

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider-Biskra

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie

Département de Mathématiques

N° d'ordre :



THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTORAT EN SCIENCES

SPECIALITÉ : MATHÉMATIQUES

Présenté par : **Lourabi Hariz Bekkar**

Intitulé

**Equations d'opérateurs sous normaux de type
Sylvester**

devant le jury composé de :

Yahia Djabrane	Professeur	Univ Biskra	Président
Abdelouahab Mansour	Professeur	Univ El-Oued	Promoteur
Smail Bouzeneda	Professeur	Univ Tébessa	Examineur
Tedjani Menacer	MCA	Univ Biskra	Examineur

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse de donner les conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'une équation d'opérateurs de type Sylvester généralisé $AXB - CXD = E$ admet une solution dans l'algèbre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert complexe et séparable de dimension infinie, sous certaines conditions faibles telles que la sous normalité des opérateurs A, B, C, D et E et la propriété de Fuglède-Putnam.

Mots clés. Opérateur sous normal, équations de Sylvester, propriété de Fuglède-Putnam, extension normale.

Abstract

In this thesis, we focus to give the necessary and sufficient conditions for operators equations of generalized Sylvester type $AXB - CXD = E$ have a solution in algebra of bounded operators on a complex Hilbert space which is separable and infinite dimension, under some weak conditions as subnormality of A, B, C, D and E and Fuglede-Putnam property.

Keywords : Subnormal operator, Sylvester equation, Fugled-Putnam property, normal extension.

ملخص

في هذه الأطروحة نهتم بأعطاء الشروط اللازمة و الكافية لوجود الحل لمعادلات المؤثرات من صنف سيلفستر (Sylvester) المعممة $AXB - CXD = E$ في جبر المؤثرات المحدودة على فضاء هيلبرتي مركب و قابل للفصل ذو بعد غير منته، باستعمال مؤثرات تحت ناظمية A, B, C, D و E و خاصية فوجلاد - بيتنام (Fuglede - Putnam).

الكلمات المفتاحية : مؤثر تحت ناظمي، معادلة سيلفيستر، خاصية فوجلاد - بيتنام، امتداد ناظمي.

Table des matières

Introduction	8
Notations	11
1 Préliminaires	12
1.1 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés	12
1.1.1 Définitions	12
1.2 L'adjoint d'un opérateur	14
1.2.1 Similarité, équivalence	15
1.3 L'inverse d'un opérateur	17
1.4 Propriété de Fuglede-Putnam	17
1.5 Quelques classes d'opérateurs	20
1.5.1 Opérateurs positifs	21
1.5.2 Racine carée d'un opérateur positif	23
1.5.3 Décomposition polaire d'un opérateur	24
1.6 Spectre d'un opérateur	25
1.6.1 Projection spectrale	28
1.7 Commutateurs	29
1.8 Quelques types d'équations d'opérateurs	29
1.8.1 Dérivations	30

1.8.2	Equations de type Sylvester	31
1.8.3	Equations de type Lyapunov	33
1.8.4	Equations de type Stein	33
1.8.5	Equations de type $AXB - CXD = E$	34
2	Opérateurs sous normaux, définitions et propriétés	36
2.1	Opérateur sous normal	36
2.2	Caractérisation de sous normalité	39
2.3	Extension normale d'un opérateur sous normal	46
2.4	Spectre d'un opérateur sous normal	51
2.5	Théorème de Fuglède-Putnam généralisé	53
3	Equations de type Sylvester $AX - XB = C$	55
3.1	Solution explicite de l'équation de Sylvester	55
3.1.1	Conséquences aux opérateurs sous normaux	62
3.2	Cas des opérateurs sous normaux	65
4	Equations $AXB - CXD = E$	71
4.1	Equation $AXB - XD = E$	71
4.2	Equation $AXB - CXD = CE$	75
	Bibliographie	82