

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche**  
**Scientifique**



**UNIVERSITÉ D'EL-OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE**

**Mémoire de fin d'étude**

**LICENCE ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation  
numérique

Présenté par : **LAIB Bachir**

**OBAIDI Houssam Eddine**

**OTMANI Saduk**

**Thème**

**Introduction aux espaces de Sobolev**

Soutenu le ...juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. FAREH Abdel Fatah  
Mr. MENACEUR Bakar  
Mr. DOUDI Nadjat

MA (A) Univ. El Oued Président  
MC (B) Univ. ElOued examinateur  
MA (A) Univ. ElOued Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

# *Remerciements*

*Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.*

*Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur "**DOUDI NADJET** ", à l'université d' **El-Oued**, a qu'elle nous voudrions exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.*

*Ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'**El-oued** .*

*Nous remercions vivement nos familles surtout nos parents pour l'aide et le soutien moral.*

*Nous tenons a remercier tous les étudiants de La promotion 2013/2014 de Math de l'université d'**El-oued**.*

## Notations générales

|                                     |                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\partial$                          | : la dérivée partielle.                                                                                                                                            |
| $\partial_j$                        | : la dérivée partielle par rapport à la $j^{ième}$ composante.                                                                                                     |
| $E'$                                | : espace dual de $E$ .                                                                                                                                             |
| $\frac{\partial u}{\partial \nu}$   | : la dérivée directionnelle suivant la normale l'extérieure.                                                                                                       |
| $\nabla u$                          | : $\left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T = \overrightarrow{gradu}$ .           |
| $\Omega$                            | : ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ .                                                                                                                                 |
| $\langle, \rangle$                  | : produit scalaire.                                                                                                                                                |
| $p.p$                               | : presque partout.                                                                                                                                                 |
| $C^n$                               | : espace des fonctions de classe $C^n$ .                                                                                                                           |
| $L^p(\Omega)$                       | : $\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_{\Omega}  f ^p < +\infty\}$ .                                                             |
| $W^{m,p}(\Omega)$                   | : $\{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p \text{ pour tout } \mathbb{N}^N \text{ t.q. }  \alpha  \leq m\}$ .                                                      |
| $\ \cdot\ $                         | : la norme.                                                                                                                                                        |
| $C^k(\Omega)$                       | : fonctions $k$ fois continûment différentiables sur $\Omega$ ( $k$ entier $\geq 0$ ).                                                                             |
| $ \cdot $                           | : norme Hilbertienne                                                                                                                                               |
| $D^\alpha u$                        | : $\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \times \dots \times \partial x_N^{\alpha_N}} u, \quad  \alpha  = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . |
| $\Delta u$                          | : $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{Laplacien de } u$ .                                                                                    |
| $L^\infty(\Omega)$                  | : $\{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C \text{ tel que }  u(x)  \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$ .                                          |
| $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ | : la dérivée seconde de $u$ par rapport à $x$ .                                                                                                                    |
| $u''$                               | : la dérivée seconde de $u$ par rapport à $t$ .                                                                                                                    |
| $\max_{x \in A} f(x)$               | : le maximum de la fonction $f$ sur l'ensemble $A$ .                                                                                                               |
| $\min_{x \in A} f(x)$               | : le minimum de la fonction $f$ sur l'ensemble $A$ .                                                                                                               |
| $\inf$                              | : la borne inférieure.                                                                                                                                             |
| $\sup$                              | : la borne supérieure.                                                                                                                                             |

# Table des matières

|                                                                                     |          |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Introduction générale</b>                                                        | <b>1</b> |
| <b>1 Rappel d'analyse fonctionnel</b>                                               | <b>2</b> |
| 1.1 Espaces métriques . . . . .                                                     | 2        |
| 1.2 Produit scalaire dans un espace vectoriel . . . . .                             | 2        |
| 1.3 Définitions, propriétés élémentaires et projection sur un convexe fermé . . . . | 3        |
| 1.3.1 Espace normé . . . . .                                                        | 3        |
| 1.3.2 Espace complet . . . . .                                                      | 3        |
| 1.3.3 Espace pré-hilbertien . . . . .                                               | 3        |
| 1.3.4 Espace de Hilbert . . . . .                                                   | 4        |
| 1.3.5 Espace de Banach . . . . .                                                    | 4        |
| 1.4 Théorème de Stampacchia . . . . .                                               | 5        |
| 1.5 Dual Topologique . . . . .                                                      | 6        |
| 1.6 Espace des fonctions tests $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ . . . . .            | 6        |
| 1.6.1 Espace des fonctions tests $\mathcal{D}$ . . . . .                            | 6        |
| 1.6.2 Espace des distributions $\mathcal{D}'$ . . . . .                             | 6        |
| 1.7 Formule de Green . . . . .                                                      | 7        |
| 1.8 Théorème de point fixe de Banach . . . . .                                      | 8        |
| 1.9 Théorème de Riesz . . . . .                                                     | 8        |
| 1.10 Identité du parallélogramme . . . . .                                          | 8        |
| 1.11 Théorème de Lax-Milgram . . . . .                                              | 8        |
| 1.12 Espaces réflexifs . . . . .                                                    | 10       |
| 1.13 Espaces séparables . . . . .                                                   | 11       |

|          |                                                  |           |
|----------|--------------------------------------------------|-----------|
| <b>2</b> | <b>Espaces de Sobolev</b>                        | <b>12</b> |
| 2.1      | Espace $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ | 12        |
| 2.2      | Propriétés                                       | 14        |
| 2.3      | Espaces de Sobolev $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$  | 16        |
| 2.4      | Espaces de sobolev $H^m(\Omega)$                 | 16        |
| 2.5      | Espace de sobolev $W^{1,p}$                      | 17        |
| 2.5.1    | Motivation                                       | 17        |
| 2.5.2    | Propriétés                                       | 18        |
| 2.6      | Corollaire (Dérivation d'un produit)             | 19        |
| 2.7      | Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$                  | 20        |
| 2.8      | L'espace $W_0^{1,p}(I)$                          | 21        |
| 2.9      | Propriété (inégalité de Poincaré)                | 22        |
| <b>3</b> | <b>Etude de quelques problèmes aux limites</b>   | <b>23</b> |
| 3.1      | Exemples de problèmes variationnelles            | 23        |
| 3.1.1    | Problème de Dirichlet                            | 23        |
| 3.1.2    | Problème de Dirichlet non homogène               | 27        |
| 3.1.3    | Formulation faible et formulation variationnelle | 28        |
| 3.2      | Exemples                                         | 29        |

## Introduction générale

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergueï Lvovitch Sobolev.

L'origine de la théorie des espaces de Sobolev remonte aux travaux effectués par Sobolev dans les années 40.

Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme  $L^p$  de la fonction elle-même ainsi que de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet. Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach.

Les espaces de Sobolev sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions de ces équations, appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues partiellement dérivables au sens classique.

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à donner quelques notions préliminaires d'analyse fonctionnel et quelques définitions et théorèmes principaux comme théorème de Lax-Milgram.

Le second chapitre, nous le consacrons à présenter l'espace  $L^p$  puis les espaces de Sobolev  $H^m$  et  $W^{m,p}$  avec la relation entre ces espaces et quelques propriétés élémentaires importantes.

Le troisième chapitre contient quelques exemples pratiques des espaces de Sobolev, en passant par la formulation variationnelle ou la formulation faible pour trouver l'espace qui contient la solution unique en utilisant le théorème de Lax-Milgram.

# Chapitre 1

## Rappel d'analyse fonctionnel

### 1.1 Espaces métriques

Soit  $E$  un ensemble. On veut définir sur  $E$  une notion de “proximité” qui permette de donner un sens à la convergence des suites de points de  $E$ .

