neq I$ يؤدي إلى وجود $a\in J$ و $a\notin I$، إذن $I\neq a+I\in\frac{A}{I}$ ومنه $a+I$ يقبل مقلوبا $I\neq b+I\in\frac{A}{I}$، أي أن

$1+I=(a+I)(b+I)=ab+I$ ومنه $1-ab\in I$، إذن $1-ab\in J$، $a\in J$ يؤدي إلى أن $ab\in J$ ومنه $1\in J$

وهذا كاف لكي يكون $J=A$. إذن I أعظمي في A.

مثال:

مثاليات $\mathbb{Z}$ الأعظمية هي من الشكل $n\mathbb{Z}$ مع n أولي في $\mathbb{Z}^*$

- **المثالي الأولي:**

لتكن A حلقة ، I مثالي منها، نقول عن I إنه أولي في A إذا كان:

1) $I\neq A$
2) $\forall x,y\in A: x\cdot y\in I\Rightarrow x\in I\vee y\in I$

مثال: $A=\mathbb{Z}\quad I=3\mathbb{Z}$

1) $1\in\mathbb{Z}\wedge 1\notin I$ ومنه $I\neq\mathbb{Z}$

2) $x,y\in\mathbb{Z}: x\cdot y\in I\Rightarrow x\cdot y=3k\ /\ k\in\mathbb{Z}$

$x\cdot y\in I\Rightarrow$ 3 يقسم $x\cdot y$

وبما أن 3 أولي فإن 3 يقسم x أو يقسم y.

وبالتالي: $x\in 3\mathbb{Z}$ أو $y\in 3\mathbb{Z}$

ومنه $3\mathbb{Z}$ أولي في $\mathbb{Z}$.

ملاحظة:

بصفة عامة، مثالي أعظمي في حلقة تبديلية هو أولي لكن العكس غير صحيح.

نظرية :

لتكن A حلقة تبديلية ذات عنصر حيادي ، و I مثالية في A فان

A/I هي حلقة تامة $\Leftrightarrow$ إذا كانت I مثالية أولية

البرهان :

نفرض A/I حلقة تامة . فان $A \neq I$ ، ولكل $a,b \in A$ إذا كان $a \notin I$ و $b \notin I$

فان $a + I \neq I + 0 = \overline{0}$ و $b + I \neq I + 0 = \overline{0}$ في A/I فان $(a+I)(b+I) \neq \overline{0} = I$ أي أن $ab + I \neq I$ فان $ab \notin I$

أي أن I مثالية أولية في A

لنفرض الآن أن I مثالية أولية في A

لكل $A/I \neq a + I \neq \overline{0}$ و $b + I \neq \overline{0}$ فان

$a + I \neq I$ و $b + I \neq I$

بما أن I مثالية أولية في A فان $ab = A/I$ فان $ab + I \neq I = (b+I)(a+I)$

بهذا A/I حلقة تامة . **(و.هـ.م)**

- **المثالي الرئيسي:**

لتكن A حلقة و I مثاليا منها.

نقول عن I إنه مثالي رئيسي في A إذا وفقط إذا وجدت مجموعة جزئية S من A $(S \neq \phi)$ بحيث: $I = \langle S \rangle$.

مثال:

من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا: $n\mathbb{Z}$ مثالي رئيسي من $\mathbb{Z}$ لأن: $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$

الفصـــــل الثـــــالث

الحـــــلقات

1.3- حلقة حاصل القسمة:

تعريف:

لتكن A حلقة ، ولتكن I مثالية في A واضح أن I هي زمرة جزئية اعتيادية في الزمرة $(A,+)$، فأن مجموعة حاصل القسمة A/I هي زمرة بالنسبة لعملية الجمع، حيث $A/I=\{a+I : \mathrm{a}\in A\}$

نعرف عملية ضرب مجموعتين مشاركتين في A/I كالتالي :

$$\mathrm{a+I,\ b+I}\in \mathrm{A}/I \quad ; \quad (a+I)(b+I)=ab+I$$

لأنه عملية الضرب هذه معرفة بشكل جيد .

