



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الشهيد حمزة لخضر الوادي
Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued



Faculté de Technologie

Département de Hydraulique & Génie Civil

كلية التكنولوجيا

قسم الري والهندسة المدنية

Mémoire présenté en vue de l'obtention

Du diplôme de

Master

Option: Matériaux de construction

Etude numérique des plaques par la méthode des éléments finis

❖ **Présenté par :**

- ✓ Berrah oussama
- ✓ Rezgui haithem
- ✓ Ferhati Abde hakime
- ✓ Lammair elamine

❖ **Dirigé par:**

- ✓ LABIODH Bachir

Promotion : Juin 2023

DÉDICACES

Je dédie ce travail à :

*Mes très chers parents. Que Dieu me les garde et que
vie nous donnetemps pour les remercier.*

- Mes beaux-parents

-Mes frères et mes sœurs,

-Toute ma famille

-A mes camarades de classe

-A tous mes fidèles amis

Oussama berrah

DÉDICACES

J'adresse mes plus chaleureuses félicitations et mes remerciements à ma merveilleuse famille qui m'a accompagné tout au long de ce parcours académique. A mes parents, frères et sœurs, vous êtes mon véritable soutien et ma force motrice. Merci pour votre amour et votre confiance et je serai toujours fier de faire partie de cette merveilleuse famille.

Ferhati Abde hakime

DÉDICACES

*Je dédie mon diplôme à mes chers père et mère d'abord, et
à moi- même, qui s'est efforcé et lutté pour réussir ensuite.
Et à tous ceux qui m'ont soutenu et m'ont accompagné tout
au long de ma carrière universitaire et m'ont soutenu pour
être qui je suis.*

Lammair elamine

DÉDICACES

*Je dédie ce travail à mes parents qui ont travaillé dur avec moi
dans ma carrière universitaire, à tous mes professeurs
distingués et à tous mes amis.*

Rezgui haithem

SOMMAIR	PAGE
INTRODUCTION GENERALE	01
CHAPITRE 1 : Théorie des plaques	
INTRODUCTION	04
1.1- Comportement générale des plaques	04
1.2. Généralité sur les plaques	05
1.3. Définition d'une plaque	05
1.4. Plaque circulaire	06
1.5. Classification des plaques	07
1.6. Théorie des plaques minces	07
1.6.1. Hypothèses	08
1.6.2. Champs de déplacement	09
1.6.3. Champs de déformation	10
1.7. Théorie des plaques épaisses	11
1.7.1. Hypothèses	12
1.7.2. Champs de déplacement	12
1.7.3. Champs de déformation	13
1.8. Equation gouvernante de la flexion des plaques :	16
1.9. Conditions aux limites :	17
1.10. Théorie exacte des plaques :	19
1.11. Méthode d'analyse des problèmes de plaques :	19
1.12. Contraintes efforts résultants dans la plaque	20
1.13. Efforts tranchants	22
1111: Eléments de type Kirchhoff:	23

Conclusion	26
------------	----

CHAPITRE 2 : Formulation des éléments finis de types plaques

2.1 Introduction	28
2.2 Présentation de la méthode des éléments finis	28
2.2.1 Domaines d'application de la méthode des éléments finis	29
2.2.2 Principe de la méthode des éléments finis	30
2.3 Présentation de des éléments finis triangulaire DKT18 RF	30
2.3.1 Formulation de l'élément DKT18RF	31
2.3.2 Définition du repère local	32
2.3.3 Variables cinématiques	33
2.3.4 Déformation de membrane	34
2.3.5 Déformation de flexion	35
2.3.6 Forme discrétisée de W_{int}^e	36
2.3.7 Matrice de rigidité dans le repère global	37

CHAPITRE 3 : Mise en oeuvre numérique

3.1. Matlab	40
3.1.1. Introduction au logiciel « Matlab »	40
3.1.2. Interface de Matlab	40
3.1.3. Lancer, quitter Matlab	41
3.1.4. Fonctions général et commandes	42
3.2. Mise en œuvre numérique de l'élément DKT18RF sur Matlab	44
3.3.1. Introduction	44
3.2.1. Présentation du programme élément fini DKT18RF	46

3.2.2. Description du programme	46
---------------------------------	----

CHAPITRE 4 : Applications Numériques

4.1. Introduction.	51
4.2. exemple du maillage (8X8)	52
4.3. Flexion d'une plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres	52
4.3.1. Flexion d'une plaque carrée sous charge concentrée maillage 4x4	53
4.3.2. Flexion d'une plaque carrée sous charge concentrée maillage 5x5	54
4.4. Flexion libre de la plaque carrée.	55
4.5. Plaque encastrée sous charge concentrée au centre	56
4.5.1. maillage 8x8	57
4.5.2. maillage 9x9	58
4.6. Conclusion	58
CONCLUSION	59
BIBLIOGRAPHIE	60

Résumé

L'étude des structures de type plaques constitue un sujet de recherche très important dans le domaine de génie civil, la connexion ou l'assemblage des plaques avec d'autres types des structures est très utilisée, du point de vue pratique, les méthodes numériques, notamment le calcul par la méthode des éléments finis est indispensable pour le dimensionnement et la vérification de ce types des structures complexes. A travers cette étude nous allons présenter quelques éléments finis de type plaque, ces éléments seront mises en œuvre numériquement sur les logiciels disponibles dans le domaine, des tests de validation et des applications en génie civil seront réalisées.

Cette note traite de la façon de calculer la tolérance des plaques et d'étudier leur comportement en entrant des informations matricielles dans le programme MATLAB en utilisant la méthode des éléments finis.

Mots clés: plaque, éléments finis, modélisation, Matlab.

Abstract

The study of plate type structures is a very important research subject in the field of civil engineering, the connection or assembly of plates with other types of structures is widely used, from a practical point of view, numerical methods , in particular the calculation by the finite element method is essential for the dimensioning and the verification of this type of complex structures. Through this study we will present some finite elements of the plate type, these elements will be implemented numerically on the software available in the field, validation tests and applications in civil engineering will be carried out.

This note deals with how to calculate the tolerance of plates and study their behavior by entering matrix information into the MATLAB program using the finite element method.

Key Words: plates, Finite element, Modélisation, Matlab.

المخلص

تعد دراسة الهياكل نوع الصحيفة موضوعا بحثنا مهما للغاية في مجال الهندسة المدنية، حيث يتم استخدام اتصال أو تجميع الصفائح بأنواع أخرى من الهياكل على نطاق واسع، و من جهة نظر عملية، الأساليب العددية و لا سيما الحساب بواسطة طريقة العناصر المحدودة ضرورية لتحديد الأبعاد والتحقق من هذا النوع من الهياكل المعقدة. من خلال هذه الدراسة سوف نقدم بعض العناصر المحدودة لنوع الصحيفة، و سيتم تنفيذ هذه العناصر عدديا على البرامج المتاحة في هذا المجال، و سيتم تنفيذ اختبارات التحقق من الصحة و التطبيقات في الهندسة المدنية. تتناول هاته المذكرة كيفية حساب تحمل اللوحات ودراسة سلوكها وذلك عن طريق ادخال معلومات المصفوفات داخل برنامج ماتلاب بطريقة العناصر المحددة

الكلمات المفتاحية: الصفائح، العناصر المحدودة، النمذجة ، البرنامج(Matlab).

Liste des Figures

Chapitre 1 :

Figure 1.1 : Description géométrique d'une plaque	06
Figure 1.2 : Plaque anisotrope (orthotrope)	06
Figure 1.3 : Cinématique de love- Kirchhoff	09
Figure 1.4 : Cinématique de Reissner-Mindlin	12
Figure 1.5 : Résultantes positives et charge sur un élément de plaque	15
Figure 1.6 : Conditions aux limites : (a) bord encastré; (b) bord simplement appuyé	17
Figure 1.7 : Efforts : Orientation et définition	22
Figure (1-8) : Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène	22

Chapitre 2 :

Figure 2.1 : Classification des problèmes de la mécanique	29
Figure 2.2 Construction de l'élément DKT18RF	31

Chapitre 3 :

Figure 3.1. Interface de Matlab	41
Figure 3.2. Fenêtre de commandes Matlab	42
Figure 3.3. Blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme éléments finis [DHA81]	44
Figure 3.4. Description du programme élément fini DKT18RF	45

Chapitre 4 :

Figure 4.1 : plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres	51
Figure 4.2 : Une courbe montrant la correspondance du calcul des forces théoriques et appliquées	52
Figure 4.3 : Une courbe montrant la correspondance du calcul des forces théoriques et appliquées	53
Figure 4.4 : <i>Torsion d'une plaque carrée.</i>	53

Figure 4.5 : Une courbe montrant la correspondance du calcul des forces
théoriques et appliquée.

55

Figure 4.6 : Une courbe montrant la correspondance du calcul des forces théoriques
et appliquées.

56

Liste des Tableaux

Chapitre 2 :

Tableau 2.1 Indices k et m	35
Tableau 2.2 Valeurs de PK et Pm	35
Tableau 2.3 Intégration numérique (3 points de Hammer)	37

Chapitre 4 :

Tableau 4.1 : Tableau montrant la différence entre W Theory et Applied DKT18RF	51
Tableau 4.2 : Tableau montrant la différence entre W Theory et Applied DKT18RF	52
Tableau 4.3 : Résultats de la simulation de la torsion d'une plaque carrée.	54
Tableau 4.4 : montrant la différence entre W Theory et Applied DKT18RF	55
Tableau 4.5 : montrant la différence entre W Theory et Applied DKT18RF	56

NOTATIONS

symbole	Notation
$[\sigma_{ij}]$	Tenseur des contraintes
$[\varepsilon_{ij}]$	Tenseur des déformations
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
∂	Dérivée partielle
E	Module de « Young » [N/m^2]
	Coefficient de poisson
ρ	Densité du matériau
ds	Surface différentielle [m^2]
dv	Volume différentiel [m^3]
n	Normale
$f_i(x)$	Fonctions de forme
$f'_i(x)$	Dérivée première de la fonction de forme
U	Energie de déformation [$N.m$]
$[F]$	Vecteur de force
$F(m)$	Force de volume
$f(p)$	force de surface
$[K]$	Matrice de rigidité
K_{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité
$[A]$	Matrice des coefficients correspondant aux coordonnées de l'élément
$[B]$	Matrice dérivée des fonctions de forme
$[D_{ij}]$	Tenseur des constantes élastiques
$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$\{ \}^T$	Transposé d'un vecteur
$tr \{ \sigma \}$	Trace σ
$\partial\Omega$	Surface d'un corps solide
Ω	Volume d'un corps solide
$\partial\Omega_D$	Surface pour les conditions aux limites cinématiques
W	Le travail des forces volumiques et surfaciques
a, b, h	Dimensions et épaisseur de l'élément de plaque
$u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	Déplacement et rotation d'un point quelconque
x, y, z	Coordonnées du repère global
x', y', z'	Coordonnées du repère local
G	Module de coulomb
n_i	Vecteur unitaire
k	Module de compression
T	Densité d'énergie potentielle de déformation
T^*	Densité d'énergie de déformation complémentaire
	Energie potentielle totale
*	Energie potentielle complémentaire totale

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION

La modélisation des structures complexes composées d'un ensemble d'éléments massifs ainsi que des éléments minces est très difficile en pratique, on peut citer comme exemples le cas de raidisseur sous une coupole et la tour de refroidissement de la centrale nucléaire qui repose sur des supports massifs. Ce raccordement nous pose de faire une liaison entre deux types d'élément finis différents : des éléments à deux dimensions pour les plaques et coques ainsi que des éléments massifs 3D pour les structures tridimensionnelles. Sachant que les éléments finis volumiques ne contiennent que des degrés de libertés de translation et les éléments finis de type coque et plaque comportent des variables nodales de rotations, alors les degrés de liberté ne sont pas compatibles dans la zone de jonction entre ces deux types de structures. Ceci provoque évidemment une grande difficulté lors de la résolution numérique du problème.

Pour répondre à cette problématique nous allons utiliser dans notre travail de recherche un élément fini triangulaire sans degré de liberté en rotation de type Kirchhoff, cet élément est développé à partir de l'élément triangulaire de type facette plane DKT18, développé par Batoz et Dhett [14], ce dernier est obtenu par superposition de l'élément triangulaire de membrane CST qui contient deux degrés de liberté par nœud et l'élément de flexion des plaques DKT qui possède trois degrés de liberté par nœud, soit un degré pour la flexion plus deux degrés pour la rotation.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de la théorie des plaques et une recherche bibliographique sur les éléments finis de types plaques existants dans la littérature.

Dans le deuxième chapitre décrit la formulation théorique détaillée de l'élément triangulaire sans degré de liberté en rotation DKT18RF développé par [16]

Dans le troisième chapitre, on présente en bref le logiciel Matlab, ensuite on donne l'algorithme général du programme Matlab pour l'élément fini triangulaire sans degré de liberté de rotation.

Le quatrième chapitre comporte des applications numériques pour des cas tests reconnus dans le domaine en utilisant l'élément fini DKT18RF, qui constitue une extension de l'utilisation de cet élément qui a été développé et testé par [16] dans d'autres types de structures, particulièrement les structures de types plaque.

Pour finir, les principales conclusions et perspectives concernant ce travail sont présentées dans la partie conclusion générale.

CHAPITRE 1

Théorie des plaques

Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans les constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), dans l'industrie sous-marine, aérospatial, dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture,...), et même dans le monde du vivant (artères, bronches,), etc. tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle

1.1. Comportement générale des plaques :

Considérons la plaque non chargée de la figure 1.1(a) pour laquelle le plan xy coïncide avec le plan moyen et donc l'ordonnée z est égale à zéro. Les composantes du déplacement en un point, suivant les directions x , y et z , sont dénotées u , v et w , respectivement. Quand une charge latérale engendre une déformation de la plaque, la surface médiane Δ un point, Δ x y se déplace de w (Figure. 1.1 (b)). Les hypothèses fondamentales de la théorie de flexion avec petites déformations des plaques minces, isotropes, homogènes et élastiques sont basées sur la géométrie des déformations. Ces hypothèses peuvent s'énoncer comme suit :

1. La flèche de la surface médiane w est très faible par rapport à l'épaisseur de la plaque h . La pente de la surface fléchie est par conséquent très petite et le carré de la pente est une quantité négligeable devant l'unité.
2. Le plan moyen reste indéformée pendant la flexion.
3. Une section de la plaque normale à son plan moyen reste plane après déformation. Cela veut dire que les déformations de cisaillement vertical xz γ et yz γ sont négligeables. Il est aussi déduit que la déformation normale s résultant des charges transversales peut être omise.
- 4 .La contrainte normale z σ , sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée.

