



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

*Analyse mathématique d'un problème de
contact avec frottement entre deux corps
électro-viscoélastiques.*

Présenté par: -SEBAA Imadeddine
-YOUMBAI Mehieddine

Soutenu le : 05/ 06/ 2018

Devant le jury composé de :

Said Ameer Meziene	MAA	Président	Univ. El Oued
Hadj Ammar Tedjani	MCA	Encadreur	Univ. El Oued
Mesai Aoun Mohamed Salah	MAB	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Remerciement

Nous remercions tout d'abord **Allah** le tout puissant qui nous a donné la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Nos vifs remerciements vont également à notre encadreur **Dr. Hadj Ammar Tedjani** qui nous a guidées durant ce semestre par ses conseils et remarques qui étaient très utiles pour réaliser ce mémoire.

Nos remerciements vont également à nos familles par leurs aides morales et matérielles tout au long de notre scolarité.

Table des matières

Introduction	1
Notations générales	3
1 Préliminaires	7
1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact	7
1.1.1 Cadre physique	7
1.1.2 Modèle mathématique	8
1.1.3 Formulation mathématique des problèmes de contact.	15
1.2 Rappels d'analyse	16
1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert	16
1.2.2 Espaces de Sobolev	16
1.2.3 Espaces fonctionnels	17
1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert . .	21
1.2.5 Lemmes de Gronwall	26
2 Problème électro-viscoélastique	27
2.1 Formulation du problème	27
2.2 Formulation variationnelle	29
2.3 Existence et unicité de la solution	34
Conclusion générale	40
Bibliographie	41

Introduction générale

De puis la nuit des temps, l'homme s'est intéressé aux problèmes de contact entre deux corps. Ces problèmes de contact, avec ou sans frottement, entre deux corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation rigide, abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le simple contact du sabot de frein avec la roue, d'une roue de voiture avec la route, du piston avec la chemise, l'enfoncement progressif dans un pouf ou un fauteuil lors d'une posture assise, les multiples frottements entre plaques tectoniques ou encore l'écoulement de la lave lors d'une éruption volcanique, ne sont que quelques exemples qui font partie d'une liste non exhaustive de problèmes de contact. Vu l'importance du phénomène, des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables. Par conséquent, une théorie mathématique générale de la mécanique du contact (Mathematical Theory of Contact Mechanics : MTCM) a fait récemment un progrès impressionnant, voir par exemple [5] et les références qu'y sont incluses.

L'objectif de Cet mémoire est de proposer une certaine contribution à l'étude d'un problèmes aux limites en mécanique du contact. Nous considérons un loi de comportement pour des matériaux ayant des propriétés mécaniques ainsi que des propriétés électriques (matériaux piézoélectriques).

Les matériaux piézoélectriques sont extèmement utilisés comme interrupteurs et actuateurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Les matériaux piézoélectriques, pour lesquelles les propriétés mécaniques sont élastiques, sont appelés "matériaux électroélastiques" et ceux pour lesquelles les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés "matériaux électroviscoélastiques". Des modèles généraux pour des matériaux élastiques ayant un effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [4] et plus récemment dans [10]. Des problèmes de contac statiques avec frottement pour des matériaux électroélastiques ont été étudiés dans [3], sous l'hypothèse que la fondation est isolante. Un problème de contact avec "Slip-dependant" pour les matériaux électroélastiques a été étudié dans [3] et des problèmes pour les matériaux électro-viscoélastiques ont été considérés dans [7]. Actuellement, un intèrêt considérable est porté aux problèmes de contact avec frottement impliquant les matériaux piézoélectriques (voir

par exemple [6] et les références qu'y sont incluses). Cependant, il n'existe virtuellement pas de résultats mathématiques à propos des problèmes de contact pour de tels matériaux et on a besoin de développer la théorie mathématique du contact mécanique (MTCT) pour inclure le couplage entre les propriétés mécaniques et électriques.

Ce mémoire comporte deux chapitres sont structurés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, le but est d'introduire les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite du problème traité. Nous commençons par décrire le cadre physique dans lesquels nous travaillons ainsi que le modèle mathématique correspondant, tout en donnant la loi de comportement et conditions aux limites qui apparaissent dans mémoire. Ensuite, nous aborderons le cadre fonctionnel permettant l'analyse mathématique des problèmes ainsi considérés. Nous terminerons ce chapitre en passant en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les inéquations variationnelles, équations et inéquations variationnelles d'évolution et enfin les lemmes de Gronwall.

Dans le deuxième chapitre, est consacré à l'étude d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques dans un processus dynamique. Le problème se formule par un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une équation variationnelle par rapport au champ électrique. On établit un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur des arguments d'équations variationnelles, un résultat classique concernant les inéquations paraboliques et des arguments de point fixe.

Notations générales

Notations diverses

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
$\partial_i \Psi$	La dérivée partielle de Ψ par rapport à la i^{eme} composante $x : \partial_i \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \Psi$	Gradient de l'application $\Psi : \nabla \Psi = (\partial_1 \Psi, \dots, \partial_d \Psi)$,
$Div \Psi$	Divergence de l'application, $\Psi : Div \Psi = \partial_1 \Psi + \dots + \partial_d \Psi$,
$\partial \Psi$	Sous-différentiel de l'application Ψ ,
(x, y)	Paire d'un espace produit $X \times Y$,
$\mathbb{S}^d$	Espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d : \mathbb{S}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$,
$\cdot$	Produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$,
$ \cdot $	La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$,
$\ \cdot\ _X$	La norme sur l'espace X ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Le produit scalaire sur l'espace X ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$	Le produit dual entre X' et X ,
$p.p.$	Presque partout,
Ω^ℓ	Ouvert de $\mathbb{R}^d$, parfois domaine Lipschitzien,
$\overline{\Omega^\ell}$	L'adhérence de Ω^ℓ ,
Γ^ℓ	La frontière de Ω^ℓ ,
Γ_i^ℓ	Les parties de frontière Γ^ℓ , ($i = 1, 2, 3$),
$mes(\Gamma_i^\ell)$	Mesure de Lebesgue $(d-1)$ dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,
η^ℓ	Normale extérieure unitaire à Γ^ℓ ,
v_η^ℓ, v_τ^ℓ	Les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v^ℓ défini sur $\bar{\Omega}^\ell$,
$C^1(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω^ℓ ,
$C_c(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions continues à support compact sur Ω^ℓ ,
$D(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
$D'(\Omega^\ell)$	Espace des distributions sur Ω^ℓ ,
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^\ell)}$	La norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell\ _{L^2(\Omega^\ell)} = \left(\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 d\Omega^\ell \right)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\exists c > 0 : u^\ell < c, p.p.,$ sur Ω^ℓ ,

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	L'espace $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)\right)^d$,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}$	Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$\ \cdot\ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}$	La norme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ définie par $\ \Psi\ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} = \sup_{\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} \frac{\langle \Psi, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}}{\ \phi\ _{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}}$,
H'_{Γ^ℓ}	L'espace dual de H_{Γ^ℓ} , i.e, $H'_{\Gamma^\ell} = \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)\right)^d$.

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C([0, T]; H)$	L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1([0, T]; H)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$C_c([0, T]; H)$	L'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0; T]$ à valeurs dans H ,
$L^p([0, T]; H)$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	La norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k, p}(0, T; H)$	L'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k, p}(0, T; H)}$	La norme de $W^{k, p}(0, T; H)$.