$\forall\, a+I,\ B+I,\ a'+I,\ b'+I \in A/I$ إذا كان : $a+I=a'+I,\ b+I=b'+I$

فإن $\exists h,k\in I \ /\ a=a'+h,\ b=b'+k$

إذن $ab=a'b'+a'k+hb'+hk$

وبما أن $a'k+hb'+hk\in I$

أي أن $ab+I=a'b'+I$

نظرية :

الزمرة $(A/I,+)$ و عملية الضرب المعرفة أعلاه هي حلقة

البرهان :

$\forall\, a+I,\ a+I,\ a+I\in A/I$ فان :

$$a(bc)+I=(a+I)(bc+I)=(a+I)(b+I)(c+I)$$
$$(ab)c+I=(ab+I)(c+I)=(a+I)(b+I)(c+I)$$

أي أن عملية الضرب المعرفة أعلاه في A/I تجميعية وكذلك :

$$(a+I)((b+I)+(c+I))=(a+I)((b+c)+I)=a(b+c)+I=(ab+ac)+I=$$
$$(ab+I)+(ac+I)=((a+I)+(b+I))+((a+I)+(c+I))$$

و بنفس الطريقة نبرهن إن :

$$((b+I)+(c+I))(a+I)=(b+I)(a+I)+(c+I)(a+I)$$

أي ان عملية الضرب المعرفة في A/I توزيعية بالنسبة لعملية الجمع .

بهذا فان A/I حلقة ، نسميها حلقة حاصل القسمة للحلقة A بالنسبة للمثالية I إذا كان A حلقة تبديلية فان A/I تكون تبديلية وإذا كانت A حلقة ذات عنصر حيادي فان A/I تكون ذات عنصر حيادي ، وعنصرها الحيادي هو $1+I$.

2.3ـ التشاكلات (إيزومورفيزم) الحلقية:

1.2.3ـ تماثل (هومومورفيزم) الحلقات:

لتكن $(A,+,\cdot)$، $(B,\perp,*)$ حلقتين.

التطبيق $f:A\longrightarrow B$ هو تماثل حلقات إذا كان:

1) $\forall x,y\in A: f(x+y)=f(x)\perp f(y)$

2) $\forall x,y\in A: f(x\cdot y)=f(x)*f(y)$

- في حالة كون تماثل حلقات متقابلا نسميه تشاكل (إيزومرفيزم) حلقات

2.2.3ـ بعض المبرهنات الأساسية:

لتكن كل من $(A,+,\cdot)$، $(B,\perp,*)$ حلقة واحدية و φ تماثل من الحلقة $(A,+,\cdot)$ إلى الحلقة $(B,\perp,*)$عندئذ:

1) إذا كان φ تطبيقا غامرا فإن:

a) $\varphi(1_A)=1_B$

b) $\forall a\in A:\varphi(a^{-1})=(\varphi(a))^{-1}$ حيث a له نظير في A

2) إذا كانت $(\mathrm{T},+,\cdot)$ حلقة جزئية للحلقة $(A,+,\cdot)$ فإن:

$(\varphi(\mathrm{T}),\perp,*)$ حلقة جزئية للحلقة $(B,\perp,*)$

3) إذا كانت $(U,\perp,*)$ حلقة جزئية للحلقة $(B,\perp,*)$ فإن:

$(\varphi^{-1}(U),+,\cdot)$ حلقة جزئية للحلقة $(A,+,\cdot)$

4) إذا كانت $(I,\perp,*)$ مثاليا للحلقة $(B,\perp,*)$ فإن $(\varphi^{-1}(I),+,\cdot)$ مثالي للحلقة $(A,+,\cdot)$.

5) إذا كان φ تطبيقا غامرا وكان $(J,+,\cdot)$ مثاليا للحلقة $(A,+,\cdot)$ فإن $(\varphi(J),\perp,*)$ مثالي للحلقة $(B,\perp,*)$.

نظرية :

لتكن I مثالية في الحلقة A، فائه يوجد هومورفيزم غامر $f:A\to A/I$ بحيث $Kerf=I$.

البرهان:

نعرف $f:A\to A/I$ كالأتي:

$$\forall X\in A, f(x)=x+I$$

لكل $x,y\in A$ اذا كان $x=y$ فانه : $f(x)=f(y)$ بهذا f يعرف تطبيقا .

وكذلك لكل $x,y\in A$ فان :

$$f(x+y)=(x+y)+I=(x+I)+(y+I)=f(x)+f(y)$$
$$f(x\cdot y)=(x\cdot y)+I=(x+I)\cdot(y+I)=f(x)\cdot f(y)$$

بهذا فان f هومومورفيزم حلقات .

و نلاحظ انه لكل $a+I\in A/I$ فان $a\in A$ و يحقق $f(a)=a+I$ فان f غامر.