Les hypothèses ci-haut, connue comme les hypothèses de Kirchhoff sont analogues à celles associée à la théorie de flexion des poutres. Leur validité à été démontrée à travers des essais à petite et à grande échelle. Dans la majorité des applications en ingénierie, des justifications adéquates peuvent être trouvées par rapport aux simplifications liées à l'état des contraintes et des déformations. Les simplifications, un problème tridimensionnel de plaque peut être réduit à un problème à deux dimensions uniquement. En conséquence, les équations gouvernantes de la flexion des plaques peuvent être écrites de manière concise et simple [6]

1.2. Généralité sur les plaques

Il existe différentes configurations de plaques. Dans la littérature, les plaques sont très souvent classées selon leur géométrie (plaque rectangulaire, circulaire), selon les sollicitations subies (charges ponctuelles, réparties), mais également selon leur comportement type (membrane, flexion) et la prise en compte ou non du cisaillement transverse. Pour ce dernier aspect, on distingue les plaques sans cisaillement (souvent minces et homogènes dans leur épaisseur), dites plaques de Love-Kirchhoff, et les plaques prenant en compte le cisaillement (souvent épaisses et/ou hétérogènes dans leur épaisseur), dites plaques de Hencky- Mindlin [8]

1.3. Définition d'une plaque

On appelle plaque tout corps plan ou prismatique de hauteur "h" (épaisseur) plus petite en comparaison avec les deux autres dimensions longueur "L" et largeur "b" (Fig. 1.1). En fonction de la configuration du plan, les plaques se distinguent en rectangulaire, circulaire, annulaire, triangulaire etc. Si le matériau constituant la plaque ayant les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions, alors la plaque est dite isotrope, par contre si les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant la plaque sont différentes selon les directions, la plaque est dite anisotrope (Figure. 1.2).

Le plan moyen "plan médian, ou feuillet neutre" : plan situé à équidistance entre les faces d'équation $z = 0$ (équivalent de la ligne moyenne des poutres). La fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian ou à un endroit (x, y) donné, elle a pour direction z.

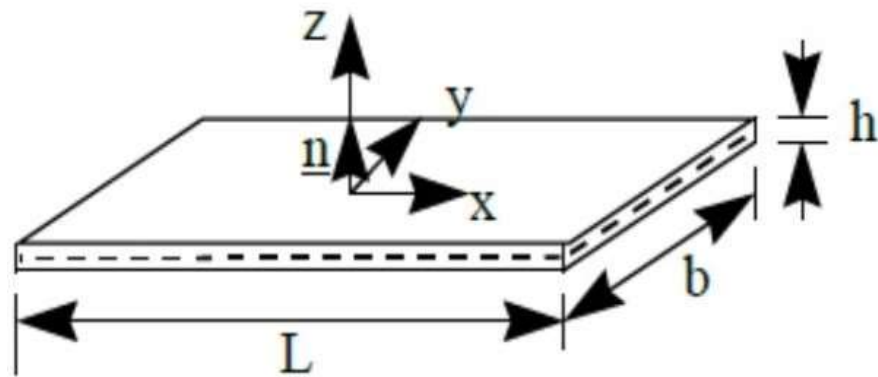


Figure 1.1 : Description géométrique d'une plaque

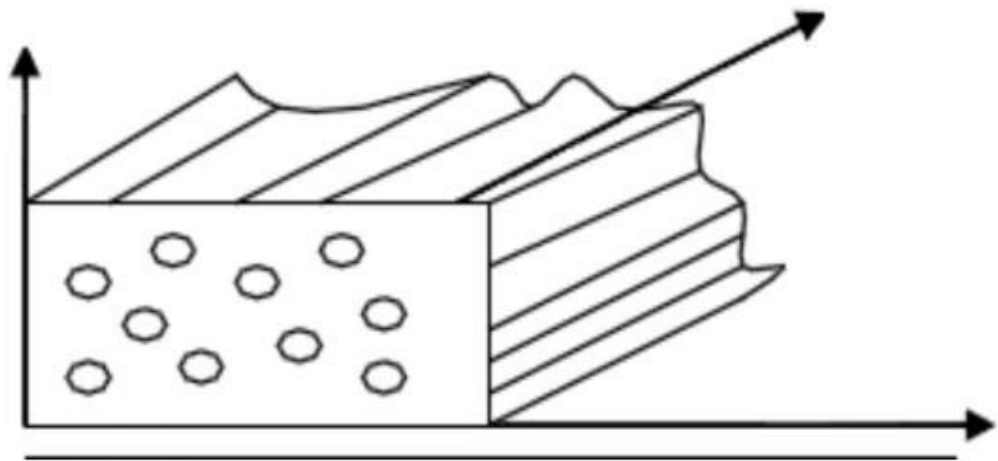


Figure 1.2 : Plaque anisotrope (orthotrope)

1.4. Plaque circulaire

Les plaques circulaires peuvent être constituées de différents matériaux, tels que le béton, l'acier ou les matériaux composites. L'épaisseur de la plaque est un paramètre important dans le processus de conception, car elle affecte la résistance et la rigidité de la plaque. La capacité de charge d'une plaque circulaire est également influencée par les propriétés du matériau, la taille de la plaque et les conditions aux limites. [9]

Dans la conception de plaques circulaires, les ingénieurs utilisent généralement des modèles mathématiques pour déterminer la réponse de la plaque aux charges externes et pour optimiser la conception. Les modèles les plus couramment utilisés pour les plaques circulaires sont basés sur la théorie de Kirchhoff-Love, qui suppose que la plaque est mince et a une épaisseur constante.[10]

Les plaques circulaires peuvent également subir différents modes de défaillance, tels que la plastification, le flambage et la fatigue. Ces modes de défaillance doivent être pris en compte dans le processus de conception pour s'assurer que la plaque peut supporter en toute sécurité les charges et les conditions environnementales prévues. Dans l'ensemble, les plaques circulaires sont un élément structurel important dans le génie civil, et leur conception et leur analyse nécessitent un examen attentif de divers facteurs pour assurer leur fonctionnement sûr et efficace.[11]

1.5. Classification des plaques

- La théorie de Henky-Mindlin relative aux plaques épaisses s'applique quand les rapports dimensions-épaisseur sont compris entre 4 et 20 ($4 \leq L/h \leq 20$). - La théorie de Kirchhoff relative aux plaques minces, est applicable lorsque le rapport de la plus petite de leurs dimensions sur l'épaisseur est supérieur ou égal à 20 ($L/h > 20$). L : est une longueur caractéristique dans le plan (x-y). h : est l'épaisseur de la plaque L/h : est le facteur d'élancement de la plaque .[12]

1.6. Théorie des plaques minces

La théorie des plaques minces, également connue sous le nom de théorie des plaques de Kirchhoff ou théorie classique des plaques, est une théorie fondamentale utilisée en génie civil pour analyser le comportement des plaques minces dans diverses conditions de chargement. La théorie suppose que la plaque est mince, c'est-à-dire que son épaisseur est bien inférieure à ses dimensions latérales, et que la plaque a une épaisseur constante sur toute sa surface.[13]

L'hypothèse de base de la théorie des plaques minces est que les déformations dans la plaque sont petites, ce qui permet l'utilisation de la théorie élastique linéaire. La théorie suppose également que les déformations dans la plaque sont faibles et que la plaque est soumise à des conditions de contraintes planes, ce qui signifie que les contraintes dans la plaque sont uniquement dans le plan de la plaque et qu'il n'y a pas de contraintes hors du plan.[14]

L'un des principaux avantages de la théorie des plaques minces est qu'elle fournit une méthode simple et efficace pour analyser des structures de plaques complexes, telles que des plaques courbes ou de forme irrégulière. La théorie permet également de déterminer les contraintes et les déviations dans la plaque dues à diverses conditions de chargement, telles que des charges réparties uniformes ou non uniformes, des charges concentrées et des charges thermiques.

La théorie des plaques minces a un large éventail d'applications en génie civil, y compris la conception de ponts, de structures d'avions et de récipients sous pression. La théorie est également utilisée dans l'analyse des composants du bâtiment tels que les sols, les toits et les murs.

Il est important de noter que la théorie des plaques minces a certaines limites. Par exemple, il ne tient pas compte des effets de cisaillement transverse, qui peuvent devenir importants dans les plaques plus épaisses ou aux géométries irrégulières. De plus, la théorie suppose que la plaque est homogène et isotrope, ce qui n'est pas toujours le cas dans les applications pratiques.[15]

En conclusion, la théorie des plaques minces est une théorie fondamentale utilisée en génie civil pour analyser le comportement des plaques minces sous diverses conditions de chargement. Bien que la théorie ait certaines limites, elle fournit une méthode simple et efficace pour analyser des structures de plaques complexes et a un large éventail d'applications dans la conception et l'analyse de diverses structures et composants de génie civil.[17]

1.6.1. Hypothèses

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent celles à deux dimensions adoptées pour les poutres sans déformation sous l'effort tranchant. (Figuer.1.3)

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.

- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré.
- La contrainte σ_z dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle quel que soit z .

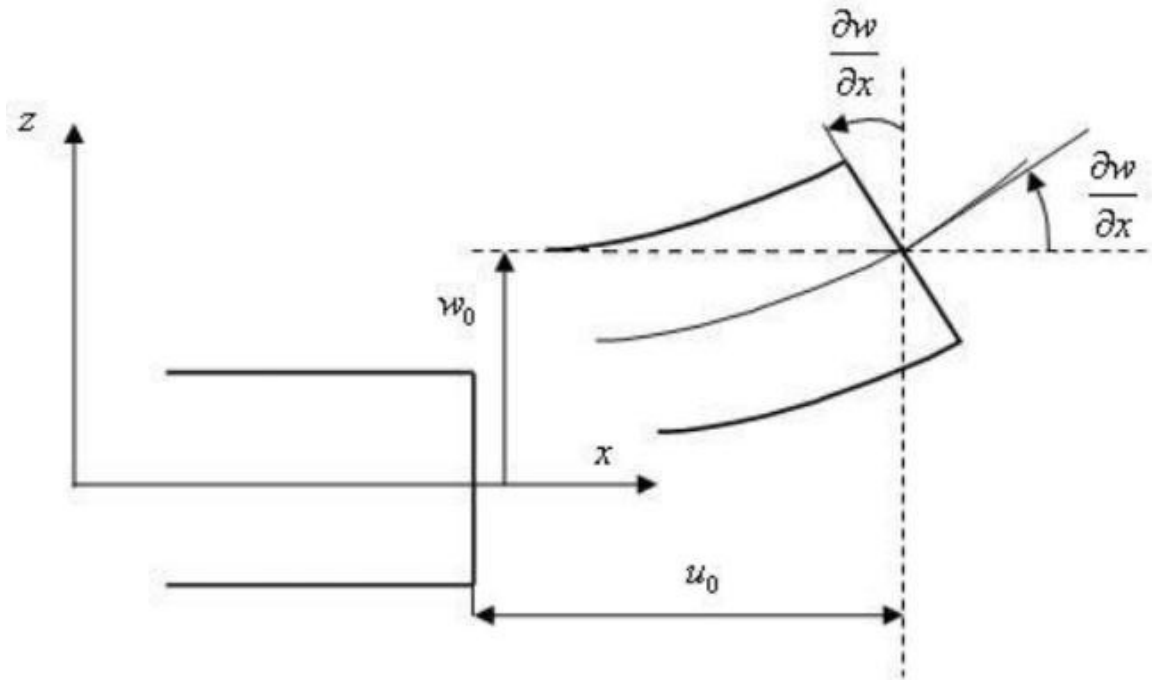


Figure 1.3 : Cinématique de love- Kirchhoff

1.6.2. Champs de déplacement

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z \cdot w_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1,1)$$

Avec :

u_α : Le déplacement de membrane dans la direction

w : La flèche de la plaque

w_α : La rotation due à la flexion (sans cisaillement)

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\begin{cases} \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (1,2)$$

Dans ce cas, le champ de déplacement est défini uniquement par une variable, c'est le déplacement transverse.

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = W(x, y) \end{cases} \quad (1.3)$$

1.6.3. Champs de déformation

D'après la définition du tenseur des déformations, les équations des déformations sont données comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{z}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\theta_x - \theta_y) = 0 \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (-\theta_x + \theta_y) = 0 \end{cases} \quad (1,4)$$

D'autre part, les relations déformations-contraintes sont résumées comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \quad (1,5)$$

L'équation précédente peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (1,6)$$

1.7. Théorie des plaques épaisses

La théorie des plaques épaisses en génie civil fait référence à un modèle mathématique utilisé pour analyser le comportement de plaques relativement épaisses par rapport à leurs dimensions globales. Il est utilisé pour déterminer les caractéristiques de contrainte et de déformation des composants structurels tels que les ponts, les bâtiments et autres grandes structures constituées de plaques.[18]

La théorie de la plaque épaisse est basée sur l'hypothèse que la plaque est dans un état de contrainte plane, ce qui signifie que les contraintes sont parallèles à la surface de la plaque et ne varient que dans la direction perpendiculaire à la surface. La théorie suppose également que la plaque est homogène, isotrope et linéairement élastique, ce qui signifie qu'elle a les mêmes propriétés matérielles dans toutes les directions et obéit à la loi de Hooke.

L'un des principaux avantages de la théorie des plaques épaisses est qu'elle permet aux ingénieurs de simplifier des structures de plaques complexes en modèles plus simples et plus faciles à gérer qui peuvent être facilement analysés à l'aide de techniques mathématiques telles que l'analyse par éléments finis (FEA). Cela peut réduire considérablement le temps et les coûts nécessaires pour concevoir et tester les structures, et peut également aider à identifier les problèmes potentiels avant le début de la construction.[19]

Cependant, il est important de noter que la théorie des plaques épaisses a ses limites. Par exemple, il ne tient pas compte des effets de déformation par cisaillement, qui peuvent être importants dans des plaques relativement minces. Il suppose également que la plaque est parfaitement plate, ce qui peut ne pas être le cas dans les applications du monde réel.

