

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL-OUED

FACULTÉ DE SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADIMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**étude d'un problème d'évolution dans un
domaine
mince avec conditions aux limite de tresca**

Préparé par : **Larami Saadia**
Chaabani Metira

Soutenu publiquement, devant le jury composé de :

Dr. Fareh Abdelfateh	Président	Univ-Eloued
Dr.Letoufa Yassine	Encadreur	Univ-Eloued
Dr.Aissaoui Adel	Examineur	Univ-Eloued

Année universitaire 2019-2020

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail et tout les personnes qui nous ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire

nous voundrions dans un premier temps remercier notre encadruer de mémoire **Letoufa Yassine**, et l'université **EChahid Hamma lakhdar** à **El-Oued** pour sa patience , sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils , qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Nous tenons à remarcier à la fois **le père et la mère** pour leurs soutiens moraux et leurs encouragements pandent les années scolaires , donc nous prions Dieu de les protéger et de prolonger leur vie

Enfin, nous dédions ce travail à nos chers parents pour leur grands soutient.

Table des matières

introduction	1
Notation	4
1 Modélisation et outils mathématiques	6
1.1 Modélisation	7
1.1.1 Les équations de conservation	7
1.1.2 Loi de comportement du fluide de Stokes	9
1.1.3 Conditions aux limites et la lois de frottement	10
1.2 Outils mathématiques	11
1.2.1 Rappels sur l'espace de Sobolev	12
1.2.2 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	17
1.2.3 Lemmes de type Gronwall	22
2 Existence et unicité de problème	24
2.1 Introduction et position du problème	25
2.2 Formulation variationnelle du problème	27
2.3 Résultat d'existence et d'unicité du problème	29
3 Analyse asymptotique du problème	36
3.1 Changement d'échelle	37
3.2 Formulation variationnelle du problème dans Ω	37
3.3 Estimation à priori sur la vitesse	38
3.4 Estimation à priori sur la pression	44
3.5 Résultat de convergence et problème limite	46
3.6 Conclusion.	47
Les Références	48

Introduction générale

L'objet de ce mémoire est l'étude du comportement asymptotique d'un problème aux limites modélisant le comportement fluide dans le cas dynamique, et ce dans des domaines bornés en dimension trois en film mince avec des conditions non linéaires sur le bord. L'un des buts de l'analyse asymptotique est d'obtenir une équation en dimension 2 qui permet de décrire raisonnablement le phénomène se produisant dans un domaine tri-dimensionnel.

Ces problèmes mécaniques qui font l'objet de notre étude dans ce mémoire sont très fréquents dans la mécanique de lubrification, typiquement l'étude d'un lubrifiant entre deux parois rigides très proches en mouvement relatif comme par exemple dans un mécanisme de roulement à billes.

De nombreux articles de recherche ont été rédigés pour des problèmes similaires avec les mêmes conditions aux limites de friction, mais ces articles étaient limités au cas stationnaire uniquement. Citons par exemple les travaux de Bayada et al dans [7], [17] dans lesquels les auteurs ont travaillé sur le cas stationnaire. Les auteurs de [19] considèrent un problème décrivant le mouvement d'un fluide incompressible, non isotherme et non newtonien dans un domaine mince tridimensionnel. L'analyse asymptotique d'un problème newtonien incompressible, lorsqu'une dimension du domaine fluide tend vers zéro, a été étudiée dans [16]. La stabilité asymptotique de solutions faibles pour le mouvement incompressible du fluide non newtonien en $\mathbb{R}^2$ a été étudiée dans [4]. Les auteurs de [28] ont prouvé l'existence de solutions asymptotiques d'écoulements de Poiseuille newtonien faiblement compressible avec une viscosité dépendante de la pression. L'existence et l'unicité de solutions stationnaires de fluides incompressibles visqueux non newtoniens sont obtenues dans [3]. D'autres contextes et problèmes peuvent être trouvés dans les monographies comme dans [18, 20], et dans la littérature citée à l'intérieur. Plus récemment, certains articles de recherche ont été écrits traitant à la fois de l'analyse asymptotique d'un problème dynamique mais régi par le système d'élasticité. Par exemple, dans [11], Bensideri

et al ont étudié l'analyse asymptotique d'un problème dynamique d'élasticité isotherme avec frottement non linéaire de type Tresca. Le comportement asymptotique d'un problème dynamique d'élasticité non isotherme avec frottement non linéaire de type Tresca a été étudié dans [2].

Donc ce mémoire sera consacré à l'étude du système de Stokes dans le cas d'évolution, dans un domaine borné Ω^ε à trois dimensions en film mince pendant un intervalle de temps $[0, T]$ avec des conditions de Tresca sur la frontière inférieure du domaine. Ici nous supposons que la frontière supérieure du domaine est soumise à la condition de Fourier. Le domaine physique Ω^ε sur lequel sont posées les équations a la forme

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x, 0) \in \omega \mid 0 < x_3 < \varepsilon h(x)\}.$$

où ω est la frontière inférieure du domaine, Γ_1^ε est la frontière supérieure à décrire en géométrie par la fonction εh . Γ_L^ε est la frontière latérale et ε est un paramètre avec $\varepsilon \ll 1$. Ce paramètre est de l'ordre de 0.0001 dans la mécanique de lubrification évoquant le modèle de fluide a été considérée dans les ouvrages [1, 5, 9]

Les équations gouvernées avec les conditions aux limites et initiales par cet écoulement est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \mu \Delta u^\varepsilon + \nabla p = f^\varepsilon \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon \cdot \nu = 0 \\ u^\varepsilon = g \\ \sigma_\tau(u^\varepsilon) = -l^\varepsilon u^\varepsilon \\ \left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_\tau^\varepsilon = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon(t) = s - \beta \sigma_\tau^\varepsilon \\ u^\varepsilon(0) = 0. \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[, \\ \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[, \\ \text{sur } (\omega \cup \Gamma_1^\varepsilon) \times]0, T[, \\ \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \times]0, T[, \\ \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times]0, T[, \\ \text{sur } \omega \times]0, T[, \end{array}$$

où f^ε , k^ε , l^ε et g sont des données du problème.

Dans le premier chapitre, on introduit les outils mathématique et mécanique nécessaires et les différentes équations, pour faciliter de la lecture cette thèse et comprendre des problèmes traités dans la suite.

Dans le seconde chapitre, nous abordons l'existence et l'unicité de solutions faibles pour ce problème pour $\varepsilon > 0$ fixé, les démonstrations sont basées sur des arguments des inéquations d'évolution non linéaires, à savoir la régularisation, la compacité et la monotonie.

Dans le troisieme chapitre, on étudie l'analyse asymptotique du problème en faisant un changement d'échelle, $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$ pour ramener l'étude sur un domaine Ω indépendant de ε , sur lequel nous définissons de nouvelles inconnues. Nous prouvons certaines estimations à priori sur la solution indépendamment de ε et du temps t en utilisant le lemme de type Granwall, les inégalités de Korn et de Poincaré. Grâce à ces estimations, on obtient un théorème de convergence, qui nous permet de passer au problème limite.

Donc, le système précédent converge vers le système suivant

$$\begin{aligned}
-\mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} &= \hat{f}_i(t) - \frac{\partial}{\partial x_i} p^*(t), \quad i = 1, 2, \text{ dans } L^2(\Omega), \\
&\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \mu \frac{\partial u_i^*}{\partial z}(t) \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\phi}_i - u_i^*(t)) dx' dz - \sum_{i=1}^2 \int_{\omega} p^*(x', t) \hat{\phi}_i(x', h(x')) \\
&- \frac{\partial h}{\partial x_i} dx' \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} p^*(x', t) \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_i} dx' dz + \sum_{i=1}^2 \hat{l} \int_{\omega} u_i^*(x', h(x'), t) \\
&\quad \left[\hat{\phi}_i(x', h(x')) - u_i^*(x', h(x'), t) \right] \\
dx' + J(\hat{\phi}) - J(u^*) &\geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i(t) u_i^*(t) dx' dz, \quad \forall \hat{\phi} \in \Pi(K), \forall t \in]0, T[, \\
u^*(x', z, 0) &= 0,
\end{aligned}$$

où $\Pi(K)$ est un convexe de $H^1(\Omega)^2$ et $\hat{l}$ est une constante liée à la condition de Fourier.

Tous ces résultats de cette thèse, permettent une dérivation formelle de l'équation de Reynolds justifiée récemment par des références [[5], [15], [17], [20], [27]], soit en considérant le cas homogène ou stationnaire.

Notation

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
Γ	la frontière de Ω supposée régulière, partitionnée en trois parties mesurables disjointes deux à deux.
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v défini sur $\overline{\Omega}$.
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω .
$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$D'(\Omega)$	l'espace de distributions sur Ω .
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables de puissance p -ième intégrable sur Ω .
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables sur Ω telles que $\exists c > 0$ $ u(x) \leq c$, $p.p$ sur Ω .
$H^1(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω .
$H_0^1(\Omega)$	l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
$H^{-1}(\Omega)$	l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
$H_{\Gamma_i}^1(\Omega)$	l'espace $\{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_i\}$.
$\gamma : H^1(\Omega)^d \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.
$L^2(\Omega)^d$	l'espace $\{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, d}\}$.
$H^1(\Omega)^d$	l'espace $\{u = (u_i) / u_i \in H^1(\Omega), i = \overline{1, d}\}$.
$\ \cdot\ _{0,\Omega}$	la norme de $L^2(\Omega)^d$.
$\ \cdot\ _{1,\Omega}$	la norme de $H^1(\Omega)^d$.

Si X est un espace de Banach et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes.

$\ \cdot\ _X$	la norme de X .
X^d	l'espace $\{x = (x_i) / x_i \in X, i = \overline{1, d}\}$.
$x_n \rightarrow x$	la convergente forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X .
$L^p(0, T, X)$	l'espace des fonctions f mesurables de $[0, T]$ dans X , telles que $\int_0^T \ f(t)\ _X dt < \infty$ avec les modifications usuelles si $p = \infty$.
$\ \cdot\ _{L^p(0, T, X)}$	la norme de $L^p(0, T, X)$.
$C(0, T, X)$	l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans X .

Pour une fonction f , on note par

$\text{dom } f$	le domaine de f .
$\text{supp } f$	le support de f .
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la composante x_i .
∇f	le gradient de f .
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2} (\nabla f + \nabla^T f)$.
$\text{Div} f$	le divergence de f .
f	la dérivation par rapport au temps.
$\frac{\partial f}{\partial \nu}$	la dérivée normale extérieure.
$\liminf$	la limite inférieure.
δ_{ij}	le symbole de Krönecker.
I_3	le tenseur identité de second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
C_0	une constante générique strictement positive.
$p.p$	presque par tout.
$ \cdot $	la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
$(u, v), u.v$	le produit scalaire des vecteurs u et v .

1 | Modélisation et outils mathématiques

Résumé :

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités et il est divisé en deux parties.

Dans la première, nous modélisons le comportement fluide, puis nous présentons les équations de la conservation et les lois de comportements de fluide dans un milieu continu. Enfin, nous ajoutons les Conditions aux limites et la loi de frottement.

Dans la deuxième partie, nous rappelons certains théorèmes et propriétés nécessaires concernant les espaces de Sobolev et les espaces de distributions, les théorèmes de trace et les résultats classiques de l'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert, on y présente ici quelques résultats fondamentaux sur les fonctions convexes et sur la différentiabilité, les notions principales de la convergence faible, et on termine cette partie par un bref rappel sur les lemmes de type Gronwall.

1.1 Modélisation

L'objet de cette section est d'établir le cadre physique et mathématique décrivant des problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides utilisés dans cette thèse en suivant [5, 9, 14, 22, 23] et [24]. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau ou fluide, l'équation du mouvement et de l'énergie du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

1.1.1 Les équations de conservation

Considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$. Lorsque l'hypothèse des milieux continus est vérifiée, nous considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$ régi par les principes de la thermomécanique des milieux continus qui permettent d'établir les lois de conservation de la quantité de mouvement et de la masse, et de l'énergie. Nous allons préciser ici l'ensemble des équations correspondantes, dans , on a :

1. L'équation de conservation de la quantité de mouvement :

Soit $u(x, t)$ le champ des vecteurs vitesse à l'instant $t \in [0, T]$ des points $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ du milieu continu en mouvement par rapport au repère (ox) , $\sigma(x, t)$ de composantes $\sigma_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, est le tenseur des contraintes. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieures et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \text{Div } \sigma + f, \quad (1.1.1)$$

où le vecteur f , de composantes f_i ($i = 1, 2, 3$), représente une densité massique des forces extérieures, $\rho = \rho(x, t)$ est la densité du milieu continu au point $x \in \Omega$ et Div désigne l'opérateur divergence, c'est-à-dire

$$\text{Div } \sigma = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.1.2)$$

2. L'équation de conservation de la masse :

La forme locale de la conservation de la masse s'applique seulement sur un point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ de l'élément de volume $d\Omega$ du milieu.