**Définition 1.1.1** On appelle distance sur un ensemble  $E$  une fonction  $d$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}^+$  satisfaisant pour tout  $x$ , tout  $y$  et tout  $z$  de  $E$

- 1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- 3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

**Définition 1.1.2** On appelle espace métrique un couple  $(E, d)$  où  $E$  est un ensemble et  $d$  une distance sur  $E$  [7].

### 1.2 Produit scalaire dans un espace vectoriel

**Définition 1.2.1** Soit  $E$  un espace vectoriel réel, une application  $\langle ., . \rangle : E \times E \mapsto \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ , est appelée un produit scalaire. Si elle possède les propriétés suivantes:

- 1) Elle est bilinéaire.
- 2) Elle est symétrique.  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
- 3) Elle est positive.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ .
- 4) Elle est définie.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ .

**Définition 1.2.2** Soit  $E$  un espace vectoriel complexe, une application  $\langle ., . \rangle : E \times E \mapsto \mathbb{C}$ .  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ , est appelée un produit scalaire (parfois produit scalaire hermitien). Si elle possède les propriétés suivantes:

- 1) Elle est sesquilineaire.
- 2) Elle est hermitienne.  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .
- 3) Elle est positive.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ .
- 4) Elle est définie.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$  [9].

## 1.3 Définitions, propriétés élémentaires et projection sur un convexe fermé

### 1.3.1 Espace normé

Soit  $\Omega$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (pour simplifier). Une norme sur  $\Omega$  est une fonction  $\|\cdot\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant pour tous  $x, y \in \Omega$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  les propriétés suivantes:

- $\|x\| \geq 0$ .
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (l'inégalité triangulaire).

**Définition 1.3.1** Un espace normé  $(\Omega, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel  $\Omega$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  [11].

### 1.3.2 Espace complet

**Définition 1.3.2** On dit que  $(E, d)$  est complet si toute suite de Cauchy de  $E$  est convergente vers  $x \in E$  [11].

### 1.3.3 Espace pré-hilbertien

**Définition 1.3.3** Un espace vectoriel réel ou complexe  $H$  est un espace préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire  $\langle ., . \rangle_H$ .

**Proposition 1.3.1** (*Inégalité de Cauchy Schwarz*)

Dans un espace préhilbertien  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$

$$|\langle x, y \rangle_H| \leq \|x\|_H \|y\|_H \quad x, y \in H$$

[4].

### 1.3.4 Espace de Hilbert

**Définition 1.3.4** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel  $H$  muni d'un produit scalaire  $\langle u, v \rangle$  et qui est complet pour la norme  $\langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ .*

**Exemple 1.3.1**

$$L^2(\Omega) = \{f \in \Omega \rightarrow \mathbb{R} : |f|^2 \in L^1(\Omega)\}$$
$$L^1(\Omega) = \left\{ f \in \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f(x)| dx < +\infty \right\}$$

$L^2(\Omega)$  muni d'un produit scalaire:  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$  est un espace de Hilbert [5].

### 1.3.5 Espace de Banach

**Définition 1.3.5** *Un espace de Banach est un espace normé complet [5].*

**Remarque 1.3.1** *La figure suivante présente la relation entre l'espace de Banach, Hilbert, préhilbertien et vectoriel normé.*

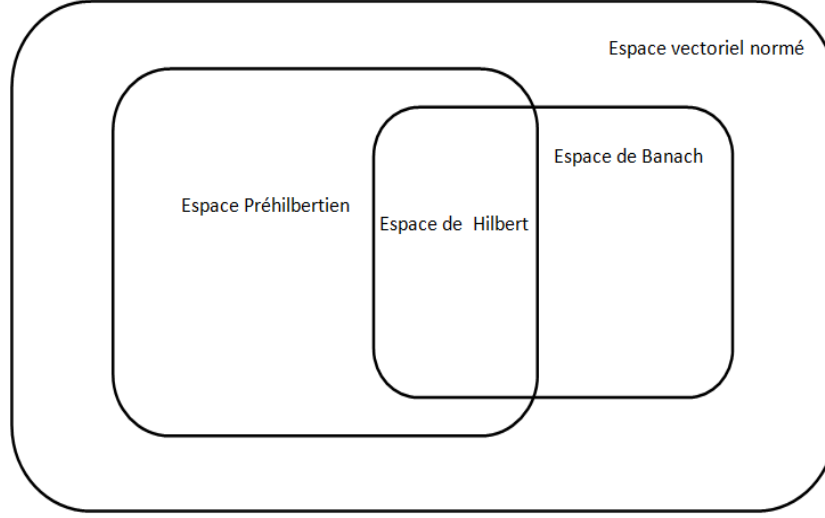


Figure 1.2: La relation entre les espaces.

## 1.4 Théorème de Stampacchia

**Définition 1.4.1** On dit qu'une forme bilinéaire  $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  est:

Continue: S'il existe une constante  $C$  telle que

$$|a(u, v)| \leq C |u| |v|, \forall u, v \in H$$

Coercive: S'il existe une constante  $M > 0$  telle que

$$|a(v, v)| \geq M |v|^2, \forall v \in H$$

**Théorème 1.4.1** (De Stampacchia) Soit  $a(.,.)$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H$ .

Soit  $K$  un convexe, fermé et non vide de  $H$ . Etant donné  $\varphi \in H'$ , il existe  $u \in K$  unique tel que

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle, \forall v \in K.$$

De plus, si  $a$  est symétrique. Alors  $u$  est caractérisé par la propriété

$$u \in K; \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

[5].

## 1.5 Dual Topologique

Le dual de  $H$  est l'ensemble des formes linéaires continues sur  $H$ . On le note par  $H'[2]$ .

## 1.6 Espace des fonctions tests $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

### 1.6.1 Espace des fonctions tests $\mathcal{D}$

Choisissons un espace des fonctions tests qui présente toutes les caractéristiques nécessaires aussi bien physiques que mathématiques.

**Définition 1.6.1** *Les fonctions tests  $x \mapsto \phi(x)$  sont définies pour  $x$  réel et sont à valeur complexe.*

*On exige qu'elles soient indéfiniment dérivables pour toutes les valeurs de  $x$  (elles sont donc  $C^\infty$ ). Elles sont de plus, nulles en dehors d'un intervalle borné. L'ensemble de ces fonctions est désigné par  $D(\mathbb{R})$  ou simplement  $\mathcal{D}$ .*

*L'ensemble des fonctions tests  $\mathcal{D}$  constitue un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .*

### 1.6.2 Espace des distributions $\mathcal{D}'$

En accord avec la discussion de l'introduction, nous définissons les distributions de la façon suivante.

**Définition 1.6.2** *Une distribution est une application  $T$  qui à chaque fonction de  $D$  fait correspondre un nombre complexe  $T(\phi)$  fini qui vérifie la propriété suivante*

$$T(a\phi + b\psi) = aT(\phi) + bT(\psi)$$

*$\forall a, b \in \mathbb{C}$  pour toutes fonctions tests  $\phi$  et  $\psi$  dans  $D$ .*

**Remarque 1.6.1** *En termes algébriques, on voit donc qu'une distribution  $T$  est une **forme linéaire** sur l'espace vectoriel  $D$ . D'où la notation  $D'$  qui indique que l'espace des distributions est en fait **un espace dual** de l'espace vectoriel des fonctions d'essai (tests) [4].*

## 1.7 Formule de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des EDP. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par partie.

