الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي
كلية التكنولوجيا
قسم هندسة الطرائق والبتروكيمياء

مكانيك الموائع

المطبوعة موجهة إلى طلبة: السنة الثانية

هندسة الطرائق والبتروكيمياء

من إعداد: **د. زغود سمية**

أستاذ محاضر – ب–

zeghoud-soumeia@univ-eloued.dz

الموسم الجامعي:2025-2026

المقدمة			1
الفصل الأول: عموميات			
.1	مفهوم المائع		5
.2	حالات المادة		6
.3	الموائع المثالية والحقيقية		7
.4	الموائع القابلة للانضغاط وغير القابلة للانضغاط		7
.5	وصف حركة المائع		7
.6	خطوط التدفق والمسارات		8
	.1.6	خطوط التدفق (Streamlines)	8
	.2.6	المسارات (Particle Paths)	8
.7	أنماط التدفق: أنماط السرعة		9
.8	تذكير بالتحليل المتجهي وعناصر الحساب الإندكسي		12
	.1.8	التحليل المتجهي في ميكانيكا الموائع	12
	.2.8	أهمية التحليل المتجهي في ميكانيكا الموائع	12
	.3.8	مفاهيم التحليل المتجهي الأساسية وتطبيقاتها في ميكانيكا الموائع	12
سلسلة تمارين محلولة			14
سلسلة تمارين مقترحة			18
الفصل الثاني: الخصائص الفيزيائية للموائع			
.1	نظام الوحدات		21
.2	خصائص الموائع		21
	.1.2	الكتلة الحجمية الكثافة (Density)	21
	.2.2	الكثافة (Densité)	22
	.3.2	الحجم النوعي (Specific Volume)	22
	.4.2	الوزن أو الثقل النوعي (Specific weight)	22
	.5.2	الانضغاطية	23
	.6.2	معامل المرونة	24
	.7.2	اللزوجة (Viscosity)	24
.3	التوتر (الشد) السطحي		26
.4	خاصية الأنابيب الشعرية		28
.5	المشكلات أو المسائل الرياضية لميكانيك الموائع		29
	.1.5	حفظ الكتلة (Conservation of mass)	29
	.2.5	حفظ كمية الحركة	29

	.3.5	حفظ الطاقة (Conservation of energy)	**30**
.6		المشتقة الجزيئية	30
		سلسلة تمارين محلولة	**31**
		سلسلة تمارين مقترحة	34
		الفصل الثالث: الموائع الساكنة	
.1		الضغط (Pressure)	**37**
	.1.1	مفهوم الضغط	37
	.2.1	وحدات الضغط	**37**
	.3.1	الضغط المطلق (Absolute pressure) والضغط النسبي (Relative pressure)	37
.2		القانون الأساسي للموائع الساكنة (علو (سمت) الضغط)	**38**
.3		تغيرات الضغط لمائع في حالة السكون	39
	.1.3	قاعدة باسكال	**39**
	.2.3	تطبيقات قاعدة باسكال – المكبس الهيدروليكي-	40
.4		قاعدة أرخميدس وقواعد الطفو	**41**
	.1.4	وزن السائل المزاح	41
	.2.4	العلاقة بين وزن الجسم في الهواء ووزنه وهو مغمور في الهواء	**41**
.5		قياس الضغط	41
	.1.5	مقياس بوردن	**42**
	.2.5	البارومتر	42
	.3.5	المانومترات	**43**
.6		قوى الضغط على أسطح الجدران	45
	.1.6	تعريف	**45**
	.2.6	حالة سطح مستو عمودي	45
	.3.6	حالة السطح المسطح المائل	**47**
	.4.6	الضغط المؤثر على سطح منحني	49
		سلسلة تمارين محلولة	52
		سلسلة تمارين مقترحة	56
		الفصل الرابع: حفظ الكتلة	
.1		نظرية لايبنتز (Leibniz's theorem)	59
	.1.1	نبذة تاريخية	**59**
	.2.1	الصيغة الرياضية	**59**
	.3.1	أهميتها في ميكانيك الموائع	60
	.4.1	استخدامها	**60**

.2	معادلة الاستمرارية	61
.1.2	تعريف	**61**
.2.2	المبدأ الفيزيائي الأساسي	61
.3.2	اشتقاق معادلة الاستمرارية	62
.4.2	حالات خاصة هامة لمعادلة الاستمرارية	**64**
.3	حفظ التدفق (Flow Conservation)	64
.1.3	تعريف	**65**
.2.3	اشتقاق مبدأ حفظ التدفق	65
.3.3	أنواع التدفق	**66**
.4.3	العلاقات الرياضية لحفظ التدفق	67
.5.3	حالات خاصة لأنظمة التدفق	**67**
	سلسلة تمارين محلولة	68
	سلسلة تمارين مقترحة	**72**
	الفصل الخامس: الموائع المثالية	
.1	مراجعة في ميكانيك الموائع	**75**
.1.1	قوانين نيوتن للحركة	**75**
.2.1	طاقة السائل المتحرك	75
.2	نظرية كمية الحركة	**75**
.1.2	صياغة نظرية كمية الحركة	76
.2.2	تبسيط للحالات الشائعة (تدفق مستقر وأحادي البعد)	**77**
.3	معادلات أويلر	78
.1.3	الصيغة العامة لمعادلات أويلر	**78**
.2.3	الافتراضات	78
.3.3	اشتقاق معادلة أويلر	**79**
.4.3	الصيغة في الأبعاد الثلاثة	80
.5.3	الحالة الخاصة: التدفق المستقر	**80**
.6.3	العلاقة مع نظرية برنولي	80
.4	معادلة برنولي	**80**
.1.4	الصيغة الرياضية	80
.2.4	اشتقاق نظرية برنولي	81
.3.4	معادلة برنولي عند نقطة	**82**
.4.4	أشكال معادلة برنولي	82
.5	تطبيقات حول معادلة برنولي	**84**

	.1.5	أنبوب بيتوت Pitot Tube	84
	.2.5	مقياس فنتوري	**85**
	.3.5	تفريغ خزان بشكل غير مستقر	87
	.4.5	التحليل غير المستقر	**88**
.6		تصريف الهواء من خزان مضغوط: حدود القابلية للانضغاط	88
	.1.6	المبادئ الأساسية	**88**
	.2.6	معادلات التحليل	89
	.3.6	اشتقاق معدل التدفق المختنق	**90**
سلسلة تمارين محلولة			91
سلسلة تمارين مقترحة			**95**
المراجع			**97**

بسم الله الرحمن الرحيم

يسرنا أن نقدم لكم هذه المطبوعة التعليمية في مقياس "ميكانيكا الموائع"، المصممة خصيصا لطلبة السنة الثانية في تخصص **هندسة الطرائق والبتروكيمياء**، تأتي هذه المطبوعة كدليل عملي ونظري يربط بين المفاهيم الأساسية لحركة الموائع وتطبيقاتها الحيوية في المجال الصناعي، خاصة في صناعة النفط، الغاز، والعمليات الكيميائية.

حيث يشكل هذا المقياس ركيزة أساسية لتطوير المهارات الهندسية التي تمكن الطلبة من تصميم وتحليل الأنظمة الهندسية المعقدة، مثل خطوط الأنابيب، المضخات، المبادلات الحرارية، المفاعلات الكيميائية، وأنظمة التحكم في التدفق، وهي عناصر لا غنى عنها في الصناعات البتروكيميائية وهندسة العمليات.

يركز هذا المقياس على دراسة السوائل المثالية، وهي نموذج افتراضي يفترض أن السوائل غير قابلة للانضغاط وخالية من اللزوجة، مما يسهل التحليل الرياضي ويوفر أساساً متيناً لفهم الظواهر الفيزيائية. تشمل المطبوعة موضوعات أساسية مثل:

- تذكير بمبادئ ميكانيك الموائع، لتعزيز فهم الطلبة للمفاهيم الأساسية مثل الضغط، السرعة، والتدفق.
- نظرية كمية الحركة، التي تشرح كيفية تأثير القوى على تدفق السوائل.
- معادلات أويلر، التي تصف حركة السوائل المثالية في ظروف التدفق الدائم وغير الدائم.
- نظرية برنولي، التي تربط بين الضغط، السرعة، والارتفاع في توازن الطاقة.
- تطبيقات عملية، مثل سوندة بيتو لقياس سرعة التدفق، فوهة فنتوري لتحليل التدفق في الأنابيب، وتفريغ الخزانات غير الدائم، بالإضافة إلى دراسة حدود الضغط في تفريغ الهواء من خزانات مضغوطة.

من خلال دراسة هذا المقياس، سيتمكن الطلبة من تحقيق الأهداف التالية:

- إتقان المبادئ النظرية: فهم القوانين الفيزيائية والرياضية التي تحكم سلوك السوائل.
- تطوير مهارات التحليل: القدرة على حل المسائل الهندسية المعقدة باستخدام الأدوات الرياضية والمفاهيم النظرية.
- ربط النظرية بالتطبيقات العملية: تطبيق المعرفة على سيناريوهات هندسية حقيقية، مثل تصميم أنظمة الأنابيب أو تحليل أداء المعدات في الصناعات البتروكيميائية.
- فهم التحديات الهندسية: التعرف على حدود النماذج النظرية، مثل تأثير الضغط في التدفقات القابلة للانضغاط، وهي ذات أهمية خاصة في تصميم الأنظمة عالية الضغط.

يلعب ميكانيك الموائع دورا حيويا في الصناعات البتروكيميائية، حيث يستخدم في تصميم وتشغيل وصيانة الأنظمة التي تتعامل مع تدفق النفط، الغاز، والمنتجات الكيميائية، على سبيل المثال فهم ديناميكيات التدفق في خطوط الأنابيب يساعد على تحسين كفاءة النقل وتقليل الخسائر. كما أن تطبيقات مثل فوهة فنتوري وسوندة بيتو تستخدم على نطاق واسع في قياس التدفق وضمان السلامة في العمليات الصناعية. بالإضافة إلى ذلك، فإن دراسة التدفقات القابلة للانضغاط تمكن المهندسين من تصميم أنظمة فعالة لتفريغ الغازات أو تشغيل المعدات في بيئات الضغط العالي.

الأستاذة : د. زغود سمية

تم تصميم هذه المطبوعة لتغطي خمسة فصول للموسم الدراسي، حيث يتم تقديم المفاهيم النظرية بشكل تدريجي مع التركيز على التطبيقات العملية، وسيتم تعزيز الفهم من خلال:

- محاضرات نظرية لشرح المبادئ الأساسية.
- تمارين وحل مسائل لتطبيق المفاهيم.

نأمل أن تكون هذه المطبوعة دليلا شاملا يدعم الطلبة في بناء أساس قوي في ميكانيك الموائع، مما يمهد الطريق لتفوقهم الأكاديمي والمهني في مجالات هندسة الطرائق والبتروكيمياء، نسعى من خلال هذا المقياس إلى إلهام الطلبة لاستكشاف التحديات الهندسية بثقة وإبداع.

الفصل الأول

عموميات

الهدف العام:

تمكين الطلاب من فهم وتحليل حركة الموائع المثالية (غير اللزجة وغير القابلة للانضغاط) باستخدام النظريات الأساسية مثل معادلات أويلر ونظرية برنولي، وتطبيق هذه المفاهيم على أنظمة عملية مثل الأنابيب والخزانات وأجهزة القياس الهيدروديناميكية.

أهداف الفصل: في نهاية هذا الفصل، يجب أن يكون الطالب قادرًا على:

- فهم تعريف ميكانيكا الموائع والتمييز بين فروعها.
- ربط خطوط التدفق بملفات السرعة.
- حل المشكلات باستخدام المعادلات الرياضية.

ميكانيكا الموائع هو علم الميكانيكا التطبيقية الذي يدرس سلوك الموائع (السوائل والغازات) في حالة السكون والحركة والقوى الداخلية المرتبطة بها. ينقسم علم ميكانيكا الموائع إلى قسمين يهتم القسم الأول بدراسة الموائع الساكنة (Hydrostatics) والقسم الآخر بدراسة الموائع الجارية (Hydrodynamics)، و هناك علم ديناميكا الهواء(Aerodynamics) والذي يختص عموماً بحركة الطائرات والمركبات الفضائية ، وعلم آخر هو علم ديناميكا الماء(Hydrology) ويهتم بتدفقات المياه، فبدون تدفقات الموائع لا يمكن أن تستمر الحياة على كل صورها، و ففي جسم الإنسان يجري الماء والأملاح والدم والأكسجين وهي عبارة عن موائع وتطفو العينين في موائع تمنحها سهولة الحركة وتتحرك على الأرض الرياح والمياه لتمنح الأرض حيويتها وبقائها، فيحيط بالأرض الغلاف الجوي الذي يحمي الأرض من العديد من المخاطر، وفي باطن الأرض حمم ومياه وبترول.

لقد وضع العالم أسحق نيوتن القواعد الأساسية لوصف تدفقات الموائع ولقد أسهم في وضع أسس خصائص الموائع وقوى الاحتكاك بين جزيئات الموائع. وهناك علماء كثيرون قدموا مساهمات مماثلة في تطوير وتقدم علم ميكانيكا الموائع مثل فنتوري (Venturi) و بيتوت (Pitot) اللذان صنعا أجهزة لقياس ضغط الموائع و ساعد بيتوت في فهم ضغط الركود Stagnation (Pressure) والنقاط التي يكون عندها، و بيرنولي (Bernoulli) الذي وضع علاقة ضغط المائع بسرعته ووضع بوازيل(Poiseuille) وستوكس(Stokes) ورينولدس (Reynolds) العلاقة بين تدفق الموائع اللزجة في الأنابيب (مثل حركة الدم في الشرايين) ووضع العالم أويلر(Euler) قانون تدفق المائع المثالي، ووسع العالمان لاجرانج (Lagrange) ونافيير (Navier) دراساتهم عن ميكانيكا الموائع.

تستند ميكانيكا الموائع إلى قوانين أساسية مثل: حفظ الكتلة (Continuity Equation)، حفظ كمية الحركة (Navier-Stokes Equations)، حفظ الطاقة (Bernoulli's Equation).

1. مفهوم المائع

المائع هو جسم ليس له شكل محدد ويمكن تشوهه بسهولة، حيث تعتبر السوائل والغازات موائع، وكذلك الأجسام الأكثر تعقيدًا مثل البوليمرات، و يشتمل المائع بشكل أساسي على حالتين فيزيائيتين: الحالة الغازية والحالة السائلة.

يمكن اعتبار المائع مادة تتكون من عدد كبير من جسيمات مادية صغيرة جدًا تتحرك بحرية بالنسبة لبعضها البعض ، وبالتالي فهو وسط مادي مستمر، قابل للتشوه، وغير صلب، وقادر على التدفق.

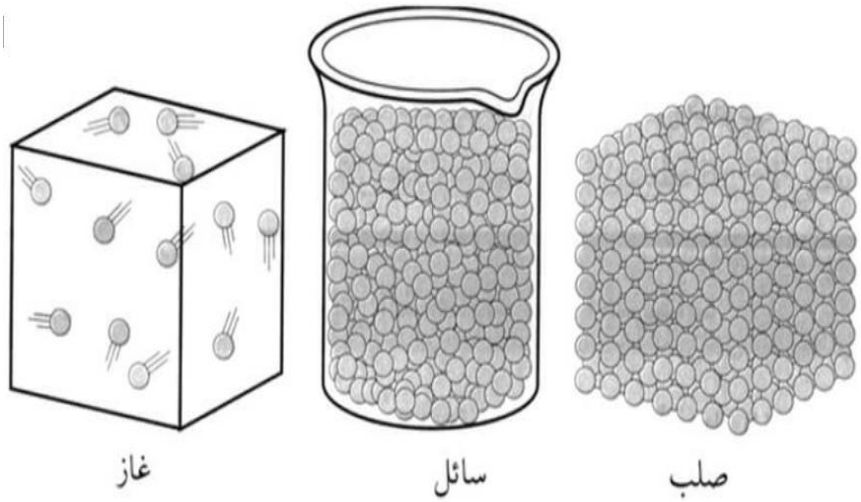
- **مستمر**: تتغير خصائصه باستمرار، وهي خصائص لا تُعتبر مميزة لنقطة بلا حجم، بل لجسيم، أي حجم صغير جدًا من المائع حول نقطة هندسية؛ على سبيل المثال، تُحدد لكل نقطة P، لكل لحظة t، كثافة ρ تمثل عدد الجزيئات داخل حجم الجسيم dV؛
- **قابل للتشوه (ليس له شكل خاص)**: يمكن للجزيئات أن تنزلق بسهولة فوق بعضها البعض؛ هذه الحركة تجعل المائع يتخذ شكل الوعاء الذي يحتويه؛

- **قابل للتدفق:** ولكن يمكن لأي مائع أن يتدفق بسهولة أو أقل من وعاء إلى آخر أو عبر أنبوب: يمكن أن تظهر قوى احتكاك تعيق انزلاق جسيمات المائع على بعضها البعض لأن أي مائع حقيقي له لزوجة.

2. حالات المادة

تتكون المادة من ذرات أو جزيئات أو أيونات. ترتبط هذه الجسيمات ببعضها بواسطة قوى رابطة (تساهمية، أيونية، معدنية، روابط فاندرفال، أو روابط هيدروجينية)، و بناء على مقدار القوة التي تربط هذه المكونات معا، تميز ثلاث حالات للمادة: الصلبة، والسائلة، والغازية (**الشكل (1)**) ، عمليا يشمل مفهوم الموائع كلا من السوائل والغازات.

- **الحالة الصلبة (مرتبة: مرتبة على نطاق واسع أو غير متبلورة: بلا ترتيب):** تكون الذرات في مواقع ثابتة في الفضاء. قوى التفاعل قوية ، لذلك لا يمكن للذرات أن تهتز إلا حول موضع توازنها بسعات صغيرة.
- **الحالة الغازية:** الذرات متفرقة في الفضاء. لا يوجد حجم محدد، والضغط ممكن، قوى التماسك ضعيفة (معظمها قوى تنافر). الحركة ممكنة، وهي حركة غير منظمة (براونية) مع تفاعلات قائمة على التصادم.
- **الحالة السائلة:** هي الحالة الوسيطة بين الحالتين السابقتين، لذلك يمكن اعتباره مادة صلبة غير منظمة أو غازًا كثيفًا جدًا، و ذراته متقاربة، وبالتالي لها حجمها الخاص ، و يعد السائل غير قابل للانضغاط نسبيًا مقارنة بالغاز، وبتالي إن الحركته ممكنة، ولهذا السبب يُقال إن السائل قابل للتدفق ، لكن قوى التجاذب بين جزيئاته غير كافية لتثبيت الذرات في مكانها (الحركة الانتقالية والدورانية).



الشكل (1): حالات المادة.

يحدث الانتقال من حالة للمادة إلى أخرى من خلال التحولات الطورية أثناء تغير ترموديناميكي للحالة ناتج عن تغير في ضغطها ودرجة حرارتها و/أو حجمها، إن التحولات الطورية أو تغيرات الحالة هي (**الشكل (2)**):

1 الانصهار: هو تحول المادة من الحالة الصلبة إلى السائلة.

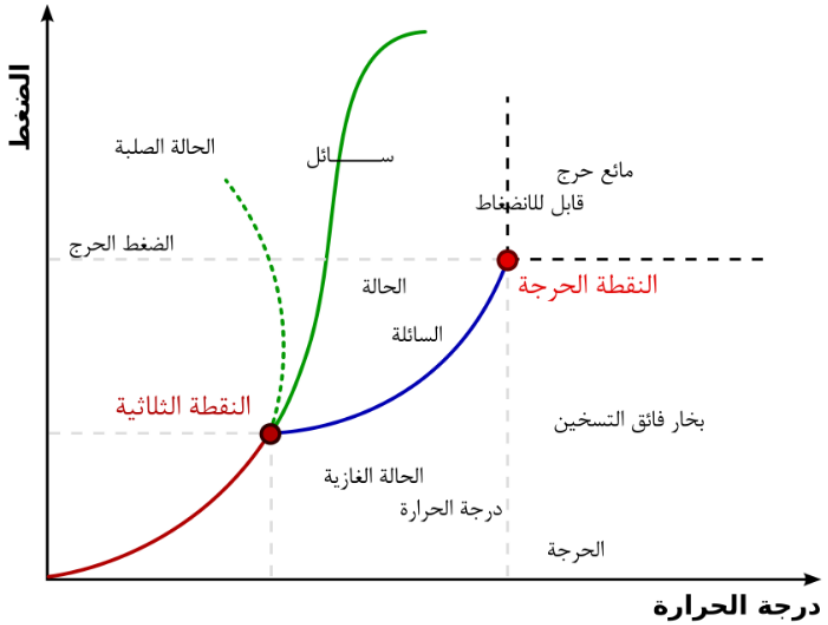
2 التسييل (التكثيف): هو التحول من الحالة الغازية إلى السائلة.

3- التصلب (التكثيف أو الترسيب): هو الانتقال من الحالة الغازية إلى الحالة الصلبة.

4- التغويز (التبخر): هو تحول السائل إلى بخار.

5- التصلب: هو عكس الانصهار، ويُسمى أيضًا التجميد عندما يحدث التحول في درجات حرارة منخفضة.

6- التسامي: هو الانتقال من الحالة الصلبة إلى الغازية، و تتضمن التحولات 1 و4 و6 امتصاص الطاقة، بينما تتضمن التحولات 2 و5 و3 إطلاق الحرارة.



(**الشكل (2)**: التحولات الطورية للمادة.

على سبيل المثال، عند درجة حرارة $T_0 = 273$ كلفن وضغط $P_0 = 1$ ضغط جوي، يكون الماء في ثلاث حالات (تتواجد جميعها في الحالة الصلبة والسائلة والغازية). هذه هي النقطة الثلاثية للماء في مخطط (P, T).

3. الموائع المثالية والحقيقية

المائع المثالي هو المائع الذي لا يمكن ضغطه وليس له لزوجة أي تنعدم قوى الإحتكاك (لاتوجد مقاومة للحركة) بين طبقاته أثناء الجريان، ولكنه غير موجود فعليًا إذ أنّ جميع السوائل الموجودة في الطبيعة تسمى بالسوائل الحقيقية.

4. الموائع القابلة للانضغاط وغير القابلة للانضغاط

يقال إن المائع غير قابل للانضغاط عندما لا يتغير الحجم الذي تشغله كتلة معينة كدالة للضغط الخارجي، و يمكن اعتبار (الماء والزيت وما إلى ذلك) موائع غير قابلة للضغط، و يقال إن المائع قابل للانضغاط عندما يتغير الحجم الذي تشغله كتلة معينة كدالة للضغط الخارجي،حيث الغازات هي موائع قابلة للضغط، على سبيل المثال يعتبر الهواء وغاز البوتان في الحالة الغازية موائع قابلة للضغط.

5. وصف حركة المائع

يمكن وصف حركة الموائع باستخدام طريقتين رئيسيتين:

- **الطريقة اللاغرانجية:** يتم تتبع جسيم مائع فردي كدالة زمنية من خلال رسم موقعه وسرعته وتسارعه.
- **الطريقة الأويلرية:** يتم تحليل مجال سرعة المائع عند نقطة ثابتة في الفضاء كدالة زمنية، دون تتبع جسيم محدد.

يمكن وصف الحركة بمعلمات مثل السرعة (x، y، z، t)، والضغط (P)، والكثافة (ρ)، واللزوجة (υ)، وتصف المعادلات الأساسية تشمل معادلة الاستمرارية (Continuity Equation) ومعادلات Navier-Stokes، التي تجمع هذه الكميات، ديناميكيات السوائل اللزجة.

6. خطوط التدفق والمسارات

1.6.خطوط التدفق (Streamlines)

- التعريف:

هي خطوط وهمية ترسم في حقل التدفق عند لحظة زمنية معينة، بحيث يكون المتجه المماس لكل نقطة على الخط هو اتجاه متجه السرعة لجزيئة المائع عند تلك النقطة في تلك اللحظة، بمعنى آخر هي خطوط لا يمكن لجزيئة مائع أن تقطعها، لأنها ستكون متحركة في اتجاه مختلف عن المماس في تلك النقطة ، و تمثل الاتجاه اللحظي للسرعة في التدفق ، و في تدفق مستقر (Stationary Flow)، تتطابق خطوط التدفق مع المسارات ، و تُعرف رياضيًا بأنها خطوط تكون متجهات السرعة $\vec{v}$ فيها مماسية:

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x}$$

- الخصائص:

✓ لحظية (Instantaneous): تمثل خطوط التدفق صورة "لقطة" للتدفق في لحظة معينة.

✓ لا تتقاطع: لا يمكن لخطين تدفق أن يتقاطعا، لأنه إذا تقاطعا، فهذا يعني أن هناك اتجاهين للسرعة عند نقطة التقاطع، وهو أمر مستحيل في التدفق الفيزيائي.

✓ كثافة الخطوط: تشير كثافة خطوط التدفق (تقاربها أو تباعدها) إلى سرعة المائع، فكلما كانت خطوط التدفق متقاربة، دل ذلك على سرعة تدفق أعلى في تلك المنطقة.

✓ عمودية على الضغط: في التدفق المستقر وغير اللزج، تكون خطوط التدفق عمودية على خطوط تساوي الضغط.

✓ لا يوجد تدفق عمودي عليها: لا يوجد تدفق عبر خطوط التدفق، أي أن المائع يتدفق دائمًا بموازاة خطوط التدفق.

2.6. المسارات (Particle Paths)

- التعريف:

هي المسارات الفعلية التي تتبعها الجسيمات مع مرور الزمن ، في التدفق غير المستقر (Unsteady Flow)، قد تختلف المسارات عن خطوط التدفق.

- الخصائص:

✓ تتبع جزيئة واحدة (Lagrangian Description): تركز المسارات على حركة جزيئة مائع واحدة على مدى فترة زمنية.

✓ تاريخية (Time-dependent): تعتمد المسارات على تاريخ حركة الجزيئة وتتغير بتغير الزمن.

✓ قد تتقاطع: في التدفقات غير المستقرة، يمكن للمسارات أن تتقاطع، حيث يمكن لجزيئتين مختلفتين أن تمرّا بنفس النقطة في أوقات مختلفة.

✓ يمكن أن تكون خطوطاً متعرجة: في التدفقات المضطربة أو غير المستقرة، قد تكون المسارات متعرجة جدًا.