Dans l'ensemble, la théorie des plaques épaisses est un outil utile pour les ingénieurs civils pour analyser le comportement des grandes structures de plaques, mais elle doit être utilisée en conjonction avec d'autres techniques et considérations pour garantir que les structures sont conçues et construites pour répondre aux normes de sécurité et aux exigences de performance.[20]

1.7.1. Hypothèses

Les hypothèses de Mindlin, reprennent les points 1 et 4 de celles de Kirchhoff. Les points 2 et 3 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets (Fig.1.4)

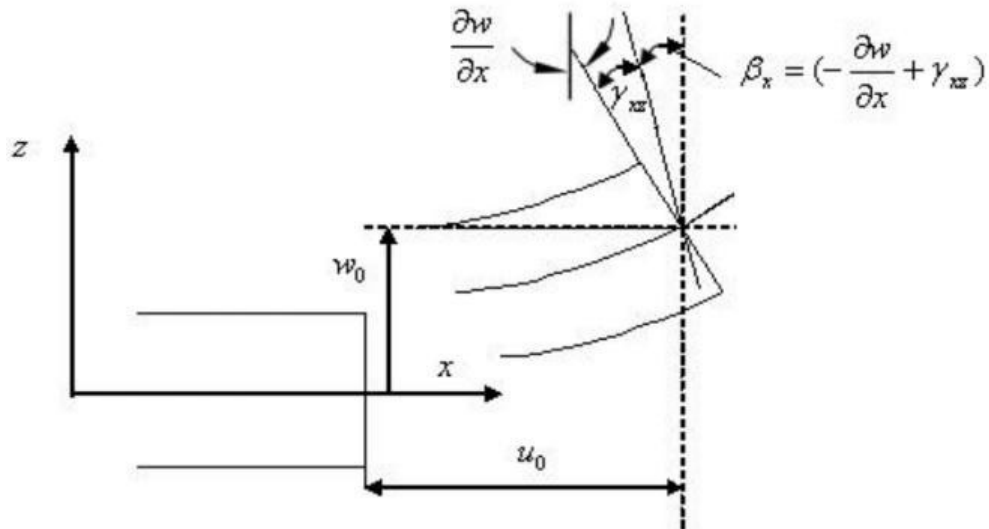


Figure 1.4 : Cinématique de Reissner-Mindlin

1.7.2. Champs de déplacement

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen, si θ_x et θ_y désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe z , ils ne correspondent plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + z \cdot \phi_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad \alpha = 1, 2 \quad (1,7)$$

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\begin{aligned}\square_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \square_y &= -\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\tag{1,8}$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

$u\alpha$: Le déplacement de membrane dans la direction

w : Le déplacement transversal

(θy) : la rotation du plan xy autour de y

$(-\theta x)$: la rotation du plan xy autour de x

Avec ce choix de la forme des champs de déplacement, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes. Cette description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs. Donc, le champ des déplacements s'exprime alors en fonction des trois variables par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \beta x(x, y) \\ \beta y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}\tag{1,9}$$

1.7.3. Champs de déformation

Concernant le champ de déformation, les termes gardent leur forme générale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = z \frac{\partial \beta x}{\partial x} \\ \epsilon_y = z \frac{\partial \beta y}{\partial y} \\ \epsilon_z = 0 \\ 2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \beta x}{\partial y} + \frac{\partial \beta y}{\partial x} \right) \end{array} \right.\tag{1,10}$$

Et par ailleurs, s_{xz} et s_{yz} ne sont plus nuls :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (1,11)$$

On ne peut donc négliger le cisaillement. Le vecteur des courbures ne peuvent plus se simplifier et restent comme suit :

$$\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (1,12)$$

$$k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) & -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1,13)$$

Et l'on a toujours

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = k \quad (1,14)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = z \cdot \vec{\kappa} \quad (1,15)$$

Efforts résultants de membrane :

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} M_y dz, N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \quad (1,16)$$

Moments de flexions :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz, N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \quad (1,17)$$

Efforts tranchants :

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz, \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz \quad (1,18)$$

Equations d'équilibre d'une plaque :

Les composantes des différentes contraintes (et leurs résultantes) varient généralement d'un point à l'autre d'une plaque chargée. Ces variations sont gouvernées par les équations d'équilibre de la statique. Considérons un élément $dx dy$ de la plaque uniformément chargée de la figure 1.5

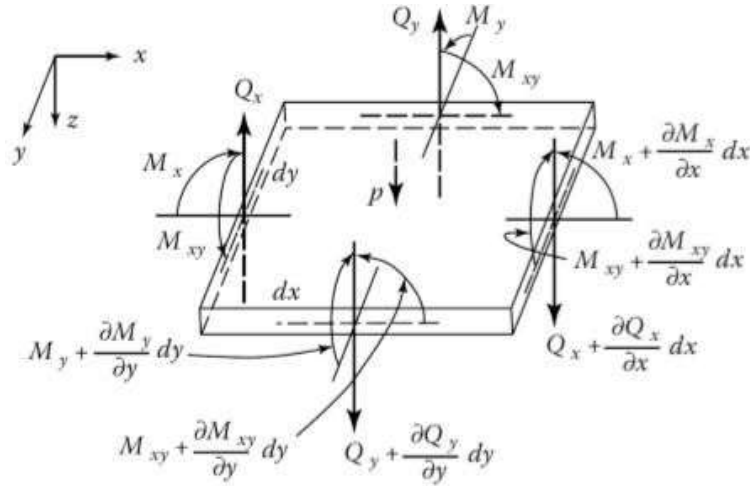


Figure 1.5 : Résultantes positives et charge sur un élément de plaque

La somme des forces dans la direction z est nulle, ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0 \quad (1, 19)$$

Ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (1,20)$$

L'équilibre des moments autour de l'axe x s'écrit :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0 \quad (1,21)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (1,22)$$

Dans ces expressions, le produit des quantités infinitésimales, comme le moment dû à p et le moment dû à la variation de Q_y sont omis.

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (1,23)$$

De la même manière, l'équilibre des moments autour de l'axe y , nous permet d'écrire que :
Finalement, en introduisant les expressions de Q_x et Q_y nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y^2} = P \quad (1,24)$$

Cette expression représente *l'équation différentielle de l'équilibre* des plaques minces.

Les expressions des forces de cisaillement peuvent alors s'écrire en fonction de la flèche w , en se basant sur les équations (1.16) et (1.17) :

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \quad (1,25)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (1,26)$$

Remarque : On a trois équations d'équilibre pour cinq grandeurs inconnues (M_x , M_y , M_{xy} , Q_x et Q_y). Le problème est hyperstatique et pour lever l'indétermination il faut tenir compte des déformations.

1.8. Equation gouvernante de la flexion des plaques :

L'équation différentielle qui gouverne la flexion des plaques peut être obtenue en utilisant les résultats des sections précédentes. Introduisons les expressions de M_x , M_y et M_{xy} dans l'équation (1.18), nous obtenons :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (1,27)$$

Cette équation présentée par Lagrange en 1811, peut s'écrire sous la forme compacte suivante:

$$\nabla^4 w = \frac{P}{D} \quad (1,28)$$

L'équation de Lagrange est l'équation différentielle gouvernante de la flexion des plaques minces. Pour déterminer la flèche w , il est nécessaire d'intégrer cette équation en utilisant les conditions aux limites appropriées.

1.9. Conditions aux limites :

L'équation différentielle de la surface élastique admet une infinité de solutions. La solution réelle d'un problème donné sera celle qui remplit les conditions au contour. Nous nous bornerons à l'examen de plaques à contour polygonal et nous prendrons l'axe des y parallèle au bord considéré. De plus, les conditions imposées sur un bord d'une plaque peuvent toujours se ramener à des

Conditions imposées à la flèche $w(x; y)$, w_{xy} puisque les composantes des efforts et des moments de flexion (Q_x , Q_y , M_x , M_y et M_{xy}) sont des fonctions des dérivées partielles de $w(x; y)$

Considérons une plaque rectangulaire et étudions les différentes situations les plus fréquemment rencontrées.

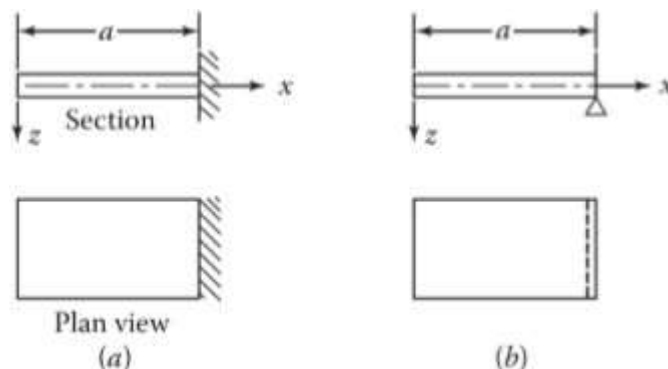


Figure 1.6 : Conditions aux limites : (a) bord encastré; (b) bord simplement appuyé

Bord encastré

Si le bord d'une plaque est encastré, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent à la surface moyenne fléchie, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. La rotation est donc nulle le long de ce bord. Si est encastré, les conditions aux limites sont formulées comme suit :

$$W(a, y) = 0 ; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (1, 29)$$

Bord simplement appuyé

Si le bord de la plaque est simplement appuyé, la flèche le long de ce bord est nulle. En plus, ce bord peut tourner librement autour de l'axe x c'est à dire qu'il n'existe pas de moment de flexion M_x le long de ce bord. Comme la flèche w est identiquement nulle le long du côté, ses dérivées en y le sont également et l'on a les conditions suivantes

$$W(a, y) = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right) = 0 \quad (1, 30)$$

Bord libre

Sous la forme proposée par Poisson, les conditions aux limites pour ce cas stipulent que le moment de flexion M_x doit être nul. L'effort tranchant Q_x et le moment de torsion M_{xy} devraient l'être aussi. Kirchhoff trouva que ces trois conditions étaient de trop et que deux suffisaient pour déterminer complètement la flèche. Il a démontré que les deux conditions de Poisson relatives au moment de torsion M_{xy} et à l'effort tranchant Q_x pouvaient être remplacées par une seule condition aux limites (exprimant l'annulation de la réaction totale).

$$M_x = 0 ; V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (x = a) \quad (1, 31)$$

Ce qui peut s'écrire en fonction des dérivées partielles de la flèche w comme suit:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} = 0 ; \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (x = a) \quad (1.32)$$

1.10. Théorie exacte des plaques :

Rappelons que dans le cadre de la théorie de flexion des poutres, l'effet de l'effort tranchant sur les déformations et les contraintes est relativement insignifiant et peut être négligé si la hauteur de la poutre est petite comparée à sa portée. Cette même conclusion est valable dans le cas des plaques. Cependant, il est important de noter que dans les

problèmes de vibration et de propagation des ondes, l'effet du cisaillement est d'une grande importance pour les poutres et les plaques qu'elles soient élancées ou pas.

La théorie exacte des plaques est exclusivement gouvernée par la théorie de l'élasticité. Dans le cas d'une flexion de plaque engendrant un état de contrainte plane, la solution générale issue de la théorie exacte des plaques coïncide avec la solution obtenue par la théorie classique des plaques.

La résolution rigoureuse d'autres configurations indique que la théorie classique des plaques mince est suffisamment précise pour les cas usuels rencontrés en pratique, avec les exceptions suivantes :

- Dans la proximité d'importantes charges concentrées ;
- Dans des zones limitées des bords, particulièrement à proximité des coins des plaques et autour des ouvertures

1.11. Méthode d'analyse des problèmes de plaques :

En génie civil, les contraintes et les forces dans une plaque sont des paramètres critiques pour déterminer l'intégrité structurelle et les performances d'un large éventail de structures, y compris les ponts, les bâtiments et d'autres constructions à grande échelle. Les contraintes et les forces dans une plaque peuvent être analysées à l'aide de diverses méthodes, notamment des simulations numériques, des modèles analytiques et des tests expérimentaux.[21]

L'un des paramètres clés utilisés pour analyser les contraintes et les forces dans une plaque est le moment de flexion, qui est le résultat de la flexion de la plaque due aux charges externes. Le moment de flexion peut être calculé à l'aide de l'équation $M = EI/R$, où M est le moment de flexion, E est le module d'Young du matériau, I est le moment d'inertie de la plaque et R est le rayon de courbure de la plaque.

Un autre paramètre important pour l'analyse des contraintes et des forces dans une plaque est la force de cisaillement, qui est le résultat des contraintes de cisaillement agissant sur la plaque en raison de charges externes. La force de cisaillement peut être calculée à l'aide de l'équation $V = dM/dx$, où V est la force de cisaillement et x est la distance le long de la plaque.

Les contraintes dans une plaque peuvent être analysées à l'aide de diverses méthodes, y compris la contrainte de von Mises, qui est une mesure de la contrainte de cisaillement maximale dans la plaque, et les contraintes principales, qui sont les contraintes maximales et minimales dans la plaque. La contrainte de von Mises peut être calculée à l'aide de sont les contraintes normales dans les directions x et y , respectivement, et τ est la contrainte de cisaillement.[22]

Les forces dans une plaque peuvent également être analysées à l'aide de diverses méthodes, y compris les équations d'équilibre, qui relient les charges externes aux contraintes et forces internes dans la plaque. Les équations d'équilibre peuvent être résolues à l'aide de simulations numériques, de modèles analytiques ou de tests expérimentaux pour déterminer les contraintes et les forces résultantes dans la plaque.

Dans l'ensemble, l'analyse des contraintes et des forces dans une plaque est un élément essentiel de la conception et de la construction en génie civil, et est essentielle pour garantir l'intégrité structurelle et les performances des constructions à grande échelle.[23]

1.12 . Contraintes efforts résultants dans la plaque

En génie civil, les problèmes de plaques font référence à l'analyse des structures constituées de plaques, tel que les tabliers de pont et les planchers de bâtiment. Ces structures sont généralement minces dans une ou deux directions, mais peuvent être relativement épaisses dans la direction restante. L'analyse des problèmes de plaques est importante pour comprendre le comportement de ces structures sous différentes conditions de chargement, et est généralement effectuée à l'aide d'une variété de méthodes numériques et analytiques.[24]

Une méthode couramment utilisée pour analyser les problèmes de plaque est la méthode des éléments finis (FEM). Cette méthode consiste à diviser la plaque en un grand nombre de petits éléments interconnectés et à résoudre un ensemble d'équations décrivant le comportement de chaque élément. Les solutions résultantes sont ensuite combinées pour obtenir une image globale du comportement de la plaque dans son ensemble. FEM est un outil puissant qui permet aux ingénieurs de simuler le comportement de structures

complexes sous différentes conditions de chargement et d'évaluer l'efficacité de différentes solutions de conception.

Une autre méthode d'analyse des problèmes de plaque est la méthode analytique, qui consiste à résoudre un ensemble d'équations décrivant le comportement de la plaque à l'aide de techniques analytiques. Cette méthode est souvent utilisée pour des problèmes de plaque plus simples et peut fournir des informations utiles sur le comportement de la plaque dans différentes conditions de chargement.[25]

D'autres méthodes d'analyse des problèmes de plaque incluent la méthode des éléments de frontière (BEM), qui consiste à diviser la plaque en une série d'éléments de frontière, et la méthode des éléments discrets (DEM), qui consiste à modéliser la plaque comme une collection de particules discrètes.