**Théorème 1.7.1** (*Formule d'Ostrogradsky*) Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné de classe  $C^1$  et  $\Gamma$  son bord. Soit  $F$  une fonction de  $C^1(\bar{\Omega})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (un champ de vecteurs). Alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(X)) dX = \int_{\Gamma} F(X) \cdot n(X) d\Gamma$$

La formule de Green est

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}).$$

**Remarque 1.7.1** Dans cette formule,  $n(X)$  est le vecteur unitaire normal à  $\Gamma$  au point  $X$ , dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$ .

Si  $u$  est une fonction assez régulière définie sur  $\bar{\Omega}$ , on note

$$\frac{\partial u}{\partial n}(X) := \nabla u(X) \cdot n(X) \quad X \in \Gamma,$$

la dérivée normale de  $u$  sur  $\Gamma$ .

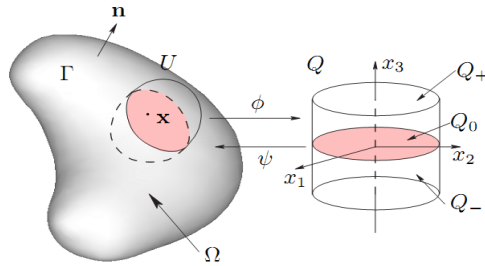


Figure 1.1: L'ouvert  $U \cap \Omega$  est difféomorphe à  $Q_+$ .

Ici  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $X' = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 [1]$ .

## 1.8 Théorème de point fixe de Banach

**Théorème 1.8.1** Soient  $X$  un espace métrique complet et  $S : X \rightarrow X$  une application telle que

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq Kd(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \text{ avec } K < 1. \quad (1.8.1)$$

Alors  $S$  admet un point fixe unique,  $u = Su$  [5].

## 1.9 Théorème de Riesz

**Théorème 1.9.1** Soient  $H'$  le dual topologique de  $H$ . et  $a \in H$ , on note  $\phi_a : x \in H \rightarrow \langle a, x \rangle \in K, IK = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Alors  $\phi : a \in H \rightarrow \phi_a \in H'$  est bien définie, et c'est un isomorphisme de  $H$  sur  $H'$  [7].

## 1.10 Identité du parallélogramme

**Théorème 1.10.1** Si  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien, alors  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace de Hilbert si et seulement si

$$\forall x, y \in E : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

## 1.11 Théorème de Lax-Milgram

**Théorème 1.11.1** Soient  $H$  un espace de Hilbert réel,  $\alpha$  une forme bilinéaire sur  $H$ ,  $L$  une forme linéaire sur  $H$ . On suppose que:

1)  $\alpha$  est continue

$$\forall u, v \in H, |\alpha(u, v)| \leq \|\alpha\| \|u\|_H \|v\|_H.$$

2)  $\alpha$  est coercive, il existe  $a > 0$  tel que

$$\forall u \in H, \alpha(u, u) \geq a \|u\|_H^2.$$

3)  $L$  est continue

$$\forall u \in H, |L(u)| \leq \|L\| \|u\|_H.$$

Alors, il **existe** un **unique**  $u$  dans  $H$  qui vérifie

$$\forall v \in H, \alpha(u, v) = L(v), \quad (1.11.1)$$

et celui-ci vérifie

$$\|u\|_H \leq \frac{\|L\|}{a}.$$

Si de plus  $\alpha$  est symétrique, alors  $u$  est aussi l'unique élément de  $H$  qui minimise la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}\alpha(v, v) - L(v).$$

**Preuve.** Dans le cas symétrique, on peut procéder de deux façons:

- Ou bien on constate que sous les hypothèses du théorème,  $\alpha$  est un produit scalaire sur  $H$ , équivalent au produit scalaire initial. Ainsi  $(H, \alpha)$  est le même espace topologique que  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , et la forme  $L$  est donc continue dans ce nouvel espace de Hilbert. Le théorème est alors juste une reformulation du théorème de représentation de Riesz dans le nouvel espace  $(H, \alpha)$ .

- Ou alors on étudie directement le problème de minimisation de la fonctionnelle  $J$  (c'est d'ailleurs une façon de montrer le théorème de Riesz !) en considérant une suite minimisante et en montrant qu'elle est de Cauchy par l'identité du parallélogramme.

Intéressons-nous au cas non-symétrique. Il nous faut pour cela introduire une reformulation du problème sous la forme d'un opérateur dont on doit montrer l'inversibilité.

Constatons que pour tout  $u \in H$ , la forme  $v \in H \rightarrow \alpha(u, v)$  est continue et donc il existe un unique  $Au \in H$  tel que  $\alpha(u, v) = (Au, v)_H$ , par application du théorème de représentation de Riesz. Il est clair que  $A$  est un opérateur linéaire.

Par hypothèse sur  $\alpha$ , on a  $\forall u \in H, \|Au\|_H \leq \|\alpha\| \|u\|_H$  et donc  $A$  est un opérateur continu. Par ailleurs, on a,

$$(Au, u)_H = \alpha(u, u) \geq a \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H$$

donc

$$\|Au\|_H \geq a \|u\|_H, \quad \forall u \in H$$

Ceci implique en particulier que  $A$  est injectif. D'après le théorème de Riesz, on peut représenter  $L$  par un élément  $l \in H$  et on est maintenant amenés à prouver qu'il existe un  $u \in H$  tel que  $Au = l$ .

Soit  $\rho > 0$ , on introduit l'application  $T : u \in H \rightarrow Tu = u - \rho(Au - l)$  et on voit que notre problème se ramène à l'existence d'un point fixe pour  $T$ . Dans un espace de Hilbert, le résultat sera montré si on prouve que  $T$  est contractante.

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_H^2 &= \|u - v\|_H^2 + \rho^2 \|Au - Av\|_H^2 - 2\rho(u - v, A(u - v))_H \\ &\leq \|u - v\|_H^2 + \rho^2 \|\alpha\|^2 \|u - v\|_H^2 - 2\rho a \|u - v\|_H^2 \\ &= (1 - 2\rho a + \rho^2 \|\alpha\|^2) \|u - v\|_H^2 \end{aligned}$$

En choisissant  $\rho$  suffisamment petit, on voit que  $T$  est bien contractante et le résultat est démontré.

Ce théorème nous donne donc des conditions suffisantes (mais non nécessaires comme on le verra plus tard), pour trouver une solution (unique !) à un problème abstrait de la forme (1.11.1).

Il est instructif de comprendre la traduction de ce résultat en dimension finie, i.e. si  $H = \mathbb{R}^n$ . Dans cas, les hypothèses de continuité sont triviales et l'hypothèse de coercivité devient

$$A + A^t \text{ est symétrique définie positive.}$$

Le théorème devient donc:

$$A + A^t \text{ est SDP} \Rightarrow A \text{ est inversible,}$$

[3]. ■

## 1.12 Espaces réflexifs

**Définition 1.12.1** Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $J$  l'injection canonique de  $E$  dans  $E''$  (muni de la norme dual  $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$ ).

On dit que  $E$  est réflexif si  $J(E) = E''$

Lorsque  $E$  est réflexif on identifie implicitement  $E$  et  $E''$

**Remarque 1.12.1** Il est essentiel d'utiliser  $J$  dans la définition précédente. On peut construire un exemple surprenant d'espace non réflexif  $E$  pour lequel il existe une isométrie surjective de  $E$  sur  $E''$  [6].