وكذلك:

$a \in \ker f \Leftrightarrow f(a) = a + I = 0_A + I \Leftrightarrow a + I + I \Leftrightarrow a \in I$

بذلك $\ker f = I$. (و.هـ.م)

نظرية الهومومورفيزم :

لتكن $A,\ B_2,\ B_1$ حلقات ، و ليكن $f_1 : A \to B_1$ و $f_2 : A \to B_2$ هومومورفيزمين يحققان الشروط $f_1(A) = B_1$ و
$\ker f_1 \subseteq \ker f_2$

فانه يوجد هومومورفيزم واحد فقط $f : B_1 \to B_2$ بحيث $f \circ f_1 = f_2$
$f(B_1) = f_2(A)$ و $\ker f = f_1(\ker f_2)$

البرهان :

لنبرهن هذه النظرية لابد من إستخدام التوطئة الآتية

توطئة :

لتكن $H_1,\ H_2,\ G$ زمر ولتكن $h_1 : G \to H_1$ ، $h_2 : G \to H_2$ هومومورفيزمين يحققان $h_1(G) = H_1$ ،
$\ker h_1 \subset \ker h_2$ ، فإنه يوجد هومومورفيزم واحد فقط $\varphi : H_1 \to H_2$ بحيث :

$\varphi \circ h_1 = h_2$
$\varphi(H_1) = h_2(G)$
$\ker \varphi = h_1(\ker h_2)$

الإثبات : أنظر المرجع [4] صفحة 177 (المترجم بالعربية)

بإستعمال هذه التوطئة فإنه يوجد هومومورفيزم واحد فقط $f : B_1 \to B_2$ معرف بالشكل $\forall a \in B_1, f(a) = f_2(y)$
حيث ان f هومومورفيزم حلقات $\forall a,b \in B_1$ بمأن $f(a) = b_1$ فإنه يوجد $c,d \in A$ بحيث $f_1(c) = \mathrm{a}$ و $f_1(d) = \mathrm{b}$
ذلك فان :

$$
\begin{aligned}
f(ab) &= f(f_1(c)f_1(d)) = f(f_1(cd)) = (\mathrm{f} \circ f_1)(cd) \\
&= f_2(cd) = f_2(c)f_2(d) \\
&= (\mathrm{f} \circ f_1)(c) \cdot (\mathrm{f} \circ f_1)(d) \\
&= f(a) \cdot f(b)
\end{aligned}
$$

بهذا فان f هومومورفيزم حلقات ويحقق كل الشروط (و.هـ.م)

نظرية (حول الايزرمورفيزم) :

ليكن φ هومومورفيزما غامر من الحلقة A على الحلقة B . فانه يوجد ايزومورفيزم واحد فقط f بين $A/\ker\varphi$ و B بحيث أن $f \circ \chi = \varphi$ حيث χ هو الهومومورفيزم الطبيعي في الحلقة A على الحلقة $A/\ker\varphi$.

البرهان :

نلاحظ φ هومومورفيزم غامر من الحلقة A على الحلقة B و χ هومومورفيزم
غامر من الحلقة A على الحلقة $A/\ker\varphi$ و كذلك

$a \in \ker \chi \Leftrightarrow \chi(a) = a \ker \varphi = \ker \varphi \Leftrightarrow a \ker \varphi$

فان $\ker\varphi=\ker\chi$

فانه من النظرية السابقة ينتج انه يوجد هومومورفيزم واحد فقط f من $A/\ker\varphi$ في B ويحقق كل الشروط .

بالإضافة إلى ذلك ، بما إن φ غامر فانه :

$$f(A/\ker\varphi)=f(\chi(A))=\varphi(\mathrm{A})=\mathrm{B}$$

أي أن f غامر، و كذلك :

$$\begin{aligned}\ker f &=\{a\ker\varphi\in A/\ker\varphi: f(\ker\varphi)=1_B\}\\ &=\{a\ker\varphi: f(\chi(a))=1_B\}\\ &=\{a\ker\varphi: f(a)=1_B\}\\ &=\{a\ker\varphi: a\ker\varphi\}\\ &=\{\ker\varphi\}\end{aligned}$$

أي أن f متباين ، فأن f إيزومورفيزم بين $A/Ker\varphi$ و B. (و.هـ.م)

نظرية:

لتكن $(A,+,\cdot),(A',\perp,*)$ حلقتين تبديليتين و $f:A\to A'$ هومومورفيزم للحلقات ، لدينا :

1) $Ker(f)=\{x\in A: f(x)=0'\}$ مثالي في الحلقة $(A,+,\cdot)$.

2) $A/_{Ker(f)}\approx Im(f)$

البرهان :

1) إن $(Ker(f),+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(A,+)$ ، من جهة أخرى ليكن $(a,x)\in A\times Ker(f)$ لدينا:

$$f(ax)=f(a)*f(x)=f(a)*0'=0'\Rightarrow ax\in Ker(f)$$

إذن $Ker(f)$ مثالي من $(A,+,\cdot)$.