Dans l'ensemble, le choix de la méthode d'analyse pour les problèmes de plaque dépendra de divers facteurs, notamment la complexité de la structure, les conditions de chargement et le niveau de précision souhaité. Il est important de choisir une méthode appropriée capable de fournir des résultats précis et fiables, et de valider les résultats par des tests physiques et d'autres moyens.[26]

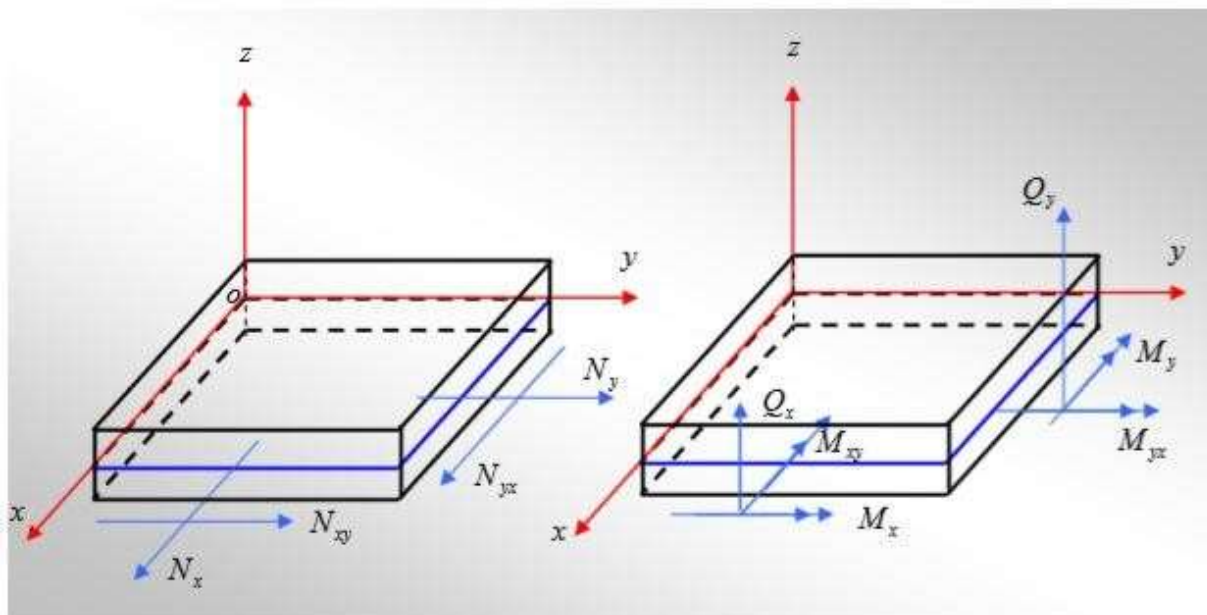


Figure 1.7 : Efforts : Orientation et définition

1.13. Efforts tranchants

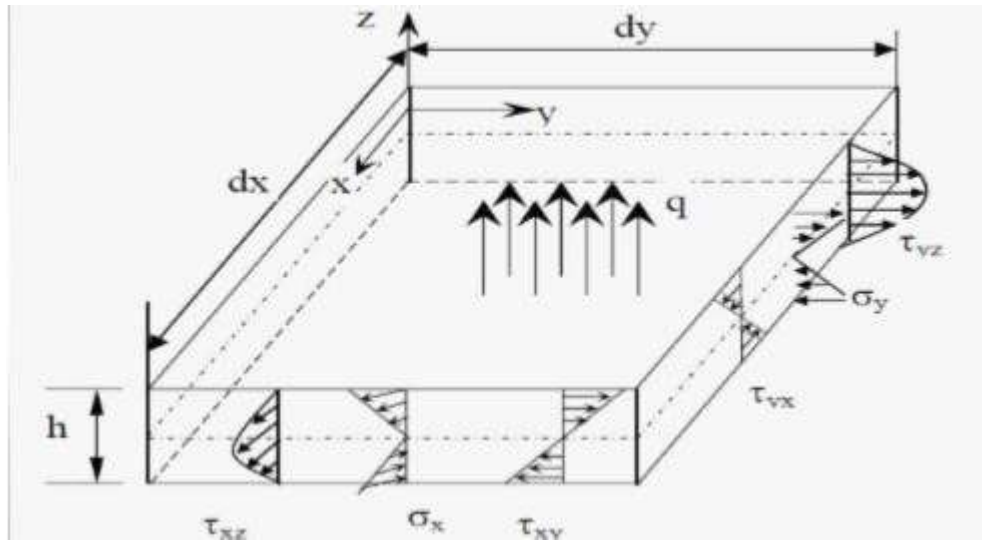


Figure (1-8) : Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène

1.14 Eléments de type Kirchhoff :

Plusieurs éléments finis de plaques ont été proposés à partir de 1968, permettant d'obtenir des solutions numériques des problèmes de plaques minces en accord avec les hypothèses de Kirchhoff.

Les éléments de plaque de type Kirchhoff discret ont été formulés par Dhatt et Batoz et al. L'énergie de cisaillement transversal est négligée et l'hypothèse de Kirchhoff est introduite de façon discrète (en certain point, sur les cotes d'un élément ou sur l'aire d'un élément). Beaucoup d'autres chercheurs ont également apporté leurs contributions à ce type d'éléments [1]. Un grand nombre d'élément de plaque triangulaire à 9 degrés de liberté (ddl) a été formulé, tels HCT (Hsieh Clough Toucher), DKT (Discrete Kirchhoff Triangle).

Il a suscité un intérêt considérable dans le développement de l'élément de plaque depuis leur usage est devenu populaire pour représenter le comportement des éléments de coque. Beaucoup d'éléments de plaque ont été développées. ont présenté un examen de tous les éléments flexion de plaque comme une partie de l'étude sur l'efficacité des éléments de plaque de pliage. [1] ont élaboré le volet plaque triangulaire flexion en divisant le triangle principal à trois subtriangles.. Ils ont développé un élément triangulaire de flexion de plaque en utilisant des fonctions de forme basée sur les coordonnées. L'élément de plaque non conforme ne passe pas le test cutané pour certains modèles de maillage, et l'élément confirmant est coûteux en raison du régime d'intégration afin numériques nécessaires pour déterminer la matrice de rigidité de l'élément .

Batoz et al. (1980) ont développé plusieurs éléments triangulaires efficaces de flexion de plaque pour l'analyse des plaques et coques. Ces éléments ont deux degrés de liberté en rotation et un degré de liberté en translation à chaque nœud pour un total de 9 degrés de liberté. Ils ont développé trois types d'éléments de flexion de plaque: le première élément DKT repose sur des hypothèses discrets de Théorie de Kirchhoff, le deuxième élément HSM basé sur la Méthode hybride de stress, de surmonter les problèmes dans le développement de modèles de déplacements, et le troisième élément SRI fondé sur un schéma d'intégration sélective réduit qui comprend une déformation de cisaillement transversale. ont comparé les résultats obtenus pour ces éléments. Ils ont constaté que les éléments DKT et HSM sont plus efficaces que L'élément ISR. Ils ont également constaté que l'élément DKT donne de meilleurs résultats que l'élément HSM parce que l'élément DKT nécessite moins de stockage par rapport à l'élément HSM

Les éléments quadrilatère de flexion de plaque sont simplifiés dans l'analyse des structures de la dalle et sont utilisés dans la formulation des éléments de coque pour l'analyse des structures régulières en forme de coquillage. Les tentatives antérieures d'élaborer des éléments quadrilatère mince impliqués combinant quatre éléments triangulaires de plaque [2]. Toutefois, leur formulation a été très compliquée. a développé un élément quadrilatère de quatre nœuds à l'aide des fonctions de bar forme isométriques. Cet élément donne de très bons résultats pour la flexion de plaque. [3] ont développé l'élément de flexion de plaque, LORA basée sur des paramètres de stress plutôt que de champs de déplacement. Cet élément donne aussi de très bons résultats pour la flexion de plaque .

Batoz et Tahar (1982) Ont mis au point un élément de quatre nœuds quadrilatère basé sur la théorie discrète Kirchhoff. La base de la formulation de cet élément a été la discret Kirchhoff triangulaire (DKT) élément développé plus tôt [3]. La plaque quadrilatère flexion élément (DKQ) formulée par. et l'élément triangulaire de flexion de plaque (DKT) formulé par [3], sont basés sur les hypothèses de Kirchhoff discrète, dans laquelle la déformation de cisaillement transversal est négligée. Ils ont considéré que la déformation de cisaillement transversal est présente dans l'élément développement initial, puis ils ont supprimé le terme cisaillement transversal de contrainte en appliquant des contraintes discrètes Kirchhoff. [4] Ont mené plusieurs tests sur ces éléments .

Eléments de type Reissner/Mindlin

Les éléments de plaque basés sur la théorie de Reissner/Mindlin sont présentés par [5], et [2], et [28]. Dans le cas des éléments avec cisaillement transversal (DST, DSQ et Q4G), pour éviter le blocage des éléments en cisaillement transverse (surestimation de la rigidité pour des épaisseurs très faibles), une méthode consiste à construire des champs de cisaillement et de substitution constants sur les bords de l'élément, les éléments de plaque avec du cisaillement transverse utilisent cette méthode de façon a ne pas bloquer en cisaillement transverse. Ce blocage en cisaillement vient du fait que l'énergie élastique de cisaillement est un terme proportionnel à h (h étant l'épaisseur de la plaque), bien plus grand que le terme d'énergie élastique de flexion qui est proportionnel en h^3 . Quand l'épaisseur devient faible devant la longueur caractéristique (le rapport h / L est inférieur a $1/20$), pour certaines fonctions de forme, la minimisation du terme prépondérant en h conduit a une mauvaise représentation des modes de flexion pure, pour lesquels la flèche n'est plus calculée correctement.

Belarbi M.T. et Charif A, en 1998 Nouveau hexaèdre simple « SBH8 » pour l'étude des plaques minces et épaisses.

Belarbi M.T. et Charif A, en 1999 développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses. Le nouvel élément hexaédrique simple a huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud (U , V et W) basé sur le modèle en déformation, cet élément est numériquement plus performant que le modèle de déplacement. Sa précision est évaluée à travers une série de cas de-tests standards ou non standards relatifs aux problèmes de plaques mince et épaisses.

L. Belounar, M.Guenfoud en 2005. Un nouvel élément fini rectangulaire basé sur l'approche de contrainte pour flexion de plaque, pour l'analyse linéaire de la plaque de flexion avec effet de cisaillement transverse [7]. Le champ des déplacements de l'élément a été développé par l'utilisation de l'approche basée sur Stran et elle est basée aussi sur les fonctions supposées indépendantes pour les différentes composantes de la déformation dans la mesure où elle est autorisée par les équations de compatibilité. L'élément possède trois degrés essentiels extérieurs de la liberté de chacun des quatre nœuds d'angle et satisfait à la représentation exacte des modes de corps rigide de déplacement. Cet élément se trouve numériquement plus efficace que les déplacements correspondants à base d'élément et sa précision est évaluée à travers une série de cas de tests relatifs à des plaques minces et épaisses.

Conclusion

En conclusion, la théorie des plaques joue un rôle crucial dans le génie civil, fournissant un modèle mathématique pour analyser et concevoir des structures constituées de plaques minces. Le comportement des plaques est essentiel à la performance globale et à la sécurité de diverses structures, y compris les ponts, les toits et les planchers, faisant de la théorie des plaques un domaine d'étude essentiel en mécanique. Les contributions de divers chercheurs, dont Euler, Lagrange, Timoshenko, Kirchhoff et Reissner, ont joué un rôle déterminant dans le développement de la théorie des plaques. Leurs travaux ont jeté les bases de la compréhension actuelle de la mécanique des plaques minces et ont permis le développement d'outils informatiques puissants pour l'analyse et la conception des structures de génie civil.

L'application de la théorie des plaques dans le génie civil a conduit au développement de structures plus efficaces et rentables qui peuvent résister à différentes conditions de chargement. Avec les progrès des outils informatiques et l'intégration de nouveaux matériaux, l'utilisation de la théorie des plaques en génie civil devrait continuer à se développer dans les années à venir.

En conclusion, la théorie des plaques est un domaine d'étude fondamental en mécanique qui a un impact significatif sur la conception et l'analyse des structures de génie civil. En tant que tel, la poursuite de la recherche et du développement dans ce domaine est essentielle à l'amélioration continue des structures de génie civil, garantissant la sécurité et l'efficacité des infrastructures dans le monde entier.

Les plaques circulaires sont couramment utilisées dans le génie civil comme éléments structurels, comme dans la conception de ponts, de réservoirs et d'autres infrastructures. Une plaque circulaire est une structure bidimensionnelle (2D) de forme circulaire, qui est supportée par un bord périphérique ou par une colonne centrale.

Chapitre 2

Formulation des éléments finis de types plaques

2.1 Introduction:

Pour analyser un phénomène naturel en général ou un problème d'ingénierie en particulier, on est souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question. Le développement d'un modèle mathématique s'appuie généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes qui sont souvent des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites [27]

2.2 Présentation de la méthode des éléments finis:

La résolution analytique des problèmes mécaniques ne peut se faire que dans un nombre de cas limité, cependant les méthodes numériques basées sur la discrétisation de ses problèmes, présentent une alternative très efficace, souvent utilisées dans le domaine de la mécanique pour résoudre des problèmes complexes. La méthode des éléments finis est de toutes ses méthodes de discrétisation la plus utilisée car elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe, elle couvre de nombreux domaines de la physique. Les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation et de simulation) la rendent facile à la mise en œuvre. La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode est que sa formulation utilise des procédés standards qui se répètent au cours de la résolution de problèmes de natures différentes.

Cette méthode est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis. [28]

2.2.1 Domaines d'application de la méthode des éléments finis:

Les domaines d'application de la méthode des éléments finis sont très larges et très variés. En général pour les champs d'application de cette méthode sont :

1. La mécanique des milieux continus solides.
2. La mécanique des milieux continus fluides.
3. Analyse thermique.
4. Electromagnetism et l'électrostatique.

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus solides, on peut classer les problèmes de la manière suivante (figure 2.1) :

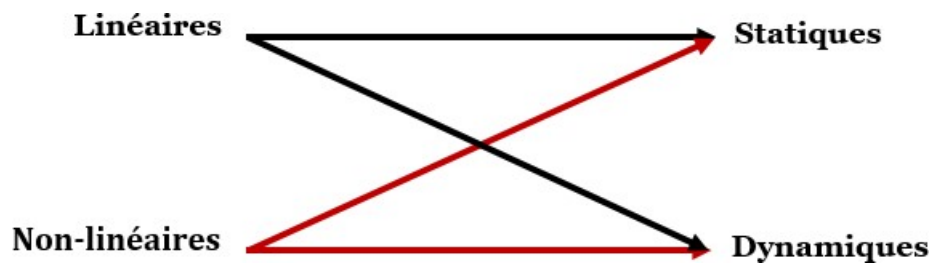


Figure 2.1 : *Classification des problèmes de la mécanique*

- **Statique linéaire:**

Ce type d'analyse concerne principalement les domaines où les matériaux élastiques linéaires. On cherche la déformation du matériau (ϵ) et la contrainte (σ) pour différents types de sollicitations.

- **Dynamique linéaire:**

La dynamique linéaire étudie les structures élastiques linéaires soumises à des efforts cycliques (vibrations forcées) ou à des sollicitations initiales (vibrations libres). Dans ce type d'analyse on recherche les déplacements et éventuellement les vitesses et les accélérations qui donnent les fréquences et les modes propres (analyse modale).

- **Les problèmes non linéaires:**

Il existe trois classes de problèmes non linéaires :

Les non linéarités géométriques : Ce type d'analyse intervient lorsque les déplacements et les déformations ne sont plus petits. Dans ce cas la rigidité de la structure et les efforts dépendent des déplacements (inconnus). Ce type de non linéarité est souvent rencontré dans les études de la mise en forme des matériaux, dans le flambage et dans le post-flambage.

Les non linéarités de comportement : Lorsque le comportement du matériau n'est pas élastique linéaire, la rigidité de la structure dépend de la déformation. Le problème devient donc non linéaire. Ce type de non linéarité est généralement constaté dans le cas de la plasticité, la viscoplasticité et l'endommagement.

Les non linéarités de contact : Si au cours de la déformation les appuis changent, la rigidité de la structure sera modifiée, le problème est donc non linéaire. Ce problème est caractéristique de la mise en forme comme par exemple l'emboutissage d'une tôle. [29]

2.2.2 Principe de la méthode des éléments finis:

La méthode des éléments finis consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments. [30]

- **Etape 1** : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.
- **Etape 2** : Division du domaine en sous domaines.
- **Etape 3** : Approximation sur un élément.
- **Etape 4** : Assemblage et application des conditions aux limites.
- **Etape 5** : Résolution du système global.