## 1.13 Espaces séparables

**Définition 1.13.1** On dit que l'espace de Banach  $E$  est séparable si  $E$  possède une partie dénombrable dense.

**Proposition 1.13.1** Soit  $E$  un espace de Banach tel que  $E'$  soit séparable alors  $E$  est séparable.

**Preuve.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E'^{\mathbb{N}}$  dense dans  $E'$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , Soit  $x_n \in E$  tel que  $\|x_n\| = 1$  et

$$f_n(x_n) \geq \frac{1}{2} \|f_n\|.$$

Soit  $F$  l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  de  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Notons que  $F$  est dénombrable, montrons maintenant que  $F$  est dense dans  $E$ . Pour cela, comme  $F$  est dense dans  $G = (\{x_n, n \in \mathbb{N}\})$  il suffit de montrer que  $G$  est dense dans  $E$

Il suffit de montrer que si

$$f \in E' \text{ vérifie } f(x) = 0 \forall x \in G \text{ alors } f = 0.$$

Donc  $f$  vérifiant la propriété précédente  $\varepsilon > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\|f - f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  on a alors

$$\|f\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|f\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2f_n(x_n) = \frac{\varepsilon}{3} + 2(f_n - f)(x_n) \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\|f_n - f\| \leq \varepsilon$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on déduit que  $f = 0$  [6]. ■

**Corollaire 1.13.1** Soit  $E$  un espace de Banach. Alors  $(E \text{ réflexif et séparable}) \Leftrightarrow (E' \text{ réflexif et séparable})$ . Inversement, si  $E$  est réflexif et séparable, alors  $E'' = J(E)$  est réflexif et séparable; donc  $E'$  est réflexif et séparable

# Chapitre 2

## Espaces de Sobolev

### 2.1 Espace $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$

**Définition 2.1.1** Soit  $p$  un réel de  $[1; +\infty[$ . On définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

$\|\cdot\|_{L^p}$  est une norme .

**Définition 2.1.2** On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C ; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

$\|\cdot\|_{L^\infty}$  est une norme [5].

**Proposition 2.1.1 (Inégalité de Hölder)** Si  $f \in L^p(\Omega, \mu)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega, \mu)$  alors

$$fg \in L^1(\Omega, \mu) \text{ et } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad (2.1.1)$$

**Démonstration.** La conclusion est évidente si  $p = 1$  et si  $p = \infty$ .

Supposons donc que  $1 < p < \infty$ . Rappelons l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \quad \forall a \geq 0, \forall b \geq 0.$$

La démonstration de (2.1.1) est évidente: La fonction  $\log$  étant concave sur  $]0, \infty[$  on a

$$\log \left( \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{p'} \log b^{p'} = \log ab$$

Donc

$$|f(x)| |g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{p'} |g(x)|^{p'} \quad p.p. \quad x \in \Omega$$

Il en résulte que  $fg \in L^1$  et que

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{p'} \|g\|_{L^{p'}}^{p'}$$

Remplaçant donc  $f$  par  $\lambda f$  ( $\lambda > 0$ ) il vient

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda p'} \|g\|_{L^{p'}}^{p'} \quad (2.1.2)$$

On choisit  $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^{p'}}^{\frac{p'}{p}}$  (de manière à minimiser le membre de droite dans (2.1.2)). On obtient alors (2.1.1).

Il suit de l'inégalité de Holder que si  $\mu(\Omega) < \infty$  et  $1 \leq p' \leq p \leq \infty$  alors

$$L^\infty(\Omega, \mu) \subset L^{p'}(\Omega, \mu) \subset L^p(\Omega, \mu) \subset L^1(\Omega, \mu).$$

Si par contre  $\mu(\Omega) = \infty$ , il n'y a en général aucune inclusion entre  $L^p$  et  $L^{p'}$  pour  $p \neq p'$  [6]. ■

**Remarque 2.1.1** Si  $f \in L^\infty$  on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \quad p.p. \quad \text{sur } \Omega$$

En effet, il existe une suite  $C_n$  telle que  $C_n \rightarrow \|f\|_{L^\infty}$  et pour chaque  $n$ ,  $|f(x)| \leq C_n$  p.p. sur  $\Omega$ .

Donc  $|f(x)| \leq C_n$  pour tout  $x \in \Omega \setminus E_n$  avec  $E_n$  négligeable. On pose  $E = \bigcup_n E_n$  de sorte que  $E$  est négligeable et l'on a  $|f(x)| \leq C_n$  pour tout  $n$  et pour tout  $x \in \Omega \setminus E$ . Par conséquent

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \quad \text{pour tout } x \in \Omega \setminus E.$$

[5].

## 2.2 Propriétés

**Théorème 2.2.1**  $L^p$  est un espace vectoriel et  $\|\cdot\|_{L^p}$  est une norme pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Démonstration.** Le cas  $p = 1$  et  $p = \infty$  sont évidents (utiliser la remarque (2.1.1) )  
supposons que  $1 < p < \infty$  et  $f, g \in L^p$  . On a

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) .$$

Par conséquent  $f + g \in L^p$  . D'autre part on a

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int |f + g|^{p-1} |f| + \int |f + g|^{p-1} |g| .$$

Or  $|f + g|^{p-1} \in L^p$  et grâce à l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq \|f + g\|_{L^p}^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|f + g\|_{L^p}^{p-1} \|g\|_{L^p}$$

i.e.  $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$  [5]. ■

**Théorème 2.2.2** (Théorème de convergence dominée de Lebesgue).

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1$ . On suppose que.

a)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  p.p. sur  $\Omega$ .

b) il existe une fonction  $g \in L^1$  telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega$ .

Alors  $f \in L^1(\Omega)$  et  $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$  [5].

**Théorème 2.2.3** (Fischer-Riesz).

$L^p$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Démonstration.** 1) Supposons d'abord que  $p = \infty$  et  $(f_n)$  une suite de Cauchy dans  $L^\infty$ .

Etant donné un entier  $k \geq 1$  donc il existe  $N_k$  tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \text{pour } m, n \geq N_k .$$

Donc il existe  $E_k$  négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k \quad \forall m, n \geq N_k . \quad (2.2.1)$$

Enfin, posant  $E = \bigcup_k E_k$  ( $E$  est négligeable), on voit que pour tout  $x \in \Omega \setminus E$  la suite  $f_n(x)$  est de Cauchy (dans  $\mathbb{R}$ ). Soit  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour  $x \in \Omega \setminus E$ . Passant à la limite dans (2.2.1) quand  $m \rightarrow \infty$  on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k \quad \forall n \geq N_k$$

Donc  $f \in L^\infty$  et  $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq N_k$ . Par conséquent  $\|f - f_n\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ .

2) Supposons maintenant que  $1 \leq p < \infty$ . Soit  $(f_n)$  une suite de Cauchy dans  $L^p$ . Pour conclure, il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans  $L^p$ . On extrait une sous-suite  $(f_{n_k})$  telle que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1$$

On procède comme suit: il existe  $n_1$  tel que  $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2}$  pour  $m, n \geq n_1$ ; En suite on prend  $n_2 \geq n_1$  tel que  $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2}$  pour  $m, n \geq n_2$ , ... etc. On va montrer que  $f_{n_k}$  converge dans  $L^p$ . Pour simplifier les notations on écrit  $f_k$  au lieu de  $f_{n_k}$ , de sorte qu'on a

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1$$

Posons

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

Il vient

$$\|g_n\|_{L^p} \leq 1$$

On déduit du théorème de la convergence monotone que p.p. sur  $\Omega$ ,  $g_n(x)$  converge vers une limite finie notée  $g(x)$  avec  $g \in L^p$ . D'autre part, on a pour  $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \dots \dots \dots |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

Il en résulte que p.p. sur  $\Omega$ ,  $(f_n(x))$  est de Cauchy et converge vers une limite notée  $f(x)$ .