L'expression générale de l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div}(u) = 0 \quad (1.1.3)$$

Le processus d'évolution modélisé par (1.1.1) contient un terme non linéaire par rapport aux composantes de la vitesse, dans certaines situations l'équation (1.1.1) peut se simplifier. S'il s'agit d'un problème statique le premier membre des équations (1.1.1) est identiquement nul et on les appelle équations d'équilibre ;

$$\operatorname{Div} \sigma + f = 0 \quad (1.1.4)$$

Elle est alors linéaire par rapport aux composantes σ_{ij} du tenseur des contraintes. Cette situation s'applique également lorsque le champ de vitesse u varie très lentement par rapport au temps dans le cas où les deux termes $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$ et $\rho u \cdot \nabla u$ sont négligeables (processus quasistatique).

3. L'équation de conservation de l'énergie :

L'expression générale du premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\rho \frac{de}{dt} = D(u) - \operatorname{div} q + r \quad (1.1.5)$$

où :

- e est un scalaire qui désigne l'énergie interne spécifique du milieu continu
- r est un scalaire représentant l'apport d'énergie par unité de masse et de temps.
- q de composantes q_i , est le vecteur transport d'énergie
- $\sigma : D(u)$ est le produit de deux tenseurs σ et $D(u)$ défini par l'expression

$$\sigma : D(u) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} d_{ij}(u).$$

4. L'hypothèse d'incompressibilité du volume pour les milieux fluides :

Le fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe. L'hypothèse d'incompressibilité très réaliste physiquement, se traduit par

$$\operatorname{Tr} D(u) = 0 \quad (1.1.6)$$

où $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (1.1.7)$$

Le milieu est dit *homogène*, si sa densité est indépendante de x . Donc l'équation de conservation de la masse se réduit à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

ρ constante indépendante de x et t . Il est même possible de poser $\rho = 1$, ce qui est fait dans la suite, et revient simplement à choisir l'unité de densité de la masse.

D'un point de vue mathématique, nous disposons trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations. Il est facile de voir que les fonctions inconnues sont au nombre de neuf, représentées par les composantes σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) du tenseur des contraintes (symétrique) et les composantes u_i ($i = 1, 2, 3$) de la vitesse. Donc les équations précédentes sont insuffisantes pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on appelle *lois de comportement*, qui sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement de ces lois. Nous présentons ci-dessous la loi de comportement de l'élasticité linéaire et la loi de comportement viscoplastique du fluide de Bingham traitées dans cette thèse.

1.1.2 Loi de comportement du fluide de Stokes

On peut dire qu'un fluide est un milieu continu tel que chaque configuration de corps laissant la masse volumique inchangée, nous présentons ci-dessous les lois de comportement de fluide de Stokes pour utiliser et étudier s'écrit :

$$\sigma(u) : 2\mu D(u) - \rho I \quad (1.1.8)$$

où

- $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation
- I est la matrice identité de rang 3
- $\text{Tr}D(u)$ désigne la trace de $D(u)$ définie par : $\text{Tr}D(u) = \sum_{k=1}^3 d_{kk}(u)$

L'hypothèse d'incompressibilité du volume, donnée par la relation (1.1.6) est équivalente à la condition suivante

$$\text{div}(u) = 0 \quad (1.1.9)$$

α et μ sont des scalaires positifs respectivement le seuil de plasticité et la viscosité du fluide de Stokes.

Les équations générales modélisant l'écoulement d'un fluide de Stokes dans un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$, sont données par le système (1.1.1), (1.1.9). Les fonctions inconnues de ce problème sont le champ des vitesse u et la pression p .

1.1.3 Conditions aux limites et la lois de frottement

Nous présenterons les différentes conditions aux limites utilisées pour la fermeture du problème que nous utilisons par la suite dans cette thèse. Nous décrivons aussi bien l'aspect mathématique et mécanique de ces conditions. Par condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesse ou des contraintes.

Par loi de frottement nous comprenons une relation impliquant la contrainte tangentielle σ_τ et la vitesse tangentielle v_τ ou le déplacement vitesse tangentielle u_τ et nous considérons ici σ_τ comme une force de frottement. Supposons dans cette section que le milieu occupe un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < h(x')\}$$

de frontière régulière notée $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L \cup \bar{\omega}$, où Γ_1 est la frontière supérieure d'équation $x_3 = H(x_1, x_2)$, Γ_L est la frontière latérale, ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω . On suppose que H est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que

$$0 < H_{\min} \leq H(x') \leq H_{\max} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

Sur Γ , on décompose le déplacement et le vecteur de contraintes en composantes normale et tangentielle comme suit

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \cdot \nu, \quad \sigma_\nu = (\sigma \cdot \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \cdot \nu - (\sigma_\nu) \cdot \nu, \quad (1.1.10)$$

où ν représente la normale sortante de la frontière du domaine Ω . On différencie alors :

- Γ_L , la surface où l'on impose une contrainte

$$u = g$$

où $g = (g_1, g_2, g_3)$ est une fonction donnée avec $g_3 = 0$.

- Γ_1 , la surface où on a des conditions imposées en vitesse (condition non linéaire de Fourier) :

$$u \cdot \nu = 0 \text{ sur } \omega, \quad (1.1.11)$$

$$\sigma_\tau(u) = -lu^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (1.1.12)$$

telle que $l > 0$ est une constante donnée.

• ω , la surface en contact. La force surfacique de réaction avec l'outil (autre sous domaine) se décompose en σ_τ et σ_ν . Ici, le contact se fait de façon bilatérale si le contact est maintenu pendant le mouvement, il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle. ce qui se traduit par

$$u_\nu = 0$$

la vitesse est donc inconnue sur cette surface.

Quand $\sigma_\tau = 0$, il s'agit du cas sans frottement, cette façon de voir le contact implique que la force de contact tangentielle est nulle dans la zone de contact. On est dans le cas d'un glissement parfait.

On suppose qu'il existe une force tangentielle sur la zone de contact qui sera modélisé par la loi non linéaire de type de Tresca. Néanmoins cette force tangentielle est non nulle dans la plupart des contacts réels. On introduit alors la loi de frottement de Tresca la plus simple qui relie la composante tangentielle aux autres variables du système. On a

$$\begin{cases} \text{Si } |\sigma_\tau| < k \text{ alors } u_\tau = s, \\ \text{Si } |\sigma_\tau| = k \text{ alors } \sigma_\tau = s - \lambda u_\tau \text{ avec } \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.13)$$

où s est la vitesse de cisaillement et k désigne le seuil de frottement fixe qui est supposé connu et qui ne dépend pas de la contrainte normale. Cette loi se caractérise par la propriété suivante : Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y a blocage. Lorsque ce seuil est atteint le milieu peut se déplacer tangentiellement par rapport à la fondation ce qui déduit un glissement. La contrainte tangentielle s'oppose au champ u .

Remarque 1.1.1. [9, 27] . La condition (1.1.13) est équivalente à la relation suivante :

$$(u_\tau - s) \sigma_\tau + k|u_\tau - s| = 0 \quad \text{sur } \omega.$$

1.2 Outils mathématiques

Dans cette partie, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse. Donnons quelques propriétés et théorèmes nécessaires qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations. Nous rappelons ensuite les espaces de Sobolev utilisés en mécanique des milieux

continus et les inéquations variationnelles qu'on rencontre dans notre étude sur les problèmes mécaniques. Pour plus de détails sur cette partie on renvoie aux ouvrages [9, 10, 12, 13, 14] et [22]. Partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), de frontière Γ , i.e., il est représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$ et Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ .

1.2.1 Rappels sur l'espace de Sobolev

Nous définissons ici les espaces de Sobolev qui sont les espaces de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles, tout d'abord on commence par un bref rappel de quelques résultats sur les espaces de distributions et de Lebesgue.

Dans la suite, Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $C_0^\infty(\Omega)$ (ou $D(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω .

On munit $C_0^\infty(\Omega)$ de la «pseudo-topologie», c'est-à-dire qu'on définit une notion de convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$.

L'espace des distributions :

$D'(\Omega)$ est le «dual» de $D(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace de formes linéaires continues sur $D(\Omega)$. On note $\langle T, \phi \rangle = T(\phi)$ le produit de dualité entre une distribution $T \in D'(\Omega)$ et une fonction $\phi \in D(\Omega)$: ce produit de dualité généralise l'intégrale usuelle $\int_\Omega T \phi dx$. En effet, on vérifie que si f est une fonction localement intégrable dans Ω , alors on peut définir une distribution T_f par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f \phi \, dx.$$

On peut aussi munir $D'(\Omega)$ d'une notion de convergence : on dit qu'une suite $T_n \in D'(\Omega)$ converge au sens des distributions vers $T \in D'(\Omega)$ si, pour tout $\phi \in D(\Omega)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle.$$

Définissons maintenant la dérivation au sens des distributions : si $T \in D'(\Omega)$, la dérivée $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in D'(\Omega)$ est définie par :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle, \quad \forall \phi \in D(\Omega). \quad (1.2.1)$$

Pour $1 \leq p < \infty$, de façon usuelle, nous désignons par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables et p -intégrables au sens de la mesure de Lebesgue.

On note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées. Nous munissons ces espaces de leurs normes usuelles $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Pour tout p , $1 \leq p \leq \infty$ on notera q l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$ (l'inégalité de Hölder).

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, correspondant à l'inégalité de Hölder pour $p = 2$, est vérifiée i.e.

$$\int_{\Omega} u(x)v(x) dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Quelques théorèmes de ces espaces $L^p(\Omega)$ sont résumés ci-après.

Théorème 1.2.1. (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue).

Soit (u_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que

(i) $u_n(x) \rightarrow u(x)$ p.p. sur Ω ,

(ii) il existe une fonction $v \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n , $|u_n(x)| \leq v(x)$ p.p. sur Ω .

Alors $u \in L^1(\Omega)$ et $\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$.

Remarque 1.2.1. Il résulte de l'inégalité de Hölder que si (u_n) est une suite telle que $u_n \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$, et (v_n) une suite telle que $v_n \rightarrow v$ dans $L^q(\Omega)$. on obtient que la suite $(u_n v_n) \subset L^1(\Omega)$ converge vers uv dans $L^1(\Omega)$, ce qui implique $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n v_n dx = \int_{\Omega} uv dx$.

Théorème 1.2.2. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions intégrables telle que $u_n \rightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors, il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ et $v \in L^1(\Omega)$ telle que

$$u_n \rightarrow v \text{ p.p dans } \Omega \quad \text{et} \quad |u_{n_k}| \leq v \text{ p.p dans } \Omega.$$

L'espace de Sobolev :

Il est en fait un espace de distributions. Il est défini comme suit :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, d\} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de u au sens des distributions (1.2.1). Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on note par

∇u le vecteur de composante $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ c'est un élément de l'espace $L^2(\Omega)^d$.

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) \, dx$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que $C^1(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$. Soit maintenant $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$; c'est un espace de distributions sur Ω .

D'autre part, nous avons les résultats suivants :

- (1) $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte, (*Théorème de Rellich*)
- (2) $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega)$,
- (3) $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$, $i = \overline{1, d}$, pour tout $u \in L^2(\Omega)$ et les opérateurs de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i} : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ sont continus,
- (4) $u \in H^{-1}(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$, $i = \overline{1, d} \implies u \in L^2(\Omega)$.

Voici l'inégalité très utile portant sur les normes de Sobolev.

Proposition 1.2.1. (*Inégalité de Poincaré*).

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier, $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à celle de $H_0^1(\Omega)$ ($H_0^1(\Omega)$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur $\partial\Omega$).

Théorème 1.2.3. (*Traces des fonctions et formule de Green*)

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un opérateur linéaire continu $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$, appelé opérateur trace, tel que

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma) \text{ est compact.}$$

On définit l'espace vectoriel $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ comme suit :

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{ \gamma(u); \quad u \in H^1(\Omega) \}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\frac{1}{2}, \partial\Omega} = \inf \left\{ \|u\|_{1, \Omega}; \quad \gamma(u) = f \right\}.$$

Les deux propriétés les plus remarquables et utiles pour notre thèse sont les suivantes :

(1) Si $u \in H^1(\Omega)$, alors $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est linéaire surjectif et

$$\|\gamma(u)\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \leq C \|u\|_{1,\Omega} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(2) Si Ω est borné régulier de classe C^1 Alors, pour toutes fonctions u et v de $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u(x) v(x) \nu_i(x) dx,$$

où $\nu = (\nu_i)_{1 \leq i \leq d}$ est la norme unité extérieure à Γ .

Formule de Green pour la mécanique

Pour décrire cette formule, on a besoin de certaines notations associés aux inconnues mécaniques u et σ . Nous désignons par S_d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^3$. Ainsi, pour $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u.v = u_i v_i$, $|u| = (u.u)^{\frac{1}{2}}$, et pour $\sigma, \tau \in S_d$, $\sigma.\tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}$, $|\sigma| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}}$.