2.3 Présentation de des éléments finis triangulaire DKT18 RF:

L'élément finis triangulaire DKT18 RF c'est un élément qui a été établi par, alors cette partie de ce chapitre est inspirée dans sa majorité du même référence [16].

L'élément finis DKT18 RF est un élément de type coque sans degrés de liberté de rotation obtenu à partir de l'élément coque de type facette plane DKT18 (Discret Kirchhoff Triangle, avec 18 degrés de liberté [31]). Cet élément nommé DKT18RF (DKT rotation free element, avec 18 degrés de liberté) est l'élément obtenu par la superposition de l'élément triangulaire de membrane CST (Constant Strain Triangle) qui contient deux degrés de liberté par nœud et l'élément de flexion des plaques DKT modifié.

2.3.1 Formulation de l'élément DKT18RF

En se basant sur l'élément triangulaire de type facette plane DKT18, qui est obtenu par superposition de l'élément membranaire CST (déformations constantes) qui comporte comme variables nodales les deux composantes de membrane (u, v), et l'élément DKT de type Kirchhoff discret ayant trois variables nodales (w, θ_x, θ_y), en lui rajoutant une rotation fictive θ_z , les variables nodales après assemblage sont les déplacements (U, V, W) des trois nœuds et les rotations ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) autour des axes globaux X, Y et Z . Nous allons formuler l'élément triangulaire DKT18RF, en suivant le même principe, c'est à dire la partie membrane est représentée par l'élément linéaire CST qui comporte les variables nodales (u, v) et la partie flexion par l'élément DKT comportant une seule variable nodale (w), les déformations de cisaillements transverses sont considérées nulles pour les éléments de type DKT. Ces étapes sont illustrées dans la figure 2.2 Pour cet élément, seule l'analyse en statique est présentée. [16]

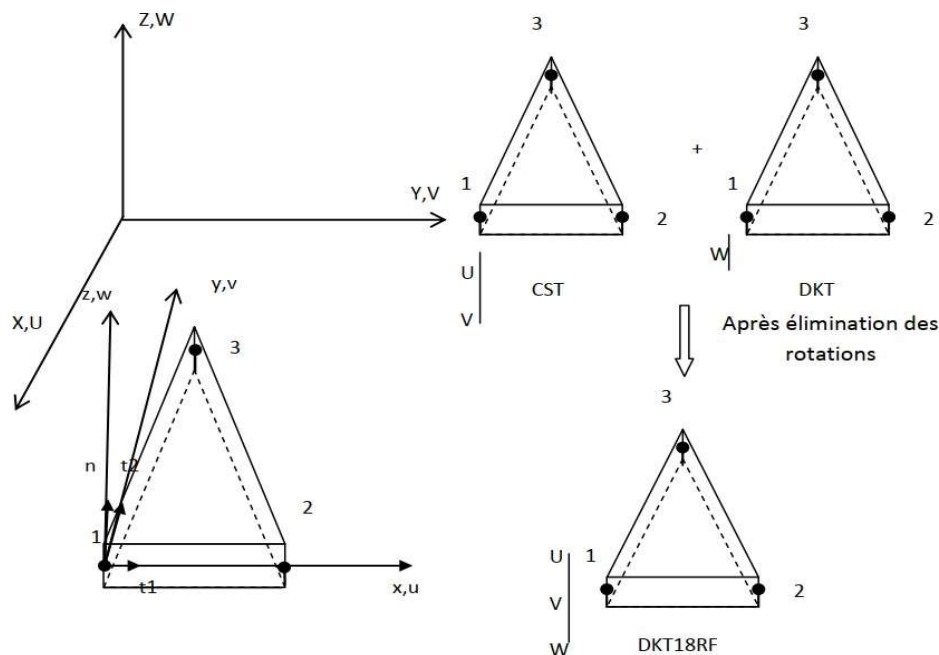


Figure 2.2 Construction de l'élément DKT18RF

2.3.2 Définition du repère local

La surface de référence de l'élément est définie par :

$$\{x_p\} = \{Y\} = \sum_{i=1}^3 N_i \{Y_i\} \quad (2.1)$$

Les fonctions d'interpolation N_i :

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, N_2 = \xi, N_3 = \eta \quad (2.2)$$

Avec : ξ et η coordonnées paramétriques de l'élément de référence. Les vecteurs de base a_1 et a_2 sont [16] :

$$\{a_1\} = \{x_{p,\xi}\} = \{Y_{21}\}, \{a_2\} = \{x_{p,\eta}\} = \{Y_{31}\} \quad (2.3)$$

On peut définir un repère local :

$$[Q] = [t_1 : t_2 : n] \quad (2.4)$$

$$n = \frac{a_1 \wedge a_2}{a_a \wedge a_2}, \quad t_1 = \frac{a_1}{L_{21}}, t_2 = n \wedge t_1 \quad (2.5)$$

$$L_{21} = (X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

Ou

$$X_{21} = X_2 - X_1, Y_{21} = Y_2 - Y_1, Z_{21} = Z_2 - Z_1$$

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} = \begin{Bmatrix} Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21} \\ Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21} \\ X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

La surface de l'élément A :

$$2A = ((Y_{21}Z_{31} - Y_{31}Z_{21})^2 + (Z_{21}X_{31} - Z_{31}X_{21})^2 + (X_{21}Y_{31} - X_{31}Y_{21})^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

t_1 et t_2 peuvent être calculés aussi par :

$$\langle t_1 \rangle = \langle n_z = \frac{n_y^2}{a} - \frac{n_x n_y}{a} - n_x \rangle \quad (2.9)$$

$$\langle t_2 \rangle = \langle \frac{-n_x n_y}{a} n_z + \frac{n_x^2}{a} - n_y \rangle \quad (2.10)$$

Avec :

$$a = 1 + n_z$$

Un point q dans l'épaisseur est défini par :

$$\{x_q\} = \{x_p\} + Z\{n\} \quad (2.11)$$

Les coordonnées des nœuds 1, 2, 3 dans le repère local d'origine 1 sont :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = [t_1 \ t_2]^T \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} = [t_1 \ t_2]^T \begin{Bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Les coordonnées d'un point p de la surface moyenne sont :

$$\{x_p\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Expression du travail virtuel interne w^e dû à la membrane et à la flexion dans le repère local [7] :

$$W_{int}^e = w_{int}^n + w_{int}^f = \int \langle e^* \rangle N dA + \int \langle X^* \rangle M dA \quad (2.14)$$

2.3.3 Variables cinématiques

Le champ de déplacement d'un point q est défini par :

$$u_q^* = u_p^* + Z \beta^*, \quad \frac{-h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.15)$$

Avec h épaisseur de la coque et β la rotation

$$\begin{Bmatrix} u_q^* \\ v_q^* \\ w_q^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Déplacements de membrane obtenus par l'élément CST :

$$u^* \langle N_u \rangle \{u_n^*\}, \quad v^* = \langle N_v \rangle \{u_n^*\} \quad (2.17)$$

$\{u_n^*\}$ vecteur des variables nodales de l'élément :

$$\{u_n^*\} = \langle \dots (u_i^* \quad v_i^* \quad w_i^*) \dots i \text{ varie de } 1 \text{ à } 3 \rangle \quad (2.18)$$

Les rotations β_x et β_y relatives à l'élément DKT sont :

$$\beta_x = \langle N_x \rangle \{u_n^*\}, \quad \beta_y = \langle N_y \rangle \{u_n^*\} \quad (2.19)$$

2.3.4 Déformation de membrane

Les déformations virtuelles de membrane en fonction des déplacements nodaux sont données par [16]:

$$\{e^*\} = [B_m] \{u_n^*\} \quad (2.20)$$

$$\{e^*\} = \begin{Bmatrix} u_{,x}^* \\ v_{,y}^* \\ u_{,y}^* + v_{,x}^* \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Avec:

$$[B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_{u,\xi} \rangle - y_2 \langle N_{u,\eta} \rangle \\ -x_3 \langle N_{v,\xi} \rangle + x_2 \langle N_{u,\eta} \rangle \\ -x_3 \langle N_{v,\xi} \rangle + x_2 \langle N_{u,\eta} \rangle + y_3 \langle N_{u,\xi} \rangle - y_2 \langle N_{u,\eta} \rangle \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$N_u = \langle \dots N_i \quad 0 \quad 0 \dots i \text{ varie de } 1 \text{ à } 3 \rangle \quad (2.23)$$

$$N_v = \langle \dots N_i \quad 0 \quad 0 \dots i \text{ varie de } 1 \text{ à } 3 \rangle \quad (2.24)$$

$$[B_m] = \frac{1}{2A} = \begin{bmatrix} -y_3 + y_2 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & x_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & -y_3 + y_2 & 0 & -x_3 & 0 & y_3 & x_2 & -y_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

2.3.5 Déformation de flexion

Les courbures virtuelles

$$\{x^*\} = [B_f]\{u_n^*\} \quad (2.26)$$

$$\{x^*\} = \left\{ \begin{matrix} \beta_{x,x}^* \\ \beta_{y,y}^* \\ \beta_{x,y}^* + \beta_{y,x}^* \end{matrix} \right\}, [B_f] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \langle N_\xi^x \rangle - y_2 \langle N_\eta^x \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_2 \langle N_\eta^y \rangle \\ -x_3 \langle N_{,\xi}^y \rangle + x_2 \langle N_\eta^y \rangle + y_3 \langle N_\xi^x \rangle - y_2 \langle N_\eta^x \rangle \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Dans les vecteurs N seuls les termes qui correspondent au déplacement vertical w sont considérés :

$$N^x = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^x \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^x \rangle \quad (2.28)$$

$$N^y = \langle 0 \quad 0 \quad N_{11}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{21}^y \quad 0 \quad 0 \quad N_{31}^y \rangle \quad (2.29)$$

$N_{11}^x \quad N_{21}^x \quad N_{31}^x \quad N_{11}^y \quad N_{21}^y \quad N_{31}^y$ Sont données par :

$$N_{i1}^x = \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m C_m, \quad N_{i1}^y = \frac{3}{2L_k} S_k C_k - \frac{3}{2L_m} P_m S_m \quad (2.30)$$

Les indices k et m sont relatifs aux deux côtés ayant le sommet i point commun (voir tableau 2.1), les fonctions Pk et Pm sont définies par le tableau 2.2 [16]

Tableau 2.1 Indices k et m

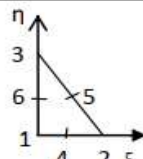
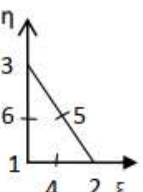
	Nœud sommet i	Côté k (i-j)	Côté m (i-j)
	1	4 (1-2)	6 (3-1)
	2	5 (2-3)	4 (1-2)
	3	6 (3-1)	5 (2-3)

Tableau 2.2 Valeurs de PK et Pm

	P_k
	(k= 4 à 6)
	$P_4 = 4 \xi \lambda$
	$P_5 = 4 \xi \eta$
	$P_6 = 4 \lambda \eta$

$$C_k = \frac{x_{ij}}{L_k}, S_k = \frac{y_{ij}}{L_k}, L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

2.3.6 Forme discrétisée de W_{int}^e

$$w_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [K] \{u_n\} \quad (2.32)$$

La matrice de rigidité élémentaire :

$$[K] = [K_m] + [K_f] \quad (2.33)$$

La rigidité de membrane relative à l'élément CST est constante sur l'élément :

$$[K_m] = A[B_m]^T[H_m][B_m] \quad (2.34)$$

La rigidité de flexion relative à l'élément DKT est obtenue par intégration numérique en utilisant 3 points de Hammer (voir tableau 2.3) :

$$[K_f] = \int_A [B_f]^T [H_f] [B_f] dA \quad (2.35)$$

$$[K_f] = \int_{A_{ref}} ([B_f]^T [H_f] [B_f]) \det J d\xi d\eta \quad (2.36)$$

$$[K_f] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_i \omega_j ([B_f]^T [H_f] [B_f] \det J) \quad (2.37)$$

A_{ref} : surface de l'élément de référence

m : représente le nombre de points d'intégration (PI) dans les directions ξ , η

Tableau 2.3 Intégration numérique (3 points de Hammer)

PI	ξ	η	Ω
1	0.5	0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0	0.5	1/6

Avec H_m et H_f : matrice de comportement homogénéisé de membrane et de flexion.

$$[H_m] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$[H_m] = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de poisson. Les efforts résultants (effort normal et moment de flexion) [16]:

$$[N] = [H_m]\{e\} \quad , \quad [M] = [H_f]\{x\} \quad (2.40)$$

2.3.7 Matrice de rigidité dans le repère global

Les déplacements dans le repère global U, V, W sont reliés aux quantités locales par [16]:

$$\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} = [Q]^T \begin{matrix} U \\ V \\ W \end{matrix} \quad (2.41)$$

$$[Q]^T = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle & t_{1K} & t_{1F} & t_{1Z} \\ \langle t_2 \rangle & t_{2K} & t_{2F} & t_{2Z} \\ \langle n \rangle & n_K & n_F & t_Z \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Les composantes de $[Q]^T$ sont données explicitement par (3.7), (3.9) et (3.10).

Soient $\langle u_n^* \rangle_{glob}$ et $\langle u_n \rangle_{glob}$, les variables nodales de l'élément dans le repère global :

$$\langle u_n^* \rangle_{glob} = \langle \dots : U_i \ V_i \ W_i : i = 1, 2, 3 \dots \rangle \quad (2.43)$$

Nous avons, en utilisant (2.18), (2.42) et (2.43) :

$$\{u_n\} = [T]\{u_n\}_{glob} \quad , \quad \{u_n^*\} = [T]\{u_n^*\}_{glob} \quad (2.44)$$

Avec:

$$[T]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q]^T \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Les relations (2.32) et (2.44) permettent de définir la matrice de rigidité dans le repère global [16]: $[K]_{glob} = [T]^T [K] [T]$ (2.46)

CHAPITRE 3

Mise en oeuvre numérique

3.1. Matlab

3.1.1. Introduction au logiciel « Matlab »

MATLAB pour Matrix Laboratory, est un langage de programmation qui a été conçu afin de fournir un environnement de calcul matriciel simple, efficace, interactif et portable, permettant la mise en œuvre des algorithmes développés dans le cadre des projets linpack et eispack. MATLAB est constitué d'un noyau relativement réduit, capable d'interpréter puis d'évaluer les expressions numériques matricielles qui lui sont adressées :

- soit directement au clavier depuis une fenêtre de commande.
- soit sous forme de séquences d'expressions ou scripts enregistrées dans des fichiers-texte appelés m-files (ou fichiers .m) et exécutées depuis la fenêtre de commande.
- soit plus rarement sous forme de fichiers binaires appelés mex-files (ou fichiers .mex) générés à partir d'un compilateur C ou fortran.