Notations en élasticité

Ω^1, Ω^2	Les domaines occupés par les corps déformables,
Γ^ℓ	La frontière de $\Omega^\ell : \Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$,
$\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3$	Les parties de $\Gamma^\ell = \overline{\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3}$,
Γ_3	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_i^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique,
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
D^ℓ	Valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Les dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $(\varepsilon(u^\ell))_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$,
$\sigma^\ell \cdot u^\ell$	Produit tensoriel (matriciel) de u^ℓ par $\sigma^\ell : (\sigma^\ell \cdot u^\ell)_i = \sigma_{ij}^\ell \cdot u_j^\ell$,
σ_ν^ℓ	Composante normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$ où ν^ℓ est la normale unitaire sortante sur le bord du domaine Ω^ℓ ,
σ_τ^ℓ	Vecteur composante tangentielle des contraintes à la frontière du domaine,
u_ν^ℓ	Composante normale du déplacement u^ℓ sur le bord du domaine : $u_\nu^\ell = u^\ell \cdot \nu^\ell$,
$u_\nu^\ell \nu^\ell$	Vecteur composante normale du déplacement $u^\ell : (u_\nu^\ell \cdot \nu^\ell)_i = u_\nu^\ell \cdot \nu_i^\ell$,
u_τ^ℓ	Vecteur composante tangentielle du déplacement $u^\ell : u_\tau^\ell = u^\ell - u_\nu^\ell \cdot \nu^\ell$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique, une loi de comportement d'un matériau électro-viscoélastique, les conditions aux limites ainsi que la formulation électro-mécanique de problème à étudier.

Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, les lemmes de *Gronwall* et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact

1.1.1 Cadre physique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et une modèle mathématique de problème utilisés dans ce mémoire. Ensuite, nous indiquerons les formulations mathématiques pour le problème de contact avec frottement entre deux corps électro-viscoélastiques.

Nous considérons deux corps matériels déformables qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$), avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$, correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$, $mes(\Gamma_a^\ell) > 0$. On note par v^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Le corps Ω^ℓ est encasté sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ et agissent des forces volumiques de densité f_0^ℓ et des charges électriques

de densité volumiques q_0 . Nous supposons que f_2^ℓ et f_0^ℓ varient très lentement par rapport au temps. Les corps sont soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_3 . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en contact avec une fondation sur la partie Γ_3 .

1.1.2 Modèle mathématique

a. Equation de mouvement

Notons que le point au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, i.e :

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt}, \quad \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2}.$$

Les fonctions inconnues du problème sont les champs des déplacements $\dot{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d, \ell = 1, 2$. Notons la densité de la masse $\rho^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques $f_0^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ l'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de cauchy :

$$Div \sigma^\ell + f_0^\ell = \rho^\ell \ddot{u}^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.1)$$

où $\ddot{u}^\ell$ représente l'accélération et $\dot{u}^\ell$ la vitesse du corps.

Les processus d'évolution modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{u}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{u}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{u}^\ell$ peut être négligé (processus quasistatiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient :

$$Div \sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.2)$$

L'équation équivaut à d relation scalaires, et mathématiquement cette équation ne suffit par à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes u_i^ℓ du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacement électrique les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques :

$$div D^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.3)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div} D^\ell = (D_{i,i}^\ell)$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ .

b. Loi de comportement piézoélectrique

Nous considérons deux corps piézoélectriques qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière et de Lipschitz Γ^ℓ subdivisée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ d'une part et de deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , telles que $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, $\text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$. et $\Gamma_3^\ell \subset \Gamma_b^\ell$. Soit $T > 0$ nous étudions l'évolution du corps due à l'application de force de volume et de tractions de surfaces dans l'intervalle de temps $[0, T]$. Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega^\ell \cup \Gamma^\ell$, et $t \in [0, T]$.

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides [1] : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ , le tenseur des déformations infinitésimales ε^ℓ et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}^\ell$ et $\dot{\varepsilon}^\ell$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électromécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $D^\ell = (D_i^\ell)$ ainsi que le champ électrique $E^\ell = -\nabla\varphi^\ell$. Nous présentons par la suite les lois de comportement de matériau : matériaux électro-élasto-viscoélastique.

b.i. Loi de comportement des matériaux électro-élastiques

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ^ℓ et le vecteur des déplacements électriques D^ℓ sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell, \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + B^\ell E^\ell, \\ E^\ell = -\nabla\varphi^\ell, \end{cases} \quad (1.4)$$

où $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur d'élasticité non linéaire, $E^\ell = -\nabla\varphi^\ell$ est le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité

entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et $B^\ell = (B_{ij}^\ell)$ est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^\ell)^*$ où $(e_{ijk}^\ell)^* = e_{kij}^\ell$, dénote le transposé du tenseur $\mathcal{E}^\ell$ tel que :

$$\mathcal{E}^\ell \sigma^\ell \cdot v = \sigma^\ell \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* v^\ell; \quad \forall \sigma^\ell \in \mathbb{S}^d, v^\ell \in \mathbb{R}^d \quad (1.5)$$

b.ii. Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques

Un matériau est dit électro-viscoélastique si sa loi de comportement est de la forme :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell, \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + B^\ell E^\ell, \end{cases} \quad (1.6)$$

dans laquelle interviennent l'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$, l'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}^\ell$, non linéaires.

Nous présentons maintenant la loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec endommagement. Dans ce cas la loi de comportement est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \theta^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell, \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + B^\ell E^\ell. \end{cases} \quad (1.7)$$

La température θ est définie par une équation parabolique, que représente la conservation de l'énergie comme suit :

$$\dot{\theta}^\ell - k_0^\ell \Delta \theta^\ell = \Theta^\ell(\sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell), \theta^\ell) + \rho^\ell, \quad (1.8)$$

où Θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous k_0^ℓ est une constante strictement positive et ρ^ℓ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

c. Conditions aux limites

D'énonçons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ .

c.i. La condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times [0, T]$, le champ des déplacements u^ℓ est par conséquent nul :

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T]. \quad (1.9)$$

c.ii. La condition aux limites de traction

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma^\ell \nu^\ell$ satisfait :

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T]. \quad (1.10)$$

c.iii. Les conditions aux limites électriques

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations :

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.11)$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.12)$$

c.vi. Conditions continue aux limites de contact

On définit le déplacement normal relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$, où ν^ℓ est la normale unitaire extérieure à Ω^ℓ .

La continuité des contraintes sur l'interfaces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.13)$$

c.v. Contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g), \quad (1.14)$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+ \quad (1.15)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha \end{cases} \quad (1.16)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.14) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde,

i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration. Maintenant, nous présentons les lois de frottement intervenant dans ce mémoire.

c.iv. Loi de frottement de type Coulomb

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu \|\sigma_\nu\|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu \|\sigma_\nu\| \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu \|\sigma_\nu\| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases} \quad (1.17)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. C'est une version statique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottant des problèmes étudiés dans la deuxième partie du mémoire.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.17), par la condition de compliance normale (1.14), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p_\nu(u_\nu - g), \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p_\nu(u_\nu - g) \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p_\nu(u_\nu - g) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau. \end{cases} \quad (1.18)$$

Une version quasistatique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p_\tau(u_\nu - g), \\ u_\tau \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau = -p_\tau(u_\nu - g) \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|}, \end{cases} \quad (1.19)$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (1.19), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau(u_\nu - g)$. De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers.

c.iiv. Conditions électriques à la surface de contact

Dans ce paragraphe nous allons énoncer les conditions de contact électrique, associées aux problèmes électro-mécaniques, sur la partie Γ_3 de la surface. Nous supposons que la fondation est électriquement conductive et son potentiel est maintenu à φ_0 . La condition électrique sur Γ_3 est donnée par

$$D \cdot \nu = \psi(u_\nu - g) \phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.20)$$

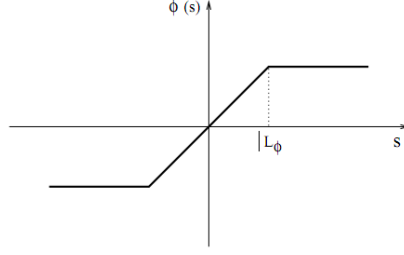


FIGURE 1.1 – Représentation graphique de la fonction ϕ

où ψ et ϕ sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes.

Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point sur la surface (i.e. $u_\nu < g$), l'interstice entre le corps et la base est supposé être isolant (disons qu'il est rempli d'air) et la composante normale du champ de déplacement électrique s'annule pour qu'il n'y ait aucune charge électrique libre sur la surface. Ainsi,

$$u_\nu < g \implies D \cdot \nu = 0. \quad (1.21)$$

Durant le processus de contact, (i.e. quand $u_\nu \geq g$) la composante normale du champ de déplacement électrique ou la charge électrique libre est supposé être proportionnelle à la différence de potentiel entre la surface du corps et la fondation, avec une constante positive k comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$u_\nu \geq g \implies D \cdot \nu = k (\varphi - \varphi_0). \quad (1.22)$$

Combinons (1.21), (1.22) pour obtenir

$$D \cdot \nu = k \chi_{[0,\infty)}(u_\nu - g) (\varphi - \varphi_0), \quad (1.23)$$

où $\chi_{[0,\infty)}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, \infty)$, qui est donnée par

$$\chi_{[0,\infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0, \\ 1 & \text{if } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (1.23) décrit le contact électrique parfait et elle est en quelque sorte semblable à la condition bien connue de contact de Signorini. Les deux conditions peuvent être considérées comme des sur-idéalisations dans plusieurs applications.

Pour la rendre plus réaliste, nous régularisons la condition (1.23) par la condition (1.20) dans laquelle ψ est une fonction régulière qui va être décrite ci-dessous et ϕ

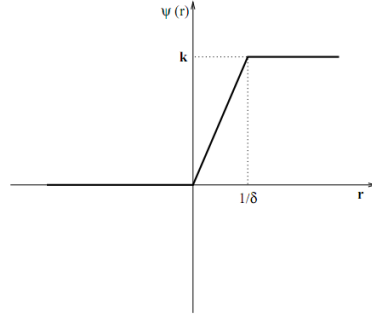


FIGURE 1.2 – Représentation graphique de la fonction ψ

est une fonction de troncation,

$$\phi(s) = \begin{cases} L_\phi & \text{si } s < -L_\phi, \\ s & \text{si } -L_\phi \leq s \leq L_\phi, \\ L_\phi & \text{si } s > L_\phi. \end{cases} \quad (1.24)$$

où L_ϕ est une constante positive très grande. De cette façon, la différence $\varphi - \varphi_0$ est remplacé par $\phi(\varphi - \varphi_0)$. Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique sur l'applicabilité du modèle puisque L_ϕ peut être arbitrairement grand et donc dans les applications $\phi(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$.

Les raisons de la régularisation (1.20) de (1.23) sont mathématiques.

Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction $k\chi_{[0,\infty)}$ dans (1.23) par une fonction Lipschitzienne ψ . Un choix possible est l'exemple suivant :

$$\psi(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ k\delta r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\delta}, \\ k & \text{si } r > \frac{1}{\delta}. \end{cases} \quad (1.25)$$

où $\delta > 0$ est un paramètre assez grand. Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de la surface, et se stabilise quand la pénétration $u_\nu - g$ atteint la valeur $\frac{1}{\delta}$.

Deuxièmement, nous avons besoin du terme $\phi(\varphi - \varphi_0)$ pour rendre le terme $\varphi - \varphi_0$ borné. Notons que lorsque $\psi \equiv 0$ dans (1.20), nous obtenons

$$D \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.26)$$

ce qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (1.26) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [2, 11, 12, 13]. La condition (1.20) à la place de (1.26), introduit un couplage fort entre les conditions aux limites mécaniques et électriques et mène vers un nouveau modèle mathématique, non standard. Par ailleurs, la condition (1.20) va être utilisée dans le cinquième chapitre du mémoire où nous avons supposé que la base est isolatrice (i.e. $\psi \equiv 0$).

1.1.3 Formulation mathématique des problèmes de contact.

On considère ici le problème mécanique qu'on va étudier dans le chapitre 2.

Problème P (Problème électro-viscoélasticité avec frottement).

Pour $\ell = 1, 2$, Trouver le champ de déplacement $u^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ de contrainte $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le potentiel électrique $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de déplacement électrique $D^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, tels que :

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - B^\ell \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$0 = \text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$q_0^\ell = \text{div } D^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T],$$

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T],$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu] - g), \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T],$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \\ \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau([u_\nu] - g) \\ [\dot{u}_\tau] \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau = -p_\tau([u_\nu] - g) \frac{[\dot{u}_\tau]}{\|[\dot{u}_\tau]\|}, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T],$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T],$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T],$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell \quad \text{dans } \Omega.$$

1.2 Rappels d'analyse

1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(.,.)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (1.27)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de *Cauchy-Schwartz* :

$$(u, v)_H \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.28)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (1.27).

Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\|v\|_H},$$

où $(.,.)_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

1.2.2 Espaces de Sobolev

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \text{ } i = 1, \dots, d\}.$$

D'abord, on note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de *Hilbert* pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 1.2.1 (*Rellich*)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 1.2.2 (*trace de Sobolev*)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.2.1 L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle dT . L'application δ s'appelle application de trace; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.2.2 On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

1.2.3 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans l'espace de Hilbert. Toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire sont introduits dans cette section.

Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$, ($d = 2, 3$), $(\cdot, \cdot)$ et $|\cdot|$ représentent le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$, respectivement. Ainsi,

$$u \cdot v = u_i \cdot v_i, \quad |v| = (v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \cdot \tau_{ij}, \quad |\tau| = (\tau, \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d.$$

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques v^ℓ et τ^ℓ :

$$\begin{cases} H^\ell = \{v^\ell = (v_i^\ell); v_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))^d, \\ H_1^\ell = \{v^\ell = (v_i^\ell); v_i^\ell \in H^\ell(\Omega^\ell)\} = (H^1(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\tau^\ell = (\tau_{ij}^\ell); \tau_{ij}^\ell = \tau_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))_{\mathbb{S}}^{d \times d}, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \{\tau^\ell = (\tau_{ij}^\ell); \tau_{ij}^\ell \in \mathcal{H}^\ell(\Omega^\ell), \operatorname{div} \tau^\ell \in H^\ell\}, \end{cases} \quad (1.29)$$

Les espaces $H^\ell, H_1^\ell, \mathcal{H}^\ell, \mathcal{H}_1^\ell$, sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par :

$$\begin{cases} (u^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u^\ell \cdot v^\ell dx; \\ (u^\ell, v^\ell)_{H_1^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u^\ell \cdot v^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \nabla u^\ell \cdot \nabla v^\ell dx; \\ (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \cdot \tau^\ell dx; \\ (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \cdot \tau^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} \sigma^\ell \cdot \operatorname{div} \tau^\ell dx. \end{cases} \quad (1.30)$$

ε et div sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par :

$$\nabla u^\ell = (u_{i,j}^\ell), \quad \varepsilon(u^\ell) = (\varepsilon_{i,j}(u^\ell)), \quad \varepsilon_{i,j}(u^\ell) = \frac{1}{2} (u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell); \forall u^\ell \in H_1^\ell,$$

$$\operatorname{div} \sigma^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell), \quad \forall \sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell.$$

Les normes sur les espaces $H^\ell, H_1^\ell, \mathcal{H}^\ell, \mathcal{H}_1^\ell$, sont notées par $\|\cdot\|_{H^\ell}, \|\cdot\|_{H_1^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$, respectivement. Puisque la frontière Γ^ℓ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons la notation v^ℓ pour désigner la trace de v^ℓ sur Γ^ℓ et nous notons par v_ν^ℓ et v_τ^ℓ les composantes normales et tangentielles de v^ℓ sur la frontière données par :

$$v_\nu^\ell = v^\ell \cdot \nu^\ell, \quad v_\tau^\ell = v^\ell - v_\nu^\ell \cdot \nu^\ell,$$

Soit H'_{Γ^ℓ} est un dual de $H_{\Gamma^\ell} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)^d$ et soit $(\cdot, \cdot)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}$ désigner l'appariement de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ} . Pour chaque élément $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, soit $\sigma^\ell \nu^\ell$ est un élément H'_{Γ^ℓ} donne par :

$$(\sigma^\ell \nu^\ell, v^\ell)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell} = (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{div} \sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell}$$