2) التطبيق :

$$\varphi: A/_{Ker(f)}\to Im(f)$$
$$\dot{x}\to\varphi(\dot{x})=f(x)$$

هومومومرفيزم للحلقات ، وبالتالي فإن

$$A/_{Ker(f)}\approx Im(f)$$

أمثلة :

1. $\{0\}$ هو مثالي من الحلقة التبديلية $(A,+,\cdot)$ و أن : $A/_{\{0\}}\approx A$.

2. A هو مثالي من الحلقة التبديلية $(A,+,\cdot)$ و أن : $A/_{A}\approx\{0\}$.

نتيجة :

ليكن φ هومومورفيزم من الحلقة A في الحلقة B . فانه يوجد ايزرموفيزم بين $A/\ker\varphi$ و $\varphi(A)$ هذه النتيجة هي حالة خاصة من النظرية ، حيت ان φ غامر من الحلقة A على $\varphi(A)$ دائما .

3.3ـ الحلقة $\mathbb{Z}$ و خواصها :

نعلم أن $\mathbb{Z}$ هي حلقة الأعداد الصحيحة و هي تبديلية ذات عنصر حيادي ، جميع الزمر الجزئية في الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ من الشكل $\langle m\rangle$ حيث $m\in\mathbb{Z}$ بما أن لكل $n\in\mathbb{Z}$ فان $n,m\in\langle m\rangle$ ، فان جميع الزمر الجزئية في $\mathbb{Z}$ هي مثاليات في الحلقة $\mathbb{Z}$ ، نرمز لها بـ $m\in\mathbb{Z}$ أو $\langle m\rangle$ حيث $m=0,1....$.

لنرى الآن ماذا ستكون خواص القسمة $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

نعلم أن $\langle -m\rangle=\langle m\rangle$ ، لذلك فإننا سوف نلاحظ حالتين عندما $m=0$ وعندما $m>0$.

عندما $m=0$ فان $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\approx\mathbb{Z}$.

ليكن $m>0$ ، نعلم أن $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ هي مجموعة العناصر $\{\bar{0},\bar{1},........,\overline{m-1}\}$،العنصر $\bar{1}=1+\langle m\rangle$ هو العنصر الحيادي في $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ والتي هي حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب .

1) إذا كان m عددا غير أوليا

فان $m=m_1m_2$ حيث $m_1,m_2\in\mathbb{Z}$ و $m_1,m_2>1$ من هنا فان $\overline{m_1}\neq\bar{0}$ و $\overline{m_2}\neq\bar{0}$ ، لكن من جهة أخرى لدينا $\bar{0}=\bar{m}=\overline{m_1m_2}=m_1m_2$. أي أن $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ تحتوي على قواسم حقيقية للصفر ، أي أن $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ليست حلقة تامة.

2) إذا كان $m=A$ عددا أوليا

ليكن $\bar{a}\neq\bar{0}$ عنصرا من الحلقة $\mathbb{Z}/A\mathbb{Z}$ فان a لا يقبل القسمة على A ، وبما ان A أولي فان $PGCD(a,A)=1$ ، أي انه يوجد $q,p\in\mathbb{Z}$ بحيث $ab+aq=1$ ، فان $ab=(-q)b+1$ أي أن $\overline{ab}=\bar{a}\,\bar{b}=1$
أي انه للعنصر $a\neq0$ يوجد $\bar{b}\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ بحيث $\overline{ab}=1$ ، بهذا فان كل عنصر من $\mathbb{Z}/A\mathbb{Z}$ يختلف عن الصفر عكوس .

3) إذا كان العدد m غير أولي

لنرى مجموعة العناصر العكوسة في الحلقة $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ كما برهنة أعلاه إذا كان $PGCD(a,m)=1$ ، فان $\bar{a}$ عكوس في $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

أي أن العناصر العكوسة في الحلقة $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ هي العناصر $\bar{a}_i$ بحيث أن $PGCD(a_i,m)=1$.

4.3ـ أنواع الحلقات:

1.4.3ـ الحلقة العاملية:

لتكن A حلقة تامة، نقول عن A إنها حلقة عاملية إذا وفقط إذا كان كل عنصر $x \in A-\{0\}$ (غير قابل للقلب) يكتب على شكل جداء منته لعناصر غير قابلة للاختزال في A وعوامل هذا الجداء وحيدة.

أمثلة:

• $\mathbb{Z}$ حلقة عاملية.

•الحلقة $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ ليست عاملية $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]=\left\{a+b\sqrt{-5} / a,b \in \mathbb{Z}\right\}\right)$ لأن:

$6=2\cdot 3=\left(1+\sqrt{-5}\right)\cdot\left(1-\sqrt{-5}\right)$ (تفكيك غير وحيد).

2.4.3ـ الحلقة الرئيسية:

لتكن A حلقة تبديلية وتامة، نقول عن A إنها رئيسية إذا كانت كل مثالياتها رئيسية.