On a p.p. sur  $\Omega$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{pour } n \geq 2$$

Il en résulte que  $f \in L^p$ . Enfin  $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ ; en effet, on a  $|f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$  p.p. et  $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$  majorante intégrable. On conclut grâce au théorème de Lebesgue [5]. ■

## 2.3 Espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ , $H_0^1(\Omega)$

Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\Omega)$ ; elle s'identifie à une distribution sur  $\Omega$ . Encore notée  $v$ , et on peut donc définir ses dérivées  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , en tant que distributions sur  $\Omega$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  n'appartient pas au sous-espace  $L^2(\Omega)$ . On introduit alors la

**Définition 2.3.1** *On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur  $\Omega$  l'espace*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

On munit  $H^1(\Omega)$  du produit scalaire.

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left( uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

et on note

$$\|v\|_{1,\Omega} = (v, v)_{1,\Omega}^{1/2}$$

la norme correspondante [8].

**Définition 2.3.2** *On désigne par  $H_0^1(\Omega)$  l'adhérence de  $D(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .*

## 2.4 Espaces de sobolev $H^m(\Omega)$

On généralise la définition (2.3.1) de l'espace de sobolev  $H^1(\Omega)$ .

**Définition 2.4.1** *Pour tout entier  $m \geq 1$ , on appelle espace de sobolev d'ordre  $m$  sur  $\Omega$  l'espace .*

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}.$$

On munit  $H^m(\Omega)$  du produit scalaire

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \right\} dx$$

et on note

$$\|v\|_{m,\Omega} = (v, v)_{m,\Omega}^{1/2}$$

la norme correspondante [8].

## 2.5 Espace de sobolev $W^{1,p}$

### 2.5.1 Motivation

Considérons le problème suivant. Etant donné  $f \in C([a, b])$  trouver une fonction  $u(x)$  vérifiant

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Une solution classique - ou solution forte - du problème (2.5.1) est une fonction de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$  vérifiant (2.5.1) au sens usuel. Bien entendu (2.5.1) peut être résolu explicitement par un calcul très simple, mais nous ignorerons cet aspect des choses afin d'illustrer la méthode sur cet exemple élémentaire.

On multiplie (2.5.1) par  $\varphi \in C^1([a, b])$  et on intègre par parties; il vient

$$\int_a^b u' \varphi' + \int_a^b u \varphi = \int_a^b f \varphi \quad \forall \varphi \in C^1([a, b]) \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \quad (2.5.2)$$

On note que (2.5.2) a un sens dès que  $\varphi \in C^1([a, b])$  (contrairement à (2.5.1) qui suppose  $u$  deux fois dérivable); en fait il suffirait même d'avoir  $u, u' \in L^1(a, b)$ ,  $u'$  en un sens à préciser. Disons (provisoirement) qu'une fonction  $u$  de classe  $C^1$  qui vérifie (2.5.2) est une solution faible (2.5.1).

**Définition 2.5.1** Soient  $I = ]a, b[$  un intervalle borné ou non et  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(I)$  est défini par

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ tel que } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}$$

On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I)$$

Pour  $u \in W^{1,p}(I)$  on note  $u' = g$ .

**Exemple 2.5.1** Soit  $I = ]-1, 1[$ :

i) La fonction  $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$  appartient à  $W^{1,p}(I)$  pour tout  $1 \leq p \leq \infty$  et que  $u' = H$  où

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Plus généralement une fonction continue sur  $\bar{I}$  et continument dérivable par morceaux sur  $\bar{I}$  appartient à  $W^{1,p}(I)$  pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .

ii) La fonction  $H$  n'appartient pas à  $W^{1,p}$  pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Définition 2.5.2** (Norme de  $W^{1,p}$ )

L'espace  $W^{1,p}$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

(ou par fois si,  $1 \leq p < \infty$  de la norme équivalente  $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}}$ ). L'espace  $H^1$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Est équivalente à la norme de  $W^{1,2}$  [5].

## 2.5.2 Propriétés

a) L'espace  $W^{1,p}$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .

b) L'espace  $W^{1,p}$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

c) L'espace  $H^1$  est un espace de Hilbert séparable.

**Démonstration.** a) Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy dans  $W^{1,p}$ ; donc  $(u_n)$  et  $(u'_n)$  sont des suite de Cauchy dans  $L^p$ . Par conséquent  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^p$  et  $u'_n \rightarrow g$  dans  $L^p$ .

On a

$$\int_I u_n \varphi' = - \int_I u'_n \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

et à la limite

$$\int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

Donc  $u \in W^{1,p}$ ,  $u' = g$  et  $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$ .

b)  $W^{1,p}$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

En effet, l'espace produit  $E = L^p(I) \times L^p(I)$  est réflexif. L'opérateur  $T : W^{1,p} \rightarrow E$  défini par  $Tu = [u; u']$  est une isométrie de  $W^{1,p}$  dans  $E$ ; donc  $T(W^{1,p})$  est un sous-espace fermé de  $E$ . Il en résulte que  $T(W^{1,p})$  est réflexif - et par suite  $W^{1,p}$  aussi.

c)  $W^{1,p}$  est séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

En effet, l'espace produit  $E = L^p(I) \times L^p(I)$  est séparable; donc  $T(W^{1,p})$  est aussi séparable. Par conséquent  $W^{1,p}$  est séparable. ■

**Remarque 2.5.1** *Il convient de retenir de la démonstration précédente le fait suivant: Soit  $(u_n)$  une suite de  $W^{1,p}$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^p$  et  $u'_n$  converge vers une certaine limite dans  $L^p$ , alors  $u \in W^{1,p}$  et  $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$ . lorsque  $1 < p \leq \infty$  (il suffit de savoir que  $(u'_n)$  reste borné dans  $L^p$  pour conclure que  $u \in W^{1,p}$ ).*

*Les fonctions de  $W^{1,p}$  sont << en gros >> des primitives des fonctions de  $L^p$ . Plus précisément on a le .*

**Théorème 2.5.1** *Il existe une constante  $C$  (dépendant seulement de  $|I| \leq \infty$  telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

*Autrement dit  $W^{1,p}$  avec injection continue pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .*

*De plus, lorsque  $I$  est borné on a*

$$l'injection W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I}) \text{ est compacte pour } 1 < p \leq \infty$$

$$l'injection W^{1,1}(I) \subset L^q(I) \text{ est compacte pour } 1 \leq q < \infty$$

[5].

## 2.6 Corollaire (Dérivation d'un produit)

**Corollaire 2.6.1** *Soient  $u, v \in W^{1,p}(I)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors*

$$uv \in W^{1,p}(I) \text{ et } (uv)' = u'v + v'u \quad (2.6.1)$$

*De plus, on a la formule d'intégration par parties*

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' \quad \forall x, y \in \bar{I} \quad (2.6.2)$$

**Démonstration.** Notons d'abord que  $u \in L^\infty$  (théorème 2.3.1) et donc  $uv \in L^p$ . Commençons par le cas où  $1 \leq p < \infty$ ; soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de  $C_c^1(\mathbb{R})$  telle que  $u_n|_I \rightarrow u$  et  $v_n|_I \rightarrow v$  dans  $W^{1,p}(I)$ . Alors  $u_n \rightarrow u$  et  $v_n \rightarrow v$  dans  $L^\infty(I)$  (théorème 2.3.1); par conséquent  $u_n v_n \rightarrow uv$  dans  $L^\infty(I)$  et dans  $L^p(I)$ . On a

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \rightarrow u' v + u v' \text{ dans } L^\infty(I).$$

En appliquant la remarque (2.3.1) on conclut que  $uv \in W^{1,p}(I)$  et que  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Enfin on obtient (2.6.2) en intégrant (2.6.1).