Désigne par v_ν^ℓ et v_τ^ℓ la trace normale et la trace tangential de $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, respectivement. Si σ^ℓ est continûment différentiable sur $\Omega^\ell \cup \Gamma^\ell$, tel que :

$$\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell, \quad \sigma_\tau^\ell = \sigma^\ell \nu^\ell - \sigma_\nu^\ell \cdot \nu^\ell,$$

$$(\sigma^\ell \nu^\ell, v^\ell)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da,$$

pour tous $v^\ell \in H_1^\ell$, où da est un élément de mesure de surface. Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (2.1)-(2.11), nous introduisons pour la domaine de lient de l'ensemble :

$$\mathcal{Z} = \{\vartheta \in L^\infty(0, T, L^2(\Gamma_3)); 0 \leq \vartheta(t) \leq 1, \forall t \in [0, T], p.p. \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

l'espace des déplacements admissibles V^ℓ est un sous-espace fermé de H_1^ℓ défini par :

$$V^\ell = \{v^\ell \in H_1^\ell; v^\ell = 0, \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ^ℓ telle que :

$$\|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \|v^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (1.31)$$

Sur V^ℓ nous considérons le produit scalaire donné par :

$$(u^\ell, v^\ell)_{V^\ell} = (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall u^\ell, v^\ell \in V^\ell, \quad (1.32)$$

et soit $\|\cdot\|_{V^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} = \|v^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (1.33)$$

Par l'inégalité de *Korn*, il vient que $\|\cdot\|_{V^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}$ sont des normes équivalentes sur V^ℓ et ainsi $(V^\ell, \|\cdot\|_{V^\ell})$ est un espace de *Hilbert* réel. En outre, par le théorème de trace de *Sobolev*, il existe une constante $c_0 > 0$, dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\|v^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v^\ell\|_{V^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (1.34)$$

Pour le potentiel électrique et le champ de déplacement électrique nous utilisons les espaces :

$$\begin{aligned} E_0^\ell &= L^2(\Omega^\ell), E_1^\ell = H^1(\Omega^\ell), \\ W^\ell &= \{\psi^\ell \in H^1(\Omega^\ell); \psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\}, \\ \mathcal{W}^\ell &= \{D^\ell = (D_j^\ell); D_j^\ell \in L^2(\Omega^\ell); \text{div } D^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}. \end{aligned}$$

respectivement. Puisque $\text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de *Friedrichs-Poincaré* montre qu'il existe une constante $c_F^\ell > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que :

$$\|\nabla \psi^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)^d} \geq c_F^\ell \|\psi^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)}, \quad \forall \psi^\ell \in W^\ell. \quad (1.35)$$

Sur l'espace W^ℓ nous considérons le produit scalaire donné par :

$$(\varphi^\ell, \psi^\ell)_{W^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \nabla \varphi^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx,$$

et soit $\|\cdot\|_{W^\ell}$ la norme associée. En utilisant (1.35) on peut vérifier que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\|\cdot\|_{W^\ell}$ sont deux normes équivalentes sur W^ℓ .

Il en résulte que $(W^\ell, \|\cdot\|_{W^\ell})$ est un espace de Hilbert réel. En outre, par le Sobolev trace théorème, il existe une constante c_0 , ne dépendant que de $\Omega^\ell, \Gamma_a^\ell$ et Γ_3 telle que :

$$\|\xi^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_0 \|\xi^\ell\|_{W^\ell}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (1.36)$$

L'espace $\mathcal{W}^\ell$ est un espace de *Hilbert* réel avec le produit scalaire :

$$(D^\ell, E^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot E^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell \cdot \operatorname{div} E^\ell dx,$$

où $\operatorname{div} D^\ell = (D_{i,i}^\ell)$, et la norme associée $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\ell}$.

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits :

$$V = V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2,$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \quad E_0 = E_0^1 \times E_0^2, \quad E_1 = E_1^1 \times E_1^2,$$

$$W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

les espaces $V, E_1, W, \mathcal{W}$ sont des espaces de *Hilbert* réel dotés des produits scalaires canoniques notée $(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_{E_1}, (\cdot, \cdot)_W, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$. Les normes associés seront désignés par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_W, \|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivement. On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Nous notons par $C([0, T], X)$ et $C^1([0, T], X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes :

$$\|f\|_{C([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^1([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \left\| \dot{f}(t) \right\|_X.$$

Nous notons par $C_c([0, T], X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

Definition 1.2.1 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c([0, T], X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

I- Opérateurs fortement monotones

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans lesquelles la fonctionnelle non différentiable dépend de la solution elle même. Ces dernières sont appelées "*inégalités quasivariationnelles*". Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour ce type de problèmes.

Pour cela, nous considérons un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$ et soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur non linéaire, $J : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f \in X$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasivariationnelle suivante

$$u \in X, (Au, v - u)_X + J(u, v) - J(u, u) \geq (f, v - u)_X \forall v \in X. \quad (1.37)$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que A est fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X; \\ (b) \text{ il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \end{array} \right. \quad (1.38)$$

et la fonctionnelle $J : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } \eta \in X, J(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i sur } X. \\ (b) \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ \quad J(u_1, v_2) - J(u_1, v_1) + J(u_2, v_1) - J(u_2, v_2) \\ \quad \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right. \quad (1.39)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (1.37) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.2.3 *Supposons que les hypothèses (1.38) et (1.39) sont satisfaites. Alors, si $\alpha < m$, pour tout $f \in X$, il existe une solution unique $u \in X$ au problème (1.37). Une démonstration du Théorème se trouve par exemple dans [[14] p.83].*

Dans la troisième partie du mémoire, nous utiliserons un résultat abstrait sur les inéquations quasi-variationnelles d'évolution. Ce résultat concerne les problèmes du type suivant

Trouver $u : [0, T] \longrightarrow X$ tel que

$$(A\dot{u}(t), v - \dot{u}(t))_X + (Bu(t), v - \dot{u}(t))_X + J(u(t), v) - J(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T], \quad (1.40)$$

$$u(0) = u_0. \quad (1.41)$$

La différence entre le problème (1.37) et le problème (1.40) - (1.41) consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maintenant du temps, la dérivée $\dot{u}$ apparaît dans la formulation du problème et par conséquent, une condition initiale, (1.41), est rajoutée.

Pour étudier le problème (1.40) - (1.41), en plus des hypothèses (1.38) et (1.39), nous avons besoin des hypothèses suivantes.

L'opérateur non linéaire $B : X \longrightarrow X$ est de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\exists L_B > 0 \text{ tel que } \|Bu_1 - Bu_2\|_X \leq L_B \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X. \quad (1.42)$$

Aussi, nous supposons que

$$f \in C([0, T]; X), \quad (1.43)$$

$$u_0 \in X. \quad (1.44)$$

Dans l'étude du problème (1.40) - (1.41), nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.2.4 Soient (1.38), (1.39) et (1.42) - (1.44) satisfaites. Alors :

- 1) Il existe une unique solution $u \in C^1([0, T]; X)$ au problème (1.40) - (1.41).
- 2) Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (1.40) - (1.41) correspondant aux données $f_1, f_2 \in C([0, T]; X)$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_X \leq c(\|f_1(t) - f_2(t)\|_X + \|u_1(t) - u_2(t)\|_X) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.45)$$

- 3) Si en plus $f \in W^{1,p}(0, T; X)$ pour $p \in [1, \infty)$, alors la solution satisfait $u \in W^{2,p}(0, T; X)$.

Ce résultat d'existence, d'unicité et de régularité a été prouvé dans [8] et peut être aussi trouvé dans [[9], p.232–236].

Regarde [[15] p.29-31].

Théorème 1.2.5 (Théorème du point fixe de Banach) :

Soit K une partie non vide et fermée de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ une contractante, i.e, $\exists k \in]0, 1[$ tel que :

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq \|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Alors il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$; i.e, possède de un point fixe unique dans K .