Ce noyau est complété par une bibliothèque de fonctions prédéfinies, très souvent sous forme de fichiers m-files, et regroupés en paquetages ou toolboxes. À côté des toolboxes requises local et matlab, il est possible d'ajouter des toolboxes spécifiques à tel ou tel problème mathématique, Optimization Toolbox, Signal Processing Toolbox par exemple, ou encore des toolboxes créées par l'utilisateur lui-même. Un système de chemin d'accès ou path permet de préciser la liste des répertoires dans lesquels MATLAB trouvera les différents fichiers m-files utilisés.

3.1.2. Interface de Matlab

Le logiciel propose un environnement de travail composé de multiples fenêtres. Nous pouvons distinguer quatre blocs :

- Command window (console d'exécution): à l'invite de commande >>, l'utilisateur peut entrer les instructions à exécuter. Il s'agit de la fenêtre principale de l'interface de MATLAB (mode interactif).
- Current directory (répertoire courant): permet de naviguer et de visualiser le contenu du répertoire courant de l'utilisateur. Les programmes de l'utilisateur doivent être situés dans ce répertoire pour être visibles et donc exécutables.
- Workspace (espace de travail): permet de visualiser les variables définies, leur type, la taille occupée en mémoire...

- Command history: historique des commandes que l'utilisateur a exécutées. Il est possible de faire glisser ces commandes vers la fenêtre de commande[32].



Figure 3.1. Interface de Matlab

3.1.3 Lancer, quitter Matlab

Dans l'environnement unix, pour lancer MATLAB on tape la commande matlab sur la ligne de commande active; dans les environnements Windows ou MacOS, il suffit de cliquer sur l'icône de l'application. La fenêtre de commande de MATLAB s'ouvre alors et on tape les commandes ou les expressions à évaluer à droite du prompt ». Le processus d'évaluation est déclenché par la frappe de la touche <enter>.

A chaque début session, l'utilisateur indiquera à MATLAB que le répertoire myMatlab défini précédemment est le répertoire de travail de la session en tapant la commande cd suivie du chemin d'accès au répertoire myMatlab.

On quitte MATLAB en tapant quit dans la fenêtre de commande ou en sélectionnant quit dans le menu File de la barre de menu pour les versions Windows ou MacOS [33].

3.1.4 Fonctions général et commandes

Certaines fonctions de MATLAB ne calculent pas de valeur numérique ou vectorielle, mais effectuent une action sur l'environnement de la session en cours. Ces fonctions sont alors appelées commandes. Elles sont caractérisées par le fait que leurs arguments (lorsqu'ils existent) ne sont pas placés entre parenthèses. Les autres fonctions se comportent de façon assez semblable aux fonctions mathématiques et la valeur qu'elles calculent peut être affectée à une variable.

Dans de nombreux cas, fonctions ou commandes peuvent être appelées avec des arguments qui diffèrent soit par leur nombre, soit par leur nature (nombre, vecteur, matrice, ...). Le traitement effectué dépend alors du nombre et de la nature des arguments. Par exemple, nous verrons plus loin que la fonction `diag` appelée avec une matrice pour argument retourne le vecteur constitué par sa diagonale principale ou vecteur diagonal. Lorsque cette même fonction est appelée avec un vecteur pour argument, elle retourne la matrice diagonale dont le vecteur-diagonal est le vecteur donné. Aussi une fonction ou une commande n'est pas caractérisée par son seul nom, mais par sa signature c'est à dire l'ensemble constitué de son nom et de la liste des types de ses paramètres.

Ouvrez simultanément une session Matlab en tapant tout simplement Matlab dans une fenêtre de commandes.

Vous allez voir apparaître une ou plusieurs nouvelles fenêtres sur votre écran, dont la fenêtre de commandes représentée sur la figure 2. Les principales caractéristiques de cette fenêtre sont :

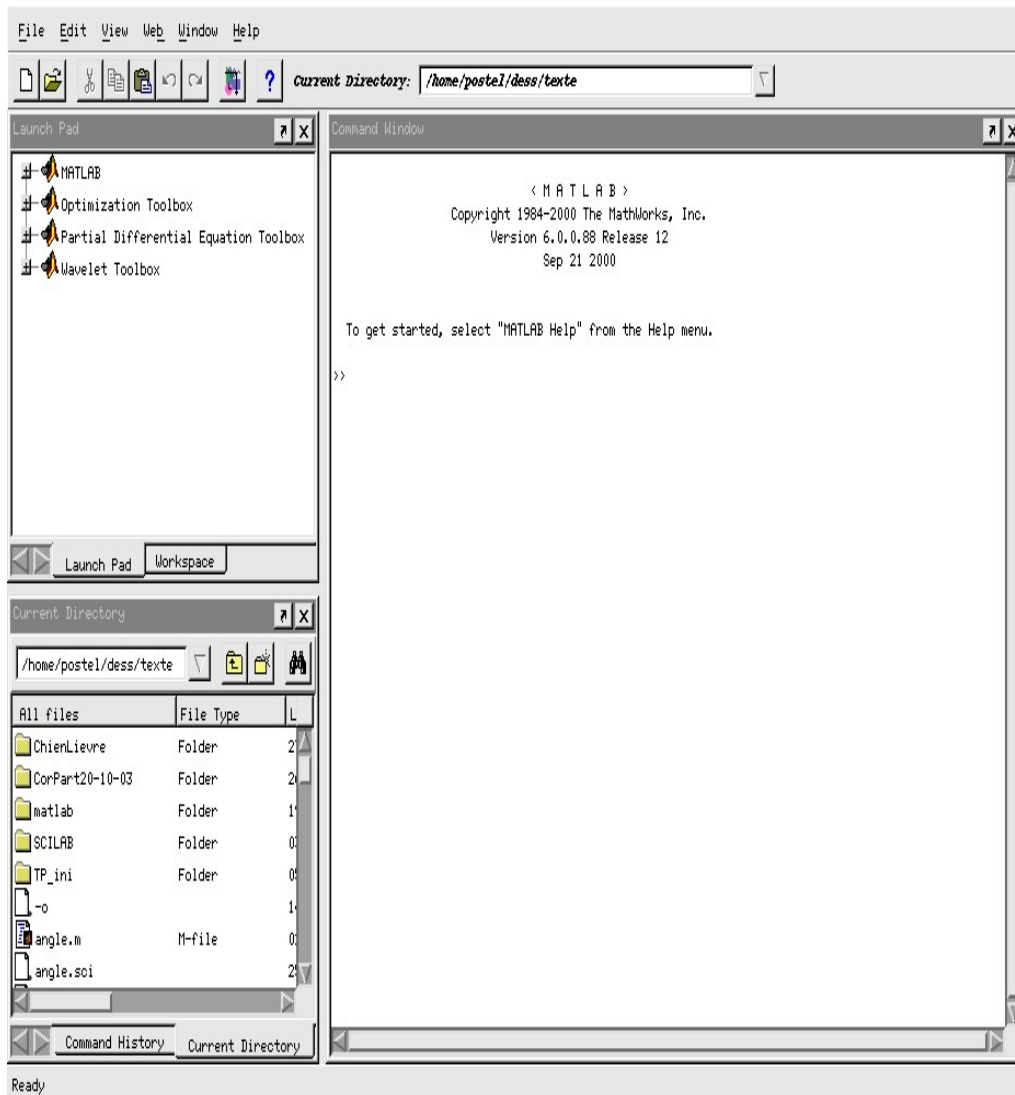


Figure 3.2. Fenêtre de commandes Matlab

Les caractères » en début de ligne constituent le prompt de Matlab. C'est après eux que vous pouvez taper des commandes qui seront exécutées par le logiciel après avoir tapé sur la touche entrée.

Le résultat de l'exécution s'inscrit alors dans la fenêtre ou est représenté graphiquement dans une nouvelle fenêtre spécifique (avec possibilité de zoom, d'impression, etc...). Pour rentrer une suite complexe d'instructions (on parle aussi d'un script), on les tape au préalable dans un fichier en utilisant l'éditeur intégré. Une fois le script enregistré, on peut l'exécuter en tapant son nom dans la fenêtre Matlab[34].

Matlab conserve l'historique des commandes. Il est donc possible à l'aides des flèches du clavier de remonter dans la liste des instructions déjà entrées pour retrouver une instruction particulière pour la réutiliser et éventuellement la modifier avant de l'utiliser à nouveau.

3.2. Mise en œuvre numérique de l'élément DKT18RF sur Matlab

3.2.1 Introduction

Touts programmes basés sur la méthode des éléments finis incluent quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (module d'élasticité...etc), les sollicitations et conditions aux limites.
- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations.
- Résolution du système d'équation après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats après calcul éventuel de variables additionnelles (contrainte, réactions...etc).

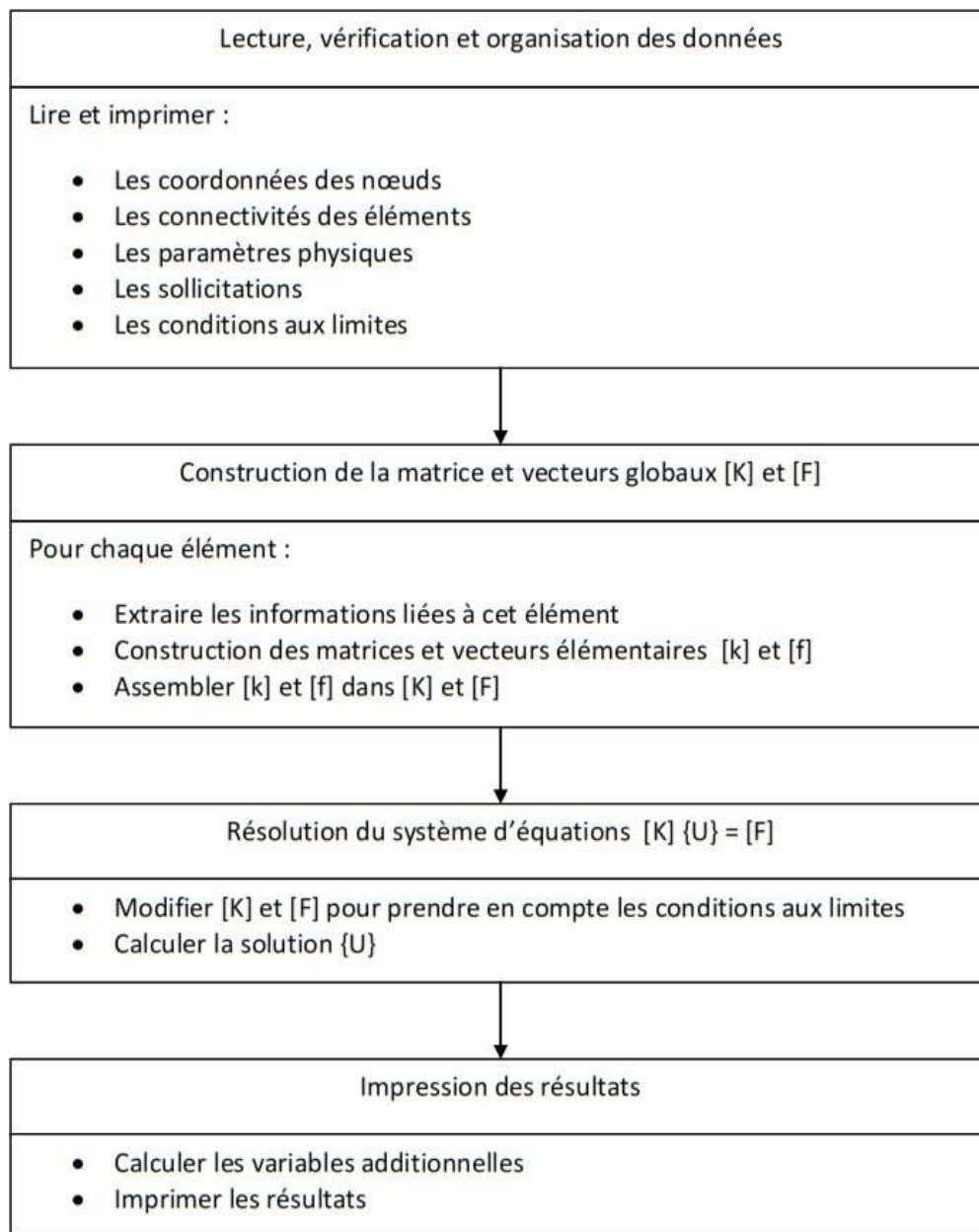


Figure 3.3. Blocs fonctionnels caractéristiques d'un programme éléments finis
[DHA81] ,[35]

, le programme est constitué d'une fonction (fonction) principale qui représente le programme principal et un ensemble des fonctions (fonctions) secondaires (qui jouent le même rôle des sous-routines).

3.2.2. Présentation du programme élément fini DKT18RF

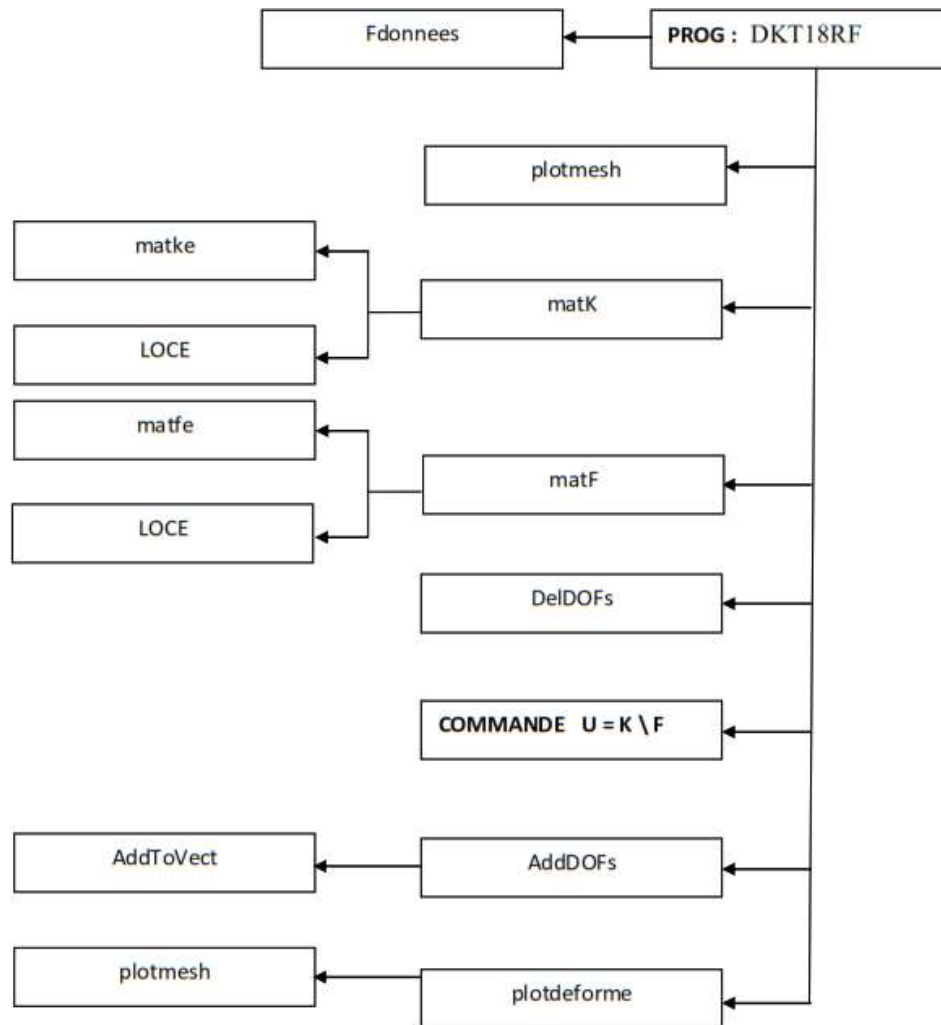


Figure 3.4. Description du programme élément fini DKT18RF

3.2.3. Description du programme

- **Programme principal DKT18RF**

Il fait appel aux différentes fonctions secondaires nécessaires aux calculs d'une structure en utilisant la formulation décrite dans ce chapitre.