Nous avons besoin des espaces $L^2(\Omega)^d$, $H^1(\Omega)^d$, qui sont des espaces de Hilbert réels munis respectivement des produits scalaires canoniques $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$, $(\cdot, \cdot)_{1,\Omega}$ qui sont définis par

$$\begin{aligned} (u, v)_{0,\Omega} &= \int_{\Omega} u_i v_i \, dx, \\ (u, v)_{1,\Omega} &= \int_{\Omega} u_i v_i \, dx + \int_{\Omega} u_{i,j} v_{i,j} \, dx, \\ \|v\|_{1,\Omega} &= (v, v)_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On utilise les opérateurs de déformation $d : H^1(\Omega)^d \rightarrow L^2(\Omega)_s^{d \times d}$ et de divergence $Div : H_{Div}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^d$ ils sont bien définis par 1.1.2 et 1.1.7, où

$$\begin{aligned} L^2(\Omega)_s^{d \times d} &= \{ \sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) / i, j = \overline{1, d} \}, \\ H_{Div}(\Omega) &= \left\{ \sigma \in L^2(\Omega)_s^{d \times d} / \quad Div(\sigma) \in L^2(\Omega)^d \right\}. \end{aligned}$$

Ces deux espaces respectifs sont des espaces de Hilbert réels munis de leurs produits scalaires notés encore $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ et $(\cdot, \cdot)_{1,\Omega}$:

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau)_{0,\Omega} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx, \\ (\sigma, \tau)_{1,\Omega} &= (\sigma, \tau)_{0,\Omega} + (Div(\sigma), Div(\tau))_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Les normes sur les espaces $L^2(\Omega)^d$, $H^1(\Omega)^d$, $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$ et $H_{Div}(\Omega)$ sont notées par $\|\cdot\|_{0,\Omega}$, $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ et $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, respectivement. Comme dans le cas de l'espace $H^1(\Omega)$, on peut prouver que l'espace

$$C^1(\bar{\Omega})_s^{d \times d} = \{ \sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\bar{\Omega}) / i, j = \overline{1, d} \}$$

est dense dans $H_{Div}(\Omega)$. Donc, on peut maintenant définir l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega)^d \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ qui est linéaire continue, et elle n'est pas surjective. On définit l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^d$ comme suit :

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d = \left\{ \gamma(u); \quad u \in H^1(\Omega)^d \right\}$$

ce sous espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Le dual de l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ est noté par $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ le produit de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ et son dual. En outre, si $\sigma \in H_{Div}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})_s^{d \times d}$ et $v \in H^1(\Omega)^d$, nous avons

$$\langle \sigma \nu, \gamma(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v d\Gamma,$$

tel que $\sigma \nu = (\sigma_{ij} \cdot \nu_j)_{i=1,d}$ est un élément dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$. Donc la formule de Green suivante est satisfaite

$$\int_{\Omega} \sigma : d(u) dx + \int_{\Omega} Div(\sigma) \cdot u dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v d\Gamma.$$

Un résultat essentiel pour les applications du prochain chapitre est l'inégalité suivante :

Théorème 1.2.4. (Inégalité de Korn ([9]))

Soit Ω un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1 . Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)^d$, on a :

$$\int_{\Omega} v_i v_i dx + \int_{\Omega} d_{ij}(v) d_{ij}(v) dx \geq C \|v\|_{1,\Omega}^2.$$

Tout au long de cette thèse, dans les problèmes mécaniques, supposons que le milieu occupe des domaines minces, c'est-à-dire des domaines physiques où la "hauteur" est beaucoup plus petite que la "surface". Pour $0 < \varepsilon < 1$ fixé, on applique le théorème précédent dans un domaine Ω^ε sous la forme

$$\Omega^\varepsilon = \left\{ (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x') \right\},$$

la frontière Γ^ε est partitionnée en trois parties mesurables disjointes et régulières, où Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x')$, Γ_L^ε est la frontière latérale et la frontière inférieure ω c'est un domaine de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$. On suppose que h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que

$$0 < h_{\min} \leq h(x') \leq h_{\max} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

Nous aurons besoin de l'espace K^ε de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$ pour avoir certaines des conditions aux limites précédemment soumises :

$$K^\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon, \ v \cdot \nu = 0 \text{ sur } \omega\},$$

et il est clair que c'est un espace convexe fermé non vide.

Puisque $\text{mes}(\Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur K^ε : il existe une constante $C_K > 0$ qui ne dépend ni de ε ni de v , telle que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(v) d_{ij}(v) dx = \|D(v)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \geq C_K \|\nabla v\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2. \quad \forall v \in K^\varepsilon.$$

Pour des détails sur ce résultat de ce théorème nous renvoyons à [21, 27].

1.2.2 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans cette partie nous rappelons quelques résultats concernant les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques du premier ordre qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques. Nous donnons aussi quelques théorèmes de convergence faible dans un espace de Hilbert. Nous commençons par ce rappel sur les fonctions convexes, les fonctions semi-continues inférieurement et la différentiabilité.

Fonctions convexes et différentiabilité

Etant donné un espace vectoriel réel X , soit $\phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction. On note par $\text{dom}(\phi)$ l'ensemble défini par :

$$\text{dom}(\phi) = \{u \in X : \phi(u) < +\infty\}$$

ϕ est dite propre si $\text{dom}(\phi) \neq \emptyset$. ϕ est dite convexe si

$$\phi(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda \phi(u) + (1 - \lambda)\phi(v) \quad \forall u, v \in \text{dom}(\phi), \forall \lambda \in [0, 1],$$

ϕ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in \text{dom}(\phi)$ et tels que

$$u \neq v$$

.

Soit X un espace topologique, une fonction $\phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) si l'ensemble $\{u \in X : \phi(u) < \alpha\}$ est fermé pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Si une fonction ϕ est s.c.i en u et si (u_n) est une suite qui converge vers u on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n) \geq \phi(u)$. Réciproquement, si pour toute suite $(u_n) \rightarrow u$ on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n) \geq \phi(u)$. La norme d'un espace normé est

semi-continue inférieurement pour la topologie faible. On a donc, pour tout $u \in X : (u_n) \rightharpoonup u$ on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|u\|$.

Théorème 1.2.5. *Soit X un espace de Hilbert et soit $\phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et propre. Alors ϕ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de X .*

Proposition 1.2.2. *Soit X un espace topologique et soient $\phi, \psi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ deux fonctions semi-continues inférieurement en $u \in X$. Alors $\phi + \psi$ est semi-continue inférieurement en u .*

Une fonction $\phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est dite Gâteaux-différentiable en un point $u \in X$ s'il existe un élément

$\nabla\phi(u) \in X$ tel que

$$\begin{aligned} \langle \phi'(u), v \rangle_X &= \left. \frac{d}{d\lambda} \phi(u + \lambda v) \right|_{\lambda=0} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} (\phi(u + \lambda v) - \phi(u)), \forall v \in X. \end{aligned}$$

L'élément $\phi'(u)$ est appelé la différentielle au sens de Gâteaux de ϕ au point u . La fonction ϕ est dite Gâteaux-différentiable si elle Gâteaux-différentiable en tout point de X , dans ce cas l'opérateur $\phi : u \in X \rightarrow \phi'(u) \in X$ s'appelle le gradient de la fonction ϕ .

Nous donnons une caractérisation de la convexité en termes de différentielle au sens de Gâteaux de la façon suivante.

Proposition 1.2.3. *Soit X un espace de Hilbert et soit $\phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) ϕ est convexe,

(ii) $\phi(v), -\phi(u) \geq \langle \phi'(u), v - u \rangle_X, \quad \forall u, v \in X$

(iii) $\langle \phi'(v) - \phi'(u), v - u \rangle_X \geq 0, \quad \forall u, v \in X$

Convergence faible dans les espaces de Hilbert

Une suite $(f_n) \subset X$ converge faiblement dans X vers un élément $f \in X$, et on note $f_n \rightharpoonup f$, si pour tout $v \in X$, le produit scalaire $\langle f_n, v \rangle_X$ converge vers $\langle f, v \rangle_X$ dans $\mathbb{R}$. f s'appelle limite faible de la suite (f_n) .

Théorème 1.2.6. (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet).

Soit X un espace de Hilbert réel et $\langle f, v \rangle_X$ un produit scalaire de X . Pour tout $\varphi \in X'$, il existe $f \in X$ unique tel que

$$\langle \varphi, v \rangle_{X' \times X} = \langle f, v \rangle_X \quad \forall v \in X \quad \text{et} \quad \|\varphi\|_{X'} = \|f\|_X.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\varphi \rightarrow f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier X et X' . Donc tout espace de Hilbert est réflexif, on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.7. Soit (f_n) une suite bornée de X , il existe alors un élément $x \in X$ et une sous-suite de (f_n) notée (f_η) telle que $f_\eta \rightharpoonup f$.

Proposition 1.2.4.

- (1) Toute suite faiblement convergente est bornée.
- (2) Soient (f_n) une suite qui converge faiblement vers u et (g_n) une suite qui converge fortement vers g . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, g_n \rangle_X = \langle f, g \rangle_X.$$

- (3) Si X et Y sont des espaces de Hilbert réels, et si $u \in L(X, Y)$, alors l'image par u de toute suite dans X faiblement convergente vers un élément $x \in X$ est faiblement convergente dans Y vers $u(x)$.

Le résultat crucial suivant est une conséquence du théorème de Riesz-Fréchet et du théorème de Banach-Alaoglu [13].

Théorème 1.2.8. (Théorème de compacité faible de la boule unité fermée des espaces de Hilbert).

Si X est un espace de Hilbert, alors toute suite bornée dans X admet une sous-suite faiblement convergente.

Inéquations variationnelles elliptiques :

Nous commençons ce paragraphe par quelques propriétés des formes bilinéaires dans un espace de Hilbert. Donc, on considère un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ et la norme associée $\|\cdot\|_X$ et X' l'espace dual de X en notant par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ pour le produit de dualité entre X et X' .

On dit qu'une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est :

(i) Continue, s'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$a(u, v) \leq C \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X$$

(ii) Coercive, s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2, \quad \forall v \in X$$

Théorème 1.2.9. (*Représentation des formes bilinéaires*).

Soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue sur $X \times X$. Alors il existe un unique opérateur linéaire borné $A \in L(X; X')$ tel que :

$$\forall u, v \in X : a(u, v) = (Au, v)_{X' \times X}.$$

De plus

$$\|a\|_X = \|A\|_{L(X; X')}.$$

Nous rappelons un théorème d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de 2^{ème} espèce qu'on va utiliser dans le deuxième et troisième chapitre de cette thèse.

Pour préciser les problèmes d'évolution posés au troisième chapitre on a besoin d'outils supplémentaires, que nous allons introduire maintenant. Soit $T > 0$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. On définit les espaces à valeurs vectorielles suivants :

$$C(0, T; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \text{ continue}\},$$

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable ; } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$$

$$L^\infty(0, T; X) = \{u : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable ; } \exists C > 0 \ \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p. } t\},$$

munis des normes

$$\|u\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X,$$

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{C > 0 ; \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p. } t\}.$$

Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach et $C(0, T; X)$ est dense dans $L^p(0, T; X)$. Si $1 \leq p < \infty$ et si X est réflexif, alors $L^p(0, T; X)$ est réflexif. Par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 1.2.5.

- (1) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X dt.$$

- (2) $L^r(0, T; X) \subset L^q(0, T; X)$, avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

- (3) Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X), \text{ si } 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X).$$

On désigne par $H^1(0, T; X)$ l'espace de Sobolev sur $]0, T[$ à valeurs dans X , défini par

$$H^1(0, T; X) = \left\{ u; \quad u \in L^2(0, T; X) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; X) \right\},$$

tel que la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ est définie par

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t) \phi(t) dt = - \int_0^T u(t) \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) dt, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(]0, T[).$$

$C_0^\infty(]0, T[)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $]0, T[$.

Théorème 1.2.10. Soit X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^2(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in H^1(0, T; X)$

(ii) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^2(0, T; X)$, telle que $u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$.

Théorème 1.2.11. Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace de Hilbert et soit $u \in H^1(0, T; X)$. Alors :

(1) $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_X^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), u(t) \right)_X \quad \text{p.p. } t \in]0, T[,$

(2) $\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s), u(s) \right)_X ds \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$

Théorème 1.2.12. Soient X, Y deux espaces de Hilbert de normes respectives $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ qui vérifient l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} X \text{ dense dans } Y, \\ X \subset Y \subset X', \end{cases} \quad (1.2.2)$$

et soit K un sous-ensemble fermé non vide et convexe de X . On se donne une forme bilinéaire $a : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur K qui satisfait :

$$\begin{aligned} &\text{il existe } \rho \text{ et } \alpha > 0 \text{ tels que} \\ &a(v, v) + \rho \|v\|_Y^2 \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

On a le théorème :

Théorème 1.2.13. On suppose que les hypothèses 1.2.2, 1.2.3 ont lieu. Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; X')$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; X) \cap C(0, T; Y) \cap H^1(0, T; X'), \quad (1.2.4)$$

$$u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.2.5)$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), v - u(t) \right\rangle_{X' \times X} + a(u(t), v - u(t)) \geq \langle f, v - u(t) \rangle_{X' \times X}, \quad \forall v \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (1.2.6)$$

$$u(0) = u_0. \quad (1.2.7)$$

En outre, si $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; Y)$ alors, la solution u de 1.2.6 et 1.2.7 vérifie

$$u \in L^2(0, T; X) \cap H^1(0, T; Y).$$

Les démonstrations des deux théorèmes précédents peuvent être trouvés par exemple dans [9, 10].