Supposons maintenant que  $u, v \in W^{1,\infty}(I)$  alors

$$uv \in L^\infty(I) \quad \text{et} \quad u'v + uv' \in L^\infty(I),$$

il reste à vérifier que

$$\int_I uv \varphi' = - \int_I (u'v + uv') \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

Pour cela, on fixe un intervalle ouvert borné  $J \subset I$  tel que  $\text{Supp } \varphi \subset J$ . Alors  $u, v \in W^{1,p}(J)$  pour tout  $p < \infty$  et d'après ce qu'il précède, on sait que

$$\int_J uv \varphi' = - \int_J (u'v + uv') \varphi$$

C'est -à-dire

$$\int_I uv \varphi' = - \int_I (u'v + uv') \varphi$$

[5]. ■

## 2.7 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$

**Définition 2.7.1** *Etant donné un entier  $m \geq 2$  et un réel  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I); \quad u' \in W^{m-1,p}(I)\}$$

On pose  $H^m(I) = W^{m,2}(I)$

On vérifie aisément que  $u \in W^{m,p}(I)$  si, et seulement s'il existe  $m$  fonctions  $g_1 \dots g_m \in L^p(I)$  telles que

$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_j \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$$

Où  $D^j \varphi$  désigne la dérivée à l'ordre  $j$  de  $\varphi$ . Lorsque  $u \in W^{m,p}(I)$ , on peut considérer les dérivées successives  $u' = g_1$ ,  $(u')' = g_2 \dots$  jusqu'à l'ordre  $m$ ; on a les notes  $Du, D^2u, \dots, D^m u$ .

L'espace  $W^{m,p}$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et l'espace  $H^m$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

On montre que la norme  $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$  est équivalente à la norme

$$\|u\| = \|u\|_{L^p} + \|D^m u\|_{L^p};$$

plus précisément, on établit que si  $1 \leq j \leq m-1$ , alors  $\forall \varepsilon > 0 \exists C$  (dépendant et  $|I| \leq \infty$ ) tel que

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq \varepsilon \|D^m u\|_{L^p} + C \|u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{m,p}$$

On peut étendre aux espace  $W^{m,p}$  les propriétés démontrées pour  $W^{1,p}$ ; par exemple  $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$  avec injection continue [5].

## 2.8 L'espace $W_0^{1,p}(I)$

**Définition 2.8.1** Etant donné  $1 \leq p \leq \infty$ , on désigne par  $W_0^{1,p}(I)$  la fermeture de  $C_c^1(I)$  dans  $W^{1,p}(I)$ . On note

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I) \quad (1).$$

L'espace  $W_0^{1,p}$  est muni de la norme induite par  $W^{1,p}$ ; l'espace  $H_0^1$  est muni du produit scalaire induit par  $H^1$ .

L'espace  $W_0^{1,p}$  est espace de Banach séparable; il est de plus réflexif pour  $1 < p < \infty$ . L'espace  $H_0^1$  est un espace de Hilbert séparable [5].

## 2.9 Propriété (inégalité de Poincaré)

On suppose que  $I = [a, b]$  est borné, alors il existe une constante  $C$  (dépendant  $|I|$ ) telle que

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I)$$

Autrement dit, sur  $W_0^{1,p}$  la quantité  $\|u'\|_{L^p}$  est une norme équivalente à la norme de  $W^{1,p}$ .

**Démonstration.** Pour  $u \in W_0^{1,p}(I)$  on a

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t) dt \right| \leq \|u'\|_{L^1}.$$

donc

$$\|u(x)\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1};$$

on en déduit d'après l'inégalité de Hölder [5]. ■

# Chapitre 3

## Etude de quelques problèmes aux limites

### 3.1 Exemples de problèmes variationnelles

#### 3.1.1 Problème de Dirichlet

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où  $f \in C(\overline{\Omega})$  et  $\Delta u = \sum_{i=1}^d \partial_i^2 u$ , où l'on désigne par  $\partial_i^2 u$  la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la  $i$ -ème variable.

**Définition 3.1.1** *On appelle solution classique de (3.1.1) une fonction  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  qui vérifie (3.1.1).*

Soient  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  une solution classique de (3.1.1), et  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , où  $C_c^\infty(\Omega)$  désigne l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . On multiplie (3.1.1) par  $\varphi$  et on intègre sur  $\Omega$  (on appellera par la suite  $\varphi$  "fonction test") on a donc

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

Notons que ces intégrales sont bien définies, puisque  $\Delta u \in C(\Omega)$  et  $f \in C(\Omega)$ . par intégration par parties (formule de Green), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta u(x) \varphi(x) dx &= - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i^2 u(x) \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i u(x) \varphi(x) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_{\partial\Omega} \partial_i u \cdot n_i(s) \varphi(s) d\gamma(s) \end{aligned}$$

où  $\eta_i$  désigne la  $i$ -ème composante du vecteur unitaire normal extérieur à la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , et extérieur à  $\Omega$ , et  $d\gamma$  désigne un élément de surface sur  $\partial\Omega$ . Comme  $\varphi$  est nulle sur  $\partial\Omega$ , on obtient:

$$\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i u(x) \partial_i \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad (3.1.2)$$

Donc toute solution classique de (3.1.1) satisfait (3.1.2).

Prenons maintenant comme fonction test  $\varphi$ , non plus une fonction de  $C_c^\infty(\Omega)$ , mais une fonction de  $H_0^1(\Omega)$ . On rappelle que l'espace  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme l'adhérence de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ , alors, il existe une suite  $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$  telle que

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } H^1 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

soit encore

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{H^1} = \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2}^2 + \sum \|D_i \varphi_n - D_i \varphi\|_{L^2}^2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Pour chaque fonction  $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$  on a d'après (3.1.2)

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \partial_i u(x) \partial_i \varphi_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi_n(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}$$

or la  $i$ -ème dérivée partielle  $\partial_i \varphi_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}$  converge vers  $D_i \varphi$  dans  $L^2$  donc faiblement dans  $L^2$ , lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ , et  $\varphi_n$  tend vers  $\varphi$  dans  $L^2(\Omega)$ . On a donc

$$\int_{\Omega} \partial_i u(x) \partial_i \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} \partial_i u(x) D_i \varphi(x) dx \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

et

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

L'égalité (3.1.1) (Le problème de Dirichlet) est donc vérifiée pour toute fonction  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Montrons maintenant que si  $u$  est solution classique de (3.1.1) alors  $u \in H_0^1(\Omega)$ . En effet,  $u \in C^2(\Omega)$ , alors  $u \in C(\overline{\Omega})$  et donc  $u \in L^2(\Omega)$ ; de plus  $\partial_i u \in C(\overline{\Omega})$  donc  $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ . on a donc bien  $u \in H^1(\Omega)$ . Il reste à montrer que  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

**Définition 3.1.2** (*Formulation faible*)

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ , on dit que  $u$  est solution faible de (3.1.1) si  $u$  est solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D_i u(x) D_i \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

**Définition 3.1.3** (*Formulation variationnelle*)

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ ; on dit que  $u$  solution variationnelle de (3.1.1) si  $u$  est solution du problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ J(u) \leq J(v) \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

$$\text{avec } J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

où on a noté:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} D_i u(x) D_i \varphi(x) dx.$$

**Proposition 3.1.1** (*Existence et unicité de la solution de (3.1.1)*)

Si  $f \in L^2(\Omega)$ , il existe une unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  solution de (3.1.3) et (3.1.4).

**Démonstration.** Montrons que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. L'espace  $H = H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert. La forme bilinéaire  $\alpha$  est définie par

$$\alpha(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \left( = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D_i u(x) D_i \varphi(x) dx \right),$$

et la forme linéaire  $T$  par

$$T(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Montrons que  $T \in H'$ ; en effet, la forme  $T$  est linéaire, et on a

$$T(v) \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$$

On en déduit que  $T$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ , ce que est équivalent à dire que  $T \in H^{-1}(\Omega)$  (dual topologique de  $H_0^1(\Omega)$ ).