مثال: الحلقة $\mathbb{Z}$ هي حلقة رئيسية لأن كل مثالياتها رئيسية.

3.4.3ـ حلقة كثيرات الحدود :

A حلقة واحدية وتبديلية ندل علي العمليتين الداخليتين في A بالرمز $\times$ و $+$

لتكن ℓ مجموع المتتالية $(x_n)_n$ في A حيث $x_n=0$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N}),(\forall n \geq n_0)$,

$$\ell=\left\{(x_n)_n \subseteq A / (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) x_n=0\right\}$$

في ℓ نعررف عمليتين $\times$ و $+$ كالتالي :

$$(x_n)_n+(y_n)_n=(z_n)_n$$
$$(x_n)_n\times(y_n)_n=\left(\overline{z_n}\right)_n$$

حيث :

$$z_n=x_n+y_n$$
$$\overline{z_n}=\sum_{k=0}^{n} a_k y_{n-k}$$

هاتان العمليتان تحققان للمجموعة ℓ بنية حلقة تبديلية وواحدية حيث :

1) العنصر الحيادي بالنسبة للعملية $+$ هي المتتالية المعدومة $(e_n)_n, ((\forall n \leq n_0): e_n=0)$

2) العنصر الحيادي بالنسبة لعملية $\times$ هي المتتالية $(\overline{e_n})_n$ حيث :

$e_0=1$ (1 عنصر حيادي للحلقة A بالنسبة إلى x)

$(\forall n \geq 1) e_n=0$

3) $(-x_n)_n$ نظير العنصر $(x_n)_n$ بالنسبة إلي $+$.

1.3.4.3ـ ترميز و تعاريف :

نكتب المتتالية $(x_n)_n$ على الشكل :

$$(x_n)_n = (x_0, x_1, \dots x_n, x_{n+1}, \dots)$$

ندل علي العنصر $(0,1,0,0,\dots)$ بالرمز : X

ندل علي العنصر $(x,0,0,0,\dots)$ بالرمز : x

لدينا :

1)

$$X^2 = X \times X$$
$$= (0,0,1,0,0\dots)$$
$$X^3 = X^2 \times X = (0,0,0,1,0,0\dots)$$

.

.

$$X^n = X^{n-1} \times X \qquad = \left(0,0,0,\dots. \underbrace{1}_{n+1}, 0,0\dots\right)$$

2)

$$= \left(0,0,0,\dots. \underbrace{a}_{n+1}, 0,0\dots\right) = (\mathrm{a},0,0,0,\dots) \times \left(0,0,0,\dots. \underbrace{1}_{n+1}, 0,0\dots\right)$$
$$= a x^n$$

من خلال هذه الرميز كل عنصر $(a_0, a_1, \dots a_n, 0, \dots)$ يكتب على الشكل :

$$a_0 + a_1 + \dots a_n x^n$$

ندل على المجموعة ℓ المتغير الرمز $A[x]$

تعريف :

$A[x]$ تسمي حلقة كثير الحدود ذات المتغير الواحد العنصر $A[x]$ تسمي كثيرات الحدود .

العمليتان × و + تكتب في هذه الحالة :

مهما يكن $P(x)$ و $\phi(x)$ عنصرين من $A[x]$ حيث :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$$
$$\phi(x) = b_0 + b_1 x + \dots b_m x^m \qquad (m \le n)$$
$$P(x) + \phi(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_n x^n$$
$$P(x) \times \phi(x) = c_0 + c_1 + \dots c_{n+m} x^{n+m}$$

حيث :

$$\mathrm{c_k} = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{\mathrm{k-i}}$$

2.3.4.3ـ درجة كثير حدود:

ليكن $P(x)=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$ كثير حدود حيث $a_n\neq 0$ فإن العدد الطبيعي n يسمي درجة كثير الحدود $P(x)$ وندل عليه بالرمز : $d^\circ P(x)$:

$$n=d^\circ P(x)$$

3.3.4.3ـ خواص :

$$d^\circ\left(P(x)\times\phi(x)\right)\leq d^\circ P(x)+d^\circ\phi(x)$$
$$d^\circ\left(P(x)+\phi(x)\right)\leq \max(d^\circ P(x),d^\circ\phi(x))$$

ملاحظة :

إذا كانت A حلقة تامة فإن :

$$d^\circ\left(P(x)\phi(x)\right)=d^\circ P(x)+d^\circ\phi(x)$$

4.3.4.3ـ القسمة الإقليدية :

A جسم تبديلي ، $P(x)$ ، $\phi(x)$ كثيرا حدود من $A[x]$ يوجد $R(x)$ و $d(x)$ كثيرا حدود بحيث :

$$\begin{cases}P(x)=\phi(x)d(x)+R(x)\\ \quad d^\circ R(x)<d^\circ\phi(x)\end{cases}$$

$d(x)$ يسمي حاصل القسمة

$R(x)$ باقي القسمة من القسمة الإقليدية .