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de *point fixe de Banach* que nous présentons ci-dessus.

Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur sont définies récursivement par $\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1})$ pour $n \geq 2$.

Théorème 1.2.6 Sous les mêmes conditions du Théorème 1.2.1, on suppose que Λ^n est une contractante pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Définition 1.2.2 Une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\|a(u, v)\|_H \leq M \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

Définition 1.2.3 Une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$a(u, u) \geq m \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H.$$

Théorème 1.2.7 (Théorème du Lax-Milgram) :

Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in X$ qui satisfait :

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in X. \quad (1.46)$$

De plus, si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle u, u \rangle_H \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle v, v \rangle_H, \quad \forall v \in H. \quad (1.47)$$

II- Sous différentiability

Nous considérons dans tout cette section que X est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée.

Definition 1.2.4 Soit une fonction $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par :

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u) \quad \forall v \in X\}. \quad (1.48)$$

Le crochet $(\cdot, \cdot)$ désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

III- équation différentielle ordinaire

Théorème 1.2.8 (Théorème de Cauchy- Lipschitz) :

Soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ est un véritable espace de Banach et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$ qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X, p.p. t \in [0, T], \\ (b) \text{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(t, \cdot) \in L^p([0, T], X), \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique, $x \in W^{1,p}([0, T], X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad p.p. t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

Definition 1.2.5 S'il est l'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et V est dense dans H , le triplet

$$V \subset H \subset V',$$

s'appelle le triplet de Gelfand, où V' l'espace dual de V .

VI- équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème 1.2.9 Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hémicontinu et monotone satisfaisant :

$$(Av, v)_{V \times V'} \geq w \|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \quad (1.49)$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C (\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V, \quad (1.50)$$

pour des constantes $w > 0$, $C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donné $u_0 \in H$ et $f \in L^2([0, T], V')$, il existe une fonction unique u qui satisfait :

$$u \in L^2([0, T], V) \cap C^1([0, T], H), \quad \dot{u} \in L^2([0, T], V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad p.p.t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

Définition 1.2.6 Soit $u^\ell \in H_1^\ell$. Alors $\epsilon(u^\ell) = 0$ si $u^\ell \in \mathcal{R}^\ell$, i.e

$$\mathcal{R}^\ell = \{u^\ell \in H_1^\ell / \epsilon(u^\ell) = 0\}. \quad (1.51)$$

Théorème 1.2.10 (inégalité de Korn) :

Soit $\mathcal{V}^\ell$ un sous-espace fermé de H_1^ℓ tel que :

$$\mathcal{V}^\ell \cap \mathcal{R}^\ell = \{0\}. \quad (1.52)$$

Alors l'inégalité de Korn est vérifiée sur $\mathcal{V}^\ell$, c'est à dire existe $C > 0$ ne dépendant que Ω^ℓ et $\mathcal{V}^\ell$ tel que :

$$\|\epsilon(u^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq C \|u^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall u^\ell \in \mathcal{V}^\ell. \quad (1.53)$$

V- Inéquation variationnelle d'évolution

Théorème 1.2.11 Soit $V \subset H \subset V'$ est un triplet de Gelfand, K est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V , et soit $a : V \times V' \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique et continue qui satisfait

$$\text{il existe } c_1 > 0 \text{ et } c_0 \text{ tel que } a(u, v) + c_0 \|v\|_H^2 \geq c_1 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2([0, T], H)$, il existe une unique fonction u qui satisfait :

$$u \in H^1([0, T], H) \cap L^2([0, T], V), \quad u(t) \in K, \forall t \in [0, T],$$

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq$$

$$(f(t), v - u(t))_H, \quad \forall u \in K, t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

1.2.5 Lemmes de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type *Gronwall* qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemma 1.2.1 *Soient $m, n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante, et $\phi \in C([0, T], \mathbb{R})$:*

1. Si :

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

2. Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient.

Corollary 1.2.1 *Soit $n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0, T], \mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \phi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemma 1.2.2 *Soient $m, n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0, T], \mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\frac{1}{2} \phi^2(t) \leq \frac{1}{2} a^2 + \int_0^t m(s) \phi(s) ds + \int_0^t n(s) \phi^2(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$|\phi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Chapitre 2

Problème électro-viscoélastique avec frottement

Nous décrivons dans ce chapitre un modèle mathématique dans un processus quasistatique d'un problème de contact entre un corps électro-viscoélastique et une fondation.

Le contact est modélisé par une condition modifiée de compliance normale et une condition électrique régularisée. Le frottement est formulé par une version de la loi de Coulomb. Nous dérivons une formulation variationnelle sous forme de système couplé en terme des champs de déplacement et du potentiel électrique. Aussi, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour le modèle.

2.1 Formulation du problème

Le problème étudié dans ce chapitre entre dans le cadre physique (page 7) présenté dans la première chapitre du mémoire et par conséquent nous utilisons le modèle mathématique (page 8). Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement est électro-viscoélastique du type (1.6) et la condition de contact avec compliance normale est prescrite dans (1.14). Nous considérons les conditions de frottement du type Coulomb (1.19).

Alors, le modèle classique pour ce processus est le suivant :

Problème P . Pour $\ell = 1, 2$, Trouver le champ de déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ de contrainte $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le potentiel électrique $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de déplacement électrique $D^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, tels que :

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.1)$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - B^\ell \nabla \varphi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.2)$$

$$0 = \text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.3)$$

$$q_0^\ell = \text{div } D^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.4)$$

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T], \quad (2.5)$$

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T], \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu] - g), \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \\ \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau([u_\nu] - g) \\ [\dot{u}_\tau] \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau = -p_\tau([u_\nu] - g) \frac{[\dot{u}_\tau]}{\|[\dot{u}_\tau]\|}, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.8)$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (2.9)$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T], \quad (2.10)$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.11)$$

Nous décrivons maintenant les notations dans (2.1)–(2.11) et fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites. D’abord, les équations (2.1) et (2.2) représentent la loi constitutive électro-viscoélastique que nous avons introduite dans (1.6) où $\mathcal{A}^\ell$ et $\mathcal{G}^\ell$ sont les opérateurs de viscosité et d’élasticité, respectivement ; $\mathcal{E}^\ell$ représente le tenseur piézoélectrique, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est son transposé et B^ℓ dénote le tenseur de permittivité électrique. Ensuite, les équations (2.3) et (2.4) sont les équations d’équilibre des champs de contrainte et du déplacement électrique, que nous avons déjà vu dans (1.2) et (1.3). Les conditions (2.5) et (2.6) sont les conditions aux limites de déplacement-traction, tandis que (2.9) représentent les conditions aux limites électriques que nous avons définis (1.11) et (1.12). Le contact avec compliance normale est modélisé par la condition (2.7) qui figure dans (1.14) et le frottement est décrit par la relation (2.8) qui peut être écrite sous la forme (1.18) où $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$, $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$. Finalement, (2.11) est la condition initiale où u_0 est un champ de déplacement donné.