1.2.3 Lemmes de type Gronwall

Nous finissons en posant quelques lemmes du type Gronwall [6], qui nous seront utiles notamment dans la démonstration d'unicité des solutions faibles et d'estimations des solutions.

Lemme 1.2.1. Soit $n \in C(\mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$ et $a \geq 0$ une constante. Si la fonction $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$:

$$\phi(t) \leq n(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

Alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq \exp(aT) \int_0^t n(s) ds.$$

Corollaire 1.2.1. Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telle que, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

Alors

$$\phi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire 1.2.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ϕ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ϕ .

Lemme 1.2.2. Soient m et $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, $a \geq 0$ une constante. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2} \phi^2(s) \leq \frac{1}{2} a^2 + \int_0^s m(t) \phi(t) dt + \int_0^s n(t) \phi^2(t) dt, \quad \forall s \in [0, T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t) dt \right) \exp \left(\int_0^s n(t) dt \right), \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$ le lemme 1.2.2 devient :

Corollaire 1.2.2. Soit $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, $a \geq 0$ une constante. Soit également $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2} \phi^2(s) \leq \frac{1}{2} a^2 + \int_0^s m(t) \phi(t) dt, \quad \forall s \in [0, T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t) dt \right), \quad \forall s \in [0, T].$$

2 | Existence et unicité de problème

Résumé

Dans ce chapitre nous présentons la cadre fonctionnel et définissons les condition dans les trois frontière inférieure, supérieure et latérelle dans lequal nous allons décrire sa formulation variationnelle. En suite nous représentons la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution

2.1 Introduction et position du problème

Considérons un milieu visco-plastique de type Bingham qui occupe un domaine mince représentée par l'ouvert $\Omega^\varepsilon = \omega \times]0, \varepsilon h(x')[$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$. où $0 < \varepsilon < 1$ est un petit paramètre

$$\Omega^\varepsilon = \{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3; x' \in \omega, 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\},$$

La frontière de Ω^ε est notée $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$, avec

- ω est un domaine Lipschitzienne borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε .

- Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x')$

avec

$$h \in C^2(\omega), \exists \bar{h}, \underline{h} > 0 : \quad \bar{h} < h(x') < \underline{h}.$$

- Γ_L^ε est la frontière latérale

Nous rappelons que Γ^ε est sa frontière

$$\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon.$$

Le vecteur normale extérieur unitaire à Γ^ε sera noté $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. La normale unitaire extérieure à ω est le vecteur $(0, 0, -1)$.

On définit les composantes normales et tangentielles de la vitesse u_ν^ε et $u_{\tau_i}^\varepsilon = (u_{\tau_i}^\varepsilon)_{1 \leq i \leq 3}$ par

$$u_\nu^\varepsilon = u^\varepsilon \cdot \nu,$$

$$u_{\tau_i}^\varepsilon = u_i^\varepsilon - u_\nu^\varepsilon \cdot \nu_i.$$

De même, les composantes normales et tangentielles du tenseur des contraintes σ_ν^ε et $\sigma_{\tau_i}^\varepsilon = (\sigma_{\tau_i}^\varepsilon)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}^3$ sont définies par

$$\sigma_\nu^\varepsilon = (\sigma^\varepsilon \cdot \nu_i) \cdot \nu_j,$$

$$\sigma_{\tau_i}^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon \cdot \nu_j - (\sigma_\nu^\varepsilon) \cdot \nu_i,$$

où le tenseur σ^ε du fluide de Stokes est décomposé comme suit

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon, p^\varepsilon) = -p^\varepsilon \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon), \quad (2.1.1)$$

avec

- u^ε est la vitesse du fluide,
- p^ε est sa pression,
- μ est sa viscosité,
- δ_{ij} est le symbole de Krönecker,
- $(d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ est le tenseur des taux de déformation :

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Les équations qui gouvernent l'écoulement dynamique du fluide dans le domaine Ω^ε sont les suivantes :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \text{Div}(\sigma^\varepsilon) = f^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[\quad (2.1.2)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon, p^\varepsilon) = -p^\varepsilon \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[\quad (2.1.3)$$

$$\text{div} u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[\quad (2.1.4)$$

Afin d'écrire les conditions aux limites pour la vitesse sur la frontière de Ω^ε , on introduit d'abord la fonction vectorielle g telle que

$$g(t) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\varepsilon)^3 \text{ et } \int_{\Gamma^\varepsilon} g(t) \cdot \nu \, ds = 0, \forall t \in]0, T[$$

De la référence [6], on peut montrer que cette condition est équivalente à l'existence d'un relèvement $G^\varepsilon(t) \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$ de $g(t)$ sur Ω^ε pour tout $t \in [0, T]$ vérifiant

$$\text{div} G^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad G^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \quad G^\varepsilon \cdot \nu = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1^\varepsilon.$$

La vitesse sur le bord Γ_L^ε est connue et donnée par la fonction g .

$$u^\varepsilon = g \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \times [0, T]. \quad (2.1.5)$$

Sur $\omega \cup \Gamma_1^\varepsilon$ la vitesse est supposée inconnue et elle vérifie la condition de non-pénétration :

$$u^\varepsilon \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } (\omega \cup \Gamma_1^\varepsilon) \times]0, T[, \quad (2.1.6)$$

nous supposons la condition non linéaire de Fourier

$$\sigma_\tau(u^\varepsilon) = -l^\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times]0, T[, \quad (2.1.7)$$

telle que $l^\varepsilon > 0$ est une constante donnée.

Sur ω , supposons qu'il existe le frottement qui est modélisé par la loi non linéaire de Tresca :

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon &\implies u_\tau^\varepsilon(t) = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon &\implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon(t) = s - \beta \sigma_\tau^\varepsilon \end{aligned} \right\} \text{ sur } \omega \times]0, T[, \quad (2.1.8)$$

où

$|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$,

s la vitesse de cisaillement

k^ε le seuil de frottement.

Le problème complet consiste à trouver un champ de vitesse u^ε et une pression p^ε vérifiant les équations 2.1.2-2.1.8 avec la condition initiale suivante

$$u^\varepsilon(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \Omega^\varepsilon. \quad (2.1.9)$$

Afin de donner la formulation variationnelle du problème 2.1.2-2.1.9, nous allons établir le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. [20] *La condition 2.1.8 est équivalente à la relation suivante :*

$$(u_\tau^\varepsilon - s) \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon |u_\tau^\varepsilon - s| = 0 \quad \text{sur } \omega \times]0, T[. \quad (2.1.10)$$

2.2 Formulation variationnelle du problème

Nous commençons par décrire le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et nous définissons la formulation variationnelle du problème 2.1.2-2.1.9. Pour l'ouvert Ω^ε on définit l'espace suivant :

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ v \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega^\varepsilon), \forall i, j = 1, \dots, 3 \right\},$$

l'espace de Sobolev muni de la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega^\varepsilon}$, où la norme de $(L^2(\Omega^\varepsilon))^3$ sera noté $\|\cdot\|_{0,\Omega^\varepsilon}$. Nous utilisons les ensembles et les espaces vectoriels suivants

$$\begin{aligned} K^\varepsilon &= \left\{ \phi \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : \phi = G^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \phi \cdot \nu = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1^\varepsilon \right\}, \\ K_{div}^\varepsilon &= \left\{ \phi \in K^\varepsilon : \text{div}(\phi) = 0 \right\}, \\ H_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}^1(\Omega^\varepsilon) &= \left\{ \varphi \in H^1(\Omega^\varepsilon) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon \right\}, \\ L_0^2(\Omega^\varepsilon) &= \left\{ q \in L^2(\Omega^\varepsilon) : \int_{\Omega^\varepsilon} q dx = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, on pose

$$a(u^\varepsilon, \phi) = 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u^\varepsilon) d_{ij}(\phi) dx, \quad (2.2.1)$$

$$\check{a}(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) = a(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot (\phi - u^\varepsilon) d\tau, \quad (2.2.2)$$

$$(f, \varphi) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i \phi_i dx. \quad (2.2.3)$$

Pour $\phi \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$, on définit la fonctionnelle J^ε par

$$J^\varepsilon(\phi) = \int_{\omega} k^\varepsilon |\phi - s| dx' \quad (2.2.4)$$

Remarque 2.2.1. La forme bilinéaire $\check{a}(\cdot, \cdot)$ est coercive et continue sur $K_{div}^\varepsilon \times K_{div}^\varepsilon$. Soient ψ et ϕ des éléments de K_{div}^ε . Par l'inégalité de Korn et de Cauchy-Schwartz, on obtient ([29]) :

$$\begin{aligned} \check{a}(\psi, \psi) &= a(\psi, \psi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \psi^2 d\tau \geq 2\mu C_K \|\psi\|_{1, \Omega^\varepsilon}^2, \\ |\check{a}(\varphi, \psi)| &\leq (2\mu + l^\varepsilon C_0(\Omega^\varepsilon)) \|\varphi\|_{1, \Omega^\varepsilon} \|\psi\|_{1, \Omega^\varepsilon}, \end{aligned}$$

où $C_k > 0$ et $C(\Omega^\varepsilon) > 0$.

La fonction J^ε est convexe, semi-continue inférieurement et propre sur K_{div}^ε et il existe ([14]) une constante positive $C_0(\Omega^\varepsilon) > 0$ telle que

$$|J^\varepsilon(\phi) - J^\varepsilon(\psi)| \leq |\omega|^{1/2} \|k^\varepsilon\|_{\infty, \omega} C_0(\Omega^\varepsilon) \|\phi - \psi\|_{1, \Omega^\varepsilon}, \quad \forall (\phi, \psi) \in K_{div}^\varepsilon \times K_{div}^\varepsilon.$$

Lemme 2.2.1. Si u^ε et p^ε sont des solutions du problème 2.1.2-2.1.9, alors elles vérifient le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \{u^\varepsilon, p^\varepsilon\} \text{ où } u^\varepsilon(t) \in K_{div}^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \in K^\varepsilon \text{ et } p^\varepsilon(t) \in L_0^2(\Omega^\varepsilon), \text{ telle que} \\ \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi - u^\varepsilon(t) \right) + a(u^\varepsilon(t), \phi - u^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot (\phi - u^\varepsilon) d\tau + \\ - \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \phi dx + J^\varepsilon(\phi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \phi \in K^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(0) = 0. \end{array} \right.$$

Preuve.

En multipliant l'équation 2.1.3 par $(\phi - u^\varepsilon)$, où $\phi \in K^\varepsilon$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi - u^\varepsilon(t) \right) + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi_i - u_i^\varepsilon(t)) dx - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (\phi_i - u_i^\varepsilon(t)) ds &= \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon (\phi_i - u_i^\varepsilon(t)) dx, \\ \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Les conditions aux limites 2.1.5 – 2.1.6 et le fait que $\sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j = \sigma_{\tau_i}^\varepsilon + \sigma_\nu^\varepsilon \nu_i$, impliquent que :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon) d\sigma &= \int_{\omega \cup \Gamma_1^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx' \\ &= \int_{\omega \cup \Gamma_1^\varepsilon} \sigma_{\tau_i}^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx' + \int_{\omega \cup \Gamma_1^\varepsilon} \sigma_\nu^\varepsilon \nu_i (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx' \\ &= \int_{\omega \cup \Gamma_1^\varepsilon} \sigma_{\tau_i}^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx'. \end{aligned}$$

De 2.1.7 – 2.1.8 et si on ajoute et on retranche le terme $\int_\omega k^\varepsilon (|\varphi - s| - |u^\varepsilon - s|) dx'$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon) d\sigma + \int_\omega k^\varepsilon (|\varphi - s| - |u^\varepsilon - s|) dx' \\ &= -l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot (\phi - u^\varepsilon) d\tau + \int_\omega \sigma_\tau^\varepsilon \cdot (\varphi - u^\varepsilon) dx' + \int_\omega k^\varepsilon (|\varphi - s| - |u^\varepsilon - s|) dx'. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.1.1, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \nu_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon) d\sigma + \int_\omega k^\varepsilon (|\varphi - s| - |u^\varepsilon - s|) dx' \\ &= -l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot (\phi - u^\varepsilon) d\tau + \int_\omega (\sigma_\tau^\varepsilon \cdot (\varphi - s) + k^\varepsilon |\varphi - s|) dx'. \end{aligned}$$

Mais le second terme du côté droit est positif, donc 2.2.5 est équivalente à :

$$\left. \begin{aligned} &\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi - u^\varepsilon(t) \right) + a(u^\varepsilon(t), \phi - u^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot (\phi - u^\varepsilon(t)) d\tau - \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \phi dx \\ &+ J^\varepsilon(\phi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \phi \in K^\varepsilon, \\ &u^\varepsilon(0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

où la fonctionnelle J^ε est déjà définie dans 2.2.4.

