



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

**Formules de Taylor en discrétisation
par la méthode de différences finis**

Présenté par: BARIKI Alaeddine.

AMMARI Nacereddine.

HALIS Tarek.

Sous la supervision de :

MILOUDI Madjda

Remerciement

La louange est à Allah, qui nous a facilité l'accomplissement de ce travail de recherche chose ne peut être qu'avec la volonté de Dieu -à lui la toute puissance et la Majesté- et que la louange initiale et finale appartient à Allah, Seigneur des mondes

*Aussi, il nous fait plaisir que nous, au commencement de ce travail, présentons nos grands remerciements, estimations et reconnaissances à notre encadreur puissant " **MILOUDI Madjda**" de nous avoir encouragés moralement la durée de recherche et que ce travail est le fruit de ces encouragements*

Nous présentons nos véritables remerciements à toute personne, du proche ou du loin, qui nous a donné un coup de main, à fin de terminer ce travail de recherche

En fin, nous remercions vivement nos familles pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation

"Que la Grace et la paix soient sur notre prophète Muhammad ainsi que sur sa famille et ses compagnons".

Table des matières

Introduction générale	1
Notations et coventions	2
1 Formules de Taylor	3
1.1 Introduction	3
1.2 Formules de Taylor	4
1.2.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange	5
1.2.2 Formule de Taylor avec reste de Young	6
1.2.3 Formule de Maclaurin-Young.	8
1.2.4 Taylor avec reste intégral	10
1.3 Séries de Taylor	12
1.4 Fonction de plusieurs variables réelles	15
1.4.1 Rappels et notations de calcul différentiel	15
1.4.2 Formules de Taylor avec reste intégrale	17
1.4.3 Formule de Taylor avec reste de Lagrange	18
1.4.4 Formule de Taylor avec reste de Young	18
2 Application de la formule de Taylor en discrétisation	20
2.1 Equations aux dérivées partielles E.D.P	20
2.1.1 Définitions et notations	20
2.2 La méthode de différences finies	22
2.2.1 Discrétisation du domaine	22

2.2.2	Approximation des dérivées par différences finies	23
2.2.3	Exemples de discrétisations de l'équation de la chaleur en dimension 1	25
2.2.4	Approximation des conditions initiales et conditions aux limites . . .	27
2.3	Problèmes paraboliques	33
2.3.1	Le problème continu et la discétisation espace temps	33
2.3.2	Discrétisation par Euler explicite en temps	34
2.3.3	Discrétisation par Euler implicite en temps	36
2.4	Problèmes elliptiques	37
2.4.1	Principe du maximumm	39
2.5	Problèmes hyperboliques	42
2.5.1	Schémas numériques pour $u_t + u_x = 0$	42
Bibliographie		46

Introduction générale

En analyse numérique, la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles, qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique); liante les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

En apparence, cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre œuvre car elle procède en deux étapes: d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation (différentiation), d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue.

La discrétisation des opérateurs différentiels par différences finies obtenue par les formules de Taylor pour ça, on étudie la formule de Taylor détaillé au premier chapitre: La formule de Taylor avec reste de Lagrange, Young, et avec reste intégrale.

Au deuxième chapitre, on étudie la méthode de différences finies, cette méthode c'est une méthode numérique qui applique aux E.D.P. Cette méthode a besoin à beaucoup la formule de Taylor, à la discrétisation d' E.D.P et l'estimation d'erreur, la consistance du schéma numérique et à la stabilité du schéma.

Notations et conventions

f, g	Deux fonctions.
$R_n(x)$	Le reste dans de la formule Taylor $n \in [1, \infty[$.
$f \in C^n([a, b])$	f application est de classe n sur $[a, b]$.
$R_n(x_0, x)$	Le reste s'écrivant sous la forme de Lagrange ou de Cauchy.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire.
e_i	L'erreur.
$f^{(n)}$	La dérivée de f à l'ordre n .
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	Dérivée partielle de f en x_i .
$D^{n-1}f(x)$	Différentielle d'ordre n de f ou point $x \in U$.
$\ \cdot\ $	Norme.
L_a	Application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .
ε	Une valeur positive proche de 0.
$u(x, y)$	Fonction de deux variables.
u'	Dérivée de u .
$u_x(a, b)$	La dérivée partielle de u en x au point (a, b) .
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$	La dérivée seconde partielle de u en x .
Ω	Domaine borné.
N_X et N_Y	Deux entiers.
h et k	$h = \frac{B-A}{N_X}$ et $k = \frac{D-C}{N_Y}$.
$u_{i,j}$	La valeur approchée de u en point (x_i, y_i) .
u_i^n	La valeur approchée de u en point (x_i, t_n) .
$M_N(\mathbb{R})$	Espace de matrices $N \times N$.
Δu	La gradient de u .
A_h	Matrice $n \times n$.
u_h	vecteur de \mathbb{R}^{N_x} .