2.2 Formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique P nous supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tels que} \\ \|\mathcal{A}^\ell(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}^\ell} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tels que} \\ (\mathcal{A}^\ell(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ (c) \mathcal{A}^\ell(\cdot, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \mathcal{A}^\ell(x, \cdot) \text{ est continu sur } \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ tels que} \\ \|\mathcal{G}^\ell(x, \varepsilon_1) - \mathcal{G}^\ell(x, \varepsilon_2)\| \leq M_{\mathcal{G}^\ell} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ (b) \mathcal{G}^\ell(\cdot, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (c) \mathcal{G}^\ell(\cdot, 0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Le tenseur de permittivité électrique $B^\ell = (B_{ij}^\ell) : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) B^\ell(x; E) = (B_{ij}^\ell(x) E_j), \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ (b) B_{ij}^\ell = B_{ji}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), 1 \leq i, j \leq d. \\ (c) \text{ Il existe } M_{B^\ell} > 0 \text{ telle que } B_{ij}^\ell(x) E_i \cdot E_j \geq M_{B^\ell} \|E\|^2, \\ \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell) : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}), \forall \tau = (\tau_{jk}) \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ (b) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), 1 \leq i, k, j \leq d. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_\nu > 0 \text{ tels que } |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq M_\nu (|r_1 - r_2|) \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Gamma_3. \\ (b) p_\nu(\cdot, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ (c) p_\nu(x, r) = 0 \quad \forall r \leq 0, p.p.x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_\tau > 0 \text{ tels que } |p_\tau(x, r_1) - p_\tau(x, r_2)| \leq M_\tau (|r_1 - r_2|) \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Gamma_3. \\ (b) \text{ Il existe } m_\tau > 0 \text{ tels que } |p_\tau(x, r)| \leq m_\tau; \forall r \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Gamma_3. \\ (c) p_\tau(., r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ (d) p_\tau(., 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (2.17)$$

On suppose que les forces volumiques f_0^ℓ et les tractions surfaciques f_2^ℓ , et les charges électriques volumiques q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ ont les régularités :

$$f_0^\ell \in W^{1,p}(0, T; H), \quad f_2^\ell \in W^{1,p}\left(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d\right), \quad (2.18)$$

$$q_0^\ell \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in W^{1,p}\left(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)\right), \quad (2.19)$$

Le champ initial des déplacements satisfait :

$$u_0^\ell \in V^\ell, \quad (2.20)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions qu'on utilise dans la suite de ce chapitre :

On définit la fonction $f(t) \in V$ par

$$(f(t), v)_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da, \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \quad (2.21)$$

et la fonction $q : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(q(t), \phi)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \quad (2.22)$$

Les conditions (2.18) et (2.19) impliquent

$$f \in W^{1,p}(0, T; V), \quad q \in W^{1,p}(0, T; W). \quad (2.23)$$

Soit $J : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$J(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu] - g)[v_\nu] da + \int_{\Gamma_3} p_\tau([u_\nu] - g) \|[v_\tau]\| da, \quad (2.24)$$

conditions (2.16) et (2.17) entraînant que l'intégrale (2.24) est bien définie.

A l'aide des formules de *Green* on voit directement que si u et σ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (2.3), (2.5), (2.7) et (2.8) avec (2.24) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div } \sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell.$$

On a

$$\int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell) dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div } \sigma^\ell \cdot v^\ell dx = \int_{\Gamma_1^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da + \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da + \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell.$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\int_{\Omega^1} \sigma^1 \varepsilon(v^1) dx + \int_{\Omega^1} \text{Div } \sigma^1 \cdot v^1 dx = \int_{\Gamma_1^1} \sigma^1 \nu^1 \cdot v^1 da + \int_{\Gamma_2^1} \sigma^1 \nu^1 \cdot v^1 da + \int_{\Gamma_3} \sigma^1 \nu^1 \cdot v^1 da, \quad \forall v^1 \in V^1. \quad (2.25)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\int_{\Omega^2} \sigma^2 \varepsilon(v^2) dx + \int_{\Omega^2} \text{Div } \sigma^2 \cdot v^2 dx = \int_{\Gamma_1^2} \sigma^2 \nu^2 \cdot v^2 da + \int_{\Gamma_2^2} \sigma^2 \nu^2 \cdot v^2 da + \int_{\Gamma_3} \sigma^2 \nu^2 \cdot v^2 da, \quad \forall v^2 \in V^2, \quad (2.26)$$

à addition (2.25) et (2.26)

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div } \sigma^\ell \cdot v^\ell dx = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_1^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (2.3), et (2.5)-(2.8) on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} (-f_0^\ell) \cdot v^\ell dx = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell dx = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell dx =$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell,$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

En suite :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} = (f(t), v)_V + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell.$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da = ?$:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da &= \int_{\Gamma_3} \sigma^1 \nu^1 \cdot v^1 da + \int_{\Gamma_3} \sigma^2 \nu^2 \cdot v^2 da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau (v_\tau^1 - v_\tau^2) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu^1 + v_\nu^2) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau [v_\tau] da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu [v_\nu] da \\ &= - \int_{\Gamma_3} p_\tau ([u_\nu] - g) \frac{[\dot{u}_\tau]}{\|[\dot{u}_\tau]\|} \cdot [v_\tau] da - \int_{\Gamma_3} p_\nu ([u_\nu] - g) \cdot [v_\nu] da, \end{aligned}$$

alors :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da \geq -J(u(t), v) + J(u(t), \dot{u}(t)).$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + J(u(t), v) - J(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad (2.27)$$

et de (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ & \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + \\ & J(u(t), v) - J(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

En utilise la formule de *Green* pour les inconnues électrique du problème ainsi que les conditions (2.4), (2.10) et la définition (2.22) on a :

$$(D^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} + (\text{Div } D^\ell, \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in W^\ell,$$

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div } D^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \phi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in W^\ell.$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} D^1 \cdot \nabla \phi^1 dx + \int_{\Omega^1} \text{Div } D^1 \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_a^1} D^1 \nu^1 \cdot \phi^1 da + \int_{\Gamma_b^1} D^1 \nu^1 \cdot \phi^1 da, \quad \forall \phi^1 \in W^1. \quad (2.29)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} D^2 \cdot \nabla \phi^2 dx + \int_{\Omega^2} \text{Div } D^2 \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_a^2} D^2 \nu^2 \cdot \phi^2 da + \int_{\Gamma_b^2} D^2 \nu^2 \cdot \phi^2 da, \quad \forall \phi^2 \in W^2. \quad (2.30)$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (2.9) :

$$\int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \phi^\ell da = 0,$$

à addition (2.29) et (2.30) on a :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div } D^\ell \cdot \phi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \phi^\ell da.$$

On a d'après (2.4) et (2.10) :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^2 \cdot \phi^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \\ \sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^2 \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da &= 0. \end{aligned}$$

On a d'après (2.22) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^2 \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da = (q(t), \phi)_W.$$

Donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} + (q(t), \phi)_W = 0. \quad (2.31)$$

De (2.2) , on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} =$$

$$(q(t), \phi)_W, \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \quad (2.32)$$

De (2.28) et (2.11), on obtient la formulation variationnelle du problème **P**.

Problème PV. Trouver le champ de déplacements $u = (u^1, u^2) : [0, T] \rightarrow V$, le potentiel électrique $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \rightarrow W$, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + J(u(t), v) - J(u(t), \dot{u}(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = \\ (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (2.34)$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell. \quad (2.35)$$

2.3 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel **PV**. Par exemple regarde [15].

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (2.12)-(2.20), le problème **PV** admet une solution unique $\{u, \sigma, \varphi, D\}$ ayant la régularité suivante :*

$$u \in W^{2,p}(0, T; V), \quad (2.36)$$

$$\varphi \in W^{1,p}(0, T; W), \quad (2.37)$$

Un "quadruple" des fonctions (u, σ, φ, D) qui satisfont (2.1)-(2.2) et (2.33) – (2.35) est appelé solution faible du problème PV. Nous concluons par **Théorème 2.3.1** que, sous les hypothèses (2.12)-(2.20), il existe une unique solution faible du Problème PV. Pour préciser la régularité de la solution faible, notons que les relations constitutives (2.1) et (2.2), les hypothèses (2.12)-(2.15) et la régularité (2.36) et (2.37) montrent que $\sigma \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$, $D \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W})$; de plus, en utilisant (u, σ, φ, D) qui satisfont (2.1), (2.2), (2.33) et (2.34) il s'ensuit que (2.27) et (2.31) sont vérifiées pour tout $v \in V$, $\phi \in W$ et $t \in [0, T]$. Nous prenons $v = \dot{u}(t) \pm z$ où $z \in C_c(\Omega)^d$ dans (2.27) et $\phi \in C_c(\Omega)$ dans (2.31) et utilisons les notations (2.21), (2.22) et (2.24) pour

obtenir

$$\operatorname{Div} \sigma^\ell(t) = -f_0^\ell(t), \quad \operatorname{div} D^\ell(t) = q_0^\ell(t)$$

pour tout $t \in [0, T]$. Il s'ensuit maintenant des régularités (2.18) et (2.19) que $\operatorname{Div} \sigma \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega)^d)$ et $\operatorname{div} D \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega))$ ce qui montre que

$$\sigma \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H}), \quad (2.38)$$

$$D \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{W}). \quad (2.39)$$

Nous concluons que la solution faible (u, σ, ϕ, D) du problème de contact piézoélectrique PV possède la régularité (2.36)-(2.39).