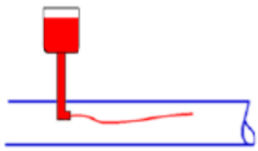
7. أنماط التدفق: أنماط السرعة

تصف أنماط التدفق كيفية تغير السرعة في مائع، وتعتمد أنماط السرعة على الشكل الهندسي، والظروف الحدية، وخصائص المائع (اللزوجة، والانضغاطية). وتنقسم إلى:

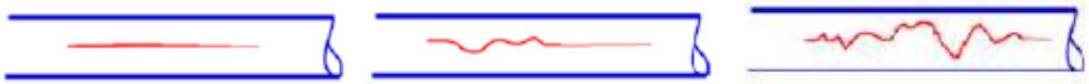
- **التدفق الصفائحي**: تتبع جسيمات المائع مسارات متوازية، وغالبًا ما يكون نمط سرعتها مكافئًا (مثل التدفق في أنبوب لسائل لزج).
- **التدفق المضطرب**: تكون الحركة فوضوية، مع دوامات وتقلبات في السرعة ويكون نمط السرعة أكثر تسطحًا في المنتصف.
- **التدفقات النوعية**: على سبيل المثال، تدفق كويت (بين لوحين في حركة نسبية) أو تدفق بوازوي (في أنبوب أسطواني).
- **تجربة رينولدز**

تعد معرفة نظام تدفق السوائل نقطةً أساسيةً في هندسة العمليات، إذ تؤثر على معظم الظواهر، وخاصةً انتقال الحرارة والكتلة، وانخفاض الضغط، وغيرها.

في عام 1883، أجرى أوزبورن رينولدز (1842–1912)، أستاذ الهندسة في جامعة مانشستر، تجارب على تدفق السوائل في أنبوب أسطواني مستقيم، بحقن صبغة على طول محور الأنبوب (**الشكل (3)**)، لاحظ أنه عند السرعات المنخفضة، تبقى الصبغة مركزة بالقرب من المحور، وهي سمة مميزة للتدفق الصفحي المستقر (أ)، وعند السرعات/معدلات التدفق الأعلى، تتشكل هياكل دوامية متزايدة الطاقة، مما يُسبب انتشارًا سريعًا بسبب الاضطراب (ب وج)، الذي سيطر بشكلٍ كبير على الانتشار الجزيئي، والذي كان بالكاد يُلاحظ عند السرعات المنخفضة.



حقن الصبغة



أ) التدفق المضطرب ب) التدفق العابر ج) التدفق الصفائحي

الشكل (3): تجربة أوزبورن رينولدز.

باستخدام سوائل مختلفة (درجات لزوجة مختلفة)، مع تغيير معدل التدفق وقطر الأنبوب، أظهر رينولدز أن المعامل الذي يسمح بتحديد ما إذا كان التدفق صفائحيًا أم مضطربًا هو رقم بلا أبعاد يسمى رقم رينولدز Re وهو يعبر عن النسبة بين قوة القصور الذاتي $\rho \times v^2$ وقوة اللزوجة $\mu \frac{v}{d}$ ويُعطى بالعلاقة التالية:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\vartheta}$$

v: متوسط سرعة التدفق (m/s)

d: قطر الأنبوب (m)

μ: اللزوجة الديناميكية للسائل (Nm^2/s)

ϑ: اللزوجة الكينماتيكية للسائل (m^2/s).

- إذا كانت قيمة: $Re < 2000$ يكون التدفق صفائحيًا.
- إذا كانت قيمة: $Re < 2000$ يكون التدفق عابرًا.
- إذا كانت قيمة: $Re > 3000$ يكون التدفق مضطربًا.

قد تختلف هذه القيم قليلاً من هيكل إلى آخر، ولكن عمليًا، تكون القيم واضحة، ستكون أعلى أو أقل بكثير من هذه الحدود، في التدفقات المضطربة تعد قيمة Re بالغة الأهمية، ويمكن أن تتراوح بين 10^5 و 10^8.

في حالة الأنابيب غير الدائرية، نعرف ما يسمى بالقطر الهيدروليكي d_H:

$$d_H = 4 \frac{section\ droite\ de\ la\ conduite}{périmètre\ mouillé}$$

يمكن أيضا تعريف نصف القطر الهيدروليكي r_H بالنسبة لنصف قطر الأنبوب r :

$$r_H = \frac{section\ droite\ occupée\ par\ le\ fluide}{périmètre\ mouillé}$$

- في حالة الأنبوب الدائري ذي القطر d، نجد أن $d_H = d$.
- في حالة الأنبوب المربع، يكون القطر الهيدروليكي هو ببساطة ضلع المربع.
- في حالة السائل المتدفق في فراغ حلقي، يمكننا إثبات أن $dH = 2 \times e = d_{ext} - d_{int}$ ، حيث e هو سمك الفراغ الحلقي.

مثال توضيحي:

إذا كان حقل السرعة لتدفق مستقر هو $\vec{v} = (2x, -3y, 0)$، احسب معادلة خط التدفق الذي يمر عبر النقطة $(1,1,0)$.

الحل:

معادلة خط التدفق تُحسب باستخدام:

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x}$$

حيث: $\vec{v} = (2x, -3y, 0)$

نحصل على:

$$\frac{dz}{0} = \frac{dy}{-3y} = \frac{dx}{2x}$$

للعلاقة بين: x و y

$$\frac{dy}{-3y} = \frac{dx}{2x}$$

$$C_1 + ln\left|\left(-\frac{1}{3}y\right)\right| = ln|2x|$$

$$C_1 + \ln\left|y^{-\frac{1}{3}}\right| = \ln\left|x^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$\left|Cy^{-\frac{1}{3}}\right| = |x|^{\frac{1}{2}}$$

$$C = x^{\frac{3}{2}}y$$

باستخدام النقطة $(1, 1, 0)$:

$$C = 1^{\frac{3}{2}} \times 1 = 1$$

إذن:

$$x^{\frac{3}{2}}y = 1 \Rightarrow y = x^{-\frac{3}{2}}$$

بالنسبة لـ z:

$$\frac{dz}{0} = 0 \Rightarrow z = const$$

بما أن النقطة الأولية هي $(1, 1, 0)$، فإن $z = 0$

النتيجة: معادلة خط التدفق هي: $y = x^{-\frac{3}{2}}$، $z = 0$

8. تذكير بالتحليل المتجهي وعناصر الحساب الإندكسي

1.8. التحليل المتجهي في ميكانيكا الموائع

يعد التحليل المتجهي أداة رياضية أساسية في ميكانيكا الموائع، حيث توصف حركة السوائل والغازات (الميدان الجرياني) باستخدام مجالات متجهية مثل السرعة، التسارع، القوة، والضغط، ويعتمد النموذج الرياضي للجريان على معادلات تفاضلية متجهية، أبرزها معادلات نافييه–ستوكس، التي تصف حفظ الكتلة، كمية الحركة، والطاقة.

يعد التحليل المتجهي (Vector Analysis): أداة رياضية أساسية لا غنى عنها في فهم ودراسة ميكانيكا الموائع، فهو يوفر اللغة الرياضية اللازمة لوصف وتفسير سلوك الموائع بدقة، سواء كانت سوائل أو غازات، في حالات السكون والحركة.

2.8. أهمية التحليل المتجهي في ميكانيكا الموائع

يكمن جوهر ميكانيكا الموائع في التعامل مع الكميات التي لها اتجاه ومقدار، مثل السرعة، والقوة، والضغط، والتدفق، هنا يأتي دور التحليل المتجهي، حيث يمكننا من:

- وصف الحقول الكمية: يمكن وصف خصائص الموائع كحقول كمية (مثل حقل السرعة $V(x,y,z,t)$، وحقل الضغط $P(x,y,z,t)$، وحقل درجة الحرارة $T(x,y,z,t)$) باستخدام المتجهات والدوال القياسية.
- صياغة القوانين الفيزيائية: تعتمد القوانين الأساسية لميكانيكا الموائع، مثل قوانين الحفظ (حفظ الكتلة، حفظ الزخم، حفظ الطاقة)، بشكل كبير على مفاهيم التحليل المتجهي.
- تحليل الحركة والتدفق: يوفر التحليل المتجهي الأدوات اللازمة لتحليل حركة جزيئات المائع، وتحديد خصائص التدفق مثل الدوامية ((Vorticity) والتباعد (Divergence).

3.8. مفاهيم التحليل المتجهي الأساسية وتطبيقاتها في ميكانيكا الموائع

تتضمن المفاهيم الرئيسية للتحليل المتجهي المستخدمة في ميكانيكا الموائع ما يلي:

- المتجهات والكميات القياسية:

✓المتجهات (Vectors): تستخدم لتمثيل الكميات التي لها مقدار واتجاه، مثل السرعة $\vec{v}$ (سرعة جزيئة المائع عند نقطة معينة)، والقوة $\vec{F}$ (مثل قوى اللزوجة أو الجاذبية المؤثرة على المائع).

✓الكميات القياسية (Scalars): تستخدم لتمثيل الكميات التي لها مقدار فقط، مثل الضغط P، والكثافة μ، ودرجة الحرارة T.

- المشتقات المتجهية (Vector Derivatives):

✓لتدرج (Gradient) ∇: يمثل معدل التغير المكاني لدالة قياسية (مثل حقل الضغط أو درجة الحرارة) في اتجاه أقصى زيادة، على سبيل المثال ∇P يشير إلى الاتجاه الذي يتغير فيه الضغط بأسرع ما يمكن، وهو أساس فهم قوى الضغط المؤثرة على المائع.

✓التباعد (Divergence) $\nabla \cdot V$: يقيس صافي التدفق لخارج حجم معين، في ميكانيكا الموائع، يشير $\nabla \cdot V$ إلى مدى تمدد أو انكماش المائع عند نقطة معينة، إذا كان $\nabla \cdot V = 0$ ، فهذا يعني أن المائع غير قابل للانضغاط (Incompressible).

✓التفاف (Curl) $\nabla \times V$: يقيس مدى "دوران" أو "التفاف" حقل متجهي، في ميكانيكا الموائع، يمثل $\nabla \times V$، الدوامية (Vorticity)، وهي مقياس لدوران جزيئات المائع حول نفسها، إذا كان $\nabla \times V = 0$، فإن التدفق يكون غير دوراني (Irrotational).

✓المؤثر التفاضلي المتجهي (Laplacian) $\nabla^2 \phi$: هو تطبيق متكرر للمشتقات المتجهية، وله تطبيقات في معادلات الانتشار الحراري ومعادلات نافييه–ستوكس.

سلسلة تمارين محلولة

التمرين الأول: يعطى حقل سرعة ثنائي الأبعاد لمائع غير قابل للانضغاط بواسطة:

$$\vec{V}(x,y,t) = (ax+bt)\hat{\imath} + (cx+dy)\hat{\jmath}$$

حيث a,b,c,d ثوابت.

أ) هل هذا التدفق مستقر (Steady) أم غير مستقر (Unsteady)؟ ولماذا؟

ب) ما هي شروط الثوابت a,b,c,d ليكون المائع غير قابل للانضغاط؟

الحل:

أ) تحديد إذا كان التدفق مستقرا أو غير مستقر:

- تدفق مستقر: إذا كان حقل السرعة لا يعتمد على الزمن، أي: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$.
- تدفق غير مستقر: إذا كان حقل السرعة يعتمد على الزمن.

ومنه التدفق غير مستقر لأن: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = b\hat{\imath} \neq 0$

ب) شروط الثوابت a,b,c,d لكي يكون المائع غير قابل للانضغاط

- عدم قابلية الانضغاط
- أن يكون تباعد السرعة (Divergence) مساويًا للصفر: $\nabla \cdot \vec{\mathrm{V}} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} = 0$

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{V}} = \frac{\partial(ax+bt)}{\partial x} + \frac{\partial(cx+dy)}{\partial \mathrm{y}} = a + d = 0$$

$$\Longrightarrow a = -d$$

ومنه: إذا تحقق الشرط a=−d، يكون التدفق غير قابل للانضغاط بغض النظر عن قيم b و c .

التمرين الثاني: حقل سرعة لتدفق مستقر ثنائي الأبعاد يُعطى بالمعادلة:

$$V(x,y) = 2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath}$$

أوجد معادلة خطوط التيار لهذا التدفق.

الحل:

1. معادلة خطوط التيار

خطوط التيار هي منحنيات تكون مماسية لمتجه السرعة عند كل نقطة. تُحسب من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

حيث:

$u = 2x$ (مركبة x للسرعة)،

$v = -2y$ (مركبة y للسرعة).

2. التعويض في المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-2y}$$

$$\frac{1}{2}ln|x| = -\frac{1}{2}ln|y| + C$$

$$ln|x| = -ln|y| + 2C$$

أعيد تعريف الثابت: $lnk = 2C$ (حيث k ثابت جديد):

$$ln|x| + ln|y| = lnk$$

$$\Rightarrow \quad ln|xy| = lnk \quad \Rightarrow \quad xy = k$$

(يمكن تجاهل القيمة المطلقة إذا اعتبرنا k موجبًا أو سالبًا).

3. المعادلة النهائية لخطوط التيار

$$xy = k$$

حيث k ثابت يختلف لكل خط تيار.

التمرين الثالث:

لديك حقل سرعة ثلاثي الأبعاد:

$$\vec{V}(x,y,z) = (x^2 + yz)\hat{\imath} + (xy^2)\hat{\jmath} + (z^3)\hat{k}$$

أ) حساب تباعد حقل السرعة $(\nabla \cdot \vec{V})$، نوع التدفق؟

ب) حساب دوران حقل السرعة $(\nabla \times \vec{V})$، نمط التدفق؟

الحل:

أ) حساب تباعد حقل السرعة $(\nabla \cdot \vec{V})$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

حيث: $u = x^2 + yz,\ v = xy^2,\ w = z^3$

نحسب المشتقات:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz) = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3z^2$$

ومنه عبارة التباعد الكلي لحقل السرعة: $\nabla \cdot \vec{V} = 2x + 2xy + 3z^2$

التدفق قابل للانضغاط: $\nabla \cdot \vec{V} \neq 0$

ب) حساب دوران حقل السرعة $(\nabla \times \vec{V})$

الدوران في الاحداثيات الديكارتية:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

نحسب المركبات (x, y, z)

- المركبة x

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2) = 0 - 0 = 0$$

- المركبة y

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + yz) - \frac{\partial}{\partial x}(z^3) = y - 0 = y$$

- المركبة z

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + yz) = y^2 - z$$

ومنه عبارة ناتج الدوران: $\nabla \times \vec{V} = 0\hat{i} + y\hat{j} + (y^2 - z)\hat{k} = y\hat{j} + (y^2 - z)\hat{k}$

$\nabla \times \vec{V} \neq 0$ هذا يعني أن طبيعة التدفق **دوامي**.

التمرين الرابع:

في تدفق مائع لزج غير قابل للانضغاط عبر أنبوب دائري (تدفق بوازيه)، تعرف السرعة بالمعادلة التالية:

$$u(r) = U_{max}(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

حيث:

$u(r)$ السرعة عند المسافة r من محور الأنبوب

U_{max}: السرعة القصوى.

R : نصف قطر الأنبوب.

أ) أين تكون السرعة أعظمية؟ وما هي قيمتها؟

ب) أين تكون السرعة معدومة؟

الحل:

أ) **موضع وقيمة السرعة الأعظمية:**

- الموضع: تكون السرعة أعظمية عند محور الأنبوب (حيث $r = 0$)، لأن الحد $\frac{r^2}{R^2}$ يصبح صفرا، مما يعطى أكبر قيمة لـ $u(r)$.
- القيمة:

$$u(0) = U_{max}(1 - 0) = U_{max}$$

القيمة القصوى للسرعة هي U_{max} وتقع عند المحور المركزي للأنبوب.

ب) انعدام السرعة:

- الموضع: السرعة تكون صفرًا عند جدار الأنبوب الداخلي (حيث $r = R$)، لأن الجدار ثابت (لا انزلاق) بسبب لزوجة المائع.
- القيمة: بالتعويض $r = R$ تكون قيمة السرعة

$$u(R) = U_{max}(1 - 1) = 0$$

سلسلة تمارين مقترحة

التمرين الأول:

يتحرك مائع في تدفق مستقر ثنائي الأبعاد حيث يعطى حقل السرعة بواسطة:

$$V(x,y) = (2x)\hat{\imath} + (3y)\hat{\jmath}$$

أ) أحسب المشتقة المادية لدرجة الحرارة $T(x,y,t) = x^2y + 5t$

ب) هل هذا التدفق غير قابل للانضغاط؟ ولماذا؟

التمرين الثاني:

يعطى حقل سرعة ثنائي الأبعاد لمائع بواسطة:

$$V(x,y) = (-Ay)\hat{\imath} + (Ax)\hat{\jmath}$$

حيث A ثابت موجب.

أ) أوجد معادلة خطوط التيار لهذا التدفق.

ب) هل هذا التدفق دوراني (Rotational) أم غير دوراني (Irrotational)؟

التمرين الثالث:

في تدفق مائع بين لوحين متوازيين، حيث يتحرك اللوح العلوي بسرعة U واللوح السفلي ثابت، وكان المائع لزجا، فإن بعبارة السرعة يعطى بواسطة:

$$u(y) = U\frac{y}{h}$$

حيث: $\mathrm{u(y)}$ هي السرعة في اتجاه x عند ارتفاع y من اللوح السفلي، U هي سرعة اللوح العلوي، و h هي المسافة بين اللوحين. (افترض أن التدفق في اتجاه x فقط).

أحسب التصريف الحجمي لكل وحدة عرض لهذا التدفق.

الفصل الثاني

الخصائص الفيزيائية للموائع

الهدف العام:

تمكين الطلاب من فهم وتحليل خصائص وسلوك الموائع الحقيقية (اللزجة) وتأثير اللزوجة على حركة المائع، من خلال دراسة معادلات نافييه–ستوكس، طبقة الحدود، الجريان الصفحي والاضطرابي، وتطبيقات عملية في الهندسة.

أهداف الفصل: في نهاية هذا الفصل يجب أن يكون الطالب قادرا على:

- التعرف على الخواص الفيزيائية للموائع.
- تطبيق مفهوم الكثافة والكثافة النسبية
- حساب اللزوجة الديناميكية واللزوجة الكينماتية (سينامیتیکیة)
- استخدام المعادلات الرياضية لحساب الكميات الفيزيائية مثل اللزوجة، التوتر السطحي، والانضغاطية.

تعد دراسة الخصائص الفيزيائية للموائع حجر الزاوية في فهم سلوك كل من السوائل والغازات، وهي أساسية لعديد من التطبيقات الهندسية والعلمية، فمن تدفق الدم في الأوردة والشرايين، إلى حركة الطائرات في الهواء، مرورًا بتصميم أنظمة الري وشبكات الأنابيب، تلعب هذه الخصائص دورًا حيويًا، و يهدف هذا الفصل إلى تقديم المفاهيم الأساسية التي تحكم طبيعة الموائع وتفاعلها مع القوى المحيطة بها، سنتناول هنا الكثافة، الانضغاطية، التوتر السطحي، واللزوجة ... الخ.

1. نظام الوحدات

وحدات القياس المستخدمة هي وحدات القياس الخاصة بالنظام الدولي (SI) وتتلخص الوحدات الرئيسية لهذا النظام في **الجدول (1)**:

الجدول (1): الوحدات الرئيسية في النظام الدولي (SI)

الطول	الكتلة	الوقت	درجة الحرارة	الضغط	القوة	الطاقة	الإستطاعه
متر	كيلوغرام	الثانية	كلفن	باسكال	نيوتن	جول	واط
Metre	Kilogram	Second	Kelven	Pascal	Newton	Joule	Watt
m	Kg	s	K	Pa	N	J	W

2. خصائص الموائع

جميع الموائع لها خصائص تسمح بوصف حالتها الفيزيائية في حالة معينة ومن هذه الخصائص لدينا:

1.2. الكتلة الحجمية (الكثافة Density)

يتم تعريف الكتلة الحجمية (ρ) للمائع على أنها الكتلة لكل وحدة حجم، ويتم التعبير عنها بالصيغة التالية:

$$\rho = {}^{m}/_{V} \qquad [\mathrm{Kg/m^3}]$$

حيث m هي الكتلة (Kg)، V : الحجم (m^3).

تجدر الإشارة هنا أنه يمكن حساب الكتلة الحجمية للغازات من القانون العام للغازات، كما يلي:

$$PV = mRT$$

$$\rho = \frac{P}{RT} \qquad kg/m^3$$

P: الضغط N/m^2

R: ثابت الغازات ($287 J/kg.K$)

T: درجة الحرارة (K)

يعرض **الجدول (2)** قيم الكتلة الحجمية لبعض الموائع.

الجدول (2): الكتلة الحجمية لبعض الموائع.

الموائع	الزئبق	ماء البحر	ماء النقي	زيت	الهواء
$\rho[Kg/m^3]$	13600	1030	1000	900	1.293

تتأثر الكتلة الحجمية للسوائل بشكل رئيسي بدرجة الحرارة، فمع ازدياد درجة الحرارة تنخفض الكتلة الحجمية، باستثناء الماء الذي تكون كثافته أكبر ما يمكن عند درجة الحرارة ($4°C$)حيث تبلغ كثافة الماء عند درجة الحرارة هذه ($1000Kg/m^3$) في حين يكون للضغط تأثير بسيط جداً على كثافة السوائل بحيث يمكن إهماله، بينما تبلغ كثافة الهواء في الظروف القياسية عند ($20°C$) $1.2\ Kg/m^3$.

2.2. الكثافة (Densité)

وهي نسبة كثافة المائع (سائل أو غاز) إلى الجسم المرجعي وهي مقدار بدون وحدة:

$$d = \frac{\rho}{\rho_{réf}}$$

يعتمد الجسم المرجعي على الحالة الفيزيائية للجسم المائع: الماء : للمواد الصلبة والسوائل، الهواء: للغازات.

تتميز السوائل بكتلة حجمية عالية نسبياً؛

$$\rho_{liquid} \gg \rho_{gaz}$$

بالنسبة للغازات، تعتمد الكثافة على درجة الحرارة والضغط.

3.2. الحجم النوعي (Specific Volume)

هو نسبة الحجم الى واحدة الكتلة ويرمز له عادة بـ ($\overline{w}$) وبالتالي فهو يساوي مقلوب الكتلة الحجمية:

$$\overline{w} = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \qquad [m^3/Kg]$$

4.2. الوزن أو الثقل النوعي (Specific weight):

يمثل قوة الجذب التي تمارسها الأرض لكتلة من المائع على وحدة الحجم، و يعرّف الوزن النوعي بأنه وزن واحدة الحجوم يطلق عليه بـ" قاما" ويرمز له بـ (γ) :

$$\gamma = \frac{W}{V} \qquad [N/m^3]$$

حيث أن :

γ : الوزن النوعي، V: حجم السائل المدروس(m^3) ، W: وزن (ثقل) المائع (N)

- **العلاقة بين الكتلة الحجمية بالوزن النوعي:**

$$\gamma = \rho . g = \frac{m . g}{V}$$

حيث إن:

m: وزن حجم السائل المدروس [kg].

g: تسارع الجاذبية الأرضية($9.81 \ m . s^{-2}$)

ρ :كثافة السائل المدروس، (kg/m^3)

5.2. الانضغاطية

الانضغاطية هي صفة التغير النسبي في الحجم (dV) المقابل لزيادة في الضغط (dp)، و تؤدي الزيادة في الضغط إلى انخفاض في الحجم ، بصفة عامة الموائع قابلة للانضغاط، مما يعني أنه يمكن زيادة كثافتها بتطبيق الضغط عليها.

معامل الانضغاط هو:

$$\beta = -\frac{dV/V}{dP} = -\frac{dV}{dPV} \quad (Pa^{-1}), (m^2/N)$$

β: معامل الانضغاط (m^2/N)، V: حجم السائل (m^3).

dV: الاختلاف في الحجم (m^3)، dP: اختلاف الضغط (N/m^2).

ملاحظة:

- تؤدي زيادة الضغط إلى انخفاض الحجم، والعكس صحيح؛ لذا، يجب وضع علامة سالبة قبل معامل الانضغاط.
- معامل الانضغاط هو عكس معامل المرونة المتساوي الاتزان للوسط، ويُشار إليه عادةً بـ E ، ويُسمى أيضًا معامل الكتلة وهو متغير مكثف يكون دائمًا موجبًا؛ ولا ينخفض حجم الجسم إلا بزيادة الضغط.

يوضح **الجدول (3)** انضغاطية بعض الموائع عند 20 درجة مئوية:

الجدول (3): انضغاطية بعض الموائع.

المائع	الانضغاطية (Pa^{-1})
الماء	$4{,}1 \times 10^{-10}$
الزئبق	$4{,}4 \times 10^{-10}$
الهواء	$\approx 10^{-5}$

بالنسبة للسوائل، تكون قابلية الانضغاط منخفضة جدًا ، وعلى العكسبالنسبة للغازات، تكون قابلية الانضغاط عالية.

6.2. معامل المرونة

يتم تعريف معامل المرونة على أنه مقلوب معامل الانضغاط، وبالتالي:

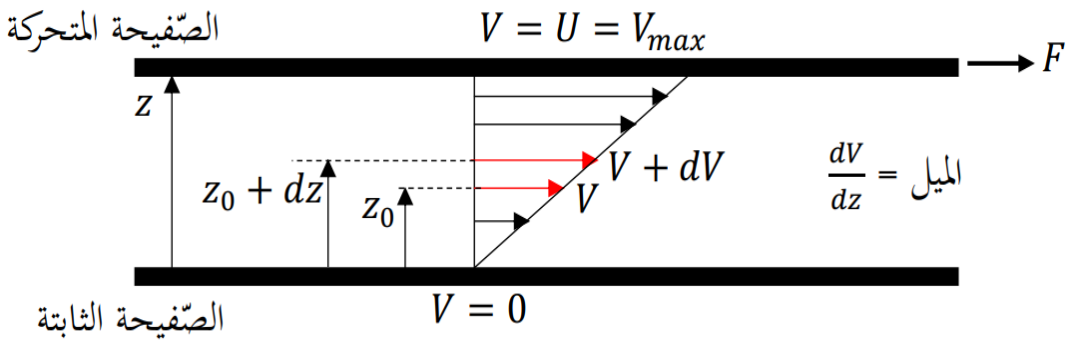
$$E = \frac{1}{\beta} \qquad (Pa)$$

7.2. اللزوجة (Viscosity)

هي الصفة الفيزيائية المميزة للموائع الحقيقة بأنها تقاوم تغير شكلها، ولذلك فإن كل جسم يتحرك في مائع حقيقي يتلقى مقاومة تستلزم بذل قوى خارجية للتغلب عليها وكل مائع حقيقي يجري ضمن أجسام كالأنابيب يخسر جزءاً من قدرته .

وهي مقدار قوة الاحتكاك الداخلي بين طبقات المائع أثناء الجريان وهي كذلك مقياس يوصف بقابلية السائل للجريان ومقدار مقاومته لضغط يجبره على التحرك والسيلان، كذلك فان لزوجة المائع هي مقياس مقاومته للقص أو للتشوه الزاوي، و تنتج قوى الاحتكاك في المائع من التماسك وتبادل كمية الحركة بين الجزيئات في المائع .

نفترض أن صفيحتين طويلتين جداً بينهما مائع لزج (انظر **الشكل (1)**) إذا سحبت الصفيحة العلوية في مستويها بسرعة (U) فإن التجربة تبين بأن المائع يبقى ملتصقاً بكلتا الصفيحتين، وبالتالي فإن السرعة فيما بين الصفيحتين تتوزع بشكل خطي بحيث تكون أعظمية وتساوي سرعة الصفيحة نفسها على جدار الصفيحة العلوية (المتحركة) وتساوي الصفر عند الصفيحة السفلية (الثابتة) ولكي تبقى حركة الصفيحة العلوية مستمرة يلزم تطبيق قوة مماسية (F) باتجاه حركتها بحيث تكفي للتغلب على قوى احتكاك المائع فقط وذلك باعتبار أن قوى الإجهادات الناظمية (الضغط) متساوية فيما بينها.



الشكل (1): يوضح مفهوم اللزوجة.

$$\tau = \frac{F}{S}$$

لقد أثبتت التجارب المتعددة التي أجريت بهذا الخصوص مع تغير البعد (z) أن الإجهادات المماسية (Tangential Stresses) بالنسبة لواحدة السطح المبلل تتناسب طرداً مع السرعة (U) وعكساً مع البعد (z) أي:

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{dU}{dz}$$

حيث إن:

S: مساحة سطح الصفيحة (m^2)

τ (طو): الإجهاد المماسي للاحتكاك الداخلي أو اجهاد القص، (N/m^2) أو (Kp/m^2)

μ: معامل التناسب وتتعلق قيمته بطبيعة السائل المدروس، وهي مايعرف بمعامل اللزوجة أو اللزوجة الديناميكية وهي النسبة بين إجهاد القص وإنحدار السرعة، وحدتها $\frac{N.s}{m^2} = Pa.Sec$ أو البويز (Poise)، حيث:

$$\text{Pl : Poiseuille } 1\ Pa.s\ =\ 1\ Pl\ = 1kg\ /m.s$$

$$\text{Poise (Po) } 1\ Po\ =\ 10^{-1}\ Pl$$

تعارض قوة الاحتكاك F التي تمارس على سطح الفصل لهاتين الطبقتين انزلاق طبقة واحدة على الأخرى ، و يتناسب مع الفرق في سرعة الطبقات هو Δv ، إلى سطحها S ويتناسب عكسيا مع Δz:

$$F = \mu.S.\frac{dU}{dz}$$

F: قوة الانزلاق بين الطبقات في (N)،

μ: اللزوجة الديناميكية بـ (kg/m.s)

S: مساحة سطح الاتصال بين الطبقتين في (m^2)،

ΔU: فرق السرعة بين الطبقتين بـ (m/s)،

ΔZ: المسافة بين طبقتين في (m).

ملاحظة: إذا كان μ= 0 فإنّ المائع مثالي أو في حالة سكون (غير متحرك).

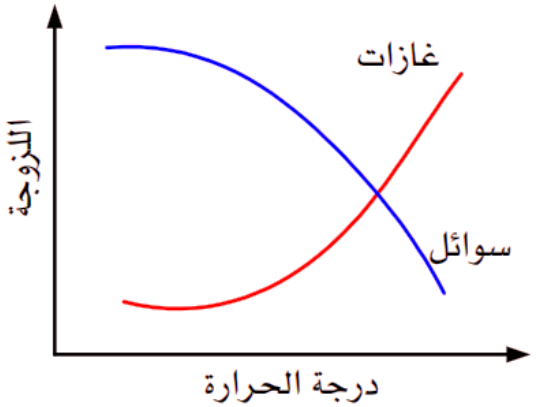
- **اللزوجة الكينماتيكية Kinamatic Viscosity**: تساوي حاصل قسمة معامل اللزوجة التحريكية على كثافة المائع، وحدتها ($\frac{m^2}{sec}$) أو ستوك حيث $1stokes = 1\,cm^2/s = 10^{-4}\,m^2/s$:

$$(nu \text{ يطلق عليها }) \upsilon = \frac{\mu}{\rho}$$

وتلعب هذه اللزوجة دوراً هاماً في كافة الجريانات التي تؤثر فيها قوى الاحتكاك وقوى العطالة.

- **تأثير درجة الحرارة على اللزوجة :**

تتأثر اللزوجة بدرجة كبيرة بدرجة الحرارة **الشكل (2)** ، فتقل اللزوجة للسوائل بزيادة درجة الحرارة وتزيد اللزوجة لجميع الغازات بارتفاع درجة الحرارة ويرجع ذلك إلى أن قوى التماسك بين جزيئات السائل تقل بزيادة درجة الحرارة وبالتالي تقل اللزوجة أما في الغازات فيؤدي ارتفاع درجة الحرارة إلى زيادة كمية حركة الجزيئات مما يؤدي إلى زيادة معدل تصادم هذه الجزيئات بعضها ببعض وبالتالي تزيد قوة الاحتكاك وقوى القص بين الجزيئات مما يزيد من الزوجة الغازات.



الشكل (2): تأثير الحرارة على اللزوجة.

على سبيل المثال، يوضح **الجدول (3)** قيم اللزوجة الديناميكية والحركية لبعض السوائل عند درجة حرارة الغرفة (20 درجة مئوية).

الجدول (3): اللزوجة الديناميكية والحركية لبعض السوائل.

المائع	اللزوجة الديناميكية μ (Pl)	اللزوجة الحركية υ (m^2/s)
جليسيرين	0.8	6.8×10^{-4}
زيت	0.3	4×10^{-4}
كحول	1.2×10^{-4}	2.2×10^{-6}
ماء	10^{-3}	10^{-6}
هواء	18×10^{-6}	15×10^{-6}

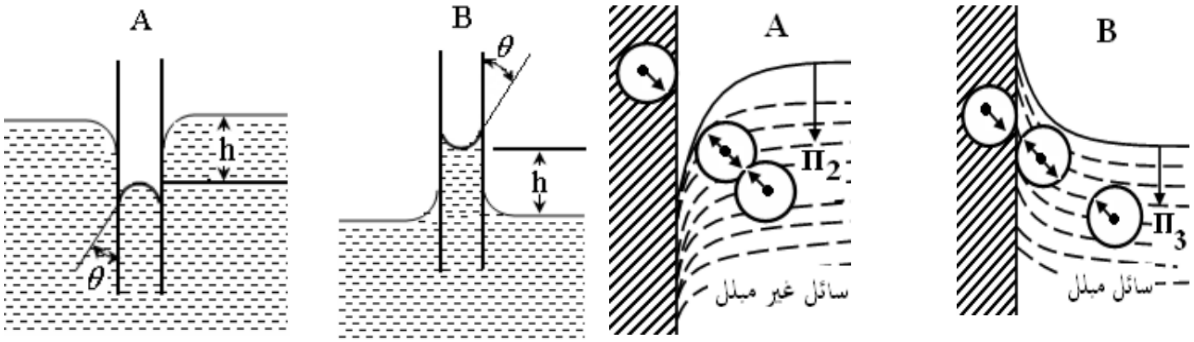
3. التوتر (الشد) السطحي

يتألف السائل من مجموعة من الجزيئات (Molecules) المتجاذبة فيما بينها بقوى معينة ولتكن (F) والتي تدعى بقوى التجاذب الجزيئي أو بقوى الترابط الذرية ومنه فالتوتر السطحي هو ظاهرة فيزيائية تنتج عن تجاذب جزيئات السائل مع بعضها البعض **الشكل (3)**.

عند الحد الفاصل بين السائل والغاز يلعب التوتر السطحي دورا هاما ، في إناء إذا نظرنا إلى جزيئات السائل عند السطح وبداخله، لرأينا أن الجزيئات على السطح ممسوكة بقوى إلى أسفل فقط بينما الجزيئات في الداخل ممسوكة بقوى في كل الاتجاهات، وبالتالي تكون متزنة، و تنشأ قوة التوتر السطحي نتيجة للاختلاف بين قوى التماسك (Cohesive Forces) بين جزيئات السائل مع بعضها البعض (ظاهرة التوتر السطحي) وقوى الالتصاق (Adhesive Forces) بين جزيئات السائل وجدار الأنبوب وجزيئات الهواء المحيط بالسائل أيضا (الخاصية الشعرية) ولهذا السبب يكون سطح السائل متوترا (مشدوداً) وبسبب هذه الخاصية يتخذ سطح السائل الشكل المقعر والمحدب.

حيث نميز نوعين من السوائل:

- سائل مبلل: تكون قوى الإلتصاق بين جزيئات السائل و جدار الأنبوب أكبر من قوة التماسك بين جزيئات السائل بعضها ببعض وبالتالي نلاحظ صعود السائل على جدار الاناء ويستمر هذا الصعود الى غاية تساوي القوتين، ويكون سطح السائل داخل الوعاء مقعرا وزاوية الالتصاق أو التماس $\theta < 90$ (مثل: الماء).
- سائل غير مبلل: يعني قوى التماسك بين جزيئات السائل بعضها ببعض أكبر من قوى التصاق جزيئات السائل مع جدار الإناء، فنلاحظ انخفاظ السائل على جدار الاناء، ويكون سطح السائل داخل الوعاء محدبا وزاوية الالتصاق أو التماس $\theta > 90$ (مثل: الزئبق).



الشكل (3): حالات التبلل.

إن المركبات المماسية لقوى الترابط الذرية الموازية للسطح الخارجي للسائل تجعله في حالة شد يطلق عليه اسم التوتر السطحي ويكون بالتعريف: "التوتر السطحي (δ) يمثل قوة الشد (F) الموازية للسطح الخارجي للسائل بالنسبة لكل واحدة طول من الخط المحدد لهذا السطح "، و نعبر عن مقدار التوتر بمقدار القوة الواقعة على طول المحيط (L) حول السائل، يكتب معامل التوتر بالعلاقة:

$$\delta = \frac{F}{L} \qquad J/m^2 ; \quad N/m$$

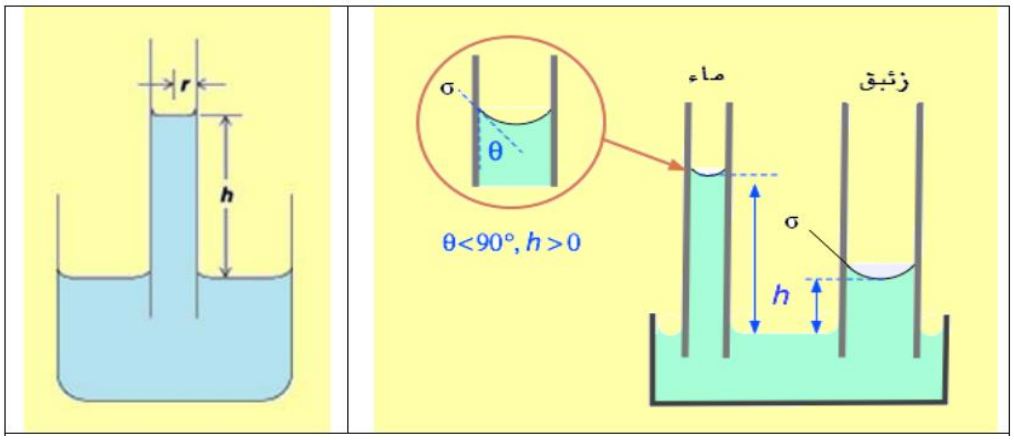
$$F = \Delta P \times A = \delta \times L, \quad A = \pi r^2, \quad L = 2\pi r$$

$$\Delta P = \frac{2\delta}{r} = \frac{4\delta}{D}$$

إن قيمة δ تبقى ثابته في كل نقطة من السطح الخارجي الحر للسائل المعتبر ولايتغير مع تغير السطح، وهي تتعلق بدرجة الحرارة.

4. خاصية الأنابيب الشعرية

يكون التجاذب بين الجزيئات غشاء قادر على مقاومة الشد عند تلامس سائلين غير قابلين للامتزاج أو عند التلامس بين سائل وغاز ، وخاصية السائل التي تسبب هذه الظاهرة تعرف بالتوتر السطحي، الخاصية الشعرية هي نتيجة لكل من التماسك والتلاصق وعندما تكون الأولى أقل تأثيرا من الثانية فإن السائل يبلل السطح الأنبوب الذي يلامسه ويرتفع عند نقطة التلامس وإذا تغلب التماسك، فإن سطح السائل ينخفض عند نقطة التلامس، فالخاصية الشعرية تؤدي إلى ارتفاع الماء في أنبوب زجاجي، بينما ينخفض الزئبق تحت المنسوب الحقيقي كما في **الشكل (4)**.



الشكل (4): الخاصية الشعرية.

ترتفع أو تنخفض السوائل في الأنابيب الشعرية بسبب هذه الخاصية، وتتوقف عندما يساوي وزن (القوة) عمود السائل قوة الجاذبية، ومنه لدينا:

$$\sum F = 0 \Rightarrow W = F$$

$$W = \gamma \times V = \pi \times r^2 \times h = \gamma \times \frac{D^2}{4} \times \pi \times h$$

$$F = \delta \times L \times cos\theta = \delta \times \pi \times 2r \times cos\theta = \delta \times \pi \times D \times cos\theta$$

$$\gamma \times \frac{D^2}{4} \times \pi \times h = \delta \times \pi \times D \times cos\theta$$

$$h = \frac{4 \times \delta \times cos\theta}{\gamma \times D} = \frac{4 \times \delta \times cos\theta}{\gamma \times D}$$

حيث:

h: الارتفاع أو الانخفاض الشعري التقريبي (m).

δ:معامل التوتر السطحي N/m.

θ: زاوية الالتصاق.

γ: الوزن النوعي (N/m^3).

D: قطر الأنبوبة الشعرية (m).

يمكن باستخدام هذه المعادلة حساب الارتفاع أو الانخفاض الشعري التقريبي في الأنبوبة الشعرية.

5. المشكلات أو المسائل الرياضية لميكانيك الموائع

يهدف ميكانيكا الموائع إلى فهم وتوقع سلوك الموائع تحت ظروف مختلفة، حيث نعتمد في ذلك على صياغة المشكلات كأنظمة من المعادلات الرياضية ، إن هذه المعادلات ليست مجرد رموز مجردة؛ بل هي تمثيلات كمية لقوانين الفيزياء الأساسية التي تحكم الكتلة، وكمية الحركة (الزخم)، والطاقة داخل المائع، إن الصياغة الرياضية في ميكانيكا الموائع ترتكز على مبادئ الحفظ.

1.5. حفظ الكتلة (Conservation of mass)

يعرف أيضا بمعادلة الاستمرارية ، حيث ينص على أن الكتلة لا تفنى ولا تستحدث في نظام مغلق ، رياضيا يمكن التعبير عنها بشكل عام على النحو التالي:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho u) = 0$$

حيث:

ρ: الكثافة، ρ: سرعة الجريان. t: الزمن. ∇: التباعد.

بالنسبة للموائع غير القابلة للانضغاط (مثل الماء في كثير من التطبيقات)، تبسط هذه المعادلة إلى: $\nabla.u = 0$.

2.5. حفظ كمية الحركة

هو تطبيق لقانون نيوتن الثاني للحركة على جسيم مائع، حيث يأخذ في الاعتبار القوى المؤثرة على المائع (مثل الضغط، قوى القص اللزجة، وقوى الجسم مثل الجاذبية) وكيف تؤثر هذه القوى على تسارع المائع ، إن المعادلات التي تصف هذا المبدأ هي معادلات نافييه–ستوكس (Navier-Stokes Equations)، والتي تعد من أكثر المعادلات تعقيدًا وأهمية في ميكانيكا الموائع:

- في حالة الجريان اللزج:

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u) = -\nabla P + \mu \nabla^2 u + \rho g$$

حيث:

P: الضغط، μ: اللزوجة الديناميكية، ∇^2: مؤثر لابلاس، g: متجه تسارع الجاذبية، $(u \cdot \nabla)u$: التسارع الحملي، والذي ينشأ عن حركة المائع نفسها.

- في حالة الجريان غير اللزج (معادلة اويلر):

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u) = -\nabla P + f$$

3.5. حفظ الطاقة (Conservation of energy)

يعتبر مبدأ حفظ الطاقة ضروري لاستكمال وصف النظام، خاصة عندما تكون هناك تغيرات في درجة الحرارة أو انتقال للحرارة داخل المائع، و يتم التعبير عنه عادة من خلال معادلة الطاقة.

$$P + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g h = cst$$

حيث:

P : توازن بين الضغط (طاقة الضغط)، $\frac{1}{2}\rho u^2$: الطاقة الحركية، $\rho g h$: الطاقة الكامنة (طاقة الوضع).

6. المشتقة الجزيئية

تعرف المشتقة الجزيئية على أنها معدل التغير الكلي لخاصية فيزيائية ما (ϕ) لجسيم مائع يتحرك في مجال التدفق ، و تتكون هذه المشتقة من حدين أساسيين:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\phi$$

$\frac{D\phi}{Dt}$: المشتقة الجزئية للخاصية ϕ

$\frac{\partial \phi}{\partial t}$: هو الحد الزمني، ويمثل معدل التغير الزمني للخاصية ϕ في نقطة ثابتة في الفضاء.

$(u \cdot \nabla)\phi$: هو الحد الحملي، ويمثل التغير في الخاصية ϕ نتيجة لحركة جسيم المائع من منطقة ذات قيمة معينة إلى منطقة أخرى ذات قيمة مختلفة للخاصية ، و يعتمد هذا الحد على متجه سرعة المائع u وعلى تدرج الخاصية $\nabla\phi$ في الفضاء.

سلسلة تمارين محلولة

التمرين 1:

لدينا زيت حجمه $6m^3$ ووزنه (ثقله) 47KN. أحسب الكتلة الحجمية والوزن النوعي والكثافة لهذا الزيت علماً أن الجاذبية ($9.81\ \ m\ .\ s^{-2}$)، ثم أحسب الوزن (الثقل) والكتلة لحجم 3 لترات من الزيت.

تعطى: الكثافة تساوي 0.9.

الحل:

- **الكتلة الحجمية**:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P}{gV} = \frac{47 \times 1000}{9.81 \times 6} = 798.5\ Kg/m^3$$

- **الوزن الحجمي**:

$$\gamma = \rho g = 798.5 \times 9.81 = 7833.3\ N/m^3$$

- **الكثافة**:

$$d = \frac{\rho}{\rho_{ref}} = \frac{798.5}{1000} = 0.7985$$

- **الثقل لـ 3 لتر**:

$$\gamma = \frac{P}{V} \Rightarrow P = \gamma \times V = \rho g V = 0.9 \times 10^3 \times 9.81 \times 3 \times 10^{-3} = 26.48N$$

- **الكتلة**:

$$m = \rho \times V = \frac{P}{g} = 0.9 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-3} = \frac{26.48}{9.81} 2.7Kg$$

تمرين 2:

أوجد الكثافة (الكتلة الحجمية) والوزن النوعي للبنزين مع العلم أن كثافته d=0.7. تعطي:

- تسارع الجاذبية ($9.81\ \ m\ .\ s^{-2}$)

- كثافة الماء $1000\ Kg/m^3$

الحل:

$$\gamma = \rho g = 0.7 \times 1000 \times 9.81 = 6867\ N/m^3$$

التمرين 3:

الأستاذة : د. زغود سمية

إسطوانة أبعادها كالتالي: قطرها الداخلي 2 m وارتفاعها 4 m. ملئت بزيت حتى ارتفاع 3.6 m. إذا علمت أن كتلة الزيت تساوي 9772 Kg، فأحسب كثافة الزيت.

الحل:

- من قانون الكثافة:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

- نحسب الحجم:

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 h = \frac{\pi}{4} \times 0.02^2 \times 3.6 = 11.31 m^3$$

حيث: d: القطر الداخلي، h: ارتفاع الزيت في الأسطوانة.

للحصول على الكثافة نعوض في العلاقة السابقة:

$$\rho = \frac{9772}{11.31} = 864\, Kg/m^3$$

التمرين 4:

قم بتحديد اللزوجة الديناميكية لزيت المحرك بكثافة d = 0.9 ولزوجة حركية $\upsilon = 1.1$ St

الحل:

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow \mu = \upsilon\rho = 1.1 \times 10^{-4} \times 900 = 0.099\, Pa.s$$

التمرين 5:

لزوجة الماء عند 20 درجة مئوية هي 0.01008 Poise.

أحسب:

- اللزوجة المطلقة (الديناميكية)

- إذا كانت الكثافة 0.988، فاحسب قيمة اللزوجة الكينماتيكية بوحدة m^2/s بوحدة الستوكس

الحل:

$$1Po = 10^{-1} PI$$

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} \frac{0.001008}{977} = 1.02 \times 10^{-6}\, m^2/s = 1.02 \times 10^{-2} St$$

التمرين 5:

الوقود الذي يتم إحضاره إلى درجة حرارة $T = 20C°$ له لزوجة ديناميكية $\mu = 95.10^{-3}$ Pa.s.

أحسب لزوجته الحركية υ في المخازن مع العلم أن كثافته d=0.95.

تعطى كثافة الماء $1000\ kg/m^3$

الحل:

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.095}{950} = 10^{-4}\, m^2/s = 1St$$

$$1stokes = 1\ cm^2/s = 10^{-4}\, m^2/s$$

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho_{water} \times d} = \frac{95 \times 10^{-3}}{1000 \times 0.95} = 10^{-4}\, m^2/s = 1St$$

سلسلة تمارين مقترحة

التمرين 1:

نقوم بضغط سائل تكون معاملاته في الحالة الأولية هي: p_1= 50bar وV_1= 30.5 dm^3 والمعلمات في الحالة النهائية هي: p_2= 250bar وV_2= 30dm^3.

أحسب معامل قابلية الضغط β لهذا السائل

التمرين 2:

احسب الوزن P_0 لحجم V=3 لتر من زيت الزيتون كثافته d=0.918.

التمرين 3:

أنبوب شعري قطره $1\ mm$ يغمر رأسيا في الماء ، و إذا كان التوتر السطحي للماء هو $0.0728N/m$ وزاوية التماس صفر، احسب ارتفاع صعود الماء في الأنبوب.

تعطى: $\rho = 1000\,Kg/m^3\,,\ g = 9.81\,m/s^2$

التمرين 4:

وعاء فارغ يزن 250g. عندما يُملأ بالماء ($\rho = 1000\,Kg/m^3$)، يصبح وزنه 1250g. ما هو حجم الوعاء باللتر؟ إذا مُلئ الوعاء بزيت كثافته $\rho = 800\,Kg/m^3$ ، فكم سيكون وزن الوعاء المملوء؟

التمرين 5:

اشرح مبدأ القياس لمقياس اللزوجة ذو الكرة المتساقطة.

التمرين 6:

حدد اللزوجة الديناميكية لزيت الزيتون علماً بأن كثافته 0.918 واللزوجة الحركية تساوي 1.089 ستوكس.

الفصل الثالث

الموائع الساكنة

الهدف العام:

تمكين الطالب من التعرف على مفهوم الضغط والقوانين العامة، وتطبيق قانون باسكال.

الأهداف التفصيلية: في نهاية هذا الفصل يكون الطالب قادرا على:

- تعريف الضغط، الضغط المطلق والضغط المقاس، تطبيق قانون باسكال.
- فهم وتطبيق قاعدة أرخميدس وقواعد الطفو.
- حساب الضغط عند أي نقطة من مائع ساكن.

علم الهيدروستاتيكا هو العلم الذي يدرس الموائع في حالة السكون، والذي يهتم بدراسة القوى المؤثرة على الموائع الساكنة، وتعد حجر الأساس لفهم الظواهر الطبيعية والتطبيقات الهندسية مثل تصميم السدود، والغواصات، وأنظمة الري، وحتى دراسة طبقات الغلاف الجوي، حيث تختفي تماما هنا قوى اجهادات القص (التشوه) وتأثير اللزوجة أيضا، أين يقتصر التحليل والدراسة على الضغط والارتفاع وكثافة المائع.

1. الضغط (Pressure)

1.1. مفهوم الضغط

وهو التأثير الذي يحدث عند تطبيق قوة على سطح ما (**الشكل (1)**)، يرمز لها بالرمز (P) ووحدتها الباسكال (Pa).

الشكل (1): الضغط على سطح.

تعطى علاقة الضغط:

$$P = \frac{F}{S} \qquad (N/m^2,\ Pa)$$

حيث أن:

P : الضغط بوحدة $(N/m^2,\ Pa)$

F : القوة بوحدة N

S : المساحة بوحدة m^2

2.1. وحدات الضغط:

للضغط وحدات مختلفة: Pa، atm، bar

$$1\ N/m^2 = 1Pa$$

$$1\ atm\ =\ 1.01325\ bar$$

$$1\ atm\ =\ 1.01325 \times 10^5\ Pa$$

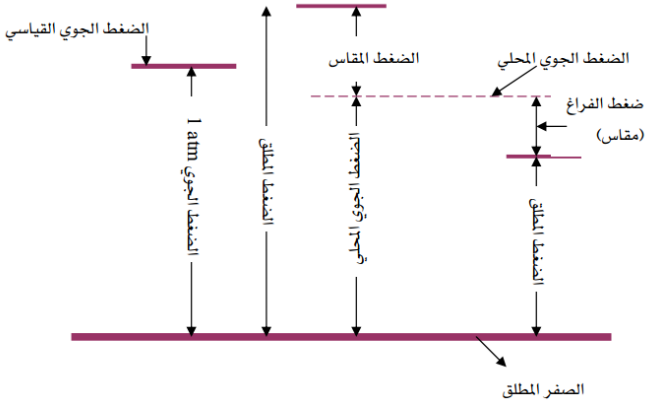
$$1bar = 10^5\ Pa$$

3.1. الضغط المطلق (Absolute pressure) والضغط النسبي (Relative pressure):

الضغط المطلق: وهو الضغط الحقيقي المقاس بالنسبة للفراغ المطلق (الضغط الجوي)، تأخذ قيمة موجبة دوما.

الضغط النسبي (المقاس): وهو الضغط المطلق مطروح منه الضغط الجوي، يكون موجب إذا كان الضغط أكبر من الضغط الجوي، سالب إذا كان الضغط أقل من الضغط الجوي (**الشكل** (2))، يعطى بالعلاقة:

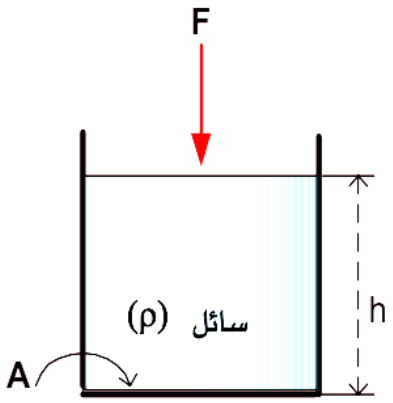
$$P_{\text{النسبي}} = P_{\text{المطلق}} - P_{\text{الجوي}}$$



الشكل (2): مقاييس الضغط.

2. القانون الأساسي للموائع الساكنة (علو (سمت) الضغط):

كثافة (ρ) الموائع الانضغاطية مثل الغازات تعتمد على درجة الحرارة والضغط، بينما في حالة الموائع غير الانضغاطية مثل السوائل فكثافتها ثابتة المقدار. حيث يعتمد الضغط على ارتفاع (سمت) السائل وليس المساحة الكلية التي تحتوي السائل (**الشكل** (3)).



الشكل (3): علو الضغط.

إذا كانت كثافة السائل الموجودة داخل الإناء هي (ρ) من تعريف الضغط (P) الذي يمثل القوة (F) على السطح (A)، نجد عبارة الضغط الهيدروستاتيكي:

$$P = \frac{F}{A}$$

$$F = m \times g \;\; ; \;\; m = \rho \times V = \rho \times A \times h$$

$$F = \rho \times g \times h \times A$$

$$\Rightarrow P = \frac{\rho \times g \times h \times A}{A} = \rho \times g \times h$$

$$\Delta P = \rho \times g \times \Delta h$$

حيث:

ΔP: التغير في الضغط (Pa)

ρ: الكثافة (kg/m^3)

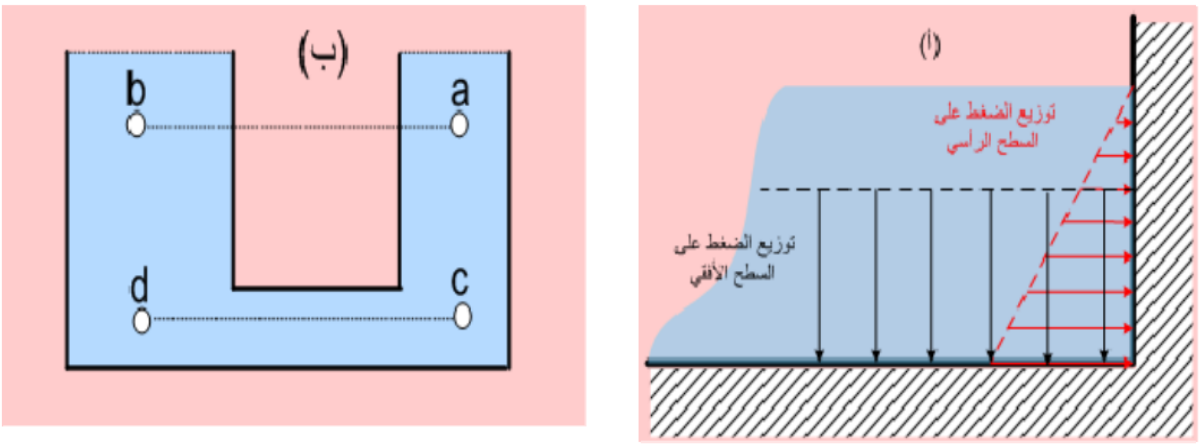
g: الجاذبية الأرضية (m/s^2)

Δh: التغير في الارتفاع (m)

3. تغيرات الضغط لمائع في حالة السكون

محصلة القوى المؤثرة على المائع الساكن في أي اتجاه معدومة (**الشكل (4)**)، ومنه يمكن استنتاج أن:

- الضغط يتساوى في المقدار عند أي نقطتين تقعان على المستوى الأفقي نفسه في المائع.
- الضغط يزداد في المقدار مع ازدياد عمق المائع على المستوى العمودي.



الشكل (4): توزيع الضغط على المستويات المختلفة.

1.3. قاعدة باسكال

تنص قاعدة باسكال على أنه عندما يؤثر ضغط على سائل محبوس في إناء مغلق فإن هذا الضغط ينتقل بتمامه إلى جميع أجزاء السائل كما ينتقل إلى جدران الإناء المحتوى على السائل، فلو كان الإناء إسطواني الشكل ومزود بمكبس وملأنا هذا الإناء بسائل ما و ضغطنا على المكبس وذلك بوضع أثقال عليه حتى يصبح الضغط عند السطح السفلي للمكبس هو P_1 فإن الضغط عند نقطة مثل A على عمق h من سطح السائل يساوي P حيث:

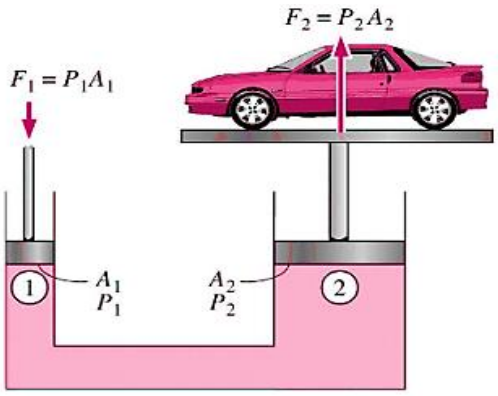
$$P = P_1 + \rho g h$$

فإذا زاد الضغط على المكبس بمقدار ΔP بزيادة الأثقال مثلا فإننا نلاحظ عدم تحرك المكبس إلى الداخل لعدم قابلية السائل للانضغاط ويزداد الضغط على سطح السائل تحت المكبس بمقدار ΔP و كذلك عند نقطة A يزداد الضغط بمقدار ΔP و يصبح:

$$P = P_1 + \rho gh + \Delta P$$

2.3. تطبيقات قاعدة باسكال – المكبس الهيدروليكي–

يعتبر المكبس الهيدروليكي من الأمثلة الممتازة على قاعدة باسكال حيث يوضح كيفية الحصول على قوة كبيرة من قوة صغيرة والحصول على شغل بمجهود صغير و**الشكل (5)** يوضح رسما توضيحيا للمكبس الهيدروليكي حيث يتكون من اسطوانتين متصلتين من أسفل ومملوءتين بسائل ما الزيت مثلا.



الشكل (5): المكبس الهيدروليكي.

كل من الاسطوانتين مزودة بمكبس متحرك أحدهما صغير مساحة مقطعه A_1 والآخر كبير و مساحة مقطعه A_2و إذا أثرنا على المكبس الصغير بقوة F_1 بحيث كان الضغط على المكبس مساويا P_1 فإنه حسب قاعدة باسكال فإن الضغط ينتقل بتمامه إلى جميع أجزاء السائل و ينتقل بذلك إلى السطح السفلي للمكبس الكبير و يؤثر عليه بقوة مقدارها $F_1 = P_1 x A_1$.

ولكي يتزن هذا المكبس ويصبح في نفس مستوى المكبس الأول لابد من التأثير على المكبس الكبير بقوة مقدارها F_2 حتى يتساوى الضغط المؤثر على المكبسين و يصبح مساويا P_2.

المكبسين على نفس المستوى، هذا يعني: $P_1 = P_2$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

$$A_1 \ll A_2 \Rightarrow F_1 \ll F_2$$

تسمى النسبة $\frac{F_2}{F_1}$ بالفائدة الألية أو الميكانيكية للمكبس ويرمز لها الرمز ε:

$$\varepsilon = \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

4. قاعدة أرخميدس وقواعد الطفو

وجد العالم اليوناني أرخميدس أن وزن الجسم في السائل أقل من وزنه في الهواء. مثلا إذا حاولت أن تغمر كرة في الماء فإنك تشعر بقوة كبيرة يدفع الماء بها الكرة إلى أعلى، كذلك تشاهد أن بعض المواد تطفو فوق الماء ومن المشاهدات أيضا أن الجسم المغمور في الماء أو في السائل بصفة عامة يمكن رفعه بسهولة طالما كان مغمورا في السائل بينما يكون من الصعب رفعه في الهواء، كل هذه الملاحظات تؤكد أن هناك قوة يؤثر بها السائل على الجسم المغمور فيه وتعمل هذه القوة إلى أعلى.

ويمكن تلخيص هذه القاعدة على النحو التالي: إذا غمر جسم جزئيا أو كليا في سائل فإنه يكون مدفوعا من أسفل إلى أعلى بقوة دفع تساوي وزن السائل الذي يزيحه الجسم وحجم هذا السائل يساوي حجم الجسم أو حجم الجزء المغمور منه في السائل.

1.4. وزن السائل المزاح

نأخذ إناء به سائل حجمه النوعي(γ_l)،كثافته (ρ_l) نغمر به جسم حجمه النوعي(γ_c) وكثافته (ρ_c)، من خلال نص قاعدة أرخميدس نلاحظ أن هذا الجسم يخضع لتأثير قوتين:

أ- قوة وزن (ثقل) الجسم (W_c): اتجاهها يكون دائما إلى الأسفل، معرفة بالعلاقة:

$$W_c = \gamma_c V_c = \rho_c g V_c$$

ب- قوة الدفع (التعويم): رمزها (F_b)، وهي قوة رد الفعل التي يؤثر بها السائل على الجسم، والتي تعادل وزن (ثقل) السائل المزاح أو المسكوب من الإناء، حيث نلاحظ أيضا أن مقدار حجم السائل المزاح (V_l) يعادل حجم الجزء المغمور من الجسم (V_c') في السائل، و تعرف قوة الدفع بالعلاقة التالية:

$$F_b = \gamma_l V_l = \gamma_l V_c'$$
$$F_b = \rho_l g V_l = \rho_l g V_c'$$

2.4. العلاقة بين وزن الجسم في الهواء ووزنه وهو مغمور في الهواء

حسب محصلة القوى (F) المؤثرة على الجسم مغمور في السائل، حيث: $F = F_b - W_c$، يكون هذا الجسم في السائل في إحدى الحالات التالية:

- الحالة الأولى: عندما تكون محصلة القوى $F = 0$ ،أي أن $F_b = W_c$ حيث تتساوى قوة الدفع إلى الاعلى مع وزن الجسم إلى الأسفل، ويظهر الجسم في هذه الحالة معلقا في السائل.
- الحالة الثانية: عندما تكون محصلة القوى F إلى الأسفل أي أن $F_b < W_c$ أي أن وزن الجسم إلى الأسفل أكبر من قوة الدفع الأعلى، و في هذه الحالة يغوص الجسم بأكمله في قاع الإناء، وزن الجسم المغمور (W_c') في هذه الحالة يساوي الفرق بين وزنه في الهواء وقوة الدفع أي أن: $W_c' = W_c - F_b$
- الحالة الثالثة: عندما تكون محصلة القوى F إلى الأعلى أي أن $F_b > W_c$ أي أن قوة الدفع (F_b) أكبر من وزن الجسم (W_c)، في هذه الحالة يطفو الجسم ويستقر على سطح السائل، حيث يطفو جزء منه فوق السائل وينغمر الجزء الآخر داخله، يكون عندها وزن الجسم مساويا لوزن السائل الذي يزيحه الجزء المغمور من الجسم، حيث يسمى هذا القانون بقانون أو قاعدة الطفو.

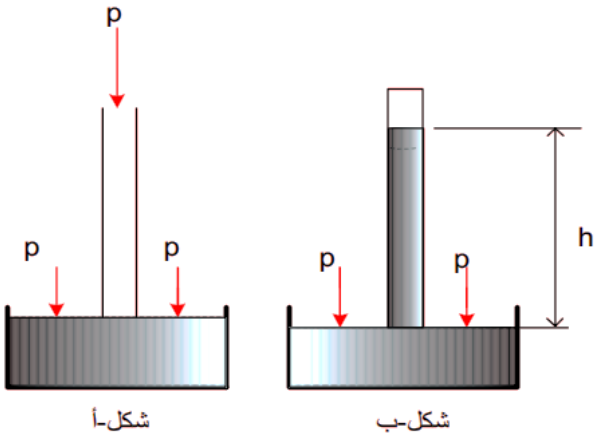
5. قياس الضغط

هناك أجهزة تستخدم لقياس الضغط، ومن تلك الأجهزة ما يعتمد على فكرة الضغط الهيدروستاتيكي في عملية القياس وفيما يلي بعض أجهزة قياس الضغط:

1.5. مقياس بوردن

وتسمى كذلك ساعة الضغط وهي الأكثر استعمالاً لسهولة استخدامها ولرخص ثمنها. يستعمل مقياس بوردن لقياس الضغط النسبي للهواء والغازات المحصورة كما في إطارات السيارات، ويتكون هذا المقياس من أنبوب معدني منحن إحدى نهايتيه مغلقة وتوصل الأخرى بمصدر الضغط فيسبب الضغط انفتاحا قليلا في انحناءة الأنبوب يحرك مؤشرا يبين مقدار الضغط.

2.5. البارومتر



الشكل (6): البارومتر.

هو جهاز لقياس الضغط الجوي بوحدات ضغطه المطلقة. **الشكل6** (أ) يوضح خزانا يحتوي على سائل، غمر به أنبوب زجاجي مفتوح النهاية، كما هو واضح فإن الضغط الجوي (P) سيكون مسلطا خلال الأنبوب وعلى سطح السائل الموجود عند القاعدة عليه سيكون مستوى سطح السائل متساويا على مدى سطح السائل داخل وخارج الأنبوب، أما إذا سدت النهاية العليا من الأنبوب الزجاجي، **شكل 6(ب)** وأفرغ تماما من الهواء بحيث لا يوجد ضغط مسلط داخل الأنبوب ولكن الضغط الجوي يكون مسلطا على سطح السائل خارج الأنبوب وبذلك نلاحظ ارتفاع السائل في الاتجاه العلوي داخل الأنبوب حتى تصبح هناك كتلة من السائل فوق مستوى سطح الخزان كافية لخلق ضغط عند هذا المستوى المساوي للضغط الجوي، فإذا كانت h هي ارتفاع عمود السائل و ρ هي كثافة السائل فإن الضغط في هذه الحالة وكما أشرنا سابقا هو :

$$P = \rho g h$$

حيث g هي الجاذبية الأرضية. إن قياس الضغط بالطريقة السابقة يعرف بالبارومتر.

مثال:

إذا افترضنا أن الضغط الجوي يساوي 1.013 bar عليه يمكن حساب ارتفاع عمود الماء الذي يساوي هذا الضغط كما يلي:

$$P = \rho g h$$

$$1.013 \times 10^5 = 1000 \times 9.81 \times h$$

$$h = 10.326\, m$$

ومنه يعتبر ارتفاع عمود من كبير جدا، وللتقليل من هذا الارتفاع يستعمل الزئبق في البارومترات بدلا من الماء وذلك لأن الزئبق أثقل بـ 13.6 مرة من الماء، وفي هذه الحالة يكون الارتفاع البارومتري للضغط الجوي كما يلي:

$$P = \rho g h$$

$$1.013 \times 10^5 = 13600 \times 9.81 \times h$$

$$h = 0.76\, m = 760\, mm$$

3.5. المانومترات

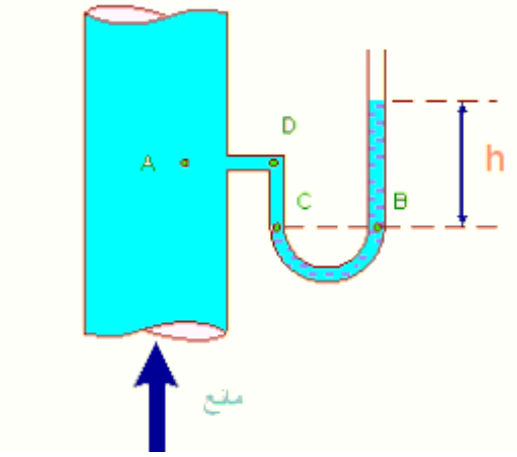
من أسهل الطرق لقياس الضغط استخدام المانومترات. المانومتر عبارة عن أنبوب زجاجي على شكل U يحتوي على سائل يعرف بسائل المانومتر يكون أثقل من المائع المراد قياس ضغطه وينبغي أن لا يمتزج سائل المانومتر مع المائع الآخر وأن لا يتفاعل معه كيميائيا. ويمكن معرفة ارتفاع السائل من التدرج الموجود على الأنبوب. تشكل علاقة الضغط بعمود الضغط أساساً لقياس الضغط بواسطة المانومتر. هناك عدة أنواع من المانومترات المستعملة سنحاول التعرف على أهمها فيما يلي:

أ- المانومتر البسيط

وهو عبارة عن سائل يسري في أنبوب متصل بمانومتر على شكل حرف U، حيث يحتوي المانومتر سائلاً ثقيلاً كالزئبق الذي يندفع بسبب الضغط إلى ارتفاع معين يحسب منه مقدار الضغط على النحو الموضح **بالشكل** (7).

الضغط عند B يساوي الضغط عند C، ولكن الضغط عند B يساوي الضغط الجوي زائدا ضغط عمود الزئبق h، والضغط عند C هو ضغط السائل الذي يسري داخل الأنبوب.

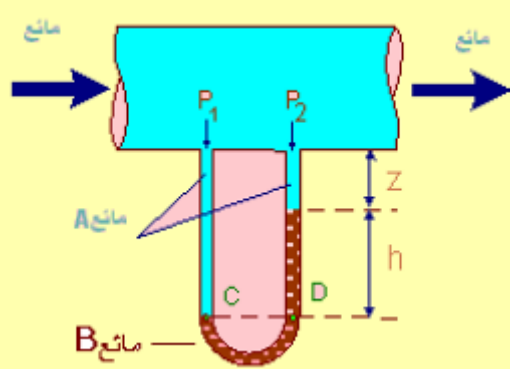
$$P_B = P_C = P_0 + \rho g h$$



الشكل (7): مانومتر بسيط.

ب- المانومتر التبايني

يستخدم هذا المانومتر **الشكل** (8) لقياس الفرق بين الضغط بين النقطتين بدلالة ارتفاع السائل (h) في مائع يسري خلال أنبوب معين.



الشكل (8): المانومتر التبايني.

الضغط عند D يساوي الضغط عند C.

الضغط عند D يساوي الضغط P_2 زائدا ضغط عمود سائل المانومتر h زائد ضغط عمود سائل الأنبوب Z.

الضغط عند C يساوي الضغط P_1 زائدا ضغط عمود سائل الأنبوب $(h + Z)$.

$$P_1 + (h + Z)\rho_A g = P_2 + \rho_B gh + \rho_A gZ$$

$$P_1 - P_2 = \rho_B gh + \rho_A gZ - \rho_A gZ - \rho_A gh$$

$$P_1 - P_2 = (\rho_B - \rho_A)gh$$

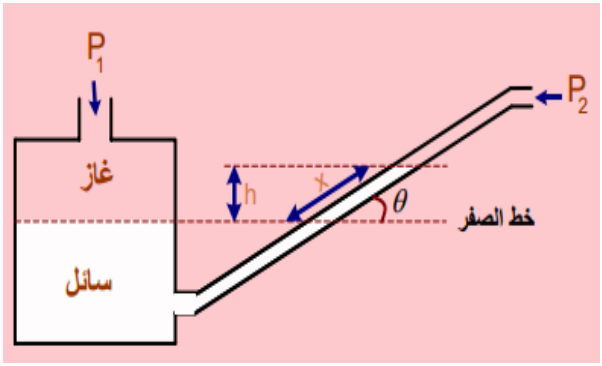
إذا كان المائع الذي يسري في الأنبوب غازاً فيمكن إهمال ضغط عمود المائع A وذلك لصغر كثافة المائع A مقارنة بمائع المانومتر B وبالتالي يمكن كتابة المعادلة كالتالي:

$$P_1 - P_2 = \rho_B gh$$

ت- المانومتر المائل

يستخدم المانومتر المائل (**الشكل** (9)) في الحالات التي يقاس فيها الضغط بصورة دقيقة كمجاري الهواء. وبالتالي فهو يستخدم لقياس الفروق الصغيرة جدا في الضغط وفي هذه الحالة فإن ارتفاع سائل المانومتر h يعبر عنه بـ $X\sin\theta$، حيث X: هي الارتفاع المائل لسائل المانومتر، و θ هي: زاوية ميل المانومتر ، تعطي الفرق في الضغط بالعبارة التالية:

$$P_1 - P_2 = \rho gX\sin\theta$$



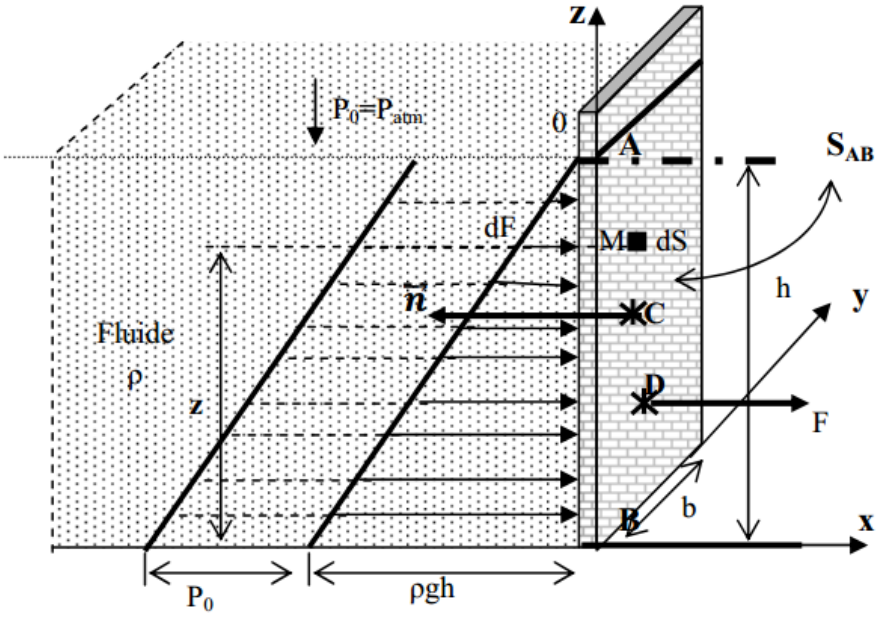
الشكل (9): المانومتر المائل.

6. قوى الضغط على أسطح الجدران

1.6. تعريف:

يسمى التمثيل الرسومي لتغير الضغط على طول جدار مسطح كدالة لعمق الغمر بمخطط توزيع الضغط أو رسم الضغط **الشكل (10)**، خريطة الضغط هذه على شكل مثلث ويتميز هذا المخطط بما يلي:

- قوة الدفع الهيدروستاتيكي ($\vec{F}$): القوى الأولية dF المؤثرة على الحائط كلها متوازية وبالتالي المحصلة F عمودية على الحائط.
- مركز الدفع (D): هي نقطة تطبيق محصلة قوة الدفع F على سطح التلامس (S=h.b).
- مركز الثقل (C): وهو مركز ثقل السطح المغمور في الجدار.



الشكل (10): مخطط توزيع الضغط.

2.6. حالة سطح مستو عمودي

تخيل سطحًا مستويًا AB مغمور رأسيًا في سائل كتلته الحجمية (ρ). يتعرض هذا السطح لقوة F التي يمارسها السائل على الحائط (الشكل ()). نحن نعلم أن: $\overrightarrow{dF} = -P\vec{n}dS$ هي قوة الضغط الأولية المؤثرة على السطح الأولي dS.

- شدة القوة: لمعرفة القوة الكلية المؤثرة على السطح S، ما عليك سوى دمج dF على هذا السطح S_{AB}:

$$\vec{F} = \int_S -P\vec{n}dS$$

ينطبق الضغط الجوي على جانبي الجدار وبالتالي لم يعد يؤثر على النتيجة. ومنه فإن قوة الضغط عند أي نقطة (M) على السطح هي:

$$F = \int P_M\, dS = \int \rho g h_M\, dS = \iint \rho g h_M dydx$$

حيث: $h_M = h - z$,$0 < y < b$,$0 < z < h$

ومنه:

$$F = \int_0^b dy \int_0^h \rho g(h-z)dz = b\rho g\left(h^2 - \left(\frac{1}{2}\right)h^2\right)$$

$$F = b\rho g h^2/2$$

إذا وضعنا: $S = b \times h\ ;\ h_c = h/2$ ، نجد عبارة القوة:

$$F = \rho g h_c S$$

بوضع: $P_c = \rho g h_c$ ومنه: $F = P_c S$

حيث:

S: مساحة السطح المبلل بـ (m^2).

h_C : المسافة العمودية بين مركز الثقل (مركز الثقل) والسطح الحر بـ (m).

- مركز الدفع (D): يتم تحديده من خلال حساب عزم القوة F بالنسبة لأي نقطة O . ولنختاره على مستوى السطح الحر للسائل، ويتم تعريف OD بواسطة:

$$\overrightarrow{OD}\Lambda\vec{F} = \int_S \overrightarrow{OM}\,\Lambda\overrightarrow{dF}$$

حيث: M هي النقطة التي تمسح كامل سطح S_{AB}.

إذا كان: $OM = h\ ;\ OD = h_D$

$$F = \rho g b\, h^2/2$$

$$dF = \rho g b h dh$$

نجد:

$$h_D \times F = \int_0^h h\ \rho g b h dh = \rho g b\, h^3/3$$

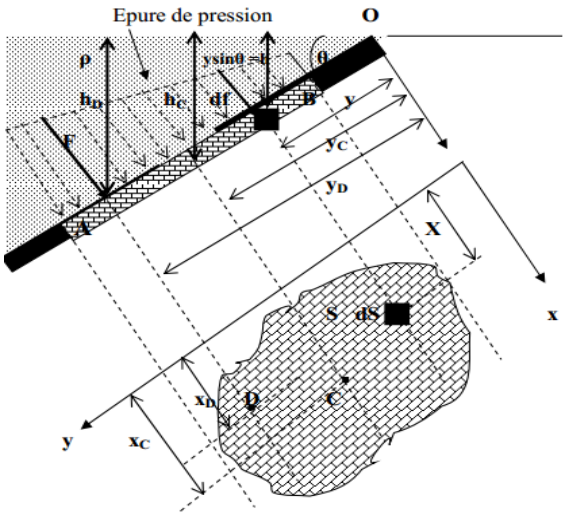
$$h_D = \frac{\rho g b\, h^3/3}{\rho g b\, h^2/2} = \frac{2}{3}h$$

لذا فإن مركز دفع محصلة القوى F يكون دائمًا أقل من مركز الثقل بالنسبة للسطح الرأسي.

حيث: $h_C = h/2$ و $h_D = 2h/3$

3.6. حالة السطح المسطح المائل

ضع في اعتبارك جدارا AB بسطح مستو S من أي شكل مغمور في سائل (ρ) ويميل بزاوية θ بالنسبة إلى المستوى الأفقي وC مركز ثقله (**الشكل (11)**).



الشكل (11): سطح مائل.

- شدة القوة: ضع في اعتبارك القوة الأولية dF المؤثرة على سطح أولي dS.

$$dF = PdS = \rho ghdS = \rho gy \times sin\theta \; dS$$

حيث: $h = y \times sin\theta$

على كامل السطح $F = \int dF$، نتحصل على:

$$F = \int_S PdS = \int_S \rho gy \times sin\theta \; dS$$

$$F = \rho g sin\theta \int_S y \; dS$$

يمثل المصطلح $\int_S y \; dS$ "العزم الثابت" للسطح AB بالنسبة إلى Ox، والتي يتم تعريفها على النحو التالي:

$$\int_S y\, dS = y_c S$$

حيث y_c: الميل بين مركز الثقل والسطح المائل.

تصبح عبارة القوة: $$F = \rho g sin\theta y_c S$$

ولدينا: $sin\theta y_c = h_c$ عمق مركز ثقل السطح AB، ومنه تكتب المعادلة:

$$F = \rho g h_c S = P_c S$$

ولذا، فإن قوة الضغط على سطح مستو مائل تساوي ناتج ضربي مساحة السطح المغمورة والضغط الذي يتعرض له مركز الثقل.

مركز الدفع (D) : من المناسب بشكل عام اختيار نقطة O تنتمي إلى السطح. لنختاره على مستوى السطح الحر للسائل.

لتحديد إحداثيات أو عمق نقطة تطبيق القوة F، دعونا نستخدم مبدأ العزوم:

$$M_O F = \sum_S M_i$$

حيث:

$$\left.\begin{array}{l} M_O F = F y_D \\ \sum_S M_i = \int_S y dF \end{array}\right\} \leftrightarrow \rho g y_c sin\theta S y_D = \rho g sin\theta \int_S y^2 dS$$

ومنه:

$$y_D = \int_S y^2 dS \Big/ y_c S$$

يمثل المصطلح $\int_S y^2 dS$ "العزم الثابت" للسطح AB بالنسبة إلى OX، والتي يتم تعريفها على النحو التالي:

$$\int_S y^2 dS = I_{Ox}$$

حيث: I_{Ox} هو عزم القصور الذاتي (عزم العطالة) للسطح AB بالنسبة إلى المحور OX .

بالنسبة للحسابات، نستبدل I_{Ox} بـ I_{Cx} (I_{Cx} هي لحظة القصور الذاتي للسطح AB بالنسبة إلى محور يمر عبر مركز الثقل C)، ولهذا الغرض، نستخدم نظرية *Huygens* في الميكانيكا النظرية، هذه النظرية تسمح لنا بكتابة ذلك:

$$I_{Ox} = I_{Cx} + y^2 S$$

في هذه الحالة يمكن كتابة:

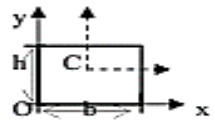
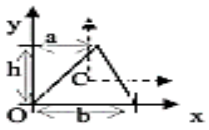
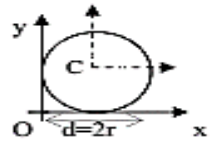
$$y_D = y_C + \frac{I_{Cx}}{y_C S}$$

حيث:

$$y_D sin\theta = h_D$$

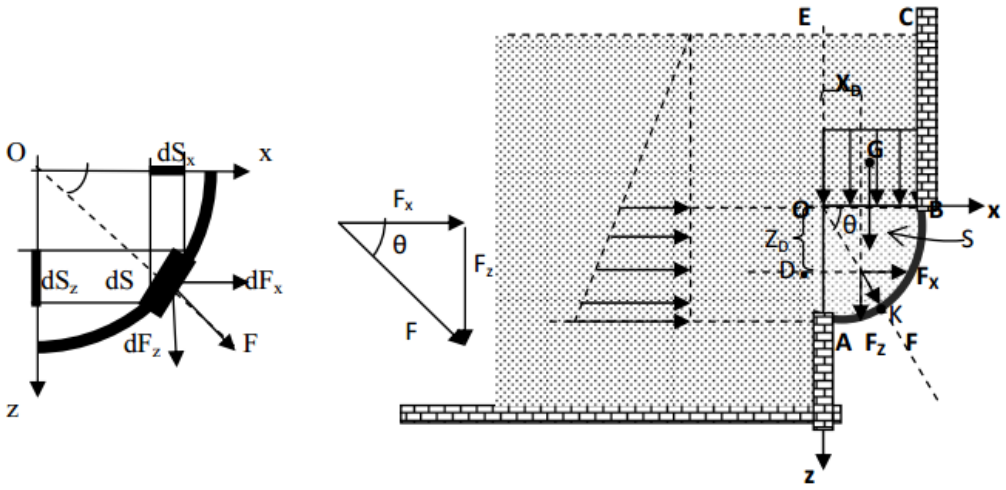
يلخص **الجدول** (**1**) التالي عزم القصور الذاتي لبعض الأسطح المحددة:

الجدول (**1**): عزم القصور الذاتي لبعض الأسطح المحددة.

Forme	S, x_C, y_C, I_{ox}, I_{Cx}
	S=hb, x_C=b/2, y_C=h/2, $I_{ox}=bh^3/3$, $I_{cx}=bh^3/12$
	S=hb/2, x_C=(a+b)/3, y_C=h/3, $I_{ox}=bh^3/12$, $I_{cx}=bh^3/36$
	$S=\pi r^2$, x_C=r, y_C=r, $I_{ox}=5\pi r^4/4$, $I_{cx}=\pi r^4/4$

4.6. الضغط المؤثر على سطح منحني

لنفترض جدارا منحنيًا AB وسطحه S مغمورًا تمامًا في سائل (ρ) **الشكل** (**12**).



شكل (12): حالة السطح المنحني.

- شدة القوة: يمكن تقسيم محصلة قوى الضغط F إلى مركبات:

F_x: القوة المؤثرة على السطح S_z إسقاط S على المحور z (الشكل).

F_z: القوة المؤثرة على السطح S_x إسقاط S على المحور x (الشكل).

نحن نعلم أن: $dF = PdS = \rho ghdS$ وبالتالي:

يتوافق المركبة على المحور الأفقي لقوة الضغط F_x على السطح بأكمله مع القوة الهيدروستاتيكية التي ستعمل على إسقاط S على طول المحور z، Sz

$$F_x = \int_S dF_x = \rho g \int_{S_Z} h dS_Z = \rho g h_c S_Z$$

$$F_H = F_x = \rho g h_c S_Z$$

حيث S_Z: إسقاط عمودي للسطح المنحني AB .

الاستنتاج: يتم تقليل حساب المكون الأفقي F_H إلى حساب قوة الضغط على سطح مستو عمودي.

كذلك:

$$F_Z = \int_S dF_Z = \rho g \int_{S_X} h dS_X = \rho g \int_V dV = \rho g V$$

$$F_V = F_Z = \rho g V$$

حيث V: الحجم محدد بـ:

- السطح المنحني AB

- السطح الحر للسائل (EC)

- يتم تنفيذ العمودين (BC) و (AOE) من طرفي السطح A و B .

الاستنتاج: إن حساب المكون الرأسي F_V يتلخص في حساب وزن السائل الذي يمثله الحجم المزاح بواسطة السطح AB .

يتم الحصول على شدة القوة F المؤثرة بشكل طبيعي على السطح بالتعبير التالي:

$$F = \sqrt{F_V^2 + F_H^2}$$

- مركز الدفع: لسطح دائري أو كروي أو أسطواني؛ يمر خط عمل القوة الناتجة دائمًا عبر مركز الانحناء (O)، وتعرف زاوية ميلها θ من الصيغة التالية:

$$tan\theta = \frac{F_V}{F_H}$$

يمكن حساب إحداثيات مركز الدفع باستخدام الصيغ:

$$X_D = rcos\theta \; ; \;\; Z_D = sin\theta$$

حيث r : نصف قطر الانحناء.

سلسلة تمارين محلولة

التمرين 1:

خزان مملوء بالماء كثافته ($\rho = 1000\,Kg/m^3$) حتى ارتفاع $h = 5m$.

- أحسب الضغط عند قاع الخزان إذا كان الضغط الجوي ($P_0 = 1atm = 1.013 \times 10^5 Pa$)
- ما هو العمق الذي يصبح عنده الضغط ضعف الضغط الجوي؟

الحل:

- حساب الضغط عند قاع الخزان:

$$P = P_0 + \rho gh = 1.013 \times 10^5 + (1000 \times 5 \times 9.81) = 1.503 \times 10^5 Pa$$

- العمق الذي يصبح عنده الضغط ضعف الضغط الجوي: $P = 2P_0$

$$2P_0 = P_0 + \rho gh$$

$$\Rightarrow h = \frac{P_0}{\rho g} = \frac{1.013 \times 10^5}{1000 \times 9.81} = 10.33m$$

التمرين 2:

بركة سباحة مستطيلة الشكل عمقها $2.5\ m$ مملوءة بالماء ($\rho = 1000\,Kg/m^3$). الضغط الجوي عند السطح هو $1.013 \times 10^5 Pa$.

- أحسب الضغط المطلق عند قاع البركة.
- أحسب الضغط القياسي عند قاع البركة.
- إذا كان هناك نقطة على عمق $1.2\ m$ من السطح، فما هو الضغط المطلق عند تلك النقطة؟ $g = 9.81\ m/s^2$

الحل:

- حساب الضغط المطلق عند قاع البركة:

$$P = P_0 + \rho gh = 1.013 \times 10^5 + (1000 \times 2.5 \times 9.81) = 1.258 \times 10^5 Pa$$

- حساب الضغط القياسي عند قاع البركة: الضغط القياسي هو الضغط الناتج عن السائل فقط:

$$P = \rho gh = 1000 \times 2.5 \times 9.81 = 24.525 \times 10^3 Pa$$

- الضغط المطلق عند عمق $1.2\ m$ من السطح:

$$P' = P_0 + \rho gh' = 1.013 \times 10^5 + (1000 \times 1.2 \times 9.81)$$

$$P' = 1.13 \times 10^5 Pa$$

التمرين 3:

رافعة هيدروليكية تستخدم لرفع سيارة تزن $1500\ kg$. قطر المكبس الصغير هو $2\ cm$، وقطر المكبس الكبير هو $20\ cm$.

- ما هي القوة الدنيا التي يجب تطبيقها على المكبس الصغير لرفع السيارة؟
- إذا تحرك المكبس الصغير مسافة 10 cm إلى الأسفل، فما هي المسافة التي سترتفعها السيارة؟

الحل:

- القوة الدنيا التي يجب تطبيقها على المكبس الصغير لرفع السيارة:

أولا: نحسب القوة التي تطبقها السيارة على المكبس الكبير:

$$F_2 = mg = 1500 \times 9.81$$

$$F_2 = 14517\ N$$

ثانيا: نحسب مساحة سطح كل من المكبس الصغير والكبير:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 = \frac{\pi}{4} \times 0.01^2 = 0.0001\pi\ m^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 = \frac{\pi}{4} \times 0.1^2 = 0.01\pi\ m^2$$

حسب مبدأ باسكال:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow {}^{F_1}/_{A_1} = {}^{F_2}/_{A_2}$$

$$F_1 = {}^{F_2}/_{A_2} \times A_1 = 14517 \times \frac{0.0001\pi}{0.01\pi} = 145.17\ N$$

- المسافة التي سترتفعها السيارة إذا تحرك المكبس الصغير مسافة 10 cm إلى الأسفل:

حسب مبدأ الحجم المزاح متساو:

$$V_1 = V_1 \Rightarrow A_1 h_1 = A_2 h_2$$

$$h_2 = \frac{A_1 h_1}{A_2} = \frac{0.0001\pi \times 0.1}{0.01\pi}$$

$$h_2 = 0.001cm = 0.1m$$

التمرين 4:

بوابة سد مستطيلة الشكل، عرضها 4 m وارتفاعها 6 m، مغمورة بالكامل في الماء بحيث يكون سطحها العلوي على عمق 2 m تحت سطح الماء.

- أحسب القوة الكلية الناتجة عن ضغط الماء على البوابة.
- حدد عمق مركز الضغط من سطح الماء.

الحل:

- القوة الكلية الناتجة عن ضغط الماء (F):

أولا: حساب مساحة البوابة:

$$A = h \times b = 6 \times 4 = 24\ m^2$$

ثانيا: عمق مركز البوابة من سطح الماء:

$$\bar{h} = h_1 + {}^{h}/_{2} = 2 + {}^{6}/_{2} = 5\ m$$

ثالثا: الضغط عند مركز الثقل:

$$P_C = \rho g \bar{h} = 1000 \times 9.81 \times 5 = 49050\ Pa$$

رابعا: القوة الكلية:

$$F = P_C A = 49050 \times 24 = 1177200\ N$$

- عمق مركز الضغط:

نحتاج إلى عزم القصور الذاتي المساحي حول المحور الأفقي المار بمركز ثقل المستطيل (I_C):

$$I_C = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \times 6^3}{12} = 72\ m^4$$

عبارة مركز الضغط:

$$h_P = \frac{A\bar{h}}{I_C} + \bar{h} = \frac{24 \times 5}{72} + 5 = 5.6\ m$$

التمرين 5:

صفيحة رقيقة على شكل مثلث متساوي الساقين، قاعدته $b = 3\ m$ وارتفاعه $h = 4\ m$، مغمورة عموديًا في سائل كثافته ($\rho = 800\ kg/m^3$) بحيث تكون قاعدته الأفقية على عمق $2\ m$ من السطح الحر للسائل، ورأس المثلث يتجه للأسفل.

- أحسب القوة الكلية المؤثرة على الصفيحة.
- حدد موضع مركز الضغط.

الحل:

- حساب القوة الكلية المؤثرة على الصفيحة:

مساحة المثلث:

$$A = {}^{1}/_{2}\, hb = {}^{1}/_{2} \times 4 \times 3 = 6\ m^2$$

مركز ثقل المثلث من القاعدة: ${}^{h}/_{3}$

مركز ثقل المثلث من الرأس: ${}^{2h}/_{3}$

بما أن الرأس متجه نحو الأسفل فإن مركز الثقل سيكون على مسافة $^{h}/_{3}$ من القاعدة، ويساوي: $^{4}/_{3}\ m$

عمق مركز الثقل من السطح الحر:

$$\bar{h} = h + {}^{h}/_{3} = 2 + {}^{4}/_{3} = 3.333\ m$$

الضغط عند مركز الثقل:

$$P_C = \rho g \bar{h} = 800 \times 9.81 \times 3.333 = 26157.8\ Pa$$

القوة الكلية:

$$F = AP_C = 6 \times 26157.8 = 156946.8\ N$$

$$F = 156.9468\ KN$$

- تحديد موضع مركز الضغط:

عزم القصور الذاتي المساحي للمثلث حول محور يمر بمركز ثقله وموازي للقاعدة:

$$I_C = \frac{bh^3}{36} = \frac{3 \times 4^3}{36}$$

$$I_C = 5.333\ m^4$$

صيغة مركز الضغط:

$$h_P = \frac{A\bar{h}}{\mathrm{I}_C} + \bar{h}$$

$$h_P = \frac{6 \times 3.333}{5.333} + 3.333 \approx 3.6\ m$$

سلسلة تمارين مقترحة

التمرين 1:

خزان وقود أسطواني الشكل، ارتفاعه 5 m، مملوء بالبنزين (كثافته النسبية 0.75). يقع مقياس ضغط (Pressure Gauge) على جانب الخزان على ارتفاع 1.5 m من قاع الخزان. إذا كان الضغط الجوي 101.3 kPa، وقراءة مقياس الضغط هي 25 kPa، فأحسب عمق البنزين في الخزان.

التمرين 2:

نظام هيدروليكي يتكون من مكبس صغير بقطر 5 cm ومكبسين كبيرين بقطر 15 cm لكل منهما ، إذا تم تطبيق قوة 100 N على المكبس الصغير، فما هي القوة الكلية التي يمكن أن يولدها المكبسان الكبيران معًا؟

التمرين 3:

خزان ماء ارتفاعه $4m$ وعرضه $2m$.

- أحسب القوة المحصلة المؤثرة على جداره الرأسي.

التمرين 4:

بوابة سد دائرية الشكل، قطرها 3 m ، مغمورة عموديًا في الماء بحيث يقع مركزها على عمق 4 m تحت سطح الماء.

- أحسب القوة الكلية الناتجة عن ضغط الماء على البوابة.
- حدد عمق مركز الضغط من سطح الماء.

التمرين 5:

مكعب خشبي ذو أضلاع 30 cm وكثافته $\rho_p = 700\ \text{kg/m}^3$ يطفو في الماء.

- ما هو الحجم المغمور من المكعب في الماء؟
- إذا تم وضع جسم إضافي فوق المكعب بحيث يغوص المكعب بالكامل في الماء (دون أن يلمس القاع)، فما هي كتلة هذا الجسم الإضافي؟

التمرين 6:

بالون كروي الشكل قطره 5 m مملوء بالهيليوم (كثافة الهيليوم : $\rho_{He} = 0.179\ \text{kg/m}^3$). كثافة الهواء المحيط $\rho_{air} = 1.225\ kg/m^3$. أهمل كتلة البالون نفسه.

- أحسب قوة الطفو المؤثرة على البالون.
- ما هي الحمولة القصوى التي يمكن أن يحملها هذا البالون (بالإضافة إلى كتلة الهيليوم) ليتمكن من الطفو؟

الفصل الرابع

حفظ الكتلة

الهدف العام:

تمكين الطالب من فهم وتطبيق مبدأ حفظ الكتلة في تحليل تدفقات الموائع المختلفة، سواء باستخدام نهج حجم التحكم أو النهج التفاضلي، والقدرة على استنتاج ومعالجة المعادلات الرياضية المرتبطة بهذا المبدأ لحل المشكلات الهندسية.

الأهداف التفصيلية: في نهاية هذا الفصل يكون الطالب قادرا على:

- فهم نظرية لايبنتز ودورها في اشتقاق معادلات الحفظ في ميكانيكا الموائع،
- تحديد الشروط التي يجب أن تتحقق لتطبيق معادلة الاستمرارية،
- تطبيق مبدأ حفظ التصريف لحل مسائل عملية تتعلق بتدفق الموائع في الأنابيب والقنوات.

في ميكانيك الموائع، يعد مبدأ حفظ الكتلة أحد المبادئ الأساسية التي تحكم حركة الموائع، وينص هذا المبدأ على أن الكتلة داخل نظام معين لا يمكن أن تخلق أو تدمر، بل تنتقل أو تتحول داخل النظام أو بينه وبين محيطه.

1. نظرية لايبنتز (Leibniz's theorem):

هي أداة رياضية قوية تسمح لنا بحساب مشتقة تكامل تكون حدوده (أو منطقة التكامل) متغيرة مع الزمن، في ميكانيكا الموائع، هذا يحدث كثيرًا عندما نتعامل مع حجوم التحكم المتحركة أو التي يتغير شكلها، مثل كيس الهواء في السيارة أثناء انتفاخه، أو مكبس يتحرك داخل أسطوانة.

1.1. نبذة تاريخية:

تستخدم نظرية لايبنتز في ميكانيكا الموائع لحساب معدل تغير كمية مادية (مثل الكتلة أو الطاقة) داخل حجم تحكم متغير مع الزمن (مثل بالون يتم نفخه أو خزان يتوسع)، حيث تربط بين التغير الزمني للتكامل على حجم متحرك والتكامل على سطحه، مما يجعلها أداة أساسية لاشتقاق معادلات حفظ الكتلة والطاقة.

2.1. الصيغة الرياضية:

تخيل أننا ندرس كتلة سائل داخل بالون، إذا قمنا بضخ المزيد من السائل داخل البالون، فإن كتلته تتغير، ولكن ماذا لو كان البالون نفسه يتمدد أو يتقلص؟ أو ماذا لو كان يتحرك بسرعة؟ هنا لا يمكننا ببساطة إخراج المشتقة من التكامل، لأن حدود التكامل نفسها تعتمد على الزمن، نظرية لايبنتز توفر لنا "قاعدة السلسلة" للتكاملات.

نتخيل حجما V يتغير شكله أو موضعه بمرور الزمن. إذا كان لدينا دالة $F(x,t)$ نكاملها على هذا الحجم، فإن نظرية لايبنتز تمكننا من حساب مشتقة هذا التكامل بالنسبة للزمن، و بحيث يمكن صياغة نظرية لايبنتز للتكامل الحجمي بالصيغة التالية:

$$\frac{d}{td}\int_{V(t)} F(x,t)\,dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\,dV + \int_{S(t)} F(v_s \cdot n)dS$$

حيث:

$V(t)$: هو حجم التحكم الذي يتغير مع الزمن.

$S(t)$: هو السطح المحيط بحجم التحكم.

$F(x,t)$: هي الدالة التي يتم تكاملها (على سبيل المثال، الكثافة ρ في حالة الكتلة).

v_s: هي سرعة السطح (أو حدود حجم التحكم).

n: هو متجه الوحدة العمودي على السطح، والموجه إلى الخارج.

$\frac{\partial F}{\partial t}$: هو المشتقة الجزئية للدالة F بالنسبة للزمن، مع ثبات الموقع.

نفكك هذه المعادلة الى:

- الجزء الأول: $\frac{d}{td}\int_{V(t)} F(x,t)\,dV$

يمثل المعدل الكلي لتغير الخاصية (F مثل الكثافة ρ للكتلة، أو ρv للزخم) داخل حجم التحكم $V(t)$ الذي يمكن أن يتغير مع الزمن، بحيث المطلوب من هذا: كيف تتغير الكمية الكلية لـ F داخل هذا الحجم المتحرك أو المتغير.

- الجزء الثاني: $\int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\,dV$

✓ بحيث يعرف هذا الجزء بـ "التغير الزمني المحلي" أو "معدل التغير داخل الحجم".

✓ يمثل أيضا معدل التغير في الخاصية F عند كل نقطة ثابتة داخل حجم التحكم ، بعبارة أخرى هذا هو التغير الذي يحدث في F حتى لو كان حجم التحكم ثابتا في مكانه ولا يتغير شكله.

✓ إذا كانت F هي الكثافة ρ، فإن هذا الحد يصف كيف تتغير الكثافة في نفس المكان بمرور الوقت (مثل تسخين السائل وتمدده في وعاء مغلق).

- الجزء الثالث: $\int_{S(t)} F(v_s \cdot n)dS$

✓ يعرف هذا الجزء بـ "التدفق عبر السطح المتحرك" أو "معدل التغير بسبب حركة الحدود".

✓ يمثل التغير في الخاصية F الذي يحدث نتيجة لحركة حدود حجم التحكم ($S(t)$).

✓ v_s : هو متجه سرعة حركة السطح نفسه (حدود حجم التحكم).

✓ n: هو متجه الوحدة العمودي على السطح، والموجه إلى الخارج.

✓ $(v_s \cdot n)$: يمثل المركبة العمودية لسرعة السطح بالنسبة للسطح، بحيث إذا كانت حدود حجم التحكم تتحرك إلى الخارج (مثل بالون ينتفخ)، فإن $(v_s \cdot n)$ يكون موجبا، وإذا كانت تتحرك إلى الداخل (مثل بالون يتقلص)، فإنه يكون سالبا.

3.1. أهميتها في ميكانيك الموائع:

نظرية لايبنتز هي حجر الزاوية لاشتقاق صيغ حجم التحكم لجميع معادلات الحفظ الأساسية في ميكانيكا الموائع:

- *معادلة حفظ الكتلة (معادلة الاستمرارية):* عندما تكون $F = \rho$ (الكثافة).
- *معادلة حفظ كمية الحركة (معادلة نافييه-ستوكس):* عندما تكون $F = \rho v$ (كمية الحركة لكل وحدة حجم).
- *معادلة حفظ الطاقة:* عندما تكون $F = \rho e$(الطاقة الكلية لكل وحدة حجم).

4.1. استخدامها:

يتم استخدامها نظرية بشكل عام عندما يكون حجم التحكم نفسه يتغير مع الزمن.

مثال: تحليل تدفق السائل في مكبس أسطوانة، بحيث يتغير حجم الأسطوانة الذي يحتويه السائل مع حركة المكبس، و في هذه الحالة سرعة المكبس هي v_s.

حالة خاصة: في كثير من الأحيان، نختار حجم تحكم ثابتا ،في هذه الحالة تكون سرعة السطح $v_s = 0$ (لأن السطح لا يتحرك)، في هذه الحالة، يختفي الحد الثاني في معادلة لايبنتز، وتبسط المعادلة إلى:

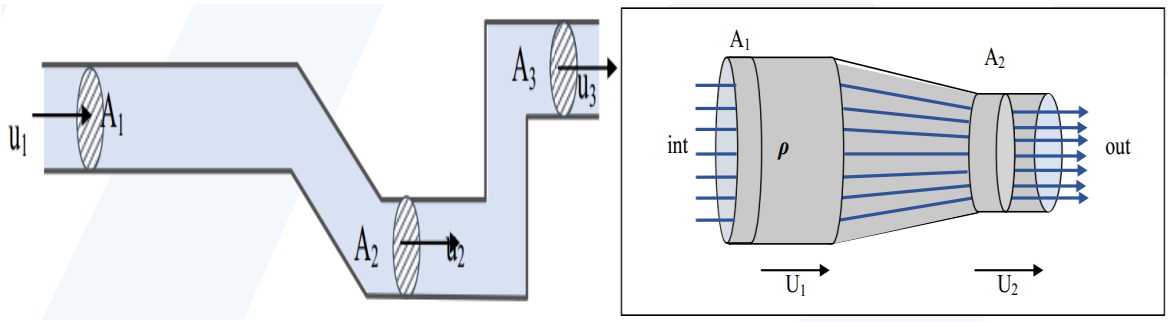
$$\frac{d}{td}\int_{V(t)} F(x,t)\,dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\,dV$$

وهذا يعني أن التغير الكلي في الخاصية F داخل حجم ثابت هو ببساطة نتيجة للتغيرات الداخلية لـ F بمرور الوقت، و لكن هذا التبسيط لا يعني أن F لا يمكن أن تتدفق عبر حدود الحجم الثابت؛ بل يتم التعامل مع تدفق F عبر السطح كحد منفصل في معادلات الحفظ (مثل $\int F(v_s \cdot n)dS$ في معادلة الاستمرارية).

2. معادلة الاستمرارية

1.2. تعريف:

تعبر عن مبدأ حفظ الكتلة في نظام مائعي، سواء كان النظام مغلقًا (حجم تحكم ثابت) أو مفتوحًا (تدفق عبر حدود متحركة أو ثابتة)، والتي تنص على أن الكتلة لا يمكن خلقها أو تدميرها، هذا يعني أن أي تغير في كتلة سائل داخل حجم معين يجب أن يُعزى إلى تدفق الكتلة عبر حدود هذا الحجم، و بعبارة أبسط: "ما يدخل يجب أن يخرج، أو يتراكم بالداخل" (**الشكل (1)**).



الشكل (1): تطبيق معادلة الاستمرارية.

ويمكن النظر إليها على مستويين:

- الصورة التكاملية: تطبق على حجم تحكم معين، وتركز على صافي التدفق الكتلي عبر الحدود.
- الصورة التفاضلية: تطبق على نقطة معينة في المائع، وتركز على التغيرات المحلية في الكثافة والسرعة.

2.2. المبدأ الفيزيائي الأساسي:

يمكن التعبير عن مبدأ حفظ الكتلة في الموائع على النحو التالي:

صافي معدل تدفق الكتلة إلى داخل حجم التحكم = معدل تغير الكتلة داخل حجم التحكم

- معدل تغير الكتلة داخل حجم التحكم: حيث يمثل مدى سرعة تراكم الكتلة أو نقصانها داخل المنطقة الدراسة (حجم التحكم)، فإذا زادت الكتلة، فهذا يعني أن هناك "تراكما".

- صافي معدل تدفق الكتلة إلى داخل حجم التحكم: يمثل الفرق بين الكتلة التي تدخل حجم التحكم والكتلة التي تخرج منه، وإذا كان التدفق الداخل أكبر من الخارج، فهناك زيادة صافية في الكتلة.

3.2. اشتقاق معادلة الاستمرارية:

للحصول على الصيغة التفاضلية، نبدأ من مبدأ حفظ الكتلة المطبق على حجم تحكم متناهي الصغر ثابت في الفضاء.

- الكتلة داخل حجم التحكم:

الكتلة الكلية (M) داخل حجم التحكم V_{CV} تُعطى بالتكامل:

$$M(t) = \int_{V_{CV}} \rho(x,t)dV$$

حيث ρ هي الكثافة (كتلة لكل وحدة حجم) التي يمكن أن تتغير مع الموضع (x) والزمن (t).

- معدل تغير الكتلة داخل حجم التحكم:

باستخدام الشكل المبسّط لنظرية لايبنتز لحجم تحكم ثابت $(v_s = 0)$:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V_{CV}} \rho dV = \int_{V_{CV}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

حيث يمثل هذا معدل تراكم الكتلة داخل حجم التحكم، فإذا كانت هذه القيمة موجبة، فهذا يعني أن الكتلة تتراكم داخل الحجم.

- صافي معدل تدفق الكتلة عبر سطح التحكم:

تدفق الكتلة عبر أي جزء من السطح dS يعطى بـ $\rho(v \cdot n)dS$ حيث v هي سرعة المائع، و n هو متجه الوحدة العمودي على السطح والموجه إلى الخارج ومنه نعبر على صافي معدل تدفق الكتلة الخارج من حجم التحكم بالعبارة:

$$\int_{S_{CV}} \rho(v \cdot n)dS$$

وبالتالي، صافي معدل تدفق الكتلة الداخل هو بالسالب:

$$-\int_{S_{CV}} \rho(v \cdot n)dS$$

- تطبيق نظرية جايسون-جوس (Gauss-Divergence Theorem):

تسمح لنا هذه النظرية بتحويل التكامل السطحي للتدفق إلى تكامل حجمي للتباعد:

$$\int_{S_{CV}} \rho(v \cdot n)dS = \int_{V_{CV}} \nabla \cdot (\rho v)dV$$

بحيث يمثل هذا الحد $\nabla \cdot (\rho v)$ "الكثافة الحجمية الصافية لمصادر الكتلة"، و إذا كانت قيمته موجبة، فهذا يشير إلى أن الكتلة تتباعد (تخرج) من نقطة معينة، وإذا كانت سالبة فهذا يشير إلى أنها تتقارب (تدخل) إلى نقطة.

- دمج كل الحدود:

بتطبيق مبدأ حفظ الكتلة:

$$\frac{dM}{dt} = -\int_{S_{CV}} \rho(v \cdot n) dS$$

$$\int_{V_{CV}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_{V_{CV}} \nabla \cdot (\rho v) dV$$

بإعادة ترتيب الحدود ونقلها إلى جانب واحد تكون العبارة كما يلي:

$$\int_{V_{CV}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) \right) dV = 0$$

بما أن هذا يجب أن يكون صحيحًا لأي حجم تحكم V_{CV} (مهما كان صغيرا)، فإن الدالة تحت التكامل يجب أن تكون صفرا في كل نقطة:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

هذه هي الصيغة التفاضلية لمعادلة الاستمرارية وهي صالحة لجميع أنواع الموائع (قابلة للانضغاط أو غير قابلة للانضغاط) وفي جميع أنظمة التدفق (مستقرة أو غير مستقرة).

بحيث:

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (الحد الزمني): ويمثل معدل التغير الزمني للكثافة عند نقطة ثابتة في الفضاء، بحيث إذا كانت الكثافة تتغير بمرور الوقت في مكان معين، فإن هذا الحد يكون غير معدوم (مثل: تسخين غاز في وعاء مغلق).

$\nabla \cdot (\rho v)$ (الحد المكاني/التباعدي): يمثل صافي تدفق الكتلة خارج حجم متناهي الصغر يحيط بالنقطة، و هو تباعد متجه تدفق الكتلة (ρv).

- ✓ إذا كان $\nabla \cdot (\rho v) > 0$، فهناك تدفق صافي للكتلة خارج النقطة (مصدر).
- ✓ إذا كان $\nabla \cdot (\rho v) < 0$، فهناك تدفق صافي للكتلة داخل النقطة (مصرف).

مغزى المعادلة الكلية: تقول معادلة الاستمرارية أن معدل تغير الكتلة في نقطة معينة (الحد الأول) يجب أن يوازن بواسطة صافي تدفق الكتلة من هذه النقطة (الحد الثاني) ، بعبارة أخرى مجموع صافي التدفق الخارجي والتراكم الزمني للكتلة يجب أن يكون معدوما.

4.2. حالات خاصة هامة لمعادلة الاستمرارية:

معادلة الاستمرارية العامة في ظروف معينة يمكن تبسيطها بشكل كبير:

- للموائع غير القابلة للانضغاط (Incompressible Fluids):
  - ✓ الكثافة ρ تكون ثابتة (لا تتغير مع الزمن ولا مع الموضع).
  - ✓ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
  - ✓ أيضا يمكن إخراج ρ من عامل التباعد لأنها ثابتة: $\nabla \cdot (\rho v) = \rho(\nabla \cdot v)$.

ومنه تصبح معادلة الاستمرارية كما يلي:

$$\rho(\nabla \cdot v) = 0$$

وبما أن $\rho \neq 0$ فإن $(\nabla \cdot v) = 0$، وهذا يعني أن تباعد حقل السرعة معدوم، في الموائع غير القابلة للانضغاط، أي لا يمكن أن يكون هناك مصادر أو مصارف صافية للكتلة في أي نقطة وأن ما يدخل إلى حجم متناهي الصغر يجب أن يخرج منه بنفس المعدل، هذا يشير إلى أن التدفق "لا يتأرجح".

- التدفق المستقر (Steady Flow):
  - ✓ خصائص التدفق (مثل الكثافة والسرعة) لا تتغير مع الزمن عند أي نقطة ثابتة في الفضاء.
  - ✓ $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ لأي خاصية.

في هذه الحالة تصبح المعادلة كما يلي:

$$\nabla \cdot (\rho v) = 0$$

بالرغم من أن المائع قد يكون قابلًا للانضغاط (تتغير كثافته مع المكان)، إلا أن تدفقه مستقر بمرور الزمن، هذا يعني أن صافي تدفق الكتلة خارج أي حجم تحكم ثابت يجب أن يكون صفرًا.

- للتدفق المستقر وغير القابل للانضغاط (Steady, Incompressible Flow):

هذه هي الحالة الأكثر شيوعًا في العديد من التطبيقات الهندسية (مثل الماء في الأنابيب)، بحيث في هذه الحالة، كلا الشرطين السابقين ينطبقان.

- ✓ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ و $\nabla \cdot v = 0$.
- ✓ هذا يؤدي مباشرة إلى مبدأ حفظ التصريف والذي سنفصله لاحقا.

3. حفظ التدفق (Flow Conservation):

يعد حفظ التدفق تطبيقا عمليا لمبدأ حفظ الكتلة، بحيث يركز على تحليل التدفقات في الأنظمة الهندسية مثل الأنابيب، القنوات، والأنظمة الهيدروليكية، و يعتمد هذا المفهوم على معادلة الاستمرارية، حيث يتم التعبير عن التدفق إما كتدفق حجمي (Q) أو تدفق كتلي ($\dot{m}$)، مع الأخذ في الاعتبار خصائص المائع (قابل للانضغاط أو غير قابل للانضغاط).

1.3. تعريف:

حفظ التدفق هو تطبيق مباشر لمعادلة الاستمرارية على الأنظمة التي تنطوي على تدفق الموائع عبر مقاطع معينة (مثل الأنابيب أو القنوات)، حيث ينص على أن التدفق (سواء حجمي أو كتلي) يظل محفوظا عبر الأنظمة في ظل ظروف معينة، مع مراعاة تغيرات الكثافة، السرعة، أو مساحة المقطع.

يمكن حسابه بشكل عام، إذا كان المائع يتدفق بسرعة منتظمة (v) عبر مقطع عرضي مساحته (A) وكان اتجاه السرعة عموديا على هذا المقطع، فإن التصريف يعطى بالمعادلة البسيطة:

$$Q = A\,v$$

ملاحظة هامة: في الواقع، نادرا ما تكون السرعة منتظمة عبر المقطع العرضي (بسبب اللزوجة، تكون السرعة غالبا أعلى في المنتصف وأقل عند الجدران) ، لذلك فإن V هنا تمثل متوسط السرعة عبر المقطع، للحسابات الأكثر دقة عندما تكون السرعة متغيرة، فإن التصريف يعطى بتكامل السرعة على المساحة:

$$Q = \int_A (v \cdot n)dA$$

حيث v هو متجه السرعة المحلي، و n هو متجه الوحدة العمودي على السطح.

2.3. اشتقاق مبدأ حفظ التدفق:

إذا طبقنا معادلة الاستمرارية على تدفق مستقر وغير قابل للانضغاط، فإننا نعلم أن:

$$\nabla \cdot v = 0$$

نفرض أن لدينا أنبوبا يتغير مقطعه العرضي، ونريد أن نطبق مبدأ حفظ الكتلة بين مقطعين (1) و (2) داخل هذا الأنبوب، كما هو موضح في **الشكل (2)**:

الشكل (2): تدفق مائع في أنبوب.

باختيار حجم تحكم يمتد بين المقطعين (1) و (2)، وتطبيق معادلة الاستمرارية بنهج حجم التحكم (مع الأخذ في الاعتبار أن التدفق مستقر وبالتالي لا يوجد تراكم للكتلة داخل حجم التحكم):

$$\int_{S_{CV}} \rho(v \cdot n)dS = 0$$

سطح التحكم S_{CV} يتكون من ثلاثة أجزاء: المقطع العرضي عند الدخول (A_1)، والمقطع العرضي عند الخروج (A_2)، والجدران الجانبية للأنبوب (S_{Wall})، بما أن المائع لا يخترق جدران الأنبوب (تدفق غير لزج مثالي)، فإن التدفق عبر S_{Wall}يساوي صفرا، لذا يتبقى لدينا التدفق عبر المقطعين A_1 و A_2 :

$$\int_{A_1} \rho(v \cdot n_1)dA + \int_{A_2} \rho(v \cdot n_2)dA = 0$$

حيث n_1 يشير إلى الخارج من حجم التحكم (أي نحو اليسار في المقطع 1)، و n_2 يشير إلى الخارج من حجم التحكم (أي نحو اليمين في المقطع 2).

إذا افترضنا أن السرعة متوسطة ومنتظمة عبر كل مقطع، وأن v موازي لـ n (أو معاكس له) عند الحدود:

$$-\rho_1 A_1 v_1 + \rho_2 A_2 v_2 = 0$$

لإشارة السالبة أمام الحد الأول تأتي من أن اتجاه التدفق الفعلي للمائع عند A_1يكون إلى الداخل، بينما n_1 يتجه إلى الخارج (زاوية $180°$)، بحيث $\cos(180) = -1$

بما أن المائع غير قابل للانضغاط، فإن $\rho = \rho_1 = \rho_2$ ، لذا يمكننا إلغاء الكثافة من المعادلة:

$$\rho(-A_1 v_1 + A_2 v_2) = 0$$

- وبما أن $\rho \neq 0$: فإن $A_1 v_1 = A_2 v_2$، إن هذه هي الصيغة الشهيرة لمبدأ حفظ التصريف، و تعرف هذه المعادلة أحيانا باسم "معادلة الاستمرارية أحادية البعد".

3.3. أنواع التدفق:

- التدفق الحجمي: يعرف بأنه حجم المائع الذي يمر عبر مقطع معين في وحدة الزمن، ويحسب بالعلاقة: $Q_V = A\,v$ حيث:

Q: التدفق الحجمي وحدته (m^3/s)

A: مساحة المقطع العرضي بوحدة (m^2)

v: السرعة المتوسطة للمائع بوحدة (m^2/s).

- التدفق الكتلي: يعرف بأنه كتلة المائع التي تمر عبر مقطع معين في وحدة الزمن، و يعطى بالعلاقة:

$$Q_m = \dot{m} = \rho Q = \rho A v$$

حيث:

$\dot{m}$: التدفق الكتلي بوحدة (Kg/s).

ρ: الكتلة الحجمية (الكثافة) بوحدة (Kg/m^3).

4.3. العلاقات الرياضية لحفظ التدفق:

يعتمد حفظ التدفق على معادلة الاستمرارية، والتي تطبق على التدفقات عبر مقاطع مختلفة في النظام، يمكن التعبير عنها كما يلي:

- التدفق غير القابل للانضغاط:

في الموائع غير القابلة للانضغاط (مثل الماء في معظم التطبيقات الهندسية)، تكون الكثافة (ρ) ثابتة، وفقا لمعادلة الاستمرارية: ($\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$) بما أن الكثافة ثابتة، يمكن إلغاؤها من الطرفين، مما يعطي: ($Q_1 = Q_2$)هذه العلاقة تظهر أن التدفق الحجمي ثابت عبر مقاطع النظام المختلفة، بحيث إذا انخفضت مساحة المقطع ($A_1 = A_2$)، تزداد السرعة$v_1 = v_2$ ، والعكس صحيح.

- التدفق القابل للانضغاط:

في الموائع القابلة للانضغاط (مثل الغازات)، تتغير الكثافة مع الضغط ودرجة الحرارة ، في هذه الحالة يظل التدفق الكتلي محفوظا: ($\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$)، هذا يعني ($\dot{m}_1 = \dot{m}_2$) هنا، يجب مراعاة تغيرات الكثافة عند حساب التدفق عبر مقاطع مختلفة.

- التدفق في الحالة أحادية البعد:

في الأنظمة البسيطة (مثل الأنابيب)، غالبا ما يفترض أن التدفق أحادي البعد، أي أن السرعة موزعة بشكل متساو عبر المقطع، في هذه الحالة تبسط العلاقات إلى:

- ✓ للتدفق غير القابل للانضغاط: $Q_V = A\ v$.
- ✓ للتدفق القابل للانضغاط: $\dot{m} = \rho\ A\ v$.

5.3. حالات خاصة لأنظمة التدفق:

- التدفق المنتظم (Steady Flow): في التدفق المنتظم، لا تتغير خصائص المائع (الكثافة، السرعة، الضغط) مع الزمن في أي نقطة، في هذه الحالة:
  - ✓ للتدفق غير القابل للانضغاط: التدفق الحجمي(Q_V) ثابت.
  - ✓ للتدفق القابل للانضغاط: التدفق الكتلي $(\dot{m})$ ثابت.
- التدفق غير المنتظم (Unsteady Flow): في التدفق غير المنتظم، تتغير خصائص المائع مع الزمن، في هذه الحالة يجب استخدام الصورة العامة لمعادلة الاستمرارية، ويتم تحليل التدفق باستخدام معادلات ديناميكية إضافية (مثل معادلات نافييه–ستوكس) لحساب التغيرات الزمنية.
- التدفق ثلاثي الأبعاد: في الأنظمة المعقدة (مثل التدفق حول جسم أو في قناة غير منتظمة)، يجب مراعاة التوزيع ثلاثي الأبعاد للسرعة والكثافة، هنا تستخدم الصورة التفاضلية لمعادلة الاستمرارية لحساب التدفق.

سلسلة تمارين محلولة

التمرين 1:

بالون كروي نصف قطره $r(t) = 0.5 + 0.1t$ متر (حيث t بالثواني). كثافة الهواء داخله ثابتة $\rho = 1.2kg/m^3$.

- احسب معدل تغير كتلة الهواء داخل البالون عند $t = 3s$.

الحل:

- حجم البالون (الكرة): $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3$
- مشتق الحجم: حيث عند: $r = 0.8\text{m},\ t = 3\text{s}$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4 \times \pi \times 0.8^2 \times 0.1 = 0.256\pi\, m^3/s$$

- معدل تغير الكتلة:

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = 1.2 \times 0.256\pi \approx 0.965\pi\, Kg/s$$

التمرين 2:

خزان أسطواني قطره $D = 2m$ يملأ بالماء بمعدل $\frac{dh}{dt} = 0.05m/s$. حيث تعطى كثافة الماء $\rho = 1000kg/m^3$.

- استخدم نظرية لايبنتز لحساب معدل تغير الكتلة في الخزان.

الحل:

- معدل تغير الكتلة في الخزان:

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \times \frac{dh}{dt} = 1000 \times \pi \times (1)^2 \times 0.05$$

$$\frac{dm}{dt} = 50\pi\, Kg/s$$

التمرين 3:

لنفترض أنه لدينا تدفقا مائيا في أنبوب. في أي من الحالات التالية يمكن تبسيط معادلة الاستمرارية العامة: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = 0$ إلى $\nabla \cdot v = 0$؟ وماذا يعني هذا التبسيط فيزيائيا؟

- الماء يتدفق بسرعة عالية جدًا بحيث يمكن ملاحظة تغيرات في الكثافة.
- الماء يتدفق ببطء شديد عبر الأنبوب.

- الأنبوب يتسع بشكل مفاجئ.
- الأنبوب يخضع لتسخين مفاجئ مما يسبب تغيرا في درجة حرارة الماء على طوله.

الحل:

- الشرط الأساسي لتبسيط معادلة الاستمرارية العامة إلى $\nabla \cdot v = 0$ هو أن يكون المائع غير قابل للانضغاط. هذا يعني أن كثافة المائع (ρ) يجب أن تكون ثابتة.
- دراسة الحالات الأربع:

✓ الماء يتدفق بسرعة عالية جدًا بحيث يمكن ملاحظة تغيرات في الكثافة: هذا يعني أن المائع قابل للانضغاط (أو أن تأثيرات الانضغاطية أصبحت مهمة)، وبالتالي ρ ليست ثابتة. لا يمكن تبسيط المعادلة.

✓ الماء يتدفق ببطء شديد عبر الأنبوب: الماء بطبيعته سائل غير قابل للانضغاط عند الضغوط ودرجات الحرارة العادية، وسرعته البطيئة تعزز هذا الافتراض. في هذه الحالة، يمكن اعتبار ρ ثابتة.

✓ الأنبوب يتسع بشكل مفاجئ: هذا يصف تغير في هندسة التدفق، وليس تغيرا في خصائص المائع نفسه. الماء لا يزال غير قابل للانضغاط.

✓ الأنبوب يخضع لتسخين مفاجئ مما يسبب تغيرا في درجة حرارة الماء على طوله: تغير درجة حرارة الماء يمكن أن يسبب تغيرات طفيفة في كثافته. إذا كانت هذه التغيرات مهمة، فلا يمكن اعتبار ρ ثابتة تماما.

ومنه الحالة الأنسب هي في حالة: الماء يتدفق ببطء شديد عبر الأنبوب، حيث في هذه الحالة، يمكن افتراض أن الماء غير قابل للانضغاط، وبالتالي تكون الكثافة ثابتة.

- ماذا يعني التبسيط فيزيائيا؟

عندما تكون $\nabla \cdot v = 0$ ، فهذا يعني أن حقل السرعة "لا يتأرجح"، فيزيائيا هذا يشير إلى أنه لا توجد "مصادر" أو "مصارف" صافية للمائع عند أي نقطة داخل التدفق، بعبارة أخرى أي حجم متناهي الصغر من المائع لا يمكن أن يتمدد أو ينكمش، مما يؤكد مبدأ حفظ الحجم في الموائع غير القابلة للانضغاط، ببساطة ما يدخل إلى نقطة يجب أن يخرج منها دون تراكم أو نقصان في الحجم.

التمرين 4:

يمر الهواء (غاز قابل للانضغاط) بشكل مستقر عبر قناة، عند المقطع (1) تكون مساحة المقطع $A_1 = 0.5\ m^2$، وكثافة الهواء $\rho_1 = 1.2\ kg/m^3$، وسرعة الهواء $v_1 = 5\ m/s$.

عند المقطع (2)، تصبح مساحة المقطع $A_2 = 0.3\ m^2$ وسرعة الهواء $v_2 = 12\ m/s$.

- أحسب معدل تدفق الكتلة عبر القناة، ثم أحسب كثافة الهواء عند المقطع الثاني (ρ_2).

الحل:

- معدل تدفق الكتلة عبر القناة:

بما أن التدفق مستقر، فإن معدل تدفق الكتلة ثابت عبر أي مقطع عرضي. ومنه فإن معدل تدفق الكتلة عند المقطع (1) هو:

$$Q_m = \dot{m}_1 = \rho_1 A_1 v_1$$

$$\dot{m}_1 = 1.2 \times 0.5 \times 5 = 3\, Kg/s$$

- كثافة الهواء عند المقطع الثاني (ρ_2):

باستخدام مبدأ حفظ الكتلة للتدفق المستقر (معادلة الاستمرارية في شكلها التكاملي): $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = \dot{m}_1$$

$$\rho_2 = \frac{\dot{m}_1}{A_2 v_2} = \frac{3}{0.3 \times 12} \approx 0.833\, Kg/m^3$$

هذا يعني أنه بسبب زيادة السرعة ونقصان المساحة، تنخفض كثافة الهواء، مما يدل على قابلية الانضغاط.

التمرين 5:

يمر الماء (والذي يمكن اعتباره سائل غير قابل للانضغاط) بشكل مستقر عبر أنبوب أفقي. عند المقطع الأول (1)، قطر الأنبوب $D_1 = 10\ cm$ ومتوسط سرعة الماء $v_1 = 2\ m/s$، يضيق الأنبوب إلى قطر $D_2 = 5\ cm$ عند المقطع الثاني (2).

- أحسب التدفق الحجمي للماء في الأنبوب، ثم أحسب متوسط سرعة الماء عند المقطع الثاني.

الحل:

- حساب التدفق الحجمي: بما أن الماء سائل غير قابل للانضغاط والتدفق مستقر، يمكننا استخدام مبدأ حفظ التصريف.

✓ نحسب مساحة المقطع الأول (A_1):

$$A_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 = \frac{\pi}{4} \times 0.1^2 = 0.007854\ m^2$$

✓ نحسب التدفق الحجمي في المقطع الأول:

$$Q_V = A_1 v_1 = 0.007854 \times 2 = 0.0157\ m^3/s$$

- حساب متوسط سرعة الماء عند المقطع الثاني:

✓ نحسب مساحة المقطع الأول (A_2):

$$A_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 = \frac{\pi}{4} \times 0.05^2 = 0.001963\ m^2$$

✓ باستخدام مبدأ حفظ التدفق (التصريف): $Q_{V_1} = Q_{V_2}$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q_{V_1}$$

$$v_2 = \frac{Q_{V_1}}{A_2} = \frac{0.0157}{0.001963} = 8\ m/s$$

التمرين 6:

يتم ملء خزان أسطواني بقطر داخلي $D = 2\ m$ بالماء عبر أنبوب واحد،حيث يبلغ قطر الأنبوب $d = 5\ cm$ وتتدفق المياه فيه بسرعة ثابتة $v = 10\ m/s$. إذا كان الخزان فارغا في البداية، فما هو معدل ارتفاع مستوى الماء في الخزان؟ (اعتبر الماء غير قابل للانضغاط).

الحل:

حجم التحكم (الخزان) ليس مستقرا بالكامل، حيث يتغير مستوى الماء فيه. سنستخدم مبدأ حفظ الكتلة في شكل معدل تغير الكتلة داخل حجم التحكم يساوي صافي تدفق الكتلة الداخل.

- حساب التدفق الحجمي الداخل الى الخزان عبر الأنبوب (Q_{int}):

$$Q_{int} = Av = \frac{\pi}{4}d^2v = \frac{\pi}{4} \times 0.05^2 \times 10 = 0.01963\ m^3/s$$

- ربط التصريف بمعدل ارتفاع مستوى الماء في الخزان: حيث معدل تغير حجم الماء في الخزان هو التصريف الداخل.

حجم الماء في الخزان (V_{tank}) في أي لحظة هو مساحة قاعدة الخزان (A_{tank}) مضروبة في ارتفاع الماء (h):

$$V_{tank} = A_{tank}h$$

مساحة قاعدة الخزان:

$$A_{tank} = \frac{\pi}{4}D^2 = \frac{\pi}{4}2^2 = 3.1416\ m^2$$

معدل تغير حجم الخزان بالنسبة للزمن:

$$\frac{dV_{tank}}{dt} = A_{tank}\frac{dh}{dt}$$

بما أن معدل تغير حجم الماء في الخزان هو التدفق الداخل Q_{int}: حيث

$$Q_{int} = A_{tank}\frac{dh}{dt}$$

إذن معدل ارتفاع مستوى الماء في الخزان هو $\frac{dh}{dt}$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_{int}}{A_{tank}} = \frac{0.01963}{3.1416} = 0.00625\ m/s$$

سلسلة تمارين مقترحة

التمرين 1:

خزان مخروطي نصف قطر قاعدته $R(t) = 2 + 0.5t$ متر وارتفاعه $h = 10\ m$ ، إذا كانت كثافة السائل $\rho = 800kg/m^3$ ثابتة، أوجد معدل تغير كتلة السائل في الخزان عندما $t = 4s$.

التمرين 2:

يستخدم نظام رش ماء رئيسي قطره $D_1 = 20\ cm$ لتغذية ثلاثة أنابيب فرعية، يتفرع الأنبوب الرئيسي إلى:

أنبوب فرعي (أ) بقطر $D_A = 10\ cm$ يخرج منه الماء بسرعة $v_A = 8\ m/s$.

أنبوب فرعي (ب) بقطر $D_B = 8\ cm$ يخرج منه الماء بسرعة $v_B = 8\ m/s$.

أنبوب فرعي (ج) بقطر $D_C = 6\ cm$ إذا كان التصريف الكلي للماء في الأنبوب الرئيسي هو $Q_1 = 0.15\ m^3/s$، وافترض أن الماء غير قابل للانضغاط والتدفق مستقر:

- أحسب سرعة الماء في الأنبوب الرئيسي (v_1). ثم أحسب التصريف الحجمي للماء في الأنبوبين الفرعيين (أ) و (ب).
- ما هي سرعة الماء في الأنبوب الفرعي (ج)؟

التمرين 3:

يتدفق الهواء بشكل مستقر خلال نفق هوائي يتغير مقطعه العرضي. عند مدخل النفق (المقطع 1)، تبلغ مساحة المقطع $A_1 = 1.2\ m^2$، وتكون سرعة الهواء $v_1 = 50\ m/s$ ، وكثافته $\rho_1 = 1.225\ kg/m^3$. عند مخرج النفق (المقطع 2)، تبلغ مساحة المقطع $A_2 = 0.8\ m^2$. إذا علمت أن كثافة الهواء عند المخرج $\rho_2 = 1.1\ kg/m^3$:

- أحسب معدل تدفق الكتلة للهواء عبر النفق.
- ما هي سرعة الهواء عند مخرج النفق (v_2)؟. هل هذا التدفق قابل للانضغاط أم لا؟ اشرح إجابتك.

التمرين 4:

خزان أسطواني بقطر داخلي $D = 3\ m$ يمتلئ بالماء. يوجد أنبوب مدخل واحد بقطر $D_{in} = 15\ cm$ يتدفق الماء فيه بسرعة $v_{int} = 5\ m/s$ ويوجد أيضًا أنبوب مخرج واحد بقطر $D_{out} = 10\ cm$ يتدفق الماء منه بسرعة $v_{out} = 8\ m/s$، إذا كان الخزان يحتوي على $10\ m^3$ من الماء في البداية:

أحسب معدل التغير في حجم الماء داخل الخزان ($\frac{dV_{tank}}{dt}$).

هل مستوى الماء في الخزان يرتفع أم ينخفض؟ ولماذا؟ ما هو معدل تغير ارتفاع مستوى الماء في الخزان ($\frac{dh}{dt}$)؟

الفصل الخامس

الموائع المثالية

الهدف العام:

تمكين الطلاب من فهم المبادئ الأساسية لميكانيك الموائع المثالية وتطبيقها في حل المشكلات الهندسية، مع التركيز على معادلات أويلر ونظرية برنولي وتطبيقاتها العملية.

الأهداف التفصيلية: في نهاية هذا الفصل يصبح الطالب قادرا على:

- فهم معادلات أويلر واشتقاقها لوصف حركة الموائع المثالية.
- تحليل التدفقات في الأنابيب والأجسام الانسيابية.
- شرح مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية في التدفق.
- ربط معادلات أويلر بنظرية برنولي.

1. مراجعة في ميكانيك الموائع

1.1. قوانين نيوتن للحركة:

- القانون الأول (القصور الذاتي): الجسم الساكن يبقى ساكنا والمتحرك يبقى متحركا بسرعة ثابتة وفي خط مستقيم ما لم تؤثر عليه قوة خارجية.
- القانون الثاني (القوة والتسارع): القوة المحصلة المؤثرة على جسم تساوي حاصل ضرب كتلته في تسارعه ($\sum F = ma$)، و هذا القانون هو الأساس لاشتقاق معظم معادلات ميكانيك الموائع (مثل معادلات أويلر وكمية الحركة).
- القانون الثالث (الفعل ورد الفعل): لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومعاكس له في الاتجاه.

2.1. طاقة السائل المتحرك:

عندما يعمل الإنسان خلال اليوم عملا شاق فإننا نقول إنه فقد طاقة وهذا يتطابق مع المعنى الفيزيائي للطاقة بأنها المقدرة على إنجاز عمل، يوجد عدة أنواع للطاقة مثل: الطاقة الحركية والطاقة الحرارية والطاقة الكيميائية ....الخ ، أنواع الطاقة التي نأخذها بعين الاعتبار في حالة جريان الموائع، هي: الطاقة الكامنة، وطاقة الضغط، والطاقة الحركية.

- **الطاقة الكامنة (طاقة الوضع):**

هي الطاقة التي تمتلكها كتلة m من السائل نسبة لارتفاعها h عن مستو معين، و تعرف بالعلاقة التالية:

$$E_P = m \times g \times h \qquad \left[\frac{Kg\ m^2}{s^2}\ ;\ Joule\right]$$

- **طاقة الضغط:**

عندما يسري مائع في أنبوب معين وتحت ضغط معين، فان هناك عمل يحصل لتحريك هذا المائع من مقطع لآخر، و إذا كانت مساحة مقطع معين من الأنبوب A والضغط عند ذلك المقطع P والقوة المؤثرة على ذلك المائع هي F، حيث يمكن حساب العمل المطبق على المائع بالعلاقة:

$$W_P = F \times \Delta x$$

حيث تعطى علاقة الضغط المطبق على المائع بالعلاقة:

$$P = \frac{F}{A}$$

يمكن تعريف القوة بـ:

$$F = P \times A$$

ومنه تعرف علاقة طاقة الضغط بـ:

$$W_P = P \times A \times \Delta x \ ;\ V = A \times \Delta x$$

$$W_P = P \times V$$

حيث V يمثل حجم المائع بوحدة m^3.

- **الطاقة الحركية:**

عندما تجري كتلة m بسرعة منتظمة v، فإن هذه الكتلة تمتلك طاقة نتيجة حركتها هي الطاقة الحركية والتي تساوي:

$$E_C = \frac{1}{2} \times m \times v^2 \ (Joule)$$

حيث:

m: كتلة المائع بوحدة Kg

v: سرعة المائع بوحدة m/s

الطاقة الإجمالية للجملة = الطاقة الكامنة + طاقة الضغط + الطاقة الحركية.

ومنه العبارة الاجمالية لطاقة الجملة:

$$E_T = (m \times g \times h) + (P \times V) + \left(\frac{1}{2} \times m \times v^2\right) \ (Joule)$$

نقسم العبارة على m لايجاد طاقة كل واحد Kg عبارة الطاقة الاجمالية تصبح كما يلي:

$$E_T = (g \times h) + \left(\frac{P}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{2} \times v^2\right) \ (Joule/Kg)$$

2. نظرية كمية الحركة:

في ميكانيكا الموائع، غالبا ما نحتاج إلى حساب القوى التي يمارسها المائع على الأسطح (مثل الأنابيب، الشفرات، هياكل الطائرات والسفن)، في حين أن معادلات أويلر (التي سندرسها لاحقا) تتعامل مع سلوك المائع عند نقطة، فإن نظرية كمية الحركة تسمح لنا بتحليل التغيرات الكلية في كمية الحركة عبر منطقة أو حجم معين، حيث تمثل تطبيقا مباشرا لقانون نيوتن الثاني للحركة على نظام مائع، بدلا من التعامل مع كتلة ثابتة، نتعامل هنا مع كتلة تدخل وتخرج من حجم معين.

1.2. صياغة نظرية كمية الحركة

- قانون نيوتن الثاني: "معدل تغير كمية حركة الجسم يتناسب طرديا مع القوة المحصلة المؤثرة عليه ويكون في نفس تجاهها."

لجسم ذي كتلة ثابتة تكون العبارة كما يلي:

$$\sum F = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma$$

- التطبيق على حجم التحكم:

عند دراسة الموائع، غالبا ما يكون من الأسهل التركيز على منطقة ثابتة في الفضاء (حجم تحكم) يتدفق المائع عبرها، بدلا من تتبع كتلة معينة من المائع (نظام).

- ✓ حجم التحكم: منطقة هندسية محددة في الفضاء، ثابتة أو متحركة.
- ✓ سطح التحكم: الحدود التي تفصل حجم التحكم عن محيطه.
- ✓ المائع يدخل ويخرج من سطح التحكم، وهذا هو ما يميز تحليل حجم التحكم.

– الصياغة العامة لنظرية كمية الحركة (بناءً على نظرية النقل لرينولدز):

- ✓ تنص نظرية كمية الحركة على أن مجموع القوى الخارجية المؤثرة على حجم التحكم يساوي معدل تغير كمية الحركة داخل حجم التحكم بالإضافة إلى صافي تدفق كمية الحركة عبر سطح التحكم.

$$F_{ext} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{CV}} \rho dV + \int_{V_{CS}} \rho(V \cdot dA)$$

حيث:

F_{ext}: مجموع القوى الخارجية المؤثرة على حجم التحكم. وتشمل:

– قوى الجسم: القوى التي تؤثر على كل جزء من المائع داخل الحجم (مثل الجاذبية)، تمثل غالبا بـ $\rho g dV_{CV}$

– قوى السطح: القوى الناتجة عن تلامس المائع مع الأسطح الخارجية أو عن طريق الضغط، و تشمل:

- ✓ قوى الضغط: $-\int_{V_{CS}} PdA$ –، حيث يعمل الضغط باتجاه عمودي على السطح وإلى الداخل.
- ✓ قوى القص: تهمل هذه القوى في الموائع المثالية، ولكن يجب أخذها في الاعتبار في الموائع الحقيقية.

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{CV}} \rho dV$: معدل تغير تخزين كمية الحركة داخل حجم التحكم، إن هذا الحد يكون موجودا فقط في التدفق غير المستقر، و إذا كان التدفق مستقرا، فإن هذا الحد يكون معدوما.

$\int_{V_{CS}} \rho(V \cdot dA)$: صافي تدفق كمية الحركة عبر سطح التحكم ويمثل كمية الحركة التي يحملها المائع عندما يدخل ويخرج من حجم التحكم، حيث حيث:

– $V \cdot dA$: يمثل التدفق الحجمي عبر عنصر مساحة.

– $\rho(V \cdot dA)$: يمثل معدل تدفق الكتلة $(\dot{m})$.

ملاحظة: تذكر أن التدفق الخارج موجب والتدفق الداخل سالب.

2.2. تبسيط للحالات الشائعة (تدفق مستقر وأحادي البعد):

– بالنسبة للتدفق المستقر: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{CV}} \rho dV = 0$

– بالنسبة للتدفق أحادي البعد عند المداخل والمخارج (بحيث تكون السرعة منتظمة عبر المقطع العرضي):

- ✓ تبسط المعادلة الى: $F_{ext} = \sum_{out}(\dot{m}V)_{out} - \sum_{in}(\dot{m}V)_{in}$، حيث $\dot{m} = \rho VA$.
- ✓ توضح هذه المعادلة أن القوة المحصلة المؤثرة على المائع داخل حجم التحكم تساوي صافي معدل تغير كمية الحركة للمائع الذي يتدفق عبر حدود حجم التحكم.

3. معادلات أويلر:

هي مجموعة من المعادلات التفاضلية التي تصف حركة الموائع المثالية (غير قابلة للانضغاط وعديمة اللزوجة) تحت تأثير القوى الخارجية مثل الضغط والجاذبية، سميت هذه المعادلات نسبة إلى العالم ليونارد أويلر، وهي تمثل تطبيقا لقوانين نيوتن الثانية على الموائع، تعتبر معادلات أويلر أساسا لتحليل التدفقات الانسيابية في العديد من التطبيقات الهندسية.

1.3. الصيغة العامة لمعادلات أويلر:

بالنسبة لمائع مثالي غير قابل للانضغاط، تعطى معادلات أويلر في الصيغة المتجهية كالتالي:

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v) = -\nabla P + \rho g$$

حيث:

ρ: كثافة المائع (ثابتة).

v: متجه سرعة التدفق (v_x ، v_y ، v_z).

$\frac{\partial v}{\partial t}$: التسارع الموضعي (تغير السرعة مع الزمن في نقطة ثابتة).

$(v \cdot \nabla)v$: التسارع الحملي (تغير السرعة بسبب حركة المائع عبر المجال).

∇P: تدرج الضغط (قوة الضغط لكل وحدة حجم).

ρg: قوة الجاذبية لكل وحدة حجم، حيث g هو متجه تسارع الجاذبية.

حيث يمثل كل طرف من المعادلة:

$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v)$: يمثل القوة الناتجة عن تسارع المائع (قانون نيوتن: $F = ma$).

$-\nabla P + \rho g$: يمثل القوى الخارجية المؤثرة على المائع، وهي قوى الضغط وقوى الجاذبية.

2.3. الافتراضات:

تستند معادلات أويلر إلى الافتراضات التالية:

- المائع غير قابل للانضغاط: الكثافة ρ ثابتة، مما يعني ($\nabla \cdot v$ معادلة الاستمرارية).

- المائع عديم اللزوجة: لا توجد قوى احتكاك داخلية ($\rho = 0$).
- التدفق قد يكون مستقرا أو غير مستقر: المعادلة تطبق على كلا الحالتين.
- القوى الخارجية محدودة: تؤخذ قوى الضغط والجاذبية في الاعتبار، بينما تهمل قوى أخرى مثل القوى الكهرومغناطيسية.

3.3. اشتقاق معادلة أويلر:

لاشتقاق معادلات أويلر، نطبق قانون نيوتن الثاني ($F = ma$) على عنصر حجمي صغير من المائع، ولنفترض أن لدينا عنصر حجمي بكتلة ρdV ، حيث dV هو الحجم التفاضلي.

- القوى المؤثرة:

✓ قوة الضغط: تنشأ من تدرج الضغط ∇P . القوة الناتجة على العنصر الحجمي هي: (السالب يعكس أن الضغط يعمل في الاتجاه المعاكس لتدرجه).

$$F_P = -\nabla P\, dV$$

✓ قوة الجاذبية: تعطى بـ:

$$F_g = \rho g\, dV$$

✓ القوة الكلية:

$$F = (-\nabla P + \rho g)\, dV$$

- التسارع:

التسارع الكلي لجزيء المائع يعطى بالمشتقة المادية للسرعة ($\frac{\partial v}{\partial t}$)، وهي:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v$$

حيث:

$\frac{\partial v}{\partial t}$: التسارع المحلي.

$(v \cdot \nabla)v$: التسارع الحملي الناتج عن تغير السرعة عبر المجال.

- تطبيق قانون نيوتن:

بما أن الكتلة هي $\rho\, dV$ ، فإن قانون نيوتن يكتب كالتالي:

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v)dV = (-\nabla P + \rho g)dV$$

بقسمة الطرفين على dV ، نحصل على معادلة أويلر:

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v) = -\nabla P + \rho g$$

5.3. الصيغة في الأبعاد الثلاثة:

في نظام الإحداثيات الديكارتية (x, y, z)، يمكن كتابة معادلات أويلر لكل اتجاه على حدة ، على سبيل المثال في الاتجاه x:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

وتتكرر المعادلات بشكل مماثل للاتجاهين y و z.

5.3. الحالة الخاصة: التدفق المستقر:

حالة التدفق المستقر $(\frac{\partial v}{\partial t} = 0)$، معادلة أويلر تصبح:

$$\rho(v \cdot \nabla)v = -\nabla P + \rho g$$

تستخدم هذه الصيغة غالبا في تحليل التدفقات الثابتة، مثل تدفق الماء في أنبوب أو الهواء حول جسم انسيابي.

6.3. العلاقة مع نظرية برنولي:

تعتبر معادلات أويلر الأساس الذي تشتق منه نظرية برنولي، و عند تكامل معادلة أويلر على طول خط تدفق في تدفق مستقر وغير قابل للانضغاط، مع افتراض أن الجاذبية هي القوة الخارجية الوحيدة، نحصل على:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{ثابت}$$

وهي معادلة برنولي، التي تعبر عن حفظ الطاقة الميكانيكية.

4. معادلة برنولي:

سميت نسبة إلى العالم السويسري دانيال برنولي، هي مبدأ أساسي في ميكانيك الموائع يصف حفظ الطاقة الميكانيكية في تدفق مائع مثالي، وتنص النظرية على أن مجموع الطاقة الضغطية، الطاقة الحركية، والطاقة الكامنة لكل وحدة حجم يبقى ثابتا على طول خط تدفق في ظل ظروف معينة، وتُعتبر هذه النظرية تطبيقًا مباشرًا لمعادلات أويلر في حالات التدفق المستقر.

1.4. الصيغة الرياضية:

تختصر معادلة الطاقة إلى معادلة برنولي، حيث تعتبر معادلة برنولي من أهم المعادلات المستخدمة في تحليل وإنجاز الدراسات الهيدروليكية وتنص على أن:

الطاقة الإجمالية لأي جسيم من مائع يجري في مسار معين تبقى ثابتة عند أي مقطع على طول هذا المسار:

طاقة الضغط + الطاقة الحركية + الطاقة الكامنة = قيمة ثابتة عند أي مقطع

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{ثابت}$$

حيث:

P: الضغط (الطاقة الضغطية، بوحدة باسكال).

$\frac{1}{2}\rho v^2$: الطاقة الحركية لكل وحدة حجم (ρ هي الكثافة، v هي سرعة التدفق).

$\rho g h$: الطاقة الكامنة لكل وحدة حجم (h هو الارتفاع، g هو تسارع الجاذبية).

- النظرية تعبر عن مبدأ حفظ الطاقة: إذا زادت سرعة التدفق (v) في منطقة ما، ينخفض الضغط (P) أو الارتفاع (h) للحفاظ على الثابت الكلي.
- تطبق النظرية على خطوط التدفق، وهي المسارات التي تتبعها جزيئات المائع في التدفق الانسيابي.

2.4. اشتقاق نظرية برنولي:

نظرية برنولي تشتق من معادلات أويلر لتدفق مائع مثالي مستقر. لنبدأ بمعادلة أويلر في حالة التدفق المستقر:

$$\rho(v \cdot \nabla)v = -\nabla P + \rho g$$

حيث: $g = -g\hat{z}$ (الجاذبية في الاتجاه z)

- تبسيط معادلة أويلر: في التدفق المستقر، معادلة أويلر تصبح:

$$\rho(v \cdot \nabla)v = -\nabla P - \rho g\hat{z}$$

- التكامل على طول خط التدفق:

نأخذ الناتج القياسي للمعادلة مع متجه الإزاحة التفاضلية ds على طول خط التدفق:

$$\rho(v \cdot \nabla)v.ds = (-\nabla P - \rho g\hat{z}).ds$$

لدينا:

- الطرف الأول من المعادلة:

$$(v \cdot \nabla)v = \frac{1}{2}\nabla(v^2) - (v \times \nabla)v$$

في التدفق الانسيابي، $v \times \nabla = 0$، لذا:

$$(v \cdot \nabla)v.ds = \frac{1}{2}\nabla(v^2).ds = \frac{1}{2}d(v^2)$$

- الطرف الثاني من المعادلة:

$$(-\nabla P - \rho g\hat{z}).ds = -dP - \rho g dz$$

ومنه تصبح المعادلة كما يلي:

$$\rho\frac{1}{2}d(v^2) = -dP - \rho g dz$$

$$\rho\frac{1}{2}d(v^2) + dP + \rho g dz = 0$$

- التكامل: نكامل على طول خط التدفق:

$$\int dP + \int \rho \cdot \frac{1}{2}d(v^2) + \int \rho g dz = 0$$

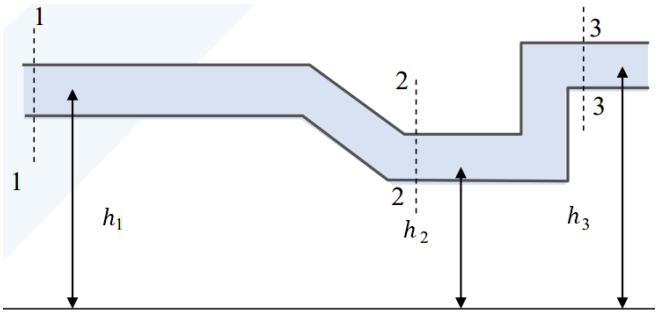
ومنه المعادلة تصبح:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{ثابت}$$

حيث z هو الارتفاع h ، ومنه هذه تمثل معادلة برنولي.

3.4. معادلة برنولي عند نقطة:

ليكن تدفق مائع على طول أنبوب **الشكل (1)**، يمكن تطبيق معادلة برنولي عند النقاط 1، 2 و3 كما يلي:



الشكل (1): تدفق مائع في أنبوب.

عبارة الطاقة عند كل نقطة تصبح:

$$(g \times h_1) + \left(\frac{P_1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{2} \times {v_1}^2\right) = (g \times h_2) + \left(\frac{P_2}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{2} \times {v_2}^2\right) \ (Joule/Kg)$$

4.4. أشكال معادلة برنولي:

- معادلة الطاقة تعطى بالعلاقة:

$$(g \times h_1) + \left(\frac{P_1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{2} \times {v_1}^2\right) = (g \times h_2) + \left(\frac{P_2}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{2} \times {v_2}^2\right) \ (Joule/Kg)$$

- معادلة الضغط تعطى بالعلاقة:

$$(g \times h_1 \times \rho) + P_1 + \left(\frac{{v_1}^2 \times \rho}{2}\right) = (g \times h_2 \times \rho) + P_2 + \left(\frac{{v_2}^2 \times \rho}{2}\right)(Pa)$$

- معادلة الارتفاع: تعطى بالعلاقة:

$$h_1 + \left(\frac{P_1}{g \times \rho}\right) + \left(\frac{{v_1}^2}{g \times 2}\right) = h_2 + \left(\frac{P_2}{g \times \rho}\right) + \left(\frac{{v_2}^2}{g \times 2}\right)(m)$$

حيث:

$\frac{v^2}{g \times 2}$: يقصد به ارتفاع المائع الذي يكافئ مقدار الطاقة الحركية.

h: ارتفاع الوضع، وهو الارتفاع المكافئ للطاقة الكامنة.

$\frac{P}{g \times \rho}$: ارتفاع الضغط وهو الارتفاع المكافئ لطاقة الضغط.

ومنه نعرف الارتفاع الكلي بأنه مجموع ارتفاع الوضع وارتفاع الضغط وارتفاع السرعة:

$$h_T = h + \frac{P}{g \times \rho} + \frac{v^2}{g \times 2}$$

ويمكن القول أن الارتفاع الكلي لأي مائع متحرك يعطى بالعلاقة

$$h_T = Z_2 - Z_1 = h_s + h_v$$

حيث:

h_s: ارتفاع الضغط الستاتيكي، h_v : ارتفاع السرعة

ويعرف الضغط الستاتيكي: بأنه ضغط المائع عند السكون، وضغط السرعة هو ضغط المائع أثناء الحركة وطاقة الضغط الكلية للمائع هي مجموع طاقة ضغط السرعة مع طاقة الضغط الستاتيكي.

استخدمت فكرة ضغط السرعة في قياس سرعة المائع وحساب معدل السريان للأنابيب ومجاري الهواء، و إذا استطعنا قياس ضغط السرعة فيمكن حساب سرعة المائع من المعادلة التالية:

$$h_v = \frac{v^2}{g \times 2}$$

$$v = \sqrt{2 \times g \times h_v}$$

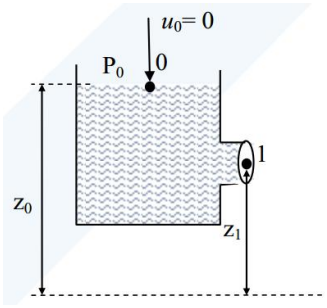
ملاحظة:

نعرف أن الضغط الذي يؤثر على السطح الحر للسائل هو الضغط الجوي ويزداد الضغط مع ازدياد العمق.

تستخدم قاعدة برنولي في حل الكثير من التطبيقات في جريان الموائع.

مثال:

يمكن أن نستخدم معادلة برنولي لحساب سرعة خروج السائل من الفوهة كما هو موضح على **الشكل** (2) التالي:



الشكل (2): تطبيق معادلة برنولي.

وذلك بتطبيق معادلة برنولي بين المقطعين 0 و1، حيث:

$$(g \times h_0) + \left(\frac{P_0}{\rho}\right) + \left(\frac{{v_0}^2}{2}\right) = (g \times h_1) + \left(\frac{P_1}{\rho}\right) + \left(\frac{{v_1}^2}{2}\right)$$

إن: $P_0 = P_1 = 1\text{atm}$ و $v_0 = 0$ سرعة السائل في الخزان مهملة.

$$v_1 = \sqrt{2 \times g \times h}$$

5. تطبيقات حول معادلة برنولي:

إن قياس سرعة وتدفق مائع، يعتبر أساسيا لأي دراسة تجريبية أو تشغيل فعلي متعلق بسريان الموائع، هناك عدد من الأجهزة لقياس السرعة، ومن أهم هذه الأجهزة أنبوب بيتوت ومقياس فنشوري.

1.5. أنبوب بيتوت Pitot Tube:

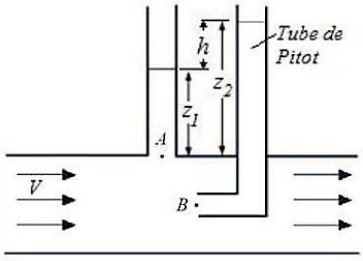
- تعريف:

هو جهاز قياس يستخدم لتحديد سرعة تدفق مائع (سائل أو غاز) بناءا على فرق الضغط بين الضغط التام والضغط الساكن. يستخدم بشكل واسع في الطيران لقياس سرعة الطائرات بالنسبة للهواء، وفي أنظمة الأنابيب لقياس سرعة السوائل.

- مبدأ العمل:

يعتمد مبد عمله على نظرية برنولي، يتكون الجهاز من أنبوب يواجه التدفق مباشرة (لقياس الضغط التام) وفتحات جانبية (لقياس الضغط الساكن)، وعندما يتوقف التدفق عند فتحة الأنبوب (نقطة التوقف)، تتحول الطاقة الحركية إلى طاقة ضغط.

وهو عبارة عن أداة تستخدم لقياس سرعة سريان الموائع عن طريق الضغط، ويتألف أنبوب بيتوت من أنبوب زجاجي تشكل نهايته زاوية قائمة كما هو مبين في **الشكل** (**3**) حيث يوضح الشكل أنبوب بيتوت في مجرى السائل بحيث تكون فتحة نهايته نحو الاتجاه المعاكس لسريان المائع وتجدر الإشارة هنا إلى أن أنبوب بيتوت يقيس السرعة عند نقطة التماس مع المائع فقط.



الشكل (**3**): أنبوب بيتوت.

- المعادلة:

بتطبيق معادلة برنولي بين النقطتين (A) و (B) نحصل على المعادلة التالية:

$$(g \times h_1) + \left(\frac{P_1}{\rho}\right) + \left(\frac{{v_1}^2}{2}\right) = (g \times h_2) + \left(\frac{P_2}{\rho}\right) + \left(\frac{{v_2}^2}{2}\right)$$

المائع في النقطة A يكون في حالة سكون، وبما أن وضع الأنبوب أفقي $h_1 = h_2$ فإن معادلة برنولي تختصر إلى :

$$\left(\frac{P_1}{\rho}\right) = \left(\frac{P_2}{\rho}\right) + \left(\frac{{v_2}^2}{2}\right)$$

$$\frac{{v_2}^2}{2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}}$$

$$P_1 - P_2 = \rho \times g \times h$$

$$v_2 = \sqrt{2 \times g \times h}$$

حيث:

h: يمثل مقدار ارتفاع المائع في أنبوب بيتوت.

2.5. مقياس فنتوري:

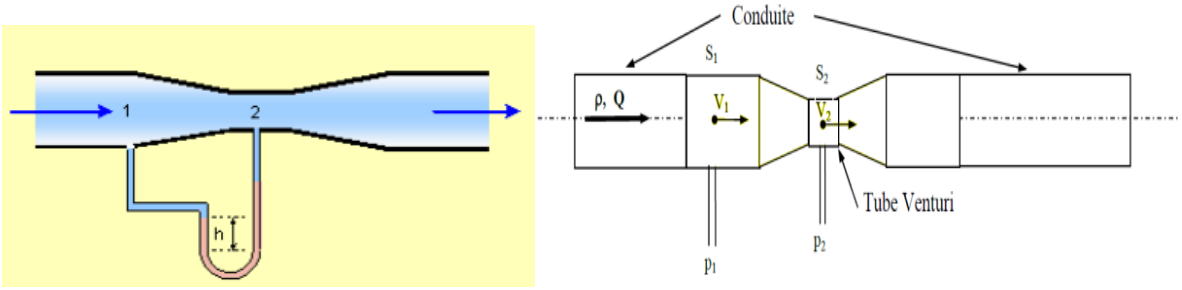
- تعريف:

هي جهاز يتكون من أنبوب يضيق تدريجيا ثم يتسع مرة أخرى، يستخدم لقياس معدل تدفق السوائل أو لخلق انخفاض في الضغط، و تعتمد الفوهة على مبدأ برنولي، حيث يؤدي تضييق المقطع إلى زيادة سرعة التدفق وانخفاض الضغط.

- المبدأ:

عندما يمر المائع عبر الجزء الضيق (الحلق) في فوهة فنتوري، تزداد السرعة وينخفض الضغط وفقًا لمعادلة برنولي ومعادلة الاستمرارية $(A_1 v_1 = A_2 v_2)$.

وهو جهاز يستخدم لقياس تدفق الموائع في الأنابيب حيث تعتمد طريقة القياس على الفرق بين قراءة المانومترات والتي من خلالها تحسب السرعة ومن ثم مقدار التدفق في الأنابيب، ويتكون الجهاز من مخروطين ناقصين أحدهما لام والآخر منفرج وجزء اسطواني قصير بالإضافة لجهاز مانومتر، حيث مساحة مقطعي المخروطين متساويتين، **انظر الشكل (4)**، و نستخدم معادلة برنولي بين النقطتين (1) و (2) وعادة ما يهمل الفاقد في الطاقة نتيجة الاحتكاك.



الشكل (4): جهاز فنتوري

من مميزات الفنشوريمتر أن الفقد في الضغط نتيجة الاحتكاك ضئيل جدا وذلك لانسياب المائع بصورة تدريجية ويعتبر الفنشوري جهازاً مثالياً لقياس التدفق، وجهاز الفنشوري شائع الاستخدام خصوصاً للموائع ذات الحجم الكبير، غير أنه باهظ الثمن خصوصاً الخطوط الأنابيب الصغيرة.

- المعادلة:

باستخدام معادلة برنولي يقاس فرق الضغط بين النقطة (1) في مدخل الفنشوري والنقطة (2) في عنق الفنشوري بواسطة مانومتر مثبت بينهما.

$$(g \times h_1) + \left(\frac{P_1}{\rho}\right) + \left(\frac{{v_1}^2}{2}\right) = (g \times h_2) + \left(\frac{P_2}{\rho}\right) + \left(\frac{{v_2}^2}{2}\right)$$

h_1 و h_2 على نفي المستوى الافقي ومنه التغير في طاقة الوضع معدوم، العبارة تصبح:

$$\left(\frac{P_1}{\rho}\right) + \left(\frac{{v_1}^2}{2}\right) = \left(\frac{P_2}{\rho}\right) + \left(\frac{{v_2}^2}{2}\right)$$

$$\frac{{v_2}^2 - {v_1}^2}{2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho}$$

من معادلة الاستمرارية:

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} \times v_2$$

بالتعويض في معادلة برنولي يمكن استنتاج عبارة السرعة عند النقطة 2، تعطى بالعلاقة التالية:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \times \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}}$$

حيث A_2 و A_1 تمثل مساحة المقطع عند النقطة 1و 2.

أيضا تعطى عبارة التدفق بالعبارة التالية:

$$Q_V = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \times \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}}$$

3.5. تفريغ خزان بشكل غير مستقر:

- تعريف:

تفريغ خزان بشكل غير مستقر يحدث عندما يتدفق السائل من خزان مفتوح إلى الجو عبر فتحة صغيرة، مع تغير ارتفاع السائل في الخزان بمرور الزمن، هذا التطبيق يُستخدم لدراسة ديناميكيات تصريف السوائل، مثل تصريف خزان مياه أو خزان وقود.

- المبدأ:

على الرغم من أن التفريغ غير مستقر (لأن السرعة والارتفاع يتغيران مع الزمن)، يمكن استخدام نظرية برنولي كتقريب لحساب سرعة التدفق عند الفتحة في لحظة معينة، مع افتراض أن التغيرات بطيئة بما يكفي.

- المعادلة:

من أجل خزان مفتوح بارتفاع سائل h، نطبق معادلة برنولي بين سطح السائل (1) والفتحة (2):

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

نفترض:

✓ $P_1 = P_2 = P_{atm}$ (الضغط الجوي).

✓ $v_1 \approx 0$ (سرعة معدومة، السطح الحر للخزان ساكن لأن مساحة الخزان كبيرة).

✓ $h_1 = h، h_2 = 0$ (الفتحة عند قاع الخزان).

ومنه تصبح المعادلة كما يلي:

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

هذه المعادلة تعرف بمعادلة توريشيلي (Torricelli's Law).

4.5. التحليل غير المستقر:

لحساب الزمن اللازم لتفريغ الخزان، نستخدم معادلة الاستمرارية مع معادلة توريشيلي، إذا كانت مساحة الخزان A_1 ومساحة الفتحة A_2 ، فإن معدل تغير ارتفاع السائل يعطى بـ:

$$A_1 \frac{dh}{dt} = -A_2 v_2 = -A_2\sqrt{2gh}$$

بتكامل المعادلة من الارتفاع الابتدائي h_0 إلى $h = 0$:

$$\int_{h_0}^{0} h^{-\frac{1}{2}} dh = -\int_{0}^{t} \frac{A_2\sqrt{2g}}{A_1} dt$$

$$t = \frac{2A_1\sqrt{2h_0}}{A_2\sqrt{2g}}$$

6. تصريف الهواء من خزان مضغوط: حدود القابلية للانضغاط:

تصريف الهواء من خزان مضغوط هو عملية تتضمن تدفق غاز (مثل الهواء) من خزان عالي الضغط إلى بيئة منخفضة الضغط (مثل الجو)، إن هذه الظاهرة تستخدم في تطبيقات مثل فوهات الصواريخ، أنظمة تكييف الهواء، وصمامات التحرير، على عكس الموائع المثالية غير القابلة للانضغاط (مثل الماء)، فإن الغازات قابلة للانضغاط، مما يعني أن كثافتها تتغير مع الضغط والسرعة، وعند سرعات عالية، قد تصل سرعة التدفق إلى سرعة الصوت أو تتجاوزها، مما يؤدي إلى ظواهر مثل حدود القابلية للانضغاط وتأثيرات التدفق فوق الصوتي.

1.6. المبادئ الأساسية:

- القابلية للانضغاط: الغازات، على عكس السوائل، يمكن أن تتغير كثافتها بشكل كبير مع تغيرات الضغط ودرجة الحرارة. هذا يجعل تحليل التدفق أكثر تعقيدًا مقارنة بالموائع غير القابلة للانضغاط.
- رقم ماخ (Mach Number): يعرف بأنه النسبة بين سرعة التدفق (v) وسرعة الصوت في الوسط (c):

$$M = \frac{v}{c}$$

حيث: $c = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$، γ هي النسبة الحرارية (للهواء عند الظروف العادية، $\gamma \approx 1.4$).

- ✓ تدفق دون صوتي: $M < 1$.
- ✓ تدفق صوتي (الحد الأقصى في فوهة متقاربة): $M = 1$.
- ✓ تدفق فوق صوتي: $M > 1$.

- التدفق المختنق: يصبح التدفق مختنقا، عندما تصل سرعة التدفق في فوهة إلى سرعة الصوت ($M = 1$)، ولا يمكن زيادة معدل التدفق الكتلي بزيادة فرق الضغط.

2.6. معادلات التحليل:

لتحليل تصريف الهواء من خزان مضغوط، نستخدم معادلات تدفق الغازات القابلة للانضغاط، مع الأخذ في الاعتبار أن نظرية برنولي التقليدية (التي تفترض كثافة ثابتة) غير كافية هنا، بدلاً من ذلك نستخدم العلاقات الآتية:

- معادلة برنولي المعدلة للغازات:

للغازات القابلة للانضغاط في تدفق أديباتي (بدون انتقال حرارة)، نستخدم العلاقة التي تربط الضغط، الكثافة، والسرعة:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + gh = \text{ثابت}$$

بالنسبة للغاز المثالي، ترتبط الكثافة والضغط بمعادلة الحالة: $P = \rho RT$

بالتالي، يمكن كتابة المعادلة كالتالي:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} = \text{ثابت}$$

- معدل التدفق الكتلي:

تعطى عبارة معدل التدفق الكتلي ($\dot{m}$) لخزان مضغوط يحتوي على غاز بضغط P_0 وكثافة ρ_0 ، يتم تصريف الغاز عبر فوهة بمساحة مقطع A بالعلاقة:

$$\dot{m} = \rho A v$$

في حالة التدفق المختنق عند $M = 1$:

$$\dot{m}_{\max} = A P_0 \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

حيث:

P_0: الضغط التام في الخزان.

T_0: درجة الحرارة التامة.

γ: النسبة الحرارية.

R: ثابت الغاز (الهواء تساوي تقريبا $287\ joule/Kg.K$).

- حدود القابلية للانضغاط:

تكون سرعة التدفق منخفضة ($M < 0.3$)، يمكن تجاهل تأثيرات القابلية للانضغاط، حيث تطبق معادلة برنولي التقليدية، و أما عند سرعات عالية ($M \geq 0.3$)، تصبح التغيرات في الكثافة ملحوظة، عندها يجب استخدام معادلات الغازات القابلة للانضغاط، و عند $M = 1$، يحدث التدفق المختنق، ويصبح معدل التدفق الكتلي محدودا بتصميم الفوهة.

3.6. اشتقاق معدل التدفق المختنق:

لاشتقاق معدل التدفق الكتلي في حالة التدفق المختنق:

- باستخدام معادلة الاستمرارية:

$$\dot{m} = \rho A v$$

- عند $M = 1$، سرعة التدفق تساوي سرعة الصوت ($v = c = \sqrt{\frac{P}{\rho}\gamma}$).

- باستخدام العلاقة الأديباتية:

$$\frac{P_0}{\rho_0^{\gamma}} = \frac{P}{\rho^{\gamma}}$$

- عند التدفق المختنق، نستخدم العلاقة بين الضغط ودرجة الحرارة في الفوهة:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad , \quad \frac{T}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}$$

- بالتعويض، نحصل على معدل التدفق الكتلي كما في المعادلة أعلاه.

سلسلة تمارين محلولة

التمرين 1:

يمر الماء ($\rho = 1000Kg/m^3$) في أنبوب أفقي يتغير قطره من $10\ cm$ إلى $4\ cm$. إذا كانت سرعة التدفق في القسم الأوسع $1.5\ m/s$، احسب:

أ. سرعة التدفق في القسم الأضيق.

ب. معدل التدفق الحجمي.

الحل:

أ- سرعة التدفق (باستخدام معادلة الاستمرارية):

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi(0.05)^2 = 0.007854 m^2$$

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi(0.02)^2 = 0.001257\, m^2$$

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} = \frac{0.007854 \times 1.5}{0.001257} = 9.375\ m/s$$

ب- معدل التدفق الحجمي:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 = 0.007854 \times 1.5 \approx 0.01178\ \frac{m^3}{s} = 11.78 \frac{L}{s}$$

التمرين 2:

يتدفق ماء بسرعة $2\ m/s$ عبر أنبوب بقطر $10\ cm$، ثم ينعطف بزاوية $\theta = 90°$. إذا كان معدل التدفق الكتلي $15.7\ Kg/s$، احسب القوة الناتجة عن تغيير اتجاه التدفق. ($\rho = 1000Kg/m^3$)

الحل:

1- معدل التدفق الكتلي:

$$\dot{m} = \rho A v$$

$$A = \pi r^2 = \pi 0.05^2 = 0.007854 m^2$$

2- تغيير كمية الحركة: السرعة في الاتجاه الأفقي ($v_x = 2\mathrm{m/s}$)، تتغير إلى الاتجاه العمودي ($v_y = 2m/s$)

- تغيير متجه السرعة:

قبل الانعطاف (نقطة 1): لنفترض أن الماء يتدفق في الاتجاه الأفقي الموجب (x). متجه السرعة: $v_1 = 2\ m/s$ (حيث المركبة $v_x = 2\ m/s$، و $v_y = 0$).

بعد الانعطاف بزاوية $\theta = 90°$ (نقطة 2): بما أن الأنبوب ينعطف، فإن السرعة تصبح في الاتجاه العمودي (لنفترض الاتجاه y الموجب). مقدار السرعة يبقى ثابتا ($2\ m/s$) لأن مساحة المقطع لم تتغير: $v_2 = 0.2\ m/s$ (حيث المركبة $v_y = 2\ m/s$، و $v_x = 0$).

حساب تغيير متجه السرعة:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = (0.2) - (2.0) = (-2.2)\ m/s$$

المركبة في الاتجاه x: $\Delta v_x = 0 - 2 = -2\ m/s$

المركبة في الاتجاه y: $\Delta v_y = 2 - 0 = 2\ m/s$

حساب مقدار تغيير متجه السرعة:

$$|\ \Delta v\ | = \sqrt{(\Delta v_x)^2 + (\Delta v_y)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} \approx 2.828\ m/s$$

هذا المقدار ليس ضروريا لحساب القوة مباشرة، لكنه يوضح أن التغيير في السرعة ليس معدوما بسبب تغيير الاتجاه، حتى لو بقي مقدارها ثابتا.

3- القوة الناتجة عن تغيير اتجاه التدفق

$$F = \dot{m}\Delta v = 15.7 \times (-2{,}2) \approx (-31.4{,}31.4)\ N$$

حيث:

المركبة في الاتجاه x: $F_x = -31.4\ N$

المركبة في الاتجاه y: $F_y = 31.4\ N$

$$|\ F\ | = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-31.4)^2 + (31.4)^2} = 44.4N$$

التمرين 3:

ماء يتدفق في أنبوب أفقي بسرعة $v_x = 3\ m/s$ ، و إذا كان تدرج الضغط في الاتجاه x هو $\frac{\partial P}{\partial x} = -5000\ Pa/m$.

أحسب التسارع الحملي باستخدام معادلة أويلر ($\rho = 1000\ kg/m^3$).

الحل:

معادلة أويلر في التدفق المستقر والأفقي $g_x = 0$:

$$\rho(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}) = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$1000 \times 3 \times \frac{\partial v_x}{\partial x} = -(-5000)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{5000}{3000} = 1.667 m/s^2$$

التمرين 4:

يتدفق ماء في أنبوب أفقي ($h_1 = h_2$) من جهة بقطر $8\ cm$ إلى جهة أخرى $4cm$ ، و إذا كان الضغط في الجهة الأوسع $P_1 = 150\ kPa$ وسرعة التدفق $v_1 = 2\ m/s$.

أحسب الضغط في الجهة الأضيق ($\rho = 1000 Kg/m^3$).

الحل:

- باستخدام معادلة الاستمرارية:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi (0.04)^2 = 0.005027 m^2$$

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi (0.02)^2 = 0.001257\ m^2$$

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} = \frac{0.005027 \times 2}{0.001257} = 8\ m/s$$

- باستخدام معادلة برنولي: أنبوب أفقي ($h_1 = h_2 = 0$) $\rho g h = 0$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_2 = (150 \times 10^3) + \left(\frac{1}{2} \times 1000 \times 2^2\right) - \left(\frac{1}{2} \times 1000 \times 8^2\right)$$

$$P_2 = 120 KPa$$

التمرين 5:

لقياس سرعة تدفق الهواء ($\rho = 1.2\ kg/m^3$) يستخدم أنبوب بيتوت إذا كان الضغط الكلي $P_t = 102 kPa$ والضغط الساكن (السطح الحر) $P_s = 100 kPa$.

أحسب سرعة التدفق.

الحل:

باستخدام معادلة برنولي:

$$v = \sqrt{\frac{2(P_t - P_s)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(102 \times 10^3 - 100 \times 10^3)}{1.2}} = 57.74\, m/s$$

التمرين 6:

في فوهة فنتوري، مساحة الفتحة الواسعة $A_1 = 0.02\, m^2$ ومساحة الفتحة الضيقة $A_2 = 0.005 m^2$، إذا كان فرق الضغط بين الفتحتين $P_1 - P_2 = 15\, kPa$، المائع هو الماء ($\rho = 1000\, kg/m^3$).

أحسب معدل التدفق الحجمي.

الحل:

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right)}}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{0.02}{0.005} = 4, \qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = 16$$

$$Q = 0.005 \sqrt{\frac{2 \times 15 \times 10^3}{1000 \times (16 - 1)}} = 0.00707\, m^3/s = 7.07\, L/s$$

التمرين 7:

مساحة مقطع خزان ماء $A_1 = 2\, m^2$ يحتوي على ماء بارتفاع ابتدائي $h_0 = 3m$، يتم تفريغه عبر فتحة بمساحة $A_2 = 0.02\, m^2$.

أحسب الزمن اللازم لتفريغ الخزان ($g = 9.81\, m/s^2$).

الحل:

$$t = \frac{2A_1\sqrt{h_0}}{A_2\sqrt{2g}} = \frac{2 \times 2 \times \sqrt{3}}{0.02 \times \sqrt{2 \times 9.81}} = 78.2\, s$$

سلسلة تمارين إضافية

التمرين 1:

ماء يتدفق في أنبوب أفقي يتغير قطره من $12\ cm$ إلى $6\ cm$ ، و إذا كان معدل التدفق الحجمي $0.02\ m^3/s$، أحسب:

أ. سرعة التدفق في الفتحة الواسعة.

ب. سرعة التدفق في الفتحة الضيقة.

التمرين 2:

يتدفق ماء بسرعة $3\ m/s$ عبر أنبوب بقطر $8\ cm$، ثم ينعطف بزاوية $\theta = 60°$ ، و إذا كان معدل التدفق الكتلي $9.42\ Kg/s$ ، احسب:

أ. تغيير متجه السرعة.

ب. القوة الناتجة عن تغيير اتجاه التدفق.

التمرين 3:

يتدفق ماء في أنبوب أفقي ($\rho = 1000\ kg/m^3$) بسرعة $4\ m/s$ ، و إذا كان تدرج الضغط في اتجاه التدفق هو $\frac{\partial P}{\partial x} = -4000\ Pa/m$.

أحسب التسارع الحملي ($\frac{\partial v_x}{\partial x}$) باستخدام معادلة أويلر.

التمرين 4:

يتدفق ماء في أنبوب أفقي من جهة بقطر $10\ cm$ إلى جهة أخرى بقطر $5\ cm$ ، و إذا كان الضغط في القسم الأوسع $180\ KPa$ وسرعة التدفق $1.8\ m/s$، أحسب:

أ. سرعة التدفق في الجهة الأضيق.

ب. الضغط في الجهة الأضيق. ($\rho = 1000\ kg/m^3$)

التمرين 5:

لقياس سرعة تدفق الهواء يستخدم أنبوب بيتوت ($\rho = 1.225\ kg/m^3$) ي أنبوب ، و إذا كان الضغط التام $103.5\ KPa$ والضغط الساكن $101\ KPa$.

أحسب سرعة التدفق.

التمرين 6:

في فوهة فنتوري، مساحة الفتحة الواسعة $0.015\ m^3$ ومساحة الفتحة الضيقة $0.003\ m^3$، و إذا كان فرق الضغط بين القسمين $12\ KPa$ والمائع هو الماء ($\rho = 1000\ kg/m^3$).

أحسب معدل التدفق الحجمي.

التمرين 7:

خزان ماء بمساحة مقطع $1.5\ m^2$ يحتوي على ماء بارتفاع ابتدائي $2.5\ m$ ، و يتم تفريغه عبر فتحة بمساحة $0.01\ m^2$. أحسب الزمن اللازم لتفريغ الخزان

Kundu, P. K., Cohen, I. M., Dowling, D. R., & Capecelatro, J. (2024). *Fluid mechanics*. Elsevier.

Shaughnessy, E. J., Katz, I. M., & Schaffer, J. P. (2005). *Introduction to fluid mechanics* (Vol. 8). New York: Oxford University Press.

Hansen, A. H. (2023). Fluids Mechanics. In *Fluid Power Systems: A Lecture Note in Modelling, Analysis and Control* (pp. 25-42). Cham: Springer International Publishing.

Deville, M. O. (2022). *An introduction to the mechanics of incompressible fluids* (p. 325). Springer Nature.

Viollet, P. L., Chabard, J. P., Esposito, P., & Laurence, D. (1998). Mécanique des fluides appliquée. *Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris*.

Amiroudine, S., & Battaglia, J. L. (2011). *Mécanique des fluides*. Dunod.

Bico, M. J., & Reyssat, M. (2020). Mécanique des fluides.

BEKRENTCHIR, K. (2021). MECANIQUE DES FLUIDES Cours et exercices corrigés.

الملخص:

أعدت مطبوعة "ميكانيكا الموائع" لطلاب السنة الثانية هندسة الطرائق والبتروكيمياء. حيث تهدف إلى توفير الإطار النظري الأساسي والأدوات التحليلية اللازمة لفهم سلوك الموائع ونمذجته في الأنظمة الهندسية، وتمكين الطلبة من تصميم وتحليل الأنظمة الهندسية المعقدة، مثل خطوط الأنابيب، المضخات، المبادلات الحرارية، المفاعلات الكيميائية، وأنظمة التحكم في التدفق. وباعتبارها مادة أساسية في المناهج الهندسية، تعد دراسة ميكانيكا الموائع ضرورية لتحليل وتصميم وتحسين العمليات الصناعية، لا سيما في تطبيقات الهندسة الكيميائية والبتروكيماوية.

صممت هذه المطبوعة لتنمية الفهم الفيزيائي للطلاب، ودقتهم الرياضية، ومهاراتهم في التفكير التحليلي. ومن خلال دراسة المبادئ الأساسية والتمارين، حل المشكلات المنهجية، تشجع الطلاب على بناء أساس متين يدعمهم في المقررات الهندسية المتقدمة. كما ينصح الطلاب بالتفاعل الفعال مع المادة، وممارسة التمارين المقترحة بانتظام، وربط المفاهيم النظرية بالمواقف الهندسية العملية لتحقيق نتائج تعليمية فعالة ونجاح أكاديمي طويل الأمد.

الكلمات المفتاحية: ميكانيك الموائع، خطوط الأنابيب، تدفق الموائع، معادلة برنولي.

Abstract:

This document, "Fluid Mechanics," is designed for second-year students in Process Engineering and Petrochemicals. It aims to provide the essential theoretical framework and analytical tools for understanding and modeling fluid behavior in engineering systems. Students will be able to design and analyze complex engineering systems, such as pipelines, pumps, heat exchangers, chemical reactors, and flow control systems. As a core subject in engineering curricula, the study of fluid mechanics is crucial for analyzing, designing, and optimizing industrial processes, particularly in chemical and petrochemical engineering applications.

This document is designed to develop students' physical understanding, mathematical accuracy, and analytical reasoning skills. Through the study of fundamental principles, exercises, and methodological problem-solving, students are encouraged to build a solid foundation for advanced engineering courses. Students are advised to actively engage with the material, practice the suggested exercises regularly, and connect theoretical concepts to practical engineering situations to achieve effective learning outcomes and long-term academic success.

Keywords: Fluid mechanics, pipelines, fluid flow, Bernoulli's equation.