Montrons maintenant que  $\alpha$  est bilinéaire, continue et symétrique. La continuité de  $\alpha$  se démontre en écrivant que

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

Les caractères bilinéaire et symétrique sont évidents. Montrons maintenant que  $\alpha$  est coercitive: en effet,

$$\alpha(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D_i u(x) D_i u(x) dx \geq \frac{1}{\text{diam}(\Omega)^2 + 1} \|u\|_{H^1}^2,$$

par l'inégalité de Poincaré. Comme  $T \in H'$  et  $\alpha$  est linéaire, continue, coercitive donc le théorème de Lax-Milgram s'applique: on en conclut qu'il existe une unique fonction  $u \in H_0^1$  solution de (3.1.3) et comme  $\alpha$  est symétrique,  $u$  est l'unique solution du problème de minimisation associée. ■

**Définition 3.1.4** (*Solution forte dans  $H^2$* )

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . On dit que  $u$  est solution forte de (3.1.1) dans  $H^2$  si  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  vérifie  $-\Delta u = f$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Remarquons que si  $u$  est solution forte  $C^2$  de (3.1.1), alors  $u$  est solution forte  $H^2$ . De même, si  $u$  est solution forte  $H^2$  de (3.1.1) alors  $u$  est solution faible de (3.1.1). Les réciproques sont fausses. On admettra le théorème (*difficile*) de régularité, qui s'énonce de la manière suivante:

**Théorème 3.1.1** (*Régularité*)

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que  $\Omega$  a une frontière de classe  $C^2$ , ou que  $\Omega$  est convexe à frontière Lipschitzienne. Si  $f \in L^2(\Omega)$  et si  $u \in H_0^1(\Omega)$  est solution faible de (3.1.1). alors  $u \in H^2(\Omega)$ . De plus, si  $f \in H^m(\Omega)$  alors  $u \in H^{m+2}(\Omega)$  [10].

### 3.1.2 Problème de Dirichlet non homogène

On se place ici en dimension 1 d'espace,  $d = 1$ , et on considère le problème suivant

$$\begin{cases} u'' = f & \text{sur } ]0, 1[ \\ u(0) = a, \\ u(1) = b, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels donnés. Ces conditions aux limites sont dites de type Dirichlet non homogène; comme  $a$  et  $b$  ne sont pas forcément nuls, on cherche une solution dans  $H^1(\Omega)$  et non plus dans  $H_0^1(\Omega)$ . Cependant, pour se ramener à l'espace  $H_0^1(\Omega)$ , en particulier pour obtenir que le problème est bien posé d'après le théorème de Lax Milgram et à la coercivité de la forme bilinéaire

$$\alpha(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

sur  $H_0^1(\Omega)$ , on va utiliser une technique dite de "relèvement". On pose :  $u = u_0 + \tilde{u}$  où  $u_0$  est définie par:  $u_0(x) = a + (b - a)x$ .

on a en particulier  $u_0(0) = a$  et  $u_0(1) = b$ . on a alors  $\tilde{u}(0) = 0$  et  $\tilde{u}(1) = 0$ . la fonction  $\tilde{u}$  vérifie donc le système

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = f, \\ \tilde{u}(0) = 0, \\ \tilde{u}(1) = 0, \end{cases}$$

dont on connaît la formulation faible, et dont on sait qu'il est bien posé (voir paragraphe 3.1.1). Donc il existe un unique  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant  $u = u_0 + \tilde{u}$ , où  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  est l'unique solution du problème

$$\int_0^1 \tilde{u}' v' = \int_0^1 f v \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[)$$

De manière plus générale, soit  $u_1 \in H_{\alpha, b}^1(]0, 1[) = \{v \in H^1; v(0) = \alpha \text{ et } v(1) = b\}$ , et soit  $\bar{u} \in H_0^1(]0, 1[)$  l'unique solution faible du problème

$$\begin{cases} -\bar{u}'' = u_1'' + f, \\ \bar{u}(0) = 0, \\ \bar{u}(1) = 0, \end{cases}$$

alors  $\bar{u} + u_1$  est l'unique solution faible de (3.1.5), c'est-à-dire la solution du problème

$$\begin{cases} u \in H_{\alpha,b}^1(]0, 1[), \\ \int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(]0, 1[) \end{cases}$$

[10].

### 3.1.3 Formulation faible et formulation variationnelle

Nous donnons ici un exemple de problème pour lequel on peut établir une formulation faible, mais pas variationnelle. On se place en une dimension l'espace  $\mathbb{N} = 1$ , et on considère  $\Omega = ]0, 1[$  et  $f \in L^2(]0, 1[)$ . On s'intéresse au problème suivant (dite "d'advection diffusion")

$$\begin{cases} -u'' + u' = f, \text{ dans } ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

cherrchons une formulation faible. Par la même méthode qu'au paragraphe (3.1.1), on choisit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on multiplie (3.1.5) par  $v$  et on intègre par parties

$$\int_{\Omega} u'(x) v'(x) dx + \int_{\Omega} u'(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Il est donc naturel de poser

$$\alpha(u, v) = \int_{\Omega} u'(x) v'(x) dx + \int_{\Omega} u'(x) v(x) dx, \text{ et } T(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Il est évident que  $T$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$  (c'est-à-dire  $T \in H^{-1}(\Omega)$ ) et que la forme  $\alpha$  est bilinéaire continue, mais pas symétrique. De plus elle est coercive: En effet, on a

$$\begin{aligned} \alpha(u, u) &= \int_{\Omega} u'^2(x) dx + \int_{\Omega} u'(x) u(x) dx \\ &= \int_{\Omega} u'^2(x) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} (u^2)'(x) dx \end{aligned}$$

Or, comme  $u \in H_0^1(\Omega)$ , on a  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  et donc  $\int_{\Omega} (u^2)'(x) dx = u^2(1) - u^2(0) = 0$ . On en déduit que:

$\alpha(u, u) = \int_0^1 (u')^2(x) dx$ . et par l'inégalité de Poincaré, on conclut que  $\alpha$  est coercive sur  $H_0^1(\Omega)$ . On en déduit par le théorème de Lax Milgram, l'existence et l'unicité de  $u$  solution

du problème

$$\begin{cases} u \in H_0^1(]0, 1[) \\ \int_0^1 (u'(x) v'(x) + u'(x) v(x)) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx. \end{cases}$$

[10].

## 3.2 Exemples

**Exemple 3.2.1** (*Formulation faible du problème de Dirichlet*) Soit  $f \in L^2(]0, 1[)$ . On s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in ]0, 1[ \\ u(0) = 0, u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Donner une formulation faible et une formulation variationnelle de (3.2.1).

**Solution 3.2.1** (*Formulation faible du problème de Dirichlet*)

Soit  $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$ , on multiplie la première équation de (3.2.1), on intègre par parties et on obtient:

$$\int_0^1 u'(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx. \quad (3.2.2)$$

Pour trouver une formulation faible (ou variationnelle) il faut commencer par trouver un espace de Hilbert pour les fonctions duquel (3.2.2) ait un sens, et qui soit compatible avec les conditions aux limites. Comme  $f \in L^2(]0, 1[)$ , le second membre de (3.2.2) est bien défini dès que  $\varphi \in L^2(]0, 1[)$ .

De même, le premier membre de (3.2.2) est bien défini dès que  $u' \in L^2(]0, 1[)$  et  $\varphi' \in L^2(]0, 1[)$ .