- **Fonction données :**

C'est un fichier fonction qui permet d'introduit toutes les données relatives au problème tableau des coordonnées des nœuds

- tableau de connectivité des éléments
- épaisseur des éléments
- module d'élasticité
- coefficient de poisson
- conditions aux limites (numéros des degrés de liberté bloquées)
- vecteurs sollicitations

La commande Matlab : [les données] = feval (str2func(Nom du fichier des données)); ouvre le fichier des données et permet aux différentes fonction existant dans le programme principal de lire les données.

- **Fonction plotmesh :**

Cette fonction nous donne un affichage graphique du maillage, les coordonnées et la numérotation des nœuds, ce qui permet, avec le tracer la structure saisie, une vérification visuelle des données (tableaux des coordonnées et connectivité).

- **Fonction matK :**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires K_e fournit par la fonction matke, la boucle se fait sur les éléments en utilisant la fonction LOCE qui nous donne les degrés de liberté de chaque élément qui sont nécessaires pour le stockage des termes de la matrice élémentaire dans la matrice de rigidité globale.

- **Fonction LOCE :**

A partir de la table de connectivité des éléments existant dans le fichier des données, cette fonction Fournit la table de localisation (numéros) des degrés de liberté pour chaque élément.

- **Fonction matke:**

Permet le calcul de la matrice de rigidité pour chaque élément.

- **Fonction matF :**

C'est la fonction qui comporte le processus d'assemblage des vecteurs des sollicitations élémentaires f_e fournit par la fonction $matf_e$, la boucle se fait sur les éléments en utilisant la fonction LOCE qui nous donne les degrés de liberté de chaque élément qui sont nécessaires pour le stockage des termes des vecteurs de forces élémentaire dans le vecteur global.

- **Fonction matfe:**

Permet d'introduire le vecteur des forces pour chaque élément.

- **Fonction DelDOFs :**

Les conditions aux limites sont l'ensemble des déplacements nuls aux niveaux des appuis, un vecteur e dans le fichier de données est utilisé pour spécifier les degrés de liberté à bloquer. Pour appliquer cette condition on élimine les lignes et les colonnes correspondantes au vecteur e de la matrice K et du vecteur des sollicitations F (puisque le chargement est saisi pour tous les noeuds y compris ceux d'appuis).

- **Commande $U = K \setminus F$:**

Une fois les conditions aux limites sont appliquées, il nous reste qu'à résoudre le système discret, La solution en déplacement (aux noeuds) s'obtient avec la commande MATLAB $U = K \setminus F$, qui remplace les méthodes classiques pour résoudre les systèmes d'équations linéaires (méthode de factorisation de cholesky Pour une matrice symétrique définie positive).

- **Fonction AddDOFs :**

Avec cette fonction on ajoute au vecteur déplacement les degrés de liberté des noeuds bloqués qui ont été supprimés par la fonction DelDOFs, la boucle se fait sur les numéros des degrés de liberté à ajouter en utilisant la fonction AddToVect.

- **Fonction AddToVect:**

Permet d'obtenir le vecteur de déplacement résultant pour chaque degré de liberté ajouté.

- **Fonction plotdeforme:**

Cette fonction dessine la structure déformée, elle trace les solutions obtenues sur le schéma déjà obtenu par la fonction plotmesh.

CHAPITRE 4

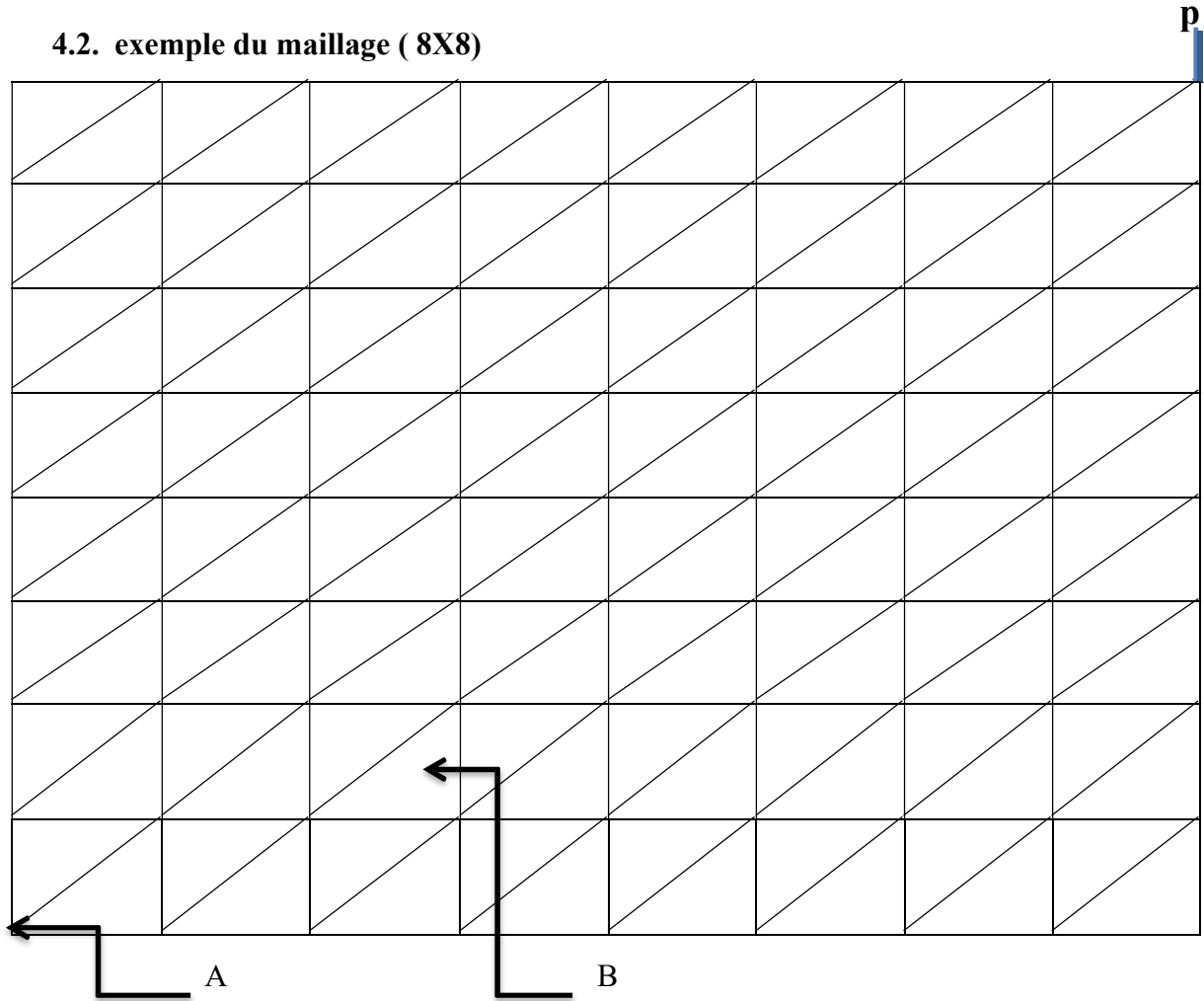
Applications Numériques

4.1 Introduction.

Après la présentation de la théorie relative au comportement des plaques au chapitre I, et la formulation de la nouvelle variante de l'élément DKT18RF au chapitre IV. Il est évident que la solution des équations différentielles gouvernant, le comportement des plaques est impossible par une des méthodes analytiques. Pour cette raison, le recours à une méthode numérique est devenu une obligation. Pour cela, la méthode des éléments finis est sélectionnée comme une méthode numérique de cette étude.

La validation de l'élément formulé, est représentée par la comparaison entre les résultats analytiques, indiqués dans la littérature et les résultats donnés par les autres éléments à travers des tests similaires.

4.2. exemple du maillage (8X8)



A: neud, B: elements , Les degrés de liberté (xyz) sont dans le nœud , p: Force

4.3. Flexion d'une plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres

Dans cette partie, la plaque étudiée est discrétisée respectivement en différents maillages. Il s'agit de passer du maillage grossier au maillage fin pour montrer l'effet de la discrétisation géométrique sur la réponse de la plaque d'une part, et de prendre le maillage qui convient à la présente analyse d'autre part.

Dans ce contexte, nous avons effectué le calcul d'un flasque monolithique L, d'épaisseur h, qui présente deux bords évidés et deux bords libres. La plaque est soumise à une pression de type :-

Charge concentrée en coin libre (CCCL)

Le maillage a été effectué avec des éléments rectangulaires (figure. 4.1), il s'agit

de deux variantes: à 16 éléments, et en fin à 25 éléments, les résultats obtenus sont présentés ci-après:

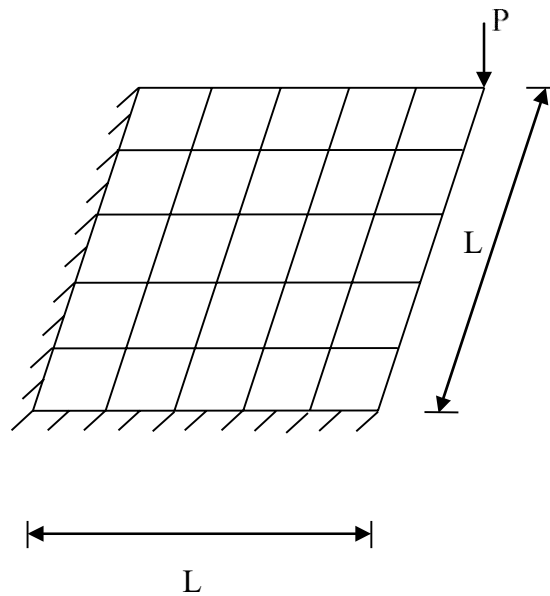


Figure 4.1 : plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres

4.3.1. Flexion d'une plaque carrée sous charge concentrée

maillage 4x4

P	100	200	300	400	500
W	27.77	55.55	83.33	111.111	138.88
DKT18RF	47.25	94.51	141.77	189.03	236.29

Tableau 4.1 : Tableau montrant la différence entre W Theory et Applied DKT18RF

(C. C. C. ; $L = 10$, $h = 0.4$,
 $P = 100 \dots 500$, $\nu = 0.3$, $E = 3600$)

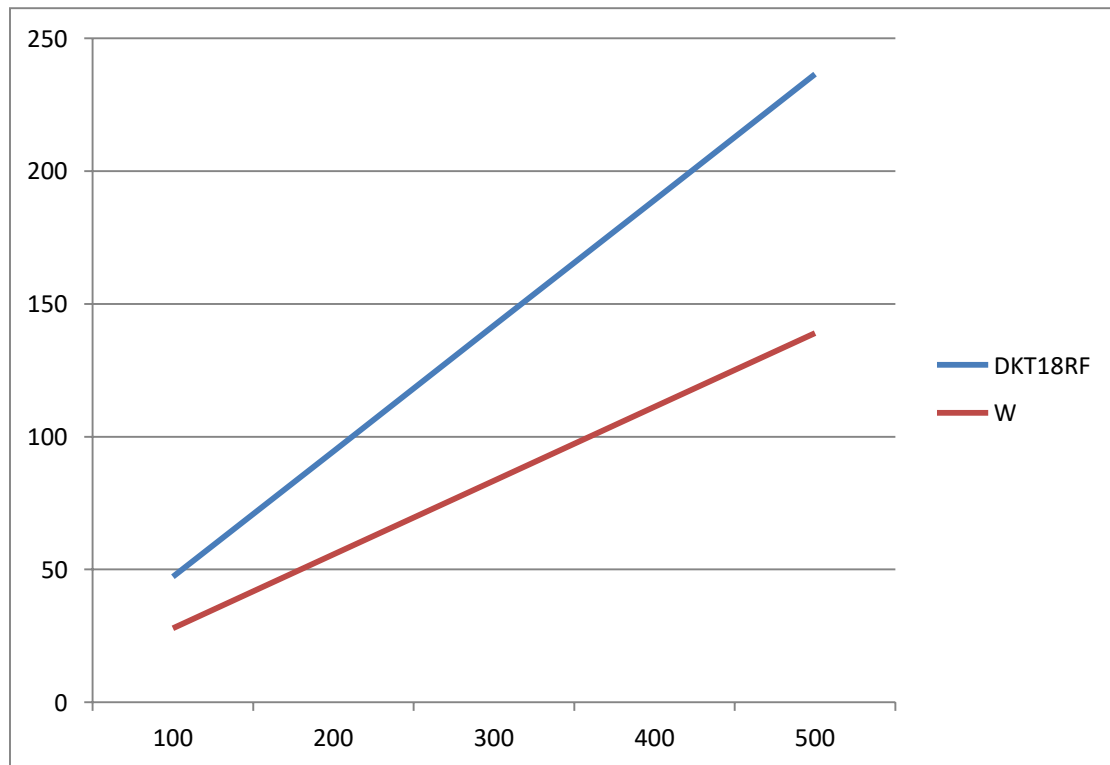


Figure 4.2: Une courbe montrant la correspondance du calcul des forces théoriques et appliquées

4.3.2. Flexion d'une plaque carrée sous charge concentrée

maillage 5x5

P	100	200	300	400	500
W	27.77	55.55	83.33	111.11	138.88
DKT18RF	59.06	106.36	165.42	224.48	238.54

Tableau 4.2: Tableau montrant la différence entre W Theory et Applied DKT18RF

(C. C. C. ; $L = 10$, $h = 0.4$,
 $P = 100.....500$, $\nu = 0.3$, $E = 3600$)

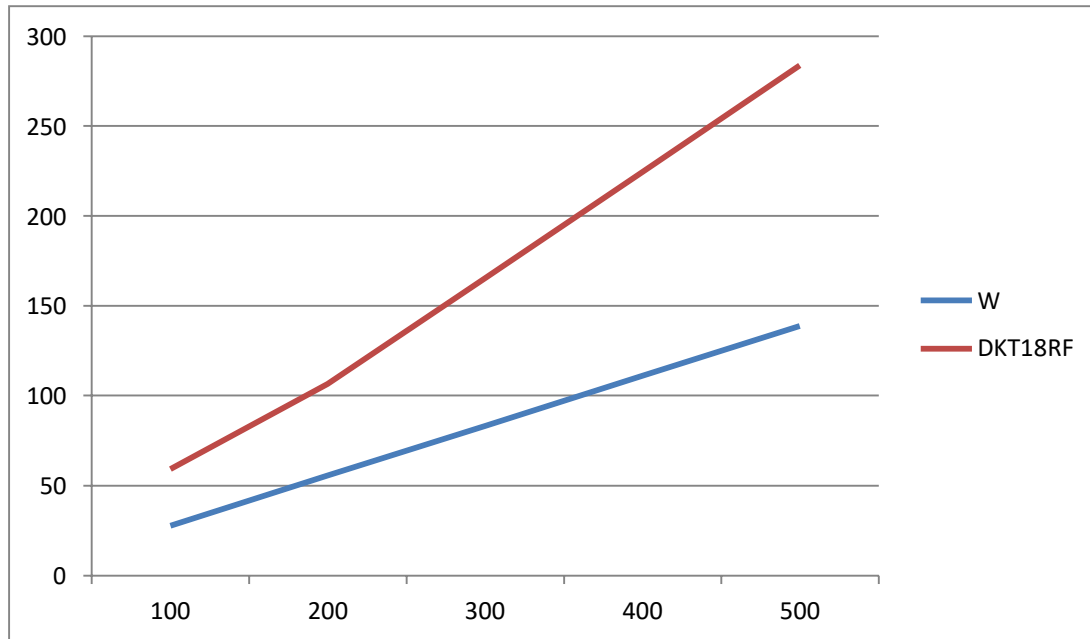


Figure 4.3: Une courbe montrant la correspondance du calcul des forces théoriques et appliquées

4.4. Flexion libre de la plaque carrée.

Ce test est utilisé pour évaluer la capacité des éléments finis à représenter l'état des torsions constantes. Il s'agit d'une plaque carrée (Figure 4.1) de côté $L=8,0$, d'épaisseur $h=1,0$, simplement appuyée ($W_B=W_C=W_D=0$) et soumise à une force transversale $P=5$ appliquée au coin A. Les paramètres du matériau sont : Module de Young $E=10000$ – Coefficient de Poisson $\nu=0,30$.