Si nous choisissons la fonction test ϕ dans K_{div}^ε , on trouve le problème variationnel en vitesse

$$\left. \begin{aligned} &\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi - u^\varepsilon(t) \right) + a(u^\varepsilon(t), \phi - u^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot (\phi - u^\varepsilon(t)) d\tau \\ &+ J^\varepsilon(\phi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \geq (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \phi \in K_{div}^\varepsilon, \\ &u^\varepsilon(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

2.3 Résultat d'existence et d'unicité du problème

Dans la suite nous établissons un résultat d'existence et d'unicité. Tout d'abord, on régularise la fonctionnelle J^ε par une famille de fonctionnelles J_ζ^ε ($\zeta > 0$), telle que

$$J_\zeta^\varepsilon(v) = \int_\omega k^\varepsilon(x, t) \varphi_\zeta(|v_\tau|) dx',$$

où

$$\varphi_\zeta(\lambda) = \frac{1}{1+\zeta} |\lambda|^{(1+\zeta)}.$$

On a donc

$$\left\langle (J_\zeta^\varepsilon)'(v), \phi \right\rangle = \int_\omega k^\varepsilon \psi_\zeta(v_\tau) \cdot \phi_\tau dx',$$

où $\psi_\zeta(v_\tau) = |v_\tau|^{\zeta-1} v_\tau$. (Voir par exemple ([9, 11])).

En remplaçant dans 2.2.7 la fonction ϕ par $u_\zeta^\varepsilon(t) \pm \lambda\phi$, où $\lambda > 0$ et faisant tendre λ vers 0, on trouve l'équation approchée suivante :

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi \right) + a(u_\zeta^\varepsilon(t), \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(t) \cdot \phi_\tau d\tau + \left\langle (J_\zeta^\varepsilon)'(u_\zeta^\varepsilon(t)), \phi \right\rangle = (f^\varepsilon(t), \phi), \quad (2.3.1)$$

$\forall \phi \in K_{\text{div}}^\varepsilon$

avec

$$u_\zeta^\varepsilon(0) = 0 \quad (2.3.2)$$

Théorème 2.3.1. . *Supposons que*

$$f^\varepsilon, \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon)^3), \quad f^\varepsilon(0) \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3, \quad (2.3.3)$$

$$k^\varepsilon \in C_0^\infty(\omega), \quad k^\varepsilon > 0 \text{ ne depend pas de } t, \quad (2.3.4)$$

$$u^\varepsilon(0) = 0 \text{ sur } \Gamma^\varepsilon, \quad (2.3.5)$$

Alors, il existe un et un seul u^ε dans l'espace $L^\infty(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon)^3) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega^\varepsilon)^3)$ satisfaisant le problème 2.2.7 avec

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon)^3) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega^\varepsilon)^3). \quad (2.3.6)$$

Preuve l'existence de solution

Comme dans[9] nous allons commencer la démonstration en supposant que k^ε peut dépendre de t , avec

$$k^\varepsilon, \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty(\omega \times]0, T[).$$

L'équation 2.3.1 pour $\phi = u_\zeta^\varepsilon(t)$, et comme $\left\langle (J_\zeta^\varepsilon)'(u_\zeta^\varepsilon), u_\zeta^\varepsilon \right\rangle \geq 0$, nous donne ce qui suit

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), u_\zeta^\varepsilon(t) \right) + a(u_\zeta^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u_\zeta^\varepsilon(t)|^2 d\tau \leq (f^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t))$$

donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\zeta^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a(u_\zeta^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u_\zeta^\varepsilon(t)|^2 d\tau \leq (f^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t)) \quad (2.3.7)$$

Par la coercivité de la forme $\check{a}$ comme dans la remarque(2.2.1) et l'intégration de (2.3.7) en t , on trouve

$$\|u_\zeta^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + 4\mu C_K \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \leq 2 \int_0^t (f^\varepsilon(\sigma), u_\zeta^\varepsilon(\sigma)) d\sigma \quad (2.3.8)$$

où C_K est une constante de Korn.

Comme

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t (f^\varepsilon(\sigma), u_\zeta^\varepsilon(\sigma)) d\sigma &\leq 2 \int_0^t \|f^\varepsilon(\sigma)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{0,\Omega^\varepsilon} d\sigma \\ &\leq \int_0^t \|f^\varepsilon(\sigma)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma, \end{aligned}$$

alors, de 2.3.8, il résulte

$$\begin{aligned} \|u_\zeta^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma &\leq c + c \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + 2 \int_0^t (f^\varepsilon(\sigma), u_\zeta^\varepsilon(\sigma)) d\sigma \\ &\leq c(1 + \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma) + 2 \int_0^t \|f^\varepsilon(\sigma)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{0,\Omega^\varepsilon} d\sigma. \end{aligned}$$

D'autre part de 2.3.3, on trouve

$$\int_0^t \|f^\varepsilon(\sigma)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \leq \text{constante},$$

d'où

$$\|u_\zeta^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \leq c \left(1 + \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \right). \quad (2.3.9)$$

En particulier de 2.3.9, on a

$$\|u_\zeta^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq c \left(1 + \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \right),$$

et d'après le lemme de Gronwall, on trouve

$$\|u_\zeta^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq c. \quad (2.3.10)$$

De 2.3.9 – (2.3.10), on a

$$\|u_\zeta^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \leq c \quad (2.3.11)$$

où c est une constante indépendante de ζ . On dérive 2.3.1 en t , on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \phi \right) + a \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi \right) + l^\varepsilon \int_0^t \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \cdot \phi d\sigma + \left(\frac{d}{dt} (J_\zeta^\varepsilon)' (u_\zeta^\varepsilon(t)), \phi \right) = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi \right).$$

Pour $\phi = \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + a \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + l^\varepsilon \int_0^t \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \cdot \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) d\sigma \\ & + \left\langle \frac{d}{dt} (J_\zeta^\varepsilon)' (u_\zeta^\varepsilon(t)), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\rangle = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Mais

$$\begin{aligned} \left\langle (J_\zeta^\varepsilon)'(v), \phi \right\rangle &= \int_\omega k^\varepsilon \psi_\zeta(v_\tau) \cdot \phi_\tau dx' \\ &= \int_\omega k^\varepsilon |v_\tau|^{\zeta-1} v_\tau \cdot \phi_\tau dx' \end{aligned}$$

où $\psi_\zeta(v_\tau) = |v_\tau|^{\zeta-1} v_\tau$.

En observant la monotonie de l'opérateur $(J_\zeta^\varepsilon)'$, et par conséquent

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d}{dt} (J_\zeta^\varepsilon)'(\phi(t)), \phi'(t) \right\rangle = \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} \psi_\zeta(\phi_\tau(t)) \cdot \phi'_\tau(t) dx' \\ & + \int_\omega k^\varepsilon \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_\zeta(\phi_\tau(t+h)) - \psi_\zeta(\phi_\tau(t))}{h} \cdot \frac{\phi_\tau(t+h) - \phi_\tau(t)}{h} dx' \\ & \geq \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} \psi_\zeta(\phi_\tau(t)) \cdot \phi'_\tau(t) dx'. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

De 2.3.12 – 2.3.13 et si on remplace la fonction ϕ par $\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + a \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + l^\varepsilon \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0, \Gamma_1^\varepsilon}^2 \\ & + \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi_\zeta \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dx' \leq \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

D'autre part, il existe $\rho > 0$ et $\alpha > 0$, tels que

$$a(v, v) + \rho \|v\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 \geq \alpha \|v\|_{1, \Omega^\varepsilon}^2.$$

En intégrant 2.3.14 de 0 à t , on en déduit

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \alpha \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{1, \Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + 2l^\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0, \Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma \leq \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \\ & + \rho \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + 2 \int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right) d\sigma - 2 \int_0^t \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi_\zeta \left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau(\sigma) \right) dx' d\sigma, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

et comme $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon)^3)$, alors avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz et Young, on déduit

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right) d\sigma &\leq 2 \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon} d\sigma \\
 &\leq \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma.
 \end{aligned}$$

Donc, l'inéquation 2.3.15 devient comme suit :

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \alpha \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + 2l^\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma &\leq \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\
 + (\rho + 1) \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + & \\
 + 2 \left| \int_0^t \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi_\zeta \left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau (\sigma) \right) dx' d\sigma \right|. &
 \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

On fait une estimation du terme $\left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2$ par 2.3.1 – 2.3.2 et l'hypothèse 2.3.3 comme ce qui suit

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \phi \right) = (f^\varepsilon(0), \phi), \quad \forall \phi \in K_{div}^\varepsilon,$$

d'où

$$\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) = f^\varepsilon(0) \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3. \tag{2.3.17}$$

Et comme $\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} = 0$ l'hypothèse 2.3.4, donc le dernier terme de 2.3.16 est :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi_\zeta \left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau (\sigma) \right) dx' d\sigma = \\
 &\int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}(x', 0) \cdot \psi_\zeta \left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau (t) \right) dx' - \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}(x', 0) \cdot \psi_\zeta \left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau (0) \right) dx' \\
 &+ \int_0^t \int_\omega \frac{\partial^2 k^\varepsilon}{\partial t^2}(x', 0) \cdot \psi_\zeta \left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau (\sigma) \right) dx' d\sigma = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

De 2.3.16, 2.3.17 et 2.3.18, on a

$$\left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + l^\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma \leq c \left[1 + \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \right].$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + l^\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma \leq c. \tag{2.3.19}$$

On fait maintenant un passage à la limite en ξ , d'après les estimations 2.3.11 et 2.3.19, on peut extraire de u_ξ^ε une suite notée encore u_ξ^ε , telle que

$$\begin{aligned} u_\xi^\varepsilon &\longrightarrow u^\varepsilon && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon)^3) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega^\varepsilon)^3) \\ \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon)^3) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega^\varepsilon)^3) \\ u_\xi^\varepsilon &\longrightarrow u^\varepsilon && \text{dans } H^1(0, T; L^2(\Gamma_1^\varepsilon)^3) \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

on déduit de l'équation 2.3.1 que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}, \phi - u_\xi^\varepsilon \right) + a(u_\xi^\varepsilon, \phi - u_\xi^\varepsilon) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u_\xi^\varepsilon \cdot (\phi - u_\xi^\varepsilon) d\tau + J_\xi^\varepsilon(\phi) \\ - J_\xi^\varepsilon(u_\xi^\varepsilon) - (f^\varepsilon, \phi - u_\xi^\varepsilon) = J_\xi^\varepsilon(\phi) \\ - J_\xi^\varepsilon(u_\xi^\varepsilon) - \left\langle (J_\xi^\varepsilon)'(u_\xi^\varepsilon), \phi - u_\xi^\varepsilon \right\rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Prenant dans 2.3.21 $\phi = \phi(t)$, $\phi \in L^2(0, T; K_{div}^\varepsilon)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\left(\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi \right) + a(u_\xi^\varepsilon, \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u_\xi^\varepsilon \cdot \phi d\tau + J_\xi^\varepsilon(\phi) - (f^\varepsilon, \phi - u_\xi^\varepsilon) \right] dt \geq \\ \int_0^T \left[\left(\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t), u_\xi^\varepsilon(t) \right) + a(u_\xi^\varepsilon, u_\xi^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u_\xi^\varepsilon|^2 d\tau + J_\xi^\varepsilon(u_\xi^\varepsilon) \right] dt \\ = \frac{1}{2} \|u_\xi^\varepsilon(T)\|_{0, \Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^T a(u_\xi^\varepsilon(t), u_\xi^\varepsilon(t)) dt + \\ + l^\varepsilon \int_0^T \left\| \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0, \Gamma_1^\varepsilon}^2 dt + \int_0^T J_\xi^\varepsilon(u_\xi^\varepsilon) dt, \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

on déduit alors de 2.3.22 que

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi - u^\varepsilon \right) + a(u^\varepsilon, \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot \phi d\tau + J^\varepsilon(\phi) - (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) \right] dt \geq \\ + \liminf_{\xi \rightarrow 0} \int_0^T a(u_\xi^\varepsilon(t), u_\xi^\varepsilon(t)) dt + \liminf_{\xi \rightarrow 0} l^\varepsilon \int_0^T \left\| \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0, \Gamma_1^\varepsilon}^2 ds + \liminf_{\xi \rightarrow 0} \int_0^T J_\xi^\varepsilon(u_\xi^\varepsilon) dt. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Les fonctions $u \rightarrow \int_0^T a(u, u) dt$, $u \rightarrow \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$ et $v \rightarrow \int_0^T J^\varepsilon(v) dt$ sont des fonctions semi-continues inférieurement pour la topologie faible de $L^2(0, T; K_{div}^\varepsilon)$, et donc 2.3.23 devient

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \phi - u^\varepsilon \right) + a(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon \cdot (\phi - u^\varepsilon) d\tau + J^\varepsilon(\phi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) \right. \\ \left. - (f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon) \right] dt \geq 0, \quad \forall \phi \in L^2(0, T; K_{div}^\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Enfin, par [2, 9, 11], on passe de 2.3.24 à l'inégalité ponctuelle 2.2.7. $\square$

Preuve de l'unicité de la solution.