Chapitre 1

Formules de Taylor

1.1 Introduction

Fonction f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable en $x_0 \in]a, b[$ peut s'écrire (au voisinage de x_0) par:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x).$$

avec $R(x) = \varepsilon(x)(x - x_0)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$. Cela revient à dire que f peut être approximée par le polynôme de degré 1:

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

L'erreur commise par cette approximation tendant vers zéro lorsque $x \rightarrow x_0$. La formule de Taylor généralise ce résultat, en montrant que les fonctions n fois dérivables peuvent être approximées (dans un voisinage de x_0) par des polynômes de degré n . Plus exactement

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

Où le polynôme P_n de degré n en $(x - x_0)$:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

approxime f avec un degré de précision égal à $R_n(x)$, est appelée reste d'ordre n . On peut en donner diverses évaluations d'erreu selon les conditions de dérivabilité imposées à f . Ce qui entraîne diverses formes de la formule de Taylor.

1.2 Formules de Taylor

Les formules de Taylor que nous allons établir sont des conséquences du théorème suivant, elle soit extension directe du théorème des accroissements finis généralisés auquel il se réduit lorsque $n = 0$.

Théorème 1.2.1 (Taylor) [5]

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions vérifiant les conditions suivantes:

1° $f \in C^n [a, b]$, $f^{(n)}$ est dérivable dans $]a, b[$.

2° $g \in C^1 [a, b]$, g est dérivable dans $]a, b[$ et $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$.

Soit $x_0 \in [a, b]$. Alors $\forall x \in]a, b[, x \neq x_0$, on a:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x_0, x). \quad (1.2.1)$$

$$\text{où } R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(c) (x - c)^n (g(x) - g(x_0))}{n! g'(c)}, \quad (1.2.2)$$

et c est un point compris strictement entre x_0 et x . L'expression (1.1.1) est dite formule de Taylor avec reste généralisé (1.1.2).

Preuve. supposons $x > x_0$. Considérons la fonction $\varphi : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t) (x - t)^k}{k!}.$$

φ est continue sur $[x_0, x]$ et admet sur $]x_0, x[$ une dérivée

$$\varphi'(t) = - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t) (x - t)^k - f^{(k)}(t) k (x - t)^{k-1}}{k!} = \frac{f^{(n+1)}(t) (x - t)^n}{n!}.$$

Comme φ et g satisfont les hypothèses du théorème des accroissements finis généralisés sur $[x_0, x]$, on a

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{g'(c)}, \text{ où } x_0 < c < x.$$

L'affirmation du théorème en résulte aussitôt. ■

Démonstration analogue pour $x < x_0$, en remplaçant $(x - x_0)$ par $|x - x_0|$ dans le second membre. Le nombre c est souvent désigné par $x_0 + \theta(x - x_0)$ avec $0 < \theta < 1$ (écriture unique indépendante de la position des points x_0 et x). Ce nombre varie lorsque'on change x ou g . Le choix de diverses fonctions g vérifiant 2° entraîne diverses formes du reste $R_n(x_0, x)$. La formule la plus classique est la suivante

1.2.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Théorème 1.2.2 [5]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^n[a, b]$, $f^{(n)}$ dérivable dans $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$. Alors, $\forall x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

où c est un point strictement compris entre x_0 et x . Le terme $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrange par conséquence.

Preuve. Conséquence immédiate du théorème (1.1.1) en partant dans la formule (1.1.2) $g(t) = (t - x)^{n+1}$. On a alors

$$g(x) = 0, g(x_0) = (x_0 - x)^{n+1}, g'(t) = (n+1)(t - x)^n$$

d'ou le théorème (1.1.2). On utilise parfois la formule de Taylor avec une autre évaluation du reste (reste de Cauchy) en prenant $g(t) = t - x$ et en posant $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, ($0 < \theta < 1$) :

■

Théorème 1.2.3 [5]

Soit $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^n([a, b])$, $f^{(n)}$ dérivable dans $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$. Alors $\forall x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, on a :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x_0, x)$$

avec $R_n(x_0, x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$, $0 < \theta < 1$ (reste de Cauchy)

Remarque 1.2.1 On notera que les nombres c et θ figurant dans la formule de Taylor avec reste de Lagrange sont généralement différentes de ceux de la dernière formule (reste de Cauchy). Les formules précédentes ont un sens si $x \neq x_0$, mais il est évident que $R_n(x_0, x_0) = 0$. Les théorèmes précédents demeurent vrais avec des conditions plus faibles, en supposant par exemple f continue sur $[a, b]$ et de classe C^n sur $]a, b[$. Plus généralement :

Théorème 1.2.4 Soit $f \in C^{n+1}(I)$, où I est un intervalle fermé, ouvert ou semi ouvert et soit $x_0 \in I$. Alors $\forall x \in I$, $x \neq x_0$, on a :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x_0, x),$$

le reste $R_n(x_0, x)$ s'écrivant sous la forme de Lagrange ou de Cauchy.

Preuve. En effet $x \in I$ étant fixé, il existe un intervalle $[a, b] \subset I$ contenant x_0 et x . La fonction f vérifie alors les hypothèses du théorème de Taylor (avec reste de Lagrange ou reste de Cauchy) dans $[a, b]$.