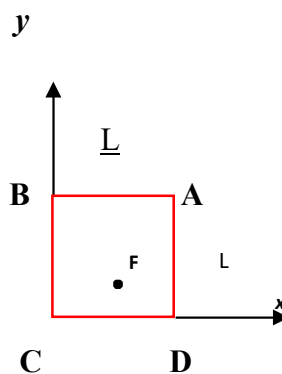


Figure 4.4 : Torsion d'une plaque carrée.

La solution exacte résultant de la théorie des plaques se présente comme suit :

Variable	Position	Valeur
WA	Coin A	0,24960
WF	Centre F	0,06

Tableau 4.3: Résultats de la simulation de la torsion d'une plaque carrée.

Type d'élément	Déplacement "W"	
	Point A	Point F
DKT18RF (8x8)	0.23669	0.06
ACM (8x8)	0.24972	0.06
HCT (8x8)	0.25002	0.06
SBA3(2x2)	0.24960	0.06
Solution exacte (Thin theory)	0.24960	0.06

Commentaire : Les résultats obtenus pour l'élément « DKT18RF », sont présentés au tableau 4.1. La comparaison de ces résultats avec la solution exacte et avec ceux obtenus par d'autres éléments extraits de la littérature, montre une bonne performance de l'élément DKT18RF dans la représentation de l'état des torsions constantes.

4.5. Plaque encastrée sous charge concentrée au centre

Plaque carrée à deux bords encastrés sous charge concentrée au centre.

Convergence de la flèche maximale (PE_- ; $L = 20$, $h = 0.2$, $P = 1$, $g = 0.3$, $E = 10^6$)

La solution exacte résultant de la théorie des plaques se présente comme suit:

Variable	Valeur
WA	56.0

La solution analytique est donnée par l'équation suivante :

$$PE_CCC \text{ plaque mince : } W_{ref} = \frac{(5,6 * 10^{-3} PL^2)}{D}$$

4.5.1. maillage 8x8

P	1	1.1	1.2	1.3	1.4
W	55.95	55.55	55.86	55.86	55.86
DKT18RF	49.85	54.84	59.82	64.81	69.79

Tableau 4.4: montrant la différence entre W Theory et Applied DKT18RF

(C. C. C. ; $L = 20, h = 0.2,$
 $P = 1 \dots 1.4, G = 0.3, E = 10^6$)

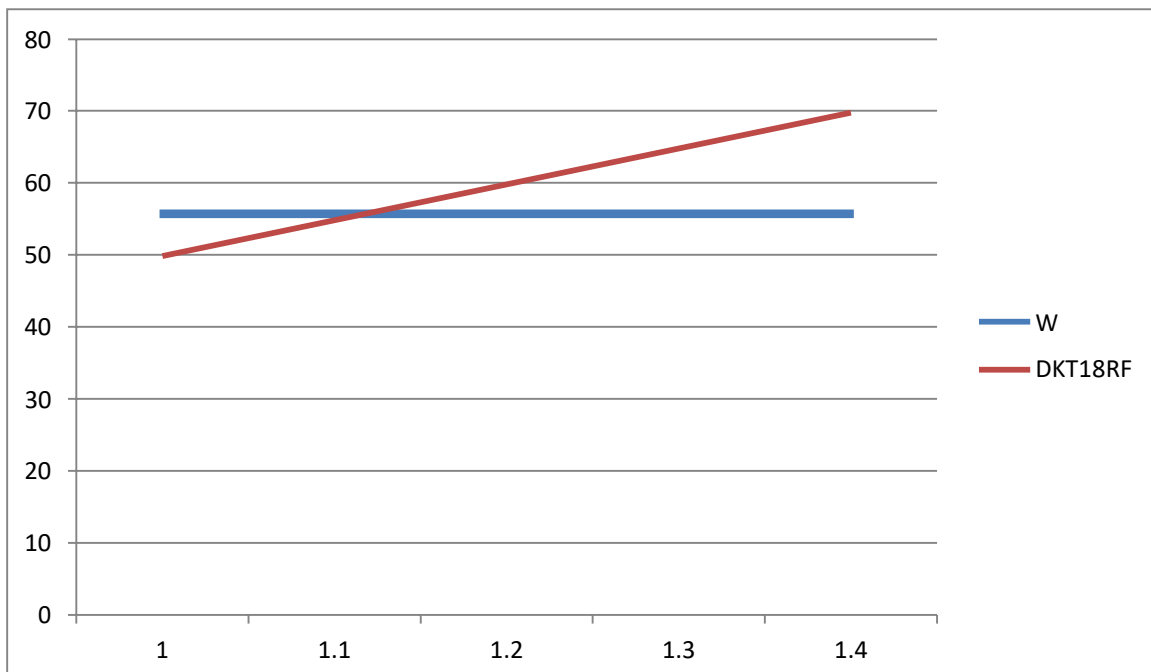


Figure 4.5: Une courbe montrant la correspondance du calcul des forces théoriques et appliquées

4.5.2. maillage 9x9

p	1	1.1	1.2	1.3	1.4
W	55.95	55.55	55.86	55.86	55.86
DKT18RF	53.85	59.84	64.82	69.81	74.80

Tableau 4.5: montrant la différence entre W Theory et Applied DKT18RF

(C. C. C. ; $L = 20, h = 0.2,$
 $P = 1 \dots 1.4, G = 0.3, E = 10^6$)

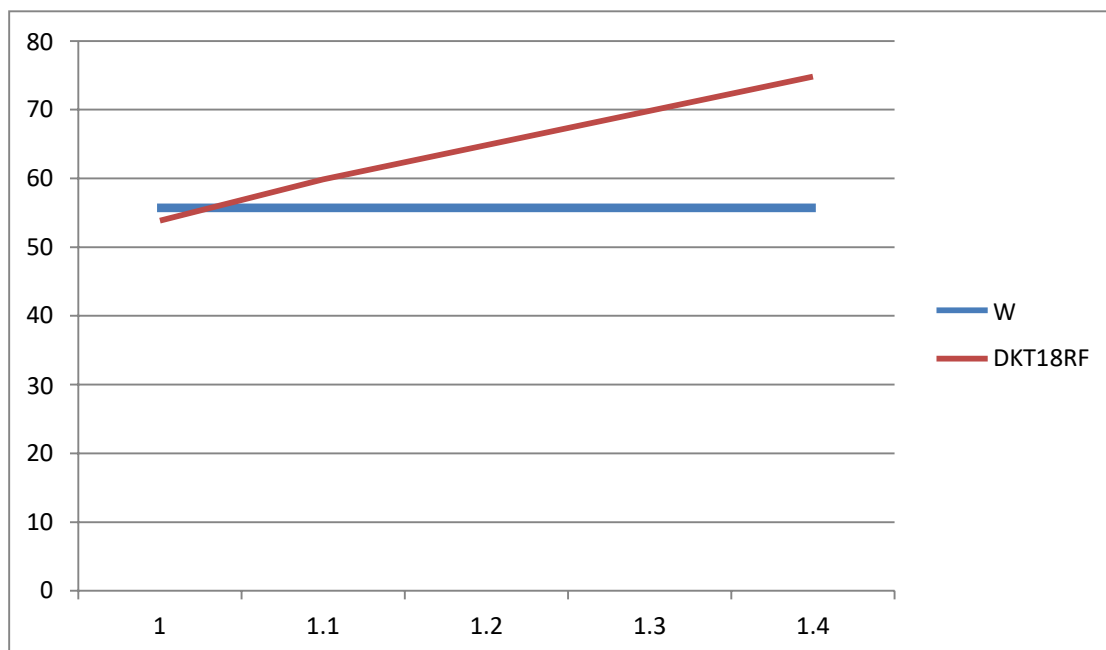


Figure 4.6: Une courbe montrant la correspondance du calcul des forces théoriques et appliquées

4.6. Conclusion

D'après les résultats obtenus pour les applications réalisées dans ce chapitre on constate qu'il y'a une divergence entre la solution théorique et celui obtenue par l'élément DKT18RF et cela pour le cas de la plaque sous charge concentrée à l'extrémité libre (applications 1 et 3) ; par contre pour le 2^{ème} application (cas de la plaque sous charge concentrée au centre) l'élément DKT18RF montré des bonnes propriétés de convergence et nous donne ainsi des bons résultats en le comparant aux solutions de référence est les résultats trouvés par d'autres éléments existants.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail on a présenté un élément fini triangulaire sans degré de liberté en rotation, cet élément est conçu pour faire pallier au problème de modélisation des structures complexes composées d'un ensemble d'éléments massifs ainsi que des éléments minces.

Cet élément fini est programmé sous le logiciel de programmation Matlab, et afin de faire une extension de l'utilisation de cet élément qui à été développé et testé par [16] dans d'autres types des structures, particulièrement les structures de types plaque, on a étudié quelques cas tests reconnus dans le domaine.

Les résultats obtenus ont montré qu'il y'a une divergence entre la solution théorique et celui obtenue par l'élément DKT18RF et cela pour le cas de la plaque sous charge concentrée à l'extrémité libre (applications 1 et 3) ; par contre pour le 2ème application (cas de la plaque sous charge concentrée au centre) l'élément DKT18RF à montré des bonnes propriétés de convergence et nous a donné ainsi des bons résultats on le comparant aux solutions de référence est les résultats trouvés par d'autres éléments existants.

A travers les résultats obtenus dans le cadre de cette étude, nous recommandons de faire des modifications sur le comportement de l'élément finis sans degré de liberté en rotation, afin d'améliorer la performance et la fiabilité de cet élément dans l'étude des structures de types plaques minces et épaisses.

BIBLIOGRAPHIE

- [1],[2],[3],[4] Recherche sur Internet à propos de théorie des plaques
- [5],[7] Recherche sur Internet à propos de théorie générale de la flexion des plaques
- [6] Depuis l'un des sites de l'intranet
- [8] Drapier .S & Fortunier .R, Méthodes numériques d'approximation et de résolution en mécanique. Ecole Nationale supérieure des mines, 15 décembre 2010- Version β .
- [9] "Analyse structurelle et conception de plaques circulaires, de cylindres et de coques" par M.E. Nazmy et M.I. Ramadan
- [10] "Conception structurelle des ouvrages en acier selon EN 1993 et EN 1994, troisième édition" par L. Gardner et D. Nethercot
- [11] "Conception en béton armé" par G. Somerville et R. Storey
- [12] Timoshenko S. On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars. Philosophical Magazine, 1921, Vol. 41 (series 6) p. 744–746.
- [13] Timoshenko, S.P., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). Théorie des plaques et des coques (2e éd.). McGraw-Hill.
- [14] Reddy, JN (2007). Théorie et analyse des plaques et coques élastiques (2e éd.). Presse CRC.
- [15] Jones, R.M. (1999). Mécanique des matériaux composites (2e éd.). Presse CRC.
- [16] Bachir LABIODH , Contribution à l'étude numérique des coques par des éléments de type solide-coque, applications linéaires et non linéaires , Université Mohamed Khider – Biskra , 2021
- [17] En ligne Srinivasan, R.S. (2006). Plaques minces et coques : théorie, analyse et applications (2e éd.). Presse CRC.
- [18] Timoshenko, S.P., et Woinowsky-Krieger, S. (1959). Théorie des plaques et des coques. New York : McGraw Hill.
- [19] Ghosh, S.K. (2007). Théorie des plaques et des coques. Presse CRC.
- [20] En ligne Chakrabarti, A. (2010). Théorie et analyse des plaques et coques élastiques. Presse CRC
- [21] Timoshenko, S.P., et Woinowsky-Krieger, S. (1959). Théorie des plaques et des coques. New York : McGraw Hill.
- [22] Ghosh, S.K. (2007). Théorie des plaques et des coques. Presse CRC.
- [23] Reddy, J.N. (2007). Théorie et analyse des plaques et coques élastiques. Presse CRC.

BIBLIOGRAPHIE

- [24] Zienkiewicz, O.C. et Taylor, R.L. (2000). La méthode des éléments finis : Volume 2. Butterworth-Heinemann.
- [25] Reddy, J.N. (2007). Théorie et analyse des plaques et coques élastiques. Presse CRC.
- [26] Kausel, E. (1993). Méthodes des éléments limites en ingénierie et en sciences. Presse CRC.
- [27] P. Boisse, Résistance des structures introduction à la méthode des éléments finis Cours MS 256, Insa de Lyon
- [28] G. Daht, G.Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, ISBN 27637-6912-8, Les presses de l'université de Laval, Québec
- [29] Patrick Ciarlet Eric Luneville , La méthode des éléments finis , Ensta , février 2009
- [30] Deghboudj Samir ,METHODE DES ELEMENTS FINIS , Université de Tébessa , 2018.
- [31] Batoz JL, Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis, Vols 1, 2, 3, Hermès 1990.
- [32] Abdelhamid Bouhelal - Arezki Smaili, Introduction à l'utilisation de MATLAB & Simulink, researchgate, June 2022.
- [33] Yassine Ariba - Jérôme Cadieux, MANUEL Matlab , Icam de Toulouse.
- [34] le cours de Dr. Mohammed Omari, de la matière: Outils de Programmation pour le Mathématique
<http://wp.unil.ch/risk/files/2015/12/1.-Introduction-%C3%A0-Matlab.pdf>
- [35] Dhatt G, Touzot G. Une présentation de la méthode des éléments finis: Maloine Québec: Presses de l'Université Laval; 1981.