Soient u_1^ε et u_2^ε deux solutions éventuelles. En choisissant dans 2.2.7 $\phi = u_2^\varepsilon(t)$ dans l'inéquation relative à u_1^ε et $\phi = u_1^\varepsilon(t)$ dans l'inéquation relative à u_2^ε et en posant $w^\varepsilon = u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon$ il vient :

$$-\left(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}, w^\varepsilon \right) - a(w^\varepsilon, w^\varepsilon) - l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |w^\varepsilon|^2 d\tau \geq 0,$$

donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a(w^\varepsilon(t), w^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |w^\varepsilon(t)|^2 d\tau \leq 0.$$

Comme $a(v, v) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |v|^2 d\tau \geq 2\mu C_K \|v\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2$, on a

$$\|w^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + 4\mu C_K \int_0^t \|w^\varepsilon(\sigma)\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma \leq \|w^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 = 0, \forall t \Rightarrow w^\varepsilon(t) = 0,$$

d'où l'unicité de la solution.

3 | Analyse asymptotique du problème

Résumé

Nous étudions dans ce chapitre, l'analyse asymptotique d'un fluide incompressible dans un régime dynamique et mince de dimension trois avec des conditions aux limites mixtes et la loi de frottement de type Tresca. L'énoncé du problème et sa formulation variationnelle sont reformulés dans un domaine fixe. Dans ce cas, les estimations de la vitesse et de la pression sont prouvées et seront utiles pour donner l'équation spécifique de Reynolds associée à des inégalités variationnelles ainsi la preuve de l'unicité de la solution.

3.1 Changement d'échelle

Pour l'analyse asymptotique de notre problème, on utilise le changement d'échelle $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$. Donc le domaine Ω^ε se transforme en un domaine Ω indépendant de ε défini par

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega \text{ et } 0 < z < h(x')\},$$

et notant $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$ sa frontière.

Sur $\Omega \times [0, T]$, nous définissons des nouvelles inconnues

$$\begin{cases} \hat{u}_i^\varepsilon(x', z, t) = u_i^\varepsilon(x', x_3, t), \\ \hat{u}_3^\varepsilon(x', z, t) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3, t), \\ \hat{p}^\varepsilon(x', z, t) = \varepsilon^2 p^\varepsilon(x', x_3, t). \end{cases}$$

On suppose que les données du problème 2.1.1/2.1.8 dépendent de ε de la manière suivante

$$\begin{aligned} \hat{f}(x', z, t) &= \varepsilon^2 f^\varepsilon(x', x_3, t), \quad \hat{l} = \varepsilon l^\varepsilon, \quad \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \\ g_i^\varepsilon(x', x_3, t) &= \hat{g}_i(x', z, t), \quad i = 1, 2 \text{ et } g_3^\varepsilon(x', x_3, t) = \varepsilon \hat{g}_3(x', z, t). \end{aligned}$$

avec $\hat{f}$, $\hat{l}$, $\hat{k}$ et $\hat{g}$ ne dépendant pas de ε .

Soit $\hat{G}(x, z, t)$ tel que :

$$\hat{G} = \hat{g} \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[,$$

3.2 Formulation variationnelle du problème dans Ω

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω comme ce qui suit

$$\begin{aligned} K &= \left\{ \phi \in H^1(\Omega)^3 : \hat{\phi} = 0 \text{ sur } \Gamma_L, \quad \hat{\phi} \cdot \nu = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1 \right\}, \\ K_{\text{div}} &= \left\{ \hat{\phi} \in K : \text{div}(\hat{\phi}) = 0 \right\}, \\ V_z &= \left\{ v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2(\Omega); \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_L \right\}. \end{aligned}$$

V_z est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|v\|_{V_z} &= \sum_{i=1}^2 \left(\|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \Pi(K) &= \left\{ \varphi \in H^1(\Omega)^2 : \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \varphi_i = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L \text{ pour } i = 1, 2 \right\}, \\ L_0^2(\Omega) &= \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx' dz = 0 \right\}. \end{aligned}$$

En multipliant 2.2.6 par ε et en passant au domaine fixé Ω on montre que le problème variationnel est équivalent au problème suivant

$$\left. \begin{aligned} & \text{Trouver } \widehat{u}^\varepsilon(t) \in K \text{ et } \widehat{p}^\varepsilon(t) \in L_0^2(\Omega) \text{ telle que} \\ & \sum_{i=1}^2 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t), \widehat{\phi}_i - \widehat{u}_i^\varepsilon(t) \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t), \widehat{\phi}_3 - \widehat{u}_3^\varepsilon(t) \right) + \widehat{a}(\widehat{u}^\varepsilon(t), \widehat{\phi} - \widehat{u}^\varepsilon(t)) \\ & \quad - \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \widehat{p}^\varepsilon \frac{\partial(\widehat{\phi}_i - \widehat{u}_i^\varepsilon)}{\partial x_j} dx' dz - \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} \widehat{p}^\varepsilon \frac{\partial(\widehat{\phi}_3 - \widehat{u}_3^\varepsilon)}{\partial z} dx' dz \\ & \quad + \sum_{i=1}^2 \widehat{l} \int_\omega \widehat{u}_i^\varepsilon(x', h(x'), t) \left(\widehat{\phi}_i(x', h(x')) - \widehat{u}_i^\varepsilon(x', h(x'), t) \right) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx' + \\ & \quad + \widehat{l} \int_\omega \varepsilon^2 \widehat{u}_3^\varepsilon(x', h(x'), t) \left(\widehat{\phi}_3(x', h(x')) - \widehat{u}_3^\varepsilon(x', h(x'), t) \right) \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx' + \\ & \quad + \widehat{J}(\widehat{\phi}) - \widehat{J}(\widehat{u}^\varepsilon) \geq \sum_{i=1}^2 \left(\widehat{f}_i^\varepsilon(t), \phi_i - \widehat{u}_i^\varepsilon(t) \right) + \varepsilon \left(\widehat{f}_3^\varepsilon(t), \phi_3 - \widehat{u}_3^\varepsilon(t) \right), \forall \widehat{\phi} \in K, \forall t \in [0, T], \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

$$\widehat{u}^\varepsilon(0) = 0 \quad (3.2.2)$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{a}(\widehat{u}^\varepsilon(t), \widehat{\phi} - \widehat{u}^\varepsilon(t)) &= \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \varepsilon^2 \mu \left(\frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial(\widehat{\phi}_i - \widehat{u}_i^\varepsilon)}{\partial x_j} dx' dz \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \mu \left(\frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial(\widehat{\phi}_i - \widehat{u}_i^\varepsilon)}{\partial z} dx' dz + \int_\Omega 2\mu \varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial(\widehat{\phi}_3 - \widehat{u}_3^\varepsilon)}{\partial z} dx' dz \\ &+ \sum_{j=1}^2 \int_\Omega \mu \varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{u}_j^\varepsilon}{\partial z} \right) \frac{\partial(\widehat{\phi}_3 - \widehat{u}_3^\varepsilon)}{\partial x_j} dx' dz, \end{aligned}$$

et

$$\widehat{J}(\widehat{\phi}) = \int_\omega \widehat{k} |\widehat{\phi}_\tau - s| dx'.$$

3.3 Estimation à priori sur la vitesse

Nous essayons maintenant d'étudier les estimations à priori sur $\widehat{u}^\varepsilon$. Pour cela nous avons besoin d'établir les inégalités ([17]) suivantes :

Inégalité de Korn

$$\mu \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \mu C(\Gamma_1^\varepsilon) \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 d\tau \quad (3.3.1)$$

où

$$C(\Gamma_1^\varepsilon) = 2 \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} h^\varepsilon \right\|_{C(\bar{\omega})} (1 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} h^\varepsilon \right\|_{C(\bar{\omega})}^2).$$

Supposons qu'il y a une condition supplémentaire appliquée sur le bord supérieur Γ_1^ε ([27]) comme suit

$$\mu C(\Gamma_1^\varepsilon) \leq l^\varepsilon. \quad (3.3.2)$$

Donc l'inégalité 3.3.1 implique que

$$\mu \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 d\tau \quad (3.3.3)$$

Inégalité de Poincaré

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \leq 2\bar{h}^2 \varepsilon^2 \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + 2\bar{h}\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 d\tau. \quad (3.3.4)$$

Lemme 3.3.1. . On rappelle que $0 < \underline{h} \leq h(x') \leq \bar{h}$, $h^\varepsilon(x') = \varepsilon h(x')$, $\forall x' \in \omega$, il existe une constante C_0 indépendante de ε telle que :

$$\varepsilon \left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |\phi|^2 d\tau \right) \leq C_0(\Omega, h) \int_{\Omega^\varepsilon} (|\phi|^2 + \varepsilon^2 |\nabla \phi|^2) dx, \quad \forall \phi \in K^\varepsilon, \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (3.3.5)$$

Preuve.

Soit $0 < z < h^\varepsilon(x')$, on a

$$\phi(x', h^\varepsilon(x')) = \phi(x', z) + \int_z^{h^\varepsilon(x')} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x', \theta) d\theta.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que :

$$|\phi(x', h^\varepsilon(x'))|^2 \leq 2|\phi(x', z)|^2 + 2h^\varepsilon(x') \int_0^{h^\varepsilon(x')} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x', \theta) \right|^2 d\theta,$$

nous intégrons par rapport à z de 0 à $h^\varepsilon(x')$, on obtient

$$h^\varepsilon(x') |\phi(x', h^\varepsilon(x'))|^2 \leq 2 \int_0^{h^\varepsilon(x')} |\phi(x', z)|^2 dz + 2(h^\varepsilon(x'))^2 \int_0^{h^\varepsilon(x')} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x', \theta) \right|^2 d\theta.$$

En multipliant l'inéquation précédente par $\sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2}$ puis en intégrant par rapport à x' sur ω , on trouve

$$\begin{aligned} & \varepsilon \underline{h} \int_\omega |\phi(x', h^\varepsilon(x'))|^2 \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx' \\ & \leq 2\sqrt{1 + \|D_1 h^\varepsilon\|^2} \left(\int_\omega \int_0^{h^\varepsilon(x')} |\phi(x', z)|^2 dz dx' + (\varepsilon \bar{h})^2 \int_\omega \int_0^{h^\varepsilon(x')} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}(x', \zeta) \right|^2 d\zeta dx' \right), \end{aligned}$$

pour $0 < \varepsilon < 1$, on voit que

$$\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |\phi|^2 d\tau \leq C_0 \int_{\Omega^\varepsilon} (|\phi|^2 + \varepsilon^2 |\nabla \phi|^2) dx,$$

où

$$C_0 = \frac{2}{\underline{h}} \left(1 + (\bar{h})^2 \right) \sqrt{1 + \|D_1 h\|^2},$$

d'où 3.3.5. $\square$

Théorème 3.3.1. *Supposons que les hypothèses du lemme 3.3.1 sont vérifiées, de plus supposons que la fonction h^ε vérifie l'hypothèse 3.3.2, alors, il existe deux constantes A et B indépendantes de ε telle que :*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \|\varepsilon \widehat{u}_i^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right) + \\ & \sum_{i,j=1}^2 \int_0^t \left\| \varepsilon \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \int_0^t \left\| \varepsilon \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \|\varepsilon^2 \widehat{u}_3^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega}^2 \leq A, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^t \left\| \varepsilon \frac{\partial^2 \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z \partial t}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\| \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i \partial t}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right) + \\ & \sum_{i,j=1}^2 \int_0^t \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \int_0^t \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z \partial t}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \left\| \varepsilon^3 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq B. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Preuve.

Soit u^ε la solution du problème 2.2.7, donc

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), u^\varepsilon(t) \right) + a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 d\tau \leq \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi \right) + \\ & + a(u^\varepsilon(t), \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(t) \cdot \phi d\tau + J^\varepsilon(\phi) + (f^\varepsilon, u^\varepsilon(t)) - (f^\varepsilon, \phi), \quad \forall \phi \in K_{div}^\varepsilon \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 d\tau \leq \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi \right) + \\ & + a(u^\varepsilon(t), \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(t) \cdot \phi d\tau + J^\varepsilon(\phi) + (f^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) - (f^\varepsilon(t), \phi). \end{aligned}$$

En intégrant en temps pour $s \in [0, t]$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t a(u^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) ds + l^\varepsilon \int_0^t \left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(s)|^2 d\tau \right) ds \leq \\ & + \int_0^t \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s), \phi \right) ds + \int_0^t a(u^\varepsilon(s), \phi) ds + l^\varepsilon \int_0^t \left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(s) \cdot \phi d\tau \right) ds + T J^\varepsilon(\phi) + \\ & + \int_0^t (f^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) ds - \int_0^t (f^\varepsilon(s), \phi) ds, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Par l'inégalité de Young ; $ab \leq \eta^2 \frac{a^2}{2} + \eta^{-2} \frac{b^2}{2}$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} a(u^\varepsilon, \phi) & \leq \frac{1}{2} a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \frac{1}{2} a(\phi, \phi) \\ & \leq \frac{1}{2} a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \mu \|\nabla \phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2, \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s), \phi \right) ds & = (u^\varepsilon(t), \phi) \\ & \leq \frac{1}{4} \|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Et en utilisant l'inégalité 3.3.4, on obtient

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^t (f^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) ds \right| &\leq \int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|u^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon} ds \\
 &\leq \int_0^t \left(\|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \left(2\bar{h}^2 \varepsilon^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \right) ds \\
 &\quad + \int_0^t \left(\|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon} (2\bar{h}\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \|u^\varepsilon(s)\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon} \right) ds \\
 &\leq \frac{\mu}{4} \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{2\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\mu} \int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{l^\varepsilon}{8} \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds \\
 &\quad + \frac{4\bar{h}\varepsilon}{l^\varepsilon} \int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds
 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

et

$$\left| - \int_0^t (f^\varepsilon(s), \phi) ds \right| \leq T \frac{\mu}{4} \|\nabla \phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{2\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\mu} \int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + T \frac{l^\varepsilon}{4} \|\phi\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 + \frac{2\bar{h}\varepsilon}{l^\varepsilon} \int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds \tag{3.3.12}$$

De 3.3.9 – 3.3.12, l'inégalité 3.3.8 devient

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t a(u^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) ds + \frac{3l^\varepsilon}{4} \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds &\leq \frac{1}{4} \|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\
 + \|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\mu}{4} \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{5}{4} T \mu \|\nabla \phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{9}{4} T l^\varepsilon \|\phi\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 + &\tag{3.3.13} \\
 + T J^\varepsilon(\phi) + \left(\frac{6\bar{h}}{\hat{l}} + \frac{4\bar{h}^2}{\mu} \right) \varepsilon^2 \int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds.
 \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Korn 3.3.3 dans le membre à gauche de 3.3.13 et d'une réduction de certains termes, on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\mu}{4} \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{l^\varepsilon}{4} \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds &\leq \\
 + \|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{5}{4} T \mu \|\nabla \phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{9}{4} T l^\varepsilon \|\phi\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 &\tag{3.3.14} \\
 + T J^\varepsilon(\phi) + \left(\frac{6\bar{h}}{\hat{l}} + \frac{4\bar{h}^2}{\mu} \right) \varepsilon^2 \int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds.
 \end{aligned}$$

Pour t quelconque dans $]0, T[$, en multipliant 3.3.14 par ε et nous choisissons $\phi = G^\varepsilon(t)$. Pour estimer les termes $\|G^\varepsilon(t)\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2$ et $J^\varepsilon(G^\varepsilon)$, on utilise le lemme 3.3.1 :

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |G^\varepsilon(t)|^2 d\tau &\leq C_0(\Omega, h) \int_{\Omega^\varepsilon} (|G^\varepsilon(t)|^2 + \varepsilon^2 |\nabla G^\varepsilon(t)|^2) dx \\ &\leq C_0(\Omega, h) \int_{\Omega} \left(|\widehat{G}(t)|^2 + |\nabla \widehat{G}(t)|^2 \right) dx \\ \|\nabla G^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 &\leq \varepsilon^{-1} \|\nabla \widehat{G}\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

et de la remarque 2.2.1 de la Lipschitzienne de $\widehat{J}$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon J^\varepsilon(G^\varepsilon) &\leq \widehat{J}(\widehat{G}) \\ &\leq |\omega|^{1/2} \|\widehat{k}\|_{\infty,\omega} M(\Omega) \|\widehat{G}\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

L'utilisation de ces trois dernières inégalités et si on passe au domaine fixe Ω dans le membre de droite dans 3.3.14, nous obtenons une constante A indépendante de ε telle que

$$\varepsilon \left(\|u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \mu \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds \right) + \widehat{l} \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds \leq A \quad (3.3.15)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= 4 \left(\|\widehat{G}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^3)}^2 + \frac{5}{4} T \mu \|\nabla \widehat{G}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^3)}^2 + \frac{9}{4} T \widehat{l} C_0(\Omega, h) \|\widehat{G}\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega)^3)}^2 \right. \\ &\quad \left. + T |\omega|^{1/2} \|\widehat{k}\|_{\infty,\omega} M(\Omega) \|\widehat{G}\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega)^3)} + \left(\frac{6\bar{h}}{\widehat{l}} + \frac{4\bar{h}^2}{\mu} \right) \|\widehat{f}^\varepsilon\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^3)}^2 \right). \end{aligned}$$

En passant d'estimation 3.3.15 au domaine fixe Ω , on trouve 3.3.6.

Maintenant, en dérivant 2.3.1 en t et on prend $\phi = \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + a \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + l^\varepsilon \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 \\ + \left\langle (J_\zeta^\varepsilon)''(u_\zeta^\varepsilon(t)), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\rangle = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) \end{aligned}$$

et comme $\left\langle (J_\zeta^\varepsilon)''(u_\zeta^\varepsilon(t)), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\rangle \geq 0$, en intégrant en temps pour $s \in [0, t]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t a \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right) ds + l^\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds \leq \\ \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right) ds \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

On utilise l'inégalité de Poincaré pour $\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}$ et l'inégalité de Young pour majorer le deuxième terme du deuxième membre de 3.3.16, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^t a \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right) ds + \frac{l^\varepsilon}{4} \int_0^t \left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right|^2 d\tau \right) ds \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ + \frac{\mu}{8} \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{4\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\mu} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{2\bar{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Par l'inégalité de Korn, on déduit de l'inégalité 3.3.3) et 3.3.17) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\mu}{16} \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{l^\varepsilon}{16} \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ + \frac{4\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\mu} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{2\bar{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds . \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Nous devons estimer $\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)$. De 2.3.1 et 2.3.2, on a

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \phi \right) = (f^\varepsilon(0), \phi), \quad \forall \phi \in K_{div}^\varepsilon ,$$

on utilise les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Poincaré puis le lemme 3.3.1, respectivement, comme suit

$$\begin{aligned} (f^\varepsilon(0), \phi) &\leq \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon} \\ &\leq \sqrt{2\varepsilon \bar{h}} \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon} + \sqrt{2\varepsilon \bar{h}} \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon} \\ &\leq \sqrt{2\varepsilon \bar{h}} \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon} + \sqrt{2\bar{h}} C_0(\Omega, h) \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} \|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon} \end{aligned}$$

Alors

$$\left| \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \phi \right) \right| \leq \left(\sqrt{2\varepsilon \bar{h}} \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} + C_0(\Omega, h) \sqrt{2\bar{h}} \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon} + \right) \|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon} . \quad (3.3.19)$$

En utilisant le fait que $\varepsilon^2 \|f^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 = \varepsilon^{-1} \left\| \widehat{f}^\varepsilon \right\|_{0,\Omega}^2$. Donc, en multipliant l'inégalité 3.3.19 par $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ avec $\varepsilon \in]0, 1[$, il vient que

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \leq c_0 \quad (3.3.20)$$

où $c_0 = \sqrt{2\bar{h}} \left\| \widehat{f}^\varepsilon(0) \right\|_{0,\Omega} + C_0(\Omega, h) \sqrt{2\bar{h}} \left\| \widehat{f}^\varepsilon(0) \right\|_{0,\Omega}$, (ne dépend pas de ε).

De 3.3.18, 3.3.20 et par passage à la limite inférieure en ζ , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \frac{\mu}{16} \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{l^\varepsilon}{16} \int_0^t \left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right|^2 d\tau \right) ds \leq \frac{1}{2} c_0 \varepsilon^{-3} + \\ + \frac{2\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\mu} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \frac{2\bar{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

En multipliant maintenant 3.3.21 par ε^3 , on obtient

$$\varepsilon^3 \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \varepsilon^3 \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds + \varepsilon^2 \frac{\hat{l}}{16} \int_0^t \left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right|^2 d\tau \right) ds \leq B \quad (3.3.22)$$

où B est une constante qui ne dépend pas de ε , $b = \min(1, \mu, \hat{l})$, $Q =]0, T[\times \Omega$ et

$$B = \frac{1}{b} \left((c_0)^2 + \frac{4\bar{h}^2}{\mu} \left\| \frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{4\bar{h}}{3l} \left\| \frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)}^2 \right).$$

Donc 3.3.7 découle de 3.3.22. $\square$

Théorème 3.3.2. *Sous les hypothèses des théorèmes 3.3.1. On a*

$$\sum_{i=1}^2 \|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(Q)} + \|\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq A, \quad (3.3.23)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} \leq B. \quad (3.3.24)$$

Preuve.

Nous appliquons l'inégalité 3.3.12 dans l'estimation 3.3.15, puis dans l'estimation 3.3.22, on trouve

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds &\leq A, \\ \varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds &\leq B. \end{aligned}$$

En passant au domaine fixe Ω de ces inégalités on obtient 3.3.23 et 3.3.24. $\square$

3.4 Estimation à priori sur la pression

Théorème 3.4.1. *Sous les hypothèses des théorèmes 3.3.1, il existe une constante C indépendante de ε telle que*

$$\left\| \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leq C, \text{ for } i = 1, 2, \quad (3.4.1)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leq C \varepsilon. \quad (3.4.2)$$

Preuve.

Soient $\hat{u}^\varepsilon$ et $\hat{p}^\varepsilon$ des solutions du problème 3.2.1 3.2.2, alors si on prend $\hat{\phi} = \hat{u}^\varepsilon(t) + \xi$ avec $\xi \equiv (\xi, 0, 0) \in H_0^1(\Omega)^3$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1} \xi dx' dz &\leq \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}(t), \xi \right) + \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \left[\varepsilon^2 \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_1} \right)(t) \right] \frac{\partial \xi}{\partial x_j} dx' dz + \\ &\quad \int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1} \right)(t) \frac{\partial \xi}{\partial z} dx' dz - \left(\hat{f}^\varepsilon(t), \xi \right), \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

En intégrant cette inéquation en temps pour $s \in [0, t]$ et en utilisant l'inégalité de Hölder puis de l'estimation 3.3.6 et 3.3.24, on trouve la majoration suivante

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}(x, s) \xi(x, s) dx \right) ds &\leq B \left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \mu A \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial \xi}{\partial x_j}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \mu A \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial \xi}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + c \left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, en remplaçant ξ par $-\xi$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}(x, s) \xi(x, s) dx \right) ds \right| &\leq B \left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \mu A \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial \xi}{\partial x_j}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \mu A \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial \xi}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + c \left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

on déduit que l'application :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}; L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \xi &\longrightarrow \int_0^t \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}(x, s) \xi(x, s) dx \right) ds \end{aligned}$$

est linéaire et continue, donc $\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}$ est une fonction dans le dual de l'espace $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$. Ce qui prouve 3.4.1 pour $i = 1$. Nous choisissons $\hat{\phi} = \hat{u}^\varepsilon(t) \pm \xi$, $\xi \equiv (0, \xi, 0)$ pour prouver le cas $i = 2$. De même pour obtenir 3.4.2, on choisit $\hat{\phi} = \hat{u}^\varepsilon(t) + \xi$, $\xi \equiv (0, 0, \xi)$, puis en intégrant en temps pour $s \in [0, t]$, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z} \xi dx' dz &\leq \varepsilon^4 \left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t), \xi \right) + \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} dx' dz + \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \mu \varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x_j} dx' dz - \left(\hat{f}^\varepsilon(t), \xi \right), \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \left\langle \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z}(s), \xi(s) \right\rangle ds \right| &\leq B \|\xi\|_{L^2(0, T, H^1(\Omega))} + \\ &\quad \mu A \left(\sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right\|_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial \xi}{\partial z} \right\|_{L^2(Q)} \right) + c \|\xi\|_{L^2(0, T, H^1(\Omega))}. \quad \square \end{aligned}$$

3.5 Résultat de convergence et problème limite

Théorème 3.5.1. *Sous les hypothèses des lemmes (3.2.1)-(3.3.1), il existe $u^* = (u_1^*, u_2^*) \in L^2(0, T, V_z)$ et $p^* \in L^2(0, T, L_0^2(\Omega))$ tels que*

$$\hat{u}_i \rightharpoonup u_i^*, \quad \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T, V_z), \quad (3.5.1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t} \rightharpoonup 0, \quad i, j = 1, 2 \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)), \quad (3.5.2)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0, \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)), \quad (3.5.3)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0, \quad \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i \partial t} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)), \quad (3.5.4)$$

$$\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)), \quad (3.5.5)$$

$$\hat{p}^\varepsilon \rightharpoonup p^*, \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)). \quad (3.5.6)$$

Preuve.

On déduit de 3.3.23 que la suite $(\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(0, T, V_z)$, ceci implique l'existence de (u_1^*, u_2^*) tel que $(\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ converge faiblement vers (u_1^*, u_2^*) dans $L^2(0, T, V_z)$.

De même, par conséquent, de 3.3.24, on a $\left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(0, T, V_z)$ et converge vers une limite (l_1, l_2) , mais, il vient de 3.3.23 que la suite $(\varepsilon \hat{u}_1^\varepsilon, \varepsilon \hat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ converge fort vers $(0, 0)$ dans $L^2(0, T, V_z)$, de sorte que $(l_1, l_2) = (0, 0)$.

Grâce aux 3.3.23, 3.3.24 et 3.5.1, on trouve 3.5.2.

Par les convergences de 3.5.2 et le fait que $\text{div}(\hat{u}^\varepsilon) = 0$, on obtient 3.5.3, i.e

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} = - \sum_{i=1}^2 \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0.$$

De 3.3.23, on trouve $\|\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq A$, et d'après 3.3.6 on obtient la première convergence dans 3.5.4, aussi la deuxième convergence découle de 3.3.7 et 3.3.24.

Pour d'obtenir 3.5.5, on utilise l'estimation $\|\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq A$ et le fait que $\text{div}(\hat{u}^\varepsilon) = 0$, on trouve la convergence faible de $(\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon)_\varepsilon$ vers 0, et la deuxième convergence est claire à partir de 3.3.24.

Il vient de 3.3.24 que la suite $\left(\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(0, T, V_z)$, et par la suite converge vers une limite θ , d'autre part on a $\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0$, cela implique que $\varepsilon^2 \hat{u}_3^\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve donc $\theta = 0$.

Pour démontrer 3.5.6, on utilise 3.4.1, 3.4.2 et l'inégalité suivante :

$$\|\hat{p}^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega} \leq K \left(\|\nabla \hat{p}^\varepsilon(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \int_{\Omega} \hat{p}^\varepsilon(t) dx dz \right).$$

Ce qui montre qu'il existe une sous suite extraire $\hat{p}^\varepsilon$ qui converge faiblement vers p^* dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$. $\square$

Remarque 3.5.1. Pour $t \in]0, T[$. On a [15]

$$\begin{aligned} p^*(x', z, t) &= p^*(x', t), \quad \forall (x', z) \in \Omega, \\ \int_{\omega} p^*(x', t) \left(u_1^*(x', h(x'), t) \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2^*(x', h(x'), t) \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) dx' \\ &+ \int_{\Omega} p^*(x', t) \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \right) (t) dx' dz = 0. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Théorème 3.5.2. Avec les mêmes hypothèses du théorème 3.5.1 la solution limite (u^*, p^*) vérifie les formules suivantes

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \mu \frac{\partial u_i^*}{\partial z} (t) \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\phi}_i - u_i^*(t)) dx' dz - \sum_{i=1}^2 \int_{\omega} p^*(x', t) \hat{\phi}_i(x', h(x')) \frac{\partial h}{\partial x_i} dx' \\ &- \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} p^*(x', t) \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_i} dx' dz + \sum_{i=1}^2 \int_{\omega} u_i^*(x', h(x'), t) \left[\hat{\phi}_i(x', h(x')) - u_i^*(x', h(x'), t) \right] dx' \\ &+ J(\hat{\phi}) - J(u^*) \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i(t) u_i^*(t) dx' dz, \quad \forall \hat{\phi} \in \Pi(K), \forall t \in]0, T[, \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

$$u^*(x', z, 0) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \Pi(K) &= \left\{ \bar{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \in H^1(\Omega)^2 : \exists \hat{\phi}_3 \text{ tel que } \phi = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3) \in K \right\}, \\ &- \mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} = \hat{f}_i(t) - \frac{\partial}{\partial x_i} p^*(t), \quad i = 1, 2, \text{ dans } L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Preuve.

Dans l'inégalité variationnelle (3.1.1), on passe tous les termes non linéaires à la droite et les termes linéaires à gauche, puis, on applique la limite sur la droite et la limite inférieurement à gauche, en utilisant les résultats de convergence 3.5.1 – 3.5.6 et la formule 3.5.7, on obtient donc 3.5.8. Avec le choix de la fonction test : $\hat{\phi}_i = u_i^*(t) + \hat{\psi}_i$, $\hat{\psi}_i \in H_0^1(\Omega)$ pour $i = 1, 2$, on obtient facilement 3.5.9.

3.6 Conclusion.

Jusqu'ici, nous avons apporté les paramètres essentiels du modèle limite de notre problème, il ne nous reste donc qu'à chercher une équation de type Reynolds d'une autre formule

de l'équation 3.5.9, ainsi nous récupérons des conditions aux limites que nous avons déjà mises dans le problème initial. Comme références [5, 15, 28] pour le choix des fonctions test, nous avons

$$\begin{cases} \mu \left| \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', 0, t) \right| < \hat{k} \Rightarrow u^*(x', 0, t) = s \\ \mu \left| \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', 0, t) \right| = \hat{k} \Rightarrow \exists \beta > 0; u^*(x', 0, t) = s + \beta \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', 0, t) \end{cases} \quad (3.6.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h(x')}{2} u^*(x', 0, t) - \mu \int_0^{h(x')} u^*(x', y, t) dy + \\ & + \frac{h(x')}{2} \mu u^*(x', h(x'), t) = \tilde{F}(\hat{f}, \Omega) + \frac{h(x')^3}{12} \nabla p^*(t) \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

$$\forall x' \in \omega, \quad \forall t \in]0, T[,$$

où $\tilde{F}$ dépend seulement de $\hat{f}$ et de Ω .

Les Références

- [1] A. ASSEMIEN, G. BAYADA, M. CHAMBAT, *Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow*. Asymptot Anal, 9 (3), (1994), 177–208.
- [2] A. SAADALLAH, H. BENSERIDI, M. DILMI, S. DRABLA, *Estimates for asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction*, Georgian Math. J, 23 (3), (2016), 435–446.
- [3] Boling Guo, Guoguang Lin, *Existence and uniqueness of stationary solutions of non Newtonian viscous incompressible fluids*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 4(1999), no. 1, pp. 63-68.
- [4] Bo-Qing Dong, Zhi-Min Chen, *Asymptotic stability of non-Newtonian flows with large perturbation in R^2* , Applied Mathematics and Computation, 173(2006), no. 1, pp. 243-250.
- [5] F. SAIDI, *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires : Etude mathématique et numérique*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2004).
- [6] G. BAYADA, K. LHALOUANI, *Asymptotic and numerical analysis for unilateral contact problem with Coulomb's friction between an elastic body and a thin elastic soft layer*, Asymptot. Anal. 25 (2001), 329-362.
- [7] G. BAYADA, M. BOUKROUCHE, *On a free boundary problem for the Reynolds equation derived from the Stokes systems with Tresca boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl, 282 (2003), 212-231.
- [8] G. BAYADA, M. CHAMBAT, *The transition between the Stokes equation and the Reynolds equation*, A mathematical proof, Appl. Math. Optim, 14 (1986), 73–93.
- [9] G. DUVANT, J. L. LIONS, *les Inéquations en Mécanique et en physique*, Dunod, Paris, (1972).
- [10] H. BREZIS, *Equation et inéquation non linéaire dans les espaces vectoriels en dualité*, Annales de l'institut Fourier, Tome 18, No.1, (1968), 115-175.

-
- [11] H. BENSERIDI, M. DILMI, *Some inequalities and asymptotic behavior of a dynamic problem of linear elasticity*, Georgian Math. J, 20 (2013), 25- 41.
 - [12] I. EKE LAND AND R. TEMAM, *Analyses convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Gauthier-Villars Paris (1974).
 - [13] J. L. LIONS ET E. MAGENES, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Volume (1), Dunod, Paris (1968).
 - [14] L. CHUPIN, *Modélisation et Analyse mathématique en films minces*, Institut Camille Jordan - INSA de Lyon (2009).
 - [15] M. BOUKROUCHE, F. SAIDI, *Non-isothermal lubrication problem with Tresca fluid-solid interface law. Part I*, Nonlinear Anal, 7 (2006), 1145-1166.
 - [16] M. Boukrouche and F. Saidi, *Non-isothermal lubrication problem with Tresca fluid-solid interface law. Part II Asymptotic behavior of weak solutions*, Nonlinear Analysis : Real World Applications. 9(2008), no. 4, pp 1680-1701.
 - [17] M. Boukrouche and G. Łukaszewicz, *On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions*. Math Models Methods Appl. Sci. 14, 913(2004). no. 6.
 - [18] M. Boukrouche and R. El mir, *Asymptotic analysis of a non-Newtonian fluid in a thin domain with Tresca law*, Nonlinear Anal. 59(2004), no. 1-2, pp. 85-105.
 - [19] M. Boukrouche and R. El mir, *On a non-isothermal, non-Newtonian lubrication problem with Tresca law : Existence and the behavior of weak solutions*, Nonlinear Analysis : Real World Applications. 9(2008), no. 3, pp 674-692.
 - [20] M. DILMI, H. BENSERIDI, A. SAADALLAH, *Asymptotic analysis of a Bingham fluid in a thin domain with Fourier and Tresca boundary conditions*, Adv. Appl. Math. MEch, 6 (2014), 797-810.
 - [21] M. SOFONEA, A. MATEI, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge University Press, Cambridge (2012).
 - [22] M. SOFONEA, *Problèmes non Linéaires dans la Théorie de l'Elasticité*, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées à l'Université de Sétif (1993).
 - [23] N. BENHABOUCHA, *Quelques problèmes mathématiques délatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur*, Thèse, Université Claude Bernard, Lyon, (2003).
 - [24] N. HEMICI, A. MATEI, *A frictionless contact problem with adhesion between two elastic bodies*, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform, 30 (2003), 90-99.

- [25] O. REYNOLDS, *On the slipperiness of ice*, Man. Lit. Phil. Soc., Memoirs and Proceedings, 43 (1898)-(1899), 199–220.
- [26] O. REYNOLDS, *On the theory of lubrication and its application to Mr Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil*, Phil. Trans. Roy. Soc., A 117 (1886), 157–234.
- [27] R. EL MIR, *Etude mathématique et analyse asymptotique de quelques problèmes de lubrification par des fluides non-newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2005).
- [28] S. Poyiadji, K. D. Housiadas, G. C. Georgiou & K. Kaouri, *Asymptotic solutions of weakly compressible Newtonian Poiseuille flows with pressure-dependent viscosity*, European Journal of Mechanics B/Fluids, 49 (2015), pp. 217-225.
- [29] X. LI, H. CHEN, Y. WANG, *Error analysis in Sobolev spaces for the improved moving least-square approximation and the improved element-free Galerkin method*, Appl. Math. Comput, 262 (2015), 56-78.

Résumé

Le but de ce mémoire est l'étude d'analyse asymptotique d'un fluide incompressible dans un régime dynamique et mince de dimension trois avec des conditions aux limites mixtes et la loi de frottement de type Tresca.

D'abord, nous avons montré l'existence et l'unicité de la formulation variationnelle de problème.

Ensuite, On s'intéresse à l'analyse asymptotique du problème lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Dans une équation de Reynolds spécifique associée à des inégalités variationnelles est obtenue pour le problème.

Mots clés : Conditions aux limite , Probleme de Contact, Equation de Reynolds, Fluide de Stokes, Frottement de Tresca.

المخلص

هدف هذه المذكرة هو دراسة التحليل المقارب لسفل غير قابل للضغط في نظام ديناميكي رقيق ذو بعد ثالث مع شروط حدية مختلطة و قانون الاحتكاك من نوع تريسكا .

أولا أثبتنا وجود وحدانية الصيغة المتغيرة للمشكلة . ثم اهتمنا بالتحليل المقارب للمشكلة عندما يؤول السمك الى الصفر في معادلة رينولتز المحددة المرتبطة بالمتراجحات المتغيرة المتحصل عليها من المسألة.

الكلمات المفتاحية : الشروط الحدية ، مسألة الاتصال ، معادلة رينولتز ، سائل ستوكس ، إحتكاك تريسكا

Abstract

The purpose of this thesis is the study of asymptotic analysis for incompressible fluid in a dynamic and thin regime with a third dimension with mixed condition in the limits and tresca type friction law .

First , we have proved the uniqueness end the existence of variation formulation of the problems . Then we are interested in the asymptotic analysis of the problem when the thickness tends to zero in a specific Reynolds equation associated to variation inequalities is obtained for the problem

Keywords: conditions on the limits , contact problem, Reynolds equation , stokes fluid , tresca friction