La formule du théorème (1.1.3) est dite formule de Taylor à l'ordre $(n + 1)$, elle est utilisée le plus fréquemment avec reste de Lagrange :

$$R_n(x_0, x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Si l'on écrit $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, le reste devient:

$$R_n(x_0, x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)), 0 < \theta < 1.$$

Comme pour la formule des accroissements finis qui apparaît maintenant comme le cas particulier $n = 0$, on donne souvent un autre au résultat en posant $x = x_0 + h$. Alors $c = x_0 + \theta h$, avec $0 < \theta < 1$ (il n'est pas nécessaire de supposer $h > 0$), d'où

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$$

■

Remarque 1.2.2 Lorsque $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient la formule dite de Maclaurin (à l'ordre $(n + 1)$ avec reste de Lagrange)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \text{ où } \theta \in]0, 1[.$$

1.2.2 Formule de Taylor avec reste de Young

Nous allons maintenant restreindre les hypothèses en supposant simplement que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Remarquons d'abord que l'existence d'une dérivée n -ième en x_0 implique l'existence d'un intervalle I contenant x_0 , sur lequel f est définie et admet des dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$, $f^{(n-1)}$ étant dérivable en x_0 . Nous allons donner une forme différente de la formule de Taylor résultant de cette modification des hypothèses :

Théorème 1.2.5 [5]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$. Supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe (fini). Alors $\forall x \in [a, b]$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(x - x_0)^n. \quad (1.2.3)$$

La relation (1.1.3) est dite formule de Taylor avec reste de Young. Le reste $R_n(x_0, x) = o(x - x_0)^n$ possède donc la propriété suivante :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Pour démontrer le théorème, on établira d'abord le résultat suivant :

Lemme 1.2.1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que:

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0, \quad x_0 \in [a, b]. \text{ Alors } f(x) = o((x - x_0)^n).$$

Preuve. Le lemme se démontre par récurrence sur l'entier n . Pour $n = 1$, f étant dérivable en x_0 , on a

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0) \text{ [car } f(x_0) = f'(x_0) = 0].$$

Supposons la proposition vraie jusqu'à l'ordre n , et soit f une fonction admettent une dérivée d'ordre $n + 1$ en x_0 et telle que :

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n+1)}(x_0) = 0$$

La dérivée $f^{(n)}$ existe dans un certain intervalle I contenant x_0 [puisque $f^{(n+1)}(x_0)$ existe] et l'on a : $f'(x_0) = \dots = (f')^{(n)}(x_0) = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence $f'(x) = o((x - x_0)^n)$, $x \in I$. D'après le théorème des accroissements finis, on a pour $x \in I$:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \quad \text{où } c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

On a donc pour $x \in I$, $f(x) = o((c - x_0)^n)(x - x_0) = o((x - x_0)^{n+1})$, résultat qui demeure vrai lorsque $x \in [a, b]$, d'où le lemme. Précisons la dernière relation:

$$o((c - x_0)^n) = \frac{o((c - x_0)^n)(c - x_0)^n}{(c - x_0)^n(x - x_0)^n} (x - x_0)^n = o(1)\theta^n (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n),$$

ce qui signifie

$$\lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{(c - x_0)^n} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

Posons :

$$R_n(x_0, x) = f(x) - \left[f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \right].$$

Un calcul élémentaire donne:

$$\left[f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \right]_{x=x_0}^{(k)} = \begin{cases} f^{(k)}(x_0) & \text{pour } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{pour } k > n \end{cases}$$

R_n vérifie donc l'hypothèse de lemme, d'où

$$R_n(x_0, x) = o((x - x_0)^n),$$

ce qui établit le théorème. ■

Autre écriture de la formule de Taylor-Young.

Il est souvent commode poser dans la formule de Taylor-Young

$$\varepsilon(x) = \frac{R_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} \text{ pour } x \neq x_0 \text{ et } \varepsilon(x_0) = 0.$$

Soit : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une dérivée n-ième en $x_0 \in [a, b]$. Alors $\forall x \in [a, b]$, on a :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \text{ où } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = \varepsilon(x_0) = 0$$

Remarque 1.2.3 On notera bien la différence de nature des deux formules de Taylor. La formule de Taylor avec reste de Lagrange (ou de Cauchy) a un caractère global (permettant l'étude globale d'une fonction sur un intervalle) tandis que cette formule de Taylor-Young a un caractère local (le développement local intervient lors de l'étude du comportement d'une fonction au voisinage d'un point x_0)

1.2.3 Formule de Maclaurin-Young.

En faisant $x_0 = 0$, on obtient sous les mêmes hypothèses la formule de Maclaurin à l'ordre n avec reste de Young :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow 0,$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \quad x \in]-1, +\infty[, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

La fonction f vérifie les hypothèses du théorème (1.1.4). Appliquons la formule de Maclaurin avec reste de Young au voisinage de 0 : $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-1}$, on a ainsi au point $x_0 = 0$, et $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$, si $k \geq 1$ et $f^{(0)}(0) = 1$, pour $n \geq 1$ quelconque, $x > -1$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x),$$

où $r_n(x)$ s'écrit sous les formes suivantes :

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n}x^{n+1}, \quad (\text{reste de Lagrange}),$$

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1-\theta')^n(1+\theta'x)^{\alpha-n}}{n!}x^{n+1}, \quad (\text{reste de Cauchy}),$$

$$r_n(x) = o(x^n), \quad (\text{reste de Young}).$$

Notons que pour $\alpha = n$ (n entier positif), alors $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!}x^n,$$

dans cas $R_n(x) = 0$ et on retrouve ainsi la formule du binôme.