إذا كان $R(x)=0$ (كثير حدود معدوم) نقول إن $\phi(x)$ قاسم لكثير حدود $P(x)$

5.3.4.3ـ الإشتقاق لكثير الحدود:

ليكن $P(x)\in A[x]$ حيث :

$$P(x)=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$$

العنصر :

$$P'(x)=a_1+2a_2x+\dots+na_nx^{n-1}$$

يسمي مشتق $P(x)$

6.3.4.3ـ خواص الإشتقاق :

$$\left(P(x)+\phi(x)\right)'=P'(x)+\phi'(x)$$
$$\left(P(x)\phi(x)\right)'=P'(x)\phi(x)+P(x)\phi'(x)$$

ترميز :

ليكن : $P(x)=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$ كثير حدود درجته $n,(a_n\neq 0)$ ، نضع :

$$P^{(0)}(x)=P(x)$$
$$P^{(1)}(x)=P'(x)$$

$$P^{(2)}(x)=\left[P'(x)\right]'$$

.

.

$$P^{(n)}(x)=\left[P^{(n-1)}(x)\right]'$$

لدينا :

$P^{(m)}(x)=0$ (إذا كان $m>n$)

$P^{(n)}(x)=n!a_n$

7.3.4.3ـ الدالة كثيرة حدود:

نرفق بكل كثير حدود $A[x]\ni P(x)$ دالة كثير حدود

$$\begin{aligned} \mathrm{f}:A &\to A \\ x &\to \mathrm{f}(x) \end{aligned}$$

معرف كالتالي :

إذا كان : $P(x)=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$

فإن : $\mathrm{f}(x)=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$

نرمز لـ $\mathrm{f}(x)$ بالرمز : $P(x)$

8.3.4.3ـ جذور كثير حدود :

ليكن $A[x]\ni P(x)$ نقول إن x_0 جذر لكثير الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كانت الدالة كثير الحدود P تنعدم عند x_0 $\left(P(x_0)=0\right)$، 0 هو العنصر الحيادي بالنسبة إلي + في A

9.3.4.3ـ تعريف :

ليكن x_0 جذر كثير حدود $P(x)$ و n عدد طبيعي غير معدوم حيث $P(x)$ يقبل القسمة على $(x-x_0)^n$ و لا يقبل القسمة على $(x-x_0)^{n+1}$

العدد الطبيعي n يسمي رتبة الجذر x_0

10.3.4.3ـ حلقة كثيرات حدود $\mathbb{R}(x)$:

نظرية 1:

$\mathbb{R}[x]\ni P(x)$, $\mathbb{R}\ni z$

x جذر لكثير حدود $P(x)$ برتبة n إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

1) $P^{(k)}(x)=0$, $\forall k\in\{0,1,\dots,\mathrm{n}-1\}$

2) $P^{(n)}(x)\neq 0$

نظرية 2:

كل عنصر $P(x)$ من $\mathbb{R}[x]$ يكتب من الشكل :

$$P(x)=\mathrm{b}(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_i)^{k_i}(x^2+d_1x+e_1)^{h_1}\dots\dots(x^2+d_jx+e_j)^{h_j}$$

حيث : $b,x_1,\dots x_i,d_1,\dots d_j,e_1,\dots,e_j\in\mathbb{R}$, $k_1,\dots,k_i,h_1,\dots,h_j\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{d}^{\circ}P(x)=k_1+k_2+\dots+k_i+2(h_1+\dots+h_j)$$

11.3.4.3ـ حلقة كثيرات حدود $\mathbb{C}(x)$:

نظرية 1:

$\mathbb{C}[x]\ni P(x)$, $\mathbb{R}\ni z$

z جذر لكثير حدود $P(x)$ برتبة n إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

1 $P^{(k)}(z)=0$, $\forall k\in\{0,1,\dots,\mathrm{n}-1\}$

2) $P^{(n)}(z)\neq 0$

نظرية 2:

كل عنصر $P(x)$ من $\mathbb{C}[x]$ يكتب من الشكل :

$$P(x)=\mathrm{b}(x-z_1)^{k_1}(x-z_2)^{k_2}\dots(x-z_r)^{k_r}$$

حيث : $b,z_1,\dots z_r\in\mathbb{C}$

$$\mathrm{d}^{\circ}P(x)=k_1+k_2+\dots+k_r$$

12.3.4.3ـ مرافق كثير حدود :

$\mathbb{C}[x]\ni P(x)=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$

العنصر :

$$\overline{P}(x)=\overline{a_0}+\overline{a_1}x+\dots\overline{a_n}x^n$$

يسمي مرافق $P(x)$ ، حيث $\overline{a_i}$ يدل على مرافق a_i في $\mathbb{C}$

ملاحظة :

إذا كان z حذرا لكثير حدود $P(x)$ فإن $\overline{z}$ حذرا لكثير حدود $\overline{P}(x)$

13.3.4.3ـ نظرية :

$\mathbb{C}[x]\ni P(x)=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$

حيث $\mathbb{R}\ni a_0,a_1,\dots,a_n$

1) إذا كان z حذرا لكثير حدود $P(x)$ فإن $\overline{z}$ حذرا لكثير حدود $P(x)$

2) يكتب من الشكل :

$$P(x)=\mathrm{b}(x-z_1)^{k_1}(x-\overline{z_1})^{k_1}\dots(x-z_i)^{k_i}(x-\overline{z_i})^{k_i}(x-x_1)^{h_1}\dots(x-x_r)^{h_r}$$

حيث $\overline{z_1},\ldots\overline{z_i}$ مرافقة الأعداد المركبة $z_1,\ldots z_i$

$\mathbb{R}\ni b,x_1,\ldots x_r$

$$d^{\circ}P(x)=2(k_1+\ldots+k_i)+h_1+h_2+\ldots+h_r$$

14.3.4.3ـ إنشاء جسم الكسور الناطقة ذات المتغير x :

لتكن A حلقة تبديلية ، واحدية و تامة في $A[x]\times A^*[x]$ نعرف العلاقة $\mathfrak{R}$ كالتالي $\left(A^*[x]=A[x]/\{0\}\right)$

$\left(P_1(x),\phi_1(x)\right)\ \mathfrak{R}\ \left(P_2(x),\phi_2(x)\right)\Leftrightarrow P_1(x)\phi_2(x)=P_2(x)\phi_1(x)$

ندل علي مجموعة حاصل القسمة بالرمز $\underline{A}[x]$

ندل علي صنف التكافؤ للعنصر $\left(P(x),\phi(x)\right)$ بالرمز : $\dfrac{P(x)}{\phi(x)}$

إذا كان : 1 هو العنصر الوحدة للحلقة $A[x]$ ندل علي صنف تكافئ للعنصر $\left(P(x),1\right)$ بالرمز : $P(x)$

من خلال هذا الرمز نعتبر أن $A[x]$ مجموعة جزئية من $\underline{A}[x]$ إن العلاقة $\mathfrak{R}$ متلائمة مع العماليتين الداخليتين في $A[x]$ ومن هذا نستخلص العمليتين في $\underline{A}[x]$:

$$\frac{P_1(x)}{\phi_1(x)}+\frac{P_2(x)}{\phi_2(x)}=\frac{P_1(x)\phi_2(x)+P_2(x)\phi_1(x)}{\phi_1(x)\phi_2(x)}$$

$$\frac{P_1(x)}{\phi_1(x)}\times\frac{P_2(x)}{\phi_2(x)}=\frac{P_1(x)P_2(x)}{\phi_1(x)\phi_2(x)}$$

لدينا $\underline{A}[x]$ مزود بـ هاتين العمليتين جسم تبديلي حيث :

1 هو العنصر الحيادي بالنسبة إلي $\times$

0 هو العنصر الحيادي بالنسبة إلي $+$

$\dfrac{\phi(x)}{P(x)}$ نظير العنصر $\dfrac{P(x)}{\phi(x)}$ $\left(P(x)\neq 0\ \wedge\ \varphi(x)\neq 0\right)$ بالنسبة لـ x

15.3.4.3ـ تعريف :

$A[x]$ حلقة كثيرات حدود

نقول أن $P(x)$ أنه كثير حدود أولي إذا تحقق ما يلي :

$\phi(x)\Leftarrow P(x)=\phi(x).R(x)$ قابلة للقلب أو $R(x)$ قابلة للقلب (قابلة للقلب يعني له نضير بالنسبة لـ x)

16.3.4.3ـ تعريف :

يكون $D(x)$ قاسم أكبر مشتركا للعنصرين $P(x)$ و $\phi(x)$ إذا تحقق ما يلي :

1) $P(x)$ و $\phi(x)$ يقبلان القسمة على $D(x)$

2) $w(x)$ *كل عنصر قاسم للعنصرين* $P(x)$ و $\phi(x)$ فهو قاسم للعنصر $D(x)$

17.3.4.3ـ تعريف :

$\dfrac{P(x)}{\phi(x)}$ يكون $P(x)$ و $\phi(x)$ أوليان في ما بينهما إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر قابلا للقلب

18.3.4.3ـ تعريف :

يكون كسرا غير قابلا للإختزال إذا وفقط إذا كان $P(x)$ و $\phi(x)$ أوليان في ما بينهما .

ملاحظة :

ليكن $A[x]=\mathbb{R}[x]$ أو $A[x]=\mathbb{C}[x]$

ليكن $P(x)$ و $\phi(x)$ كثيرا حدود ، يوجد $q(x)$ و $D(x)$ بحيث :

$$P(x)=\phi(x)q(x)+D(x)$$
$$\mathrm{d}^{\circ}D(x)<\mathrm{d}^{\circ}\phi(x)$$

لدينا : $\dfrac{P(x)}{\phi(x)}=q(x)+\dfrac{D(x)}{\phi(x)}$ $\qquad (\phi(x)\neq 0)$

19.3.4.3ـ نظرية :

كل كسر $\dfrac{P(x)}{(x-a)^n}$ من $\mathbb{C}[x]$ (علي التوالي $\mathbb{R}[x]$) يكتب على الشكل

$$(I)\ \frac{P(x)}{(x-a)^n}=\phi(x)+\frac{b_1}{(x-a)}+\frac{b_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(x-a)^n}$$

حيث : $b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{C}$ (على التوالي أعداد حقيقية)

تعريف :

الشكل (I) يسمي تحليلا إلى عناصر مبسطة

مثال :

$$\frac{x^3}{(x-1)^2}=x+2+\frac{3}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

الرمــــــــــوز

$\mathbb{N}$: مجموعة الأعداد الطبيعية

$\mathbb{Z}$: مجموعة الأعداد الصحيحة

$\mathbb{Q}$: مجموعة الأعداد الناطقة

$\mathbb{R}$: مجموعة الأعداد الحقيقية

$\mathbb{Q}$: مجموعة الأعداد المركبة

$\forall$: المكمم الكلي

$\exists$: المكمم الوجودي

C_E^A : متممة A بالنسبة لـ E

$|A|$: أصلي مجموعة A

$P(E)$: مجموعة أجزاء المجموعة E

$\Re$: علاقة ثنائية بين عنصرين

A/I : حلقة القسمة بالمثالي I

$\langle a \rangle$: المجموعة المولد بالعنصر a

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: مجموعة الأعداد الصحيحة بالتردد n

$\ker f$: نواة f

$\mathrm{Img} f$: صورة f

$f \approx g$: f إيزومورف مع g

$PGCD(a,b)$: القاسم المشترك الأكبر لـ (a,b)

$PPCM(a,b)$: المضاعف المشترك الأصغر لـ (a,b)

المراجع:

المراجع بالعربية:

[1]– **جاعة مصطفي**، الجبر العام دروس تمارين محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية.

[2]– **د. شيرزاد الطلباني و د.نازدار إسماعيل**، محاضرات في الجبر، الديوان الوطني للمطبوعات الجامعية 1989.

[3]– **عبد الوهاب بيبي**، **علي حميدة**، سلسلة الرياضيات في الجامعة (الجبر جزء الأول)، جامعة منتوري قسنطينة.

المراجع بالفرنسية :

[4]– **Roger Ggodment**, coure d'algébre, Hermann Paris.

الملخص

ركزنا في بحثنا على المفاهيم الأساسية للمجموعات والعلاقات وأنواعها وكذلك البنى الجبرية. كما درسنا المثاليات وتصنيفها، وختمنا عملنا بدراسة حلقة حاصل القسمة والنظريات حول التشاكلات الحلقية والحلقة $\mathbb{Z}$ و حلقة كثيرات الحدود.

الكلمات المفتاحية: المثاليات، حلقة حاصل القسمة، التشاكلات الحلقية ، الحلقة $\mathbb{Z}$ وحلقة كثيرات الحدود.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié quelques notions générales sur les groupes, les relations et ces types, ainsi que l'étude des structures algébriques.

Nous avons aussi étudié des définitions et classifications de quelques idéales. On a terminé notre mémoire par l'étude l'anneau quotient, les théories des isomorphismes d'anneau, $\mathbb{Z}$ groupe et Anneau polynomiaux.

Mots clé: les idéales, l'anneau quotient, isomorphismes d'anneau, $\mathbb{Z}$ groupe et Anneau polynomiaux.

Abstract

We studied in this research general principals on groups, relations and their types and the algebric sturctures. We also studied definitions and classification of some ideals. Our work is finished by the study of quotient ring, theories on the isomorphism of ring, $\mathbb{Z}$ group and ring of polynomials.

Keys word: ideals, quotient ring, isomorphism of ring, $\mathbb{Z}$ group and ring of polynomials.