Comme de plus, on doit avoir  $u = 0$  en 0 et en 1, il est naturel de choisir

$$H = H_0^1(]0, 1[) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in L^2(]0, 1[); Du \in L^2(]0, 1[) \text{ et } u(0) = u(1) = 0\}$$

(Rappelons qu'en une dimension d'espace  $H^1(]0, 1[) \subset C([0, 1])$  et donc  $u(0)$  et  $u(1)$  sont bien définies).

Une formulation faible naturelle est donc

$$\begin{cases} u \in H = \{u \in H_0^1(\Omega); v(0) = v(1) = 0\} \\ \alpha(u, v) = T(v), \forall v \in H \end{cases}$$

Où  $\alpha(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx$  et  $T(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx$ .

La formulation variationnelle associée (notons que  $\alpha$  est clairement symétrique), s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H, \\ J(u) = \min_{v \in H} J(v) \end{cases}$$

avec  $J(v) = \frac{1}{2}\alpha(u, v) - T(v)$ .

Le fait que  $\alpha$  soit une forme bilinéaire continue symétrique et coercive et que  $T \in H'$  a été prouvé (dans le cas plus général de la dimension quelconque) lors de la démonstration de la proposition (3.1.1) [10].

### Exemple 3.2.2 (Relèvement)

Soient  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ , et  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

1) Soient  $u_0$  et  $u_1$  définies de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  par  $u_0(x) = a + (b - a)x^2$ . Montrer qu'il existe un unique  $\tilde{u}$  (resp.  $\bar{u}$ ) tel que  $u = u_0 + \tilde{u}$  (resp.  $v = u_1 + \bar{u}$ ) soit solution de (3.1.5). Montrer que  $u = v$ .

2) Mêmes questions en supposant maintenant que  $u_0$  et  $u_1$  sont des fonctions de  $C^2([0, 1])$  telles que  $u_0(0) = u_1(0) = a$  et  $u_0(1) = u_1(1) = b$ .

**Solution 3.2.2** 1) Comme  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et comme  $-u'' = f$ , on a  $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Or  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $u_0'' = 0$ ; de même,  $u_1 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $u_1'' = 2(b - a)$ .

Les fonctions  $\tilde{u}$  et  $\bar{u}$  doivent donc vérifier

$$\begin{cases} \tilde{u}'' = f \\ \tilde{u}(0) = 0 \\ \tilde{u}(1) = 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \bar{u}'' = f + 2(b - a) \\ \bar{u}(0) = 0 \\ \bar{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Donc  $\tilde{u}$  est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \\ \alpha(u, \varphi) = \tilde{T}(\varphi), \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec  $\alpha(u, v) = \int_0^1 u'(x) \varphi'(x) dx$  et  $\tilde{T}(\varphi) = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx$ , et  $\bar{u}$  est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \bar{u} \in H_0^1(\Omega) \\ \alpha(\bar{u}, \varphi) = \bar{T}(\varphi), \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec  $\bar{T}(\varphi) = \int_0^1 (f(x) + 2(b-a))\varphi(x) dx$ .

Montrons maintenant que  $u = v$ . Remarquons que  $\omega = u - v$  vérifie

$$\begin{cases} \omega'' = 0 \\ \omega(0) = \omega(1) = 0, \end{cases}$$

ce qui prouve que  $\omega$  est solution de

$$\begin{aligned} \omega &\in H_0^1(\Omega) \\ \alpha(\omega, \varphi) &= 0, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\omega = 0$ .

2) Le même raisonnement s'applique pour  $u_0$  et  $u_1 \in C^2([0, 1])$  tel que

$$u_0(0) = u_1(0) = a \text{ et } u_1(0) = u_1(1) = b.$$

[10].

# Bibliographie

- [1] A. Munnier; Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles; Université Henri Poincaré, 2007-2008.
- [2] B. Maréchal Juin; Méthode des éléments-finis; Groupe Mécanique Modélisation Mathématique et Numérique Université de Caen, DANIEL CHOÏ, Avril 2010.
- [3] F. Boyer; Analyse numérique des EDP elliptiques; Cours pour Master 2 ième année - Mathématiques et Applications, Aix-Marseille universités, novembre 2011.
- [4] G. Leborgne; Approximations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et **Éléments finis**; Notes du cours d'équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, deuxième année <http://isimath.fr.st>, Septembre 2003.
- [5] H. Brézis; Analyse fonctionnelle; DUNOD, Paris 1999.
- [6] H. Ouarda; Une Généralisation Sur Les Nombres De Stirling; Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de magister en mathématiques, Université des sciences et de la technologie Houari Boumedienne, Alger 2007.
- [7] J. SAINT RAYMOND; Cours d'Analyse Réelle; MM003, Université Pierre et Marie Curie, octobre 2012.
- [8] P. A. Raviart - J. M. Thomas; Introduction à l'analyse Numérique des équations aux dérivées partielles; MASSON, 1988.
- [9] O. Glass; **Algèbre linéaire 3** : Produits Scalaires, Espace euclidiens, Formes quadratiques; Cours de l'Université Paris-Dauphine DU MI2E 2 ième année, 2010/2011.

- [10] R. Herbin; Analyse numérique; cours pour Master 1 mathématiques, université Aix Marseille 1, 2011-2012.
- [11] V. Komornik; Analyse Fonctionnelle 2 Espaces de Banach 1 Définitions et exemples; Université de Strasbourg. Septembre 2013.

## ملخص:

فضاءات سوبولوف وضعت كوسيلة حديثة توفر الإطار المناسب لإيجاد حلول المعادلات ذات التفاضلات الجزئية. في هذا العمل قمنا بإعطاء مقدمة بسيطة حول فضاءات سوبولوف، ابتداءا بذكر في التحليل التابعي تحوي بعض التعاريف والنظريات كنظرية Lax-Milgram ، ثم قدمنا كيفية تشكيل الفضاء  $H^m$  انطلاقا من الفضاء  $L^p$  . أخيرا قمنا بدراسة بعض المسائل الحديثة لتوضيح الفضاء التابعي الذي يحوي الحل بتطبيق نظرية Lax-Milgram على الصيغة الضعيفة للمسائل المطروحة.

**الكلمات المفتاحية:** نظرية Lax-Milgram ، فضاءات سوبولوف، فضاء  $H^m$  ، فضاء  $L^p$  ، الصيغة الضعيفة.

## Résumé

Les espaces de Sobolev se sont imposés comme l'outil moderne fournissant le cadre adéquat pour la recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles. Dans ce travail nous avons donné une petite introduction aux espaces de Sobolev, En commençant par un rappel d'analyse fonctionnel qui contient quelques définitions et quelques théorèmes principaux comme le théorème de Lax-Milgram, puis nous introduisons la construction des espace  $H^m$  à partir des espaces  $L^p$ . Enfin nous avons étudié quelques problèmes aux limites pour montrer l'espace fonctionnel qui contient la solution en appliquant le théorème de Lax-Milgram aux formulations faibles des problèmes.

**Mots clés:** Théorème de Lax-Milgram, espace de Sobolev, l'espace  $L^p$  , l'espace  $H^m$  , formulation variationnelle.

## Abstract:

Sobolev spaces have emerged as a modern tool that provides the appropriate framework for the search for solutions of partial differential equations. In this work we have given a brief introduction to Sobolev spaces, starting with a reminder of functional analysis contains some definitions and some key theorems as the Lax-Milgram theorem, then we introduce the construction of the space  $H^m$  from the  $L^p$  spaces. Finally we studied some boundary value problems to show the functional space that contains the solution by applying the Lax-Milgram theorem to the weak formulations of the problems.

**Keywords:** Lax-Milgram theorem, Sobolev space,  $L^p$  space,  $H^m$  space, weak formulation.