Preuve. La démonstration du **théorème 2.3.1** sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe.

Nous supposons dans la suite de cette section que (2.12)-(2.20) sont vérifiés, C désigne une constante positive qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau$, et L dont la valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Dans la première étape nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ de déplacement, dans lequel $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ est donné.

Problème $\mathbf{PV}_\eta^u$. Trouver le champ des déplacements $u_\eta = (u_\eta^1, u_\eta^2) : [0, T] \rightarrow V$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_\eta^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_\eta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_\eta^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ \quad + (\eta(t), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_\eta^\ell(t)))_{\mathcal{H}} + J(u_\eta(t), v) - J(u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)) \\ \quad \geq (f(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V, \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

$$u_\eta^\ell(0) = u_0^\ell. \quad (2.41)$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemma 2.3.1 *Il existe une unique solution $u_\eta \in C^1(0, T; V)$ au problème (2.40)-(2.41).*

De plus, si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (2.40)-(2.41) correspondantes aux données $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$ alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\| \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \|_V \leq c(\| \eta_1 - \eta_2 \|_{\mathcal{H}} + \| u_1(t) - u_2(t) \|_V) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.42)$$

Preuve. Nous allons appliquer le **Théorème 1.2.4** dans le cas de l'espace de Hilbert $X = V$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée $\|\cdot\|_V$ définies par (1.32) et (1.33) dans le première chapitre. Nous utilisons le Théorème de représentation de *Riesz-Fréchet* pour définir les opérateurs $A : V \longrightarrow V$, $B : V \longrightarrow V$ et la fonction $f_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ par les égalités

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (2.43)$$

$$(Bu, v) = (\mathcal{G}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (2.44)$$

$$f_\eta(t), v) = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (2.45)$$

pour tout $u, v \in V$ et $t \in [0, T]$. Il s'ensuit des hypothèses (2.12) et (2.13) que les opérateurs A et B satisfont les conditions (1.38) et (1.42), respectivement. Nous utilisons (1.34) pour voir que la fonctionnelle J définie dans (2.24) satisfait la condition (1.39) (a). Moyennant (2.16) - (2.17) et (1.34) encore une fois nous obtenons

$$J(u_1, v_2) - J(u_1, v_1) + J(u_2, v_1) - J(u_2, v_2) \leq 0,$$

qui montre que la fonctionnelle J vérifie la condition (1.39)(b) sur $X = V$.

De plus, en utilisant (2.18) il est facile de voir que f défini par (2.21) satisfait $f \in W^{1,p}(0, T; V)$ et, prenant en considération que $\eta \in C([0, T]; H)$, nous concluons de (2.45) que $f_\eta \in C([0, T]; V)$. Finalement, notons que (2.20) montre que la condition (1.44) est satisfaite aussi.

En utilisant maintenant (2.43)–(2.45) nous remarquons que le Lemme 2.3.1 est une conséquence directe du **Théorème 1.2.4** 1), 2); ce qui achève la preuve.

Ensuite, nous utilisons (2.45) pour voir que si $\eta \in W^{1,p}(0, T; H)$ alors $f_\eta \in W^{1,p}(0, T; V)$; donc, en utilisant le **Théorème 1.2.4** 3), nous notons que le Lemme 2.3.1 peut être complété le résultat de régularité suivant.

$$\eta \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H}) \implies u_\eta \in W^{2,p}(0, T; V). \quad (2.46)$$

Dans l'étape suivante nous utilisons la solution $u_\eta \in C^1([0, T], V)$ obtenue dans le Lemme 2.3.1 pour construire le problème variationnel suivant.

Problème PV_η^φ . Trouver le potentiel électrique $\varphi_\eta =: [0, T] \rightarrow W$ tels que :

$$(\mathcal{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_W = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \quad (2.47)$$

Pour que le problème PV_η^φ soit bien posé on a le résultat suivant.

Lemma 2.3.2 *Il existe une unique solution $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$ qui satisfait (2.47). De plus, si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont deux solutions de (2.47) correspondants à $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; H)$ alors il existe $c > 0$ tel que*

$$\| \varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t) \|_W \leq c \| u_{\eta_1} - u_{\eta_2} \|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.48)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Nous utilisons le Théorème de représentation de Riesz pour définir l'opérateur $A_\eta(t) : W \longrightarrow W$ par

$$(A_\eta(t)\varphi, \xi)_W = (\mathcal{B} \nabla \varphi, \nabla \xi)_W - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla \xi)_W \quad (2.49)$$

Pour tout $\varphi, \xi \in W$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in W$; nous utilisons les hypothèses (2.14) et (2.20) pour trouver

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_{\mathcal{B}} \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_W^2 \quad (2.50)$$

D'un autre côté, en utilisant de nouveau (2.14), (2.15) et (2.20) nous avons

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \xi)_W \leq c_{\mathcal{E}} \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_W \| \xi \|_W \quad \forall \xi \in W, \quad (2.51)$$

ce qui implique que

$$\| A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2 \|_W \leq c_{\mathcal{E}} \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_W. \quad (2.52)$$

Les inégalités (2.50) et (2.52) montrent que l'opérateur $A_\eta(t)$ est fortement monotone et de Lipschitz sur W ; donc, en utilisant le théorème de *Lax-Milgram* sur les égalités variationnelles, il s'ensuit qu'il existe un unique élément $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que

$$A_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t). \quad (2.53)$$

Nous combinons maintenant (2.49) et (2.53) pour déduire que $\varphi_\eta(t) \in W$ est l'unique solution de l'équation variationnelle (2.47).

Nous prouvons maintenant que $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$. A cette fin, considérons $t_1, t_2 \in [0, T]$ et, pour raison de simplicité, nous écrivons $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i, u_{\eta\nu}(t_i) = u_i, q(t_i) = q_i$, pour $i = 1, 2$. Moyennant (2.47), (2.14), (2.15) et (2.20) nous dérivons l'inégalité

$$m_{\mathcal{B}} \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_W^2 \leq c_{\mathcal{E}} \| u_1 - u_2 \|_V \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_W + \| q_1 - q_2 \|_W \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_W, \quad (2.54)$$

donc

$$\| \varphi_1 - \varphi_2 \|_W \leq c(\| u_1 - u_2 \|_V + \| q_1 - q_2 \|_W) \quad (2.55)$$

où c est une constante positive. Notons aussi que les hypothèses (2.19) combinées avec la définition (2.22) impliquent que $q \in W^{1,p}(0, T; W)$. Donc, puisque $u_\eta \in C^1([0, T]; V)$, L'inégalité (2.55) implique que $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0, T; W)$.

Considérons maintenant l'opérateur $\Lambda : C([0, T]; \mathcal{H}) \longrightarrow C([0, T]; \mathcal{H})$ défini par

$$\Lambda\eta(t) = \mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t) \quad \forall \eta \in C([0, T]; \mathcal{H}), t \in [0, T]. \quad (2.56)$$

Dans la dernière étape, nous montrons que l'opérateur Λ possède un point fixe.

Lemma 2.3.3 *Il existe un unique élément $\eta^* \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$.*

Démonstration. Soit $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; H)$ et, pour simplicité, nous utilisons les notations u_i et φ_i pour les fonctions u_{η_i} et φ_{η_i} obtenues dans les Lemmes 2.3.2 et 2.3.1, pour $i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$, en utilisant (2.56) et (2.15) nous obtenons

$$\| \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) \|_{\mathcal{H}} \leq c \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \|_W$$

et, gardant à l'esprit (2.48), nous trouvons que

$$\| \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) \|_{\mathcal{H}} \leq c \| u_1(t) - u_2(t) \|_V. \quad (2.57)$$

D'un autre côté, puisque

$$u_i(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_i(s) ds$$

nous obtenons

$$\| u_1(t) - u_2(t) \|_V \leq \int_0^t \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V ds. \quad (2.58)$$

Nous remplaçons cette inégalité dans (2.42), pour obtenir

$$\| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V \leq c (\| \eta_1(t) - \eta_2(t) \|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V ds).$$

Il s'ensuit maintenant d'un argument de type *Gronwall* que

$$\int_0^t \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V ds \leq c \int_0^t \| \eta_1(s) - \eta_2(s) \|_{\mathcal{H}} ds, \quad (2.59)$$

Combinons maintenant les inégalités (2.57)–(2.59) pour obtenir

$$\| \Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t) \|_{\mathcal{H}} \leq c \int_0^t \| \eta_1(s) - \eta_2(s) \|_{\mathcal{H}} ds.$$

Réitérant l'inégalité précédente n fois, nous déduisons

$$\| \Lambda^n \eta_1(t) - \Lambda^n \eta_2(t) \|_{\mathcal{H}} \leq \frac{c^n}{n!} \int_0^t \| \eta_1(s) - \eta_2(s) \|_{\mathcal{H}} ds \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; \mathcal{H}).$$

La dernière inégalité montre que pour n suffisamment grand, l'opérateur Λ^n est une contraction sur l'espace de Banach $C([0, T]; \mathcal{H})$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$ et donc il existe un unique élément $\eta^* \in C([0, T]; \mathcal{H})$. La régularité $\eta^* \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$ découle de

la régularité $\varphi_{\eta^*} \in W^{1,p}(0, T; W)$ obtenue dans le Lemme 2.3.2, combinée avec la définition (2.56) de l'opérateur Λ .

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le Théorème 2.3.1.

Existence. Soit $\eta^* \in W^{1,p}(0, T; \mathcal{H})$ le point fixe de l'opérateur Λ , et soit u_{η^*} , φ_{η^*} les solutions des problèmes PV_{η}^u et PV_{η}^{φ} respectivement pour $\eta = \eta^*$. Il s'ensuit de (2.56) que $\mathcal{E}^* \nabla \varphi_{\eta^*} = \eta^*$ et donc (2.40), (2.41) et (2.47) impliquent que $(u_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*})$ est une solution du problème PV. La régularité (2.36) et (2.37) s'ensuit des Lemmes 2.3.2 et 2.3.3 combinés avec (2.46).

Unicité. L'unicité de la solution découle de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ , donné par le Lemme 2.3.3. En effet, soit (u, φ) solution du problème variationnel PV et soit

$$\eta = \mathcal{E}^* \nabla \varphi, \quad (2.60)$$

il s'ensuit de (2.40) combinée avec (2.56) que u est solution du problème PV_{η}^u , et puisque par le Lemme 2.3.1 ce problème possède une solution unique notée u_{η} , nous avons

$$u = u_{\eta}. \quad (2.61)$$

De plus, φ satisfait l'égalité donc φ est solution du Problème PV_{η}^{φ} . Mais ce dernier admet une solution unique par le Lemme 2.3.2, donc nous concluons que

$$\varphi = \varphi_{\eta}. \quad (2.62)$$

Il résulte de (2.60), (2.62) et (2.56) que $\Lambda \eta = \eta$ donc η est un point fixe de l'opérateur Λ . D'après le Lemme 2.3.3 il s'ensuit que

$$\eta = \eta^*. \quad (2.63)$$

L'unicité de la solution résulte maintenant à partir de (2.61)–(2.63).

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de contact avec compliance normale entre deux corps électro-viscoélastique en piézoélectricité.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Comme la frontière des corps et donné de problème ont de bonne régularité. Donc, la solution du problème électro-mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution de problème précédent par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle d'évolution, inéquation variationnelle d'évolution du type parabolique, équation différentielle et point fixe.

Bibliographie

- [1] A. Ahmed Abdelaziz, Etude théorique de quelques problèmes dynamiques en contact avec endommagement, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, (2015)
- [2] P. Bisenga, F. Lebon, F. Maceri, The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support, in Contact Mechanics, J.A.C. Martins and Manuel D.P. Monteiro Marques (Eds.), Kluwer, Dordrecht, (2002), 347–354.
- [3] M. Fremond, Adhérence des solides, J. Mécanique et application, 6(3) (1987), 323-335.
- [4] T. Hadj ammar, Etude théorique et numérique d'un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables, Mémoire de Magister, Univ. Ouargla., (2006).
- [5] T. Hadj ammar, Etude Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, (2015)
- [6] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, Mixed finite element approximation for a contact problem in electro-elasticity, Kuwait J. Sci., 42 (2015), 31-54.
- [7] T. Hadj ammar and B. Benabderrahmane, Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 57 (2012), No. 3, 427-444.
- [8] W. Han, M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, SIAM Journal of Numerical Analysis 38 (2000), 556–579.
- [9] W. Han, M. Sofonea, Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity, Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, 2002.
- [10] A. Klarbring, A. Mikelic and M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, Int.J. Eng. Sci. 26(1988), 811-832.

- [11] F. Maceri and P. Bisegna, The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support, *Math. Comp. Modelling*, 28 (1998), 19–28.
- [12] M. Sofonea, El H. Essoufi, A Piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction, *Mathematical Modelling and Analysis* 9 (2004), 229–242.
- [13] M. Sofonea, El H. Essoufi, Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body, *Adv. Math. Sci. Appl.* 14 (2004), 613–631.
- [14] M. Sofonea, A. Matei, Variational inequalities with applications, A study of anti-plane frictional contact problems, Springer, New York (à paraître).
- [15] L. Zhor, Analyse de Quelques Problèmes de Contact avec Frottement et Adhésion, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, (2008).

Résumé :

Cette mémoire contient une Etude théorique d'un problème de contact avec frottement entre deux corps piézoélectricité. Cette étude se compose en deux chapitres, Le premier chapitre considère la formulation mathématique de problème de contact et rappel d'analyse. Le deuxième chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section considère la forme mathématique cet problème noté par P , par l'utilisation de la forme de *Green* on obtient aussi une forme variationnelle PV dans le deuxième section. Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème.

Mots-Clés :

piézoélectricité, compliance normale, inéquation d'évolution, point fixe, existence, unicité.

Abstract :

This memory contains a study theoretically with friction contact enter two piezoelectricity body. This study consists of two chapters, The first chapter considers the mathematical formulation of contact problem and return analysis. The second chapter is divided into three sections. The first section considers the mathematical form this problem noted by P , by using the form of *Green* is also obtained a variational form PV in the second section. Finally, in the third section, we study the existence and uniqueness of a weak solution of the problem.

Key-words :

piezoelectricity, normal compliance, evolutionary inequality, fixed point, existence, uniqueness.

ملخص :

هدف هذه المذكرة هو الدراسة النظرية لحركة جسمين في ميدان الكهربائية الضغطية. المذكرة مكونة من فصلين, تطرقنا في الفصل الأول إلى بعض المسائل الرياضية اللازمة في هذه المذكرة, أما في الفصل الثاني مكون من ثلاث أجزاء. الجزء الأول نعتبر فيه الشكل الرياضي لهذه الدراسة و يرمز له بالرمز P . ثم بإستعمال شكل قرين في الجزء الثاني نحصل على شكل مختلط للمسألة P و يرمز له بالرمز PV . و في الجزء الثالث و الأخير قمنا بدراسة وجود و وحدانية الحل الضعيف للمسألة المطروحة.

الكلمات المفتاحية :

الكهربائية الضغطية, الإمتثال القياسية, تطور متباينة, النقطة الثابتة, الوجود, الوحدانية.