• Considérons le cas particulier $\alpha = -1$ on a :

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k!(1+x)^{-1-k},$$

la formule de Taylor en $x_0 = 0$ s'écrit alors (pour tout $x > -1$) :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + r_n(x), \quad \text{où } r_n(x) \text{ peut s'écrire:}$$

$$r_n(x) = (-1)^{n+1}(1+\theta x)^{-n-2}x^{n+1}, \quad (\text{reste de Lagrange})$$

$$\text{ou } r_n(x) = (-1)^{n+1}(1+\theta x)^{-n-2}(1-\theta'x)^n(n+1)x^{n+1}, \quad (\text{reste de Cauchy})$$

$$\text{ou } r_n(x) = o(x^n), \quad (\text{reste de Young}).$$

• De façon analogue. On a pour tout $x < 1$ (remplacer x par $-x$) :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + r_n(x),$$

$$r_n(x) = (1+\theta x)^{-n-2}x^{n+1}, \quad (\text{reste de Lagrange}),$$

$$\text{ou } r_n(x) = (1+\theta x)^{-n-2}(1-\theta'x)^n(n+1)x^{n+1}, \quad (\text{reste de Cauchy}),$$

$$\text{ou } r_n(x) = o(x^n), \quad (\text{reste de Young}).$$

Exemple 1.2.1 *Considérons $f(x) = \sin x$. On sait que:*

$$\sin^{(k)} x = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

d'où la formule de Taylor avec reste de Lagrange pour $x_0 = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+1}(x), \text{ avec } r_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(\sin \theta x)x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Le reste de Young sera: $r_{2n+1}(x) = o(x^{2n+2})$, ou encore, $r_{2n+1}(x) = x^{2n+2}\varepsilon(x)$ où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. La formule de Taylor pour $f(x) = \cos x$ en $x_0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n}(x)$, où $r_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(\sin \theta x)x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, (reste de Lagrange), où $r_{2n}(x) = o(x^{2n+1})$, (reste de Young).

Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Développons f à l'aide de la formule de Taylor avec reste de Young en $x_0 = 1$, pour $n = 3$. Posons:

$$y = x - 1. \text{ Alors } \sqrt{x} = \sqrt{1+y}, \quad \text{d'après l'exemple 1} \quad \left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+y} &= 1 + \frac{y}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}y^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}y^3 + o(y^3), \\ &= 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + o(y^3), \\ \sqrt{x} &= 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} + o((x-1)^3). \end{aligned}$$

1.2.4 Taylor avec reste intégral

Théorème 1.2.6 [2]

Supposons que f soit de classe C^{n+1} sur I . Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on a:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \frac{h^{n+1}}{n!} + \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) dt,$$

Remarque 1.2.4 Le reste intégral admet une autre expression. Plus précisément, on a l'égalité:

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) dt = \int_{x_0}^{h+x_0} \frac{(h+x_0-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

qui découle tout simplement d'un changement de variable $t \rightarrow x_0 + th$.

Preuve. (la formule de Taylor avec reste intégral). Montrons le résultat par récurrence sur n . Le reste intégral sera exprimé sous sa deuxième forme (cf. remarque ci-dessus). La propriété est vraie au rang 0. En effet, selon le théorème fondamental de l'analyse, si f est de classe C^1 sur $[x_0, x_0 + h]$, alors :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{h+x_0} f'(t)dt;$$

Supposons la formule vraie au rang n . Alors pour f de classe C^{n+2} sur $[x_0, x_0 + h]$ on obtient, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{h+x_0} \frac{(h+x_0-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt &= \left[-\frac{(h+x_0-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^{x_0+h} + \int_{x_0}^{h+x_0} \frac{(h+x_0-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt; \\ &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{h+x_0} \frac{(h+x_0-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt, \end{aligned}$$

De plus, par hypothèse de récurrence

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{h+x_0} \frac{(h+x_0-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt,$$

on obtient donc

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{h+x_0} \frac{(h+x_0-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt;$$

c'est-à-dire

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{h+x_0} \frac{(h+x_0-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt;$$

ce qui montre que notre propriété est vraie au rang $n + 1$. ■

Remarque 1.2.5 Si f est de classe C^{n+1} , alors on peut déduire facilement la formule de Taylor-Young de la formule de Taylor avec reste intégral. Il suffit de montrer que la fonction

$$\varepsilon(h) = \frac{h}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th)dt,$$

Tend vers 0 quand h tend vers 0. Or on peut vérifier que l'intégrale $\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th) dt$, est bornée pour h au voisinage de 0. Une autre façon d'écrire un développement de Taylor au point x_0 consiste à poser $x = x_0 + h$. Le théorème de Taylor-Young s'énonce alors de la façon suivante : si f est de classe C^n sur I , alors pour tout $x \in I$ on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0),$$

où $\varepsilon(x-x_0)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 .

1.3 Séries de Taylor

Définition 1.3.1 [5]

Soit f une fonction de classe C^∞ dans un voisinage du point x_0 . La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$, s'appelle série de Taylor de f au voisinage de x_0 . Si $x_0 = 0$, cette série s'appelle encore série de Maclaurin.

Proposition 1.3.1 Toute série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ est la série de Taylor de sa somme au voisinage de x_0 .

Le problème inverse se pose alors : reconnaître si une fonction f de classe C^∞ , définie dans un voisinage de x_0 , peut être représentée par une série entière.

Définition 1.3.2 [5]

On dit qu'une fonction f , définie dans un voisinage de x_0 , peut être développée en série de Taylor au voisinage de x_0 , s'il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall x, |x-x_0| < R : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Une telle fonction devra, bien entendu, être de classe C^∞ dans $]x_0 - R, x_0 + R[$. Si f peut être développée en série de Taylor au voisinage de tout point de l'intervalle $]a, b[$, on dira que f est une fonction réelle analytique sur $]a, b[$ et on écrit $f \in C^\infty(]a, b[)$. Généralement,

une fonction de classe C^∞ n'admet pas de développement en série de Taylor au voisinage de x_0 (x_0 donné) comme le montre l'exemple suivant : la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

est de classe C^∞ dans \mathbb{R} . Ce pendant la représentation

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

n'est possible dans aucun voisinage de $x_0 = 0$, car: $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(0) = 0$, donc la série de Taylor s'annule identiquement alors que f ne s'annule qu'en $x_0 = 0$. On peut utiliser la formule de Taylor pour déterminer les conditions permettant de représenter une fonction par sa série de Taylor

Théorème 1.3.1 Soit f une fonction de classe C^∞ dans l'intervalle $\Delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, dans Δ il faut, et suffit, que: $\forall x \in \Delta : \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Où $R_n(x)$ est le reste dans de la formule Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x),$$

Preuve. Elle est évidente. La proposition suivante fournit une condition suffisante pour qu'une fonction puisse être développée en série de Taylor. ■

Théorème 1.3.2 [5]

Soit f une fonction de classe C^∞ dans $\Delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. S'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall x \in \Delta, \forall n : |f^{(n)}(x)| \leq M,$$

alors

$$\forall x \in \Delta : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Preuve. En représentant le reste R_n de la formule de Taylor sous forme de Lagrange, on aura la majoration

$$\forall x \in \Delta : |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!},$$

l'affirmation résulte du théorème précédent car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

■

Remarque 1.3.1 La condition du théorème(1.2.2) n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant :

Considérons la fonction f définie par: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$. Il est évident que son rayon de convergence est $R = +\infty$, donc f est de classe C^∞ dans \mathbb{R} . Or: $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(0) = 2^n \rightarrow +\infty$. l'hypothèse du théorème précédent n'est donc vérifiée dans aucun intervalle $]-\delta, \delta[$.

Exemple 1.3.1 (exemples de développement des fonctions en série de Taylor.)

Dans les exemples qui suivent, on considérera $x_0 = 0$.

1. $f(x) = \sin x$, comme $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x : |f^{(n)}(x)| \leq 1$, l'hypothèse du théorème précédent est vérifiée, on a donc: $\forall x \in \mathbb{R} : \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

2. De façon analogue, on a pour $f(x) = \cos x$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

3. soit $f(x) = e^x$. Appliquons la formule de Taylor

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Exemple 1.3.2 Quel que soit x fixé, on a alors

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

d'où le développement

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

par combinaison des développements de e^x et e^{-x}

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots,$$

on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} : shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots .$$

1.4 Fonction de plusieurs variables réelles

1.4.1 Rappels et notations de calcul différentiel

Définition 1.4.1 [4]

Soit f une application d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} et soit a un point de U . On dit que f est différentiable en a s'il existe une forme linéaire L_a sur \mathbb{R}^n (i.e une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}) telle que l'on ait :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur \mathbb{R}^n . Si on pose

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|},$$

alors ,

$$\begin{cases} f(a+h) - f(a) = L(h) + \|h\| \varepsilon(h) \\ \lim_{h \rightarrow 0} (\varepsilon(h)) = 0. \end{cases} .$$

On appelle L_a et la différentiel de f en a . Soit l'application linéaire :

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$x \rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- 1)- f est différentiable en point $a \in U$,
- 2)- pour tout $1 \leq i \leq m$, f_i est différentiable en a .

De plus $Df(a)(h) = (Df_1(a)(h), \dots, Df_m(a)(h))$.

1)- Différentielles Successives

On définit la différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence sur n . Supposons que l'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est $(n - 1)$ fois différentiable en tout point d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ notons que $D^{n-1}f(x)$ la différentielle d'ordre $(n - 1)$ de f au point $x \in U$. On sait que $L(\mathbb{R}^n, L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ s'identifie à l'espace $L_{p+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Il s'ensuit que :

$$\forall x \in U : D^{n-1}f(x) \in L_{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

Définition 1.4.2 [1]

On dit que f est n fois différentiable sur $U \subset \mathbb{R}^n$ si f est n fois différentiable en tout point $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ si, de plus l'application

$$D^n f : U \rightarrow L_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

$$x \rightarrow D^n f(x),$$

est continue sur U , on dit que f est de classe C^n sur U et on la écrit $f \in C^n(U)$.

2)-La dérivées partielles

a)-La dérivées partielles d'ordre 2 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, et $a \in U$ admettant sur U une dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable. Si l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable au point a , on dit que $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$ est une dérivée partielle d'ordre 2 au point a par rapport à la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ variables. $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$ généralement noté $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) (a)$.

b)-Généralisation A partir des dérivées partielles d'ordre 2, on définit les dérivées partielles d'ordre 3 (lorsqu'elles existent).

Ainsi, de proche en proche, on définit les dérivées partielles d'ordre quelconque (lorsqu'elles existent). La dérivée partielle d'ordre p de $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ au point a par rapport aux variables x_{i_p}, \dots, x_{i_1} est notée:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} (a),$$

c'est par définition la dérivée partielle au point a par rapport à la variable d'indice i_1 de la fonction

$$\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_p}}.$$

3)-Théorème de Schwarz

Définition 1.4.3 [4]

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application est de classe C^p sur U , alors:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{\sigma(i_1)} \dots \partial x_{\sigma(i_p)}}(a), \forall a \in U,$$

où σ est élément quelconque du groupe des permutations de l'ensemble $\{i_1, \dots, i_p\}$.

1.4.2 Formules de Taylor avec reste intégrale

Théorème 1.4.1 [1]

Soit f fonction de $U \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^{n+1} , si le segment $[a, a+h] \subset U$, on a :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k f(a) (h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) (h)^{n+1} dt,$$

où $(h)^k = (h, \dots, h)$ et $D^0 f = f$.

Preuve. Soit g fonction telle que :

$$g(t) = f(a+th) + \dots + \frac{1}{n!} (1-t)^n D^n f(a+th) (h)^n,$$

$$g'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) (h)^{n+1},$$

On remarque que:

$$\int_0^1 g'(t) dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) (h)^{n+1} dt,$$

$$\int_0^1 g'(t) dt = g(1) - g(0),$$

$$f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k f(a) (h)^k = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) (h)^{n+1} dt;$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k f(a) (h)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) (h)^{n+1} dt.$$

■

1.4.3 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Théorème 1.4.2 [4]

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m , $(n+1)$ fois différentiable telle qu'il existe M vérifiant $\|D^{n+1}f(x)\| \leq M$, pour tout $x \in U$. si le segment $[a, a+h] \subset U$, on a :

$$\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k f(a) (h)^k \right\|_{\mathbb{R}^m} \leq \frac{M}{(n+1)!} \|h\|_{\mathbb{R}^n}^{n+1}.$$

Preuve. Soit g et h fonctions telle que :

$$\begin{cases} g(t) = f(a+th) + \dots + \frac{1}{n!} (1-t)^n D^n f(a+th) (h)^n \\ h(t) = \frac{M(1-t)^{n+1}}{n!} \|h\|_{\mathbb{R}^n}^{n+1} \end{cases},$$

$$g'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) (h)^{n+1},$$

$$\|g'(t)\|_{\mathbb{R}^m} = \frac{(1-t)^n}{n!} \|D^{n+1} f(a+th) (h)^{n+1}\|_{\mathbb{R}^m},$$

$$\|g'(t)\| \leq \frac{M(1-t)^n}{n!} \|h\|_{\mathbb{R}^n}^{n+1},$$

$$\|g'(t)\| \leq h'(t),$$

mais selon le théorème des accroissements finis (théorème principal), on a :

$$\|g(1) - g(0)\| \leq h(1) - h(0),$$

$$\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k f(a) (h)^k \right\|_{\mathbb{R}^m} \leq \frac{M}{(n+1)!} \|h\|_{\mathbb{R}^n}^{n+1}.$$

■

1.4.4 Formule de Taylor avec reste de Young

Théorème 1.4.3 [4]

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application de classe C^{n-1} est telle que $D^n f(a)$ existe.

Alors on a :

$$\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k f(a) (h)^k \right\|_{\mathbb{R}^m} = o(\|h\|_{\mathbb{R}^n}^n).$$

Preuve. Soit : $\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - \dots - \frac{D^{n-1}f(a)}{(n-1)!}(h, \dots, h)$, ainsi :

$$D\varphi(h) = Df(a+h) - Df(a) - \dots - \frac{D^n f(a)}{(n-1)!}(h, \dots, h),$$

on remarque que : $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h \rightarrow \varphi(h)$,

$D\varphi(h) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. D'après l'hypothèse de récurrence (pour $D\varphi$) on a

$$D\varphi(h) = o(h^{n-1}),$$

$$\|D\varphi(h)\| \leq \varepsilon \|h\|^{n-1},$$

Donc selon le théorème des accroissements finis :

$$\|\varphi(h)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon \|h\|_{\mathbb{R}^n}^n,$$

$$\|\varphi(h)\|_{\mathbb{R}^m} = o(\|h\|_{\mathbb{R}^n}^n).$$

■

Chapitre 2

Application de la formule de Taylor en discrétisation

Nous avons étudié dans le premier chapitre la théorie de formules de Taylor pour ce chapitre donner l'application de ces formules en analyse numérique exactement à la discrétisation des E.D.P par la méthode de différences finies.

2.1 Equations aux dérivées partielles E.D.P

Les équations aux dérivées partielles EDP apparaissent dans tous les domaines des sciences et de l'ingénierie. La plupart d'entre elles proviennent de la physique, mais beaucoup interviennent aussi en finance et en assurance.

Classification des E.D.P linéaires du second ordre:

soient $u(x, y)$ une fonction définie sur un domaine D de \mathbb{R}^2 et (a, b) un point de D

2.1.1 Définitions et notations

Si la fonction $x \rightarrow u(x, b)$ admet une dérivée en a est la dérivée partielle de la fonction u par rapport à x au point (a, b) . On notera: $\frac{\partial u}{\partial x}(a, b)$ ou $u_x(a, b)$ on a donc: $\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) = u_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h, b) - u(a, b)}{h}$. Les dérivées partielles de u d'ordre 2 seront notées: u_{xy} et u_{xx} où $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, u_{yy} et u_{xy} où $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Si ces dérivées partielles seconds sont continues, on a: $u_{xy} = u_{yx}$.

D'une manière générale, les dérivée partielle d'ordre p , on notera: $u_{x^k y^l}$ on: $\frac{\partial^p u}{\partial x^k \partial y^l}$ où $k + l = p$. Ces définition se généralisent évidemment aux cas d'une fonction de n variables indépendantes $u(x_1, \dots, x_n)$.

Définition 2.1.1 [6]

une équation aux dérivées partielles E.D.P est une relation fait intervenir les variables indépendantes x_1, \dots, x_n , la fonction u et ses dérivées partielles. Les EDP linéaires du second ordre qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d, \tag{2.1.1}$$

Où a, b, c dépendent que de (x, y) et d est une fonction linéaire de $(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$.

Cas 1: $b^2 - ac > 0$: hyperbolique.

Cas 2: $b^2 - ac = 0$: cas parabolique.

Cas 3: $b^2 - ac < 0$: cas elliptique.

Exemple 2.1.1 (L'équation de la chaleur en dimension 1).

Il s'agit d'un problème d'évolution (c-à-d. un problème dépendant du temps) décrivant la diffusion de la chaleur dans un fil métallique tendu sur l'intervalle $[0, 1]$, soumis à une source de chaleur extérieure $f(t, x)$ dépendant du temps et de la position le long du fil, dont on connaît la température initiale $u_0(x)$, la température $g_0(t)$ à l'extrémité $x = 0$, et la température $g_1(t)$ à l'autre extrémité $x = 1$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), t \in]0, +\infty[\text{ et } x \in]0, 1[, \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in]0, 1[, \\ u(t, 0) = g_0(t) \text{ et } u(t, 1) = g_1(t) \text{ pour } t \geq 0. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

f s'appelle le terme source, u_0 s'appelle la condition initiale, g_0 et g_1 s'appellent les conditions au bord.

2.2 La méthode de différences finies

Il s'agit d'approcher la solution de l'EDP en un nombre fini de points seulement. On approche alors les dérivées par des accroissements de la fonction entre deux points, aussi appelés différences finies. Ces méthodes peuvent s'appliquer à tout type d'EDP.

Dans la suite, on se limitera à l'étude de ces méthodes.

Nous avons vu, qu'un problème aux dérivées partielles nécessite la donnée:

- 1)- d'un domaine Ω .
- 2)- d'une équation aux dérivées partielles (**E.D.P**).
- 3)- de condition aux limites.
- 4)- de condition initiales (pour les problèmes d'évolution).

Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème, nous devons approcher chacun de ses éléments.

2.2.1 Discrétisation du domaine

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ

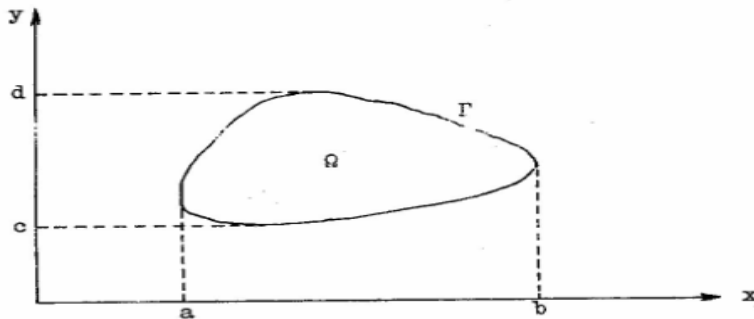


Fig. 2.1

Posons $[a, b] = P_1(\Omega)$ et $[c, d] = P_2(\Omega)$ où P_1 et P_2 sont les opérateurs de projection respectivement sur la 1^{ère} et sur 2^{ème} composante.

Considérons alors un pavé $[A, B] \times [C, D]$ tel que $[a, b] \subset [A, B]$ et $[c, d] \subset [C, D]$.

Soient deux entiers N_X et N_Y , nous obtenons deux paramètres de discrétisation

$$h = \frac{B - A}{N_X} \text{ et } k = \frac{D - C}{N_Y}.$$

Nous définissons ainsi un réseau de points de \mathbb{R}^2 :

$$R_{hk} = \{M_{ij} \in \mathbb{R}^2 / M_{ij} = (A + ih, C + jk), i = 0, \dots, N_X, j = 0, \dots, N_Y\}. \quad (2.2.1)$$

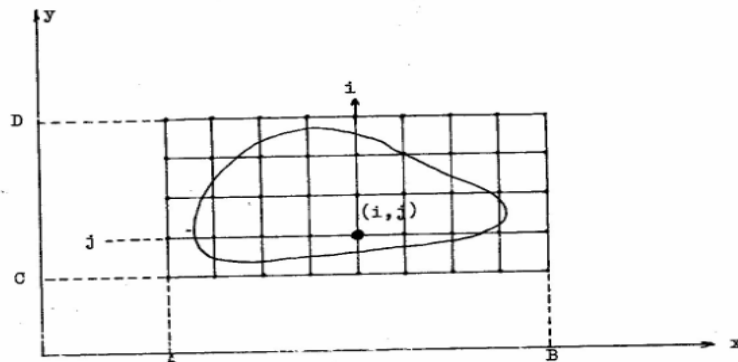


Fig. 2.2

En général, on essaie que le réseau s'adapte au domaine Ω . Plus précisément, si le domaine Ω est un pavé $[a, b] \times [c, d]$, on prendra $A = a, B = b, C = c, D = d$. On note Γ_{hk} = l'ensemble des points d'intersection de la frontière Γ et des droites du maillage $\Omega_{hk} = \Omega \cap R_{hk}$ l'ensemble des points $M_{ij} \in R_{hk}$ qui appartiennent $\bar{\Omega}_{hk} = \Omega_{hk} \cup \Gamma_{hk}$. Et $\hat{\Omega}_{hk}$ = l'ensemble des points M_{ij} tels que les 4 points de R_{hk} qui l'entourent appartiennent à Ω_{hk}

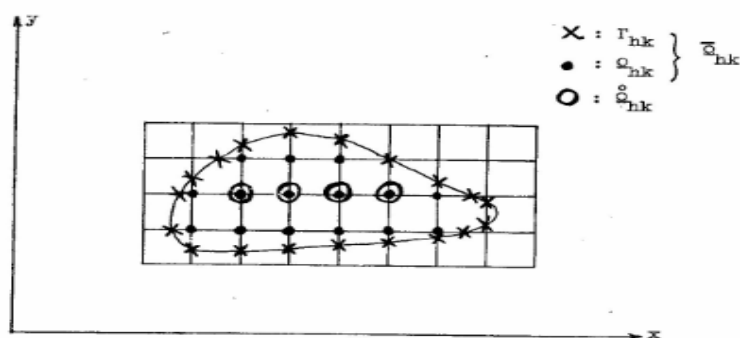


Fig. 2.3

2.2.2 Approximation des dérivées par différences finies

Soit $u(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes que nous supposons suffisamment différentiable. Si nous écrivons son développement de Taylor en un point $(x + h, y + k)$, nous

avons:

$$u(x+h, y+k) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \dots \quad (2.2.2)$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} u(x, y) + R_n, \quad (2.2.3)$$

avec

$$R_n = \frac{1}{(n)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} u(x + \xi h, y + \eta k); \xi \in]0, 1[, \eta \in]0, 1[, \quad (2.2.4)$$

ou encore

$$R_n = 0 [(|h| + |k|)^n]. \quad (2.2.5)$$

Aux points $M_{ij} = (i, j)$ de R_{hk} , nous noterons u

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= u(A + ih, C + jk), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(A + ih, C + jk), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A + ih, C + jk), \\ &\dots \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + R_5,$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + R'_5.$$

Par addition et soustraction nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + 0(h^2), \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + 0(h), \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + 0(h^2). \quad (2.2.8)$$

Nous avons donc approcher u_x par des différences finies d'ordre 1 progressive (2.2.6), régressive (2.2.7), symétrique (2.2.8). De même, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + 0(h^2). \quad (2.2.9)$$

On définira de même des approximations de $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. En outre, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(A + ih, C + jk) = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4hk} + 0((h+k)^2). \quad (2.2.10)$$

Nous obtenons donc

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} + 0((h+k)^2),$$

et, si nous prenons $k = h$,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2} + 0(h^2). \quad (2.2.11)$$

Nous pouvons également utiliser une approximation sur 9 points ($h = k$) :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + 4u_{i-1,j} - 20u_{i,j} + 4u_{i+1,j} + u_{i-1,j-1} + 4u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}}{6h^2} + 0(h^4)$$

2.2.3 Exemples de discrétisations de l'équation de la chaleur en dimension 1

Soit $\Omega =]0,1[$. Nous considérons le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in]0,1[, t \in]0,T[\\ u(x;0) = f(x); x \in]0,1[, f \text{ donnée, condition initiale} \\ u(0,t) = g_0(t); t \in]0,T[, g_0 \text{ donnée} \\ u(1,t) = g_1(t); t \in]0,T[, g_1 \text{ donnée} \end{array} \right\} \text{ condition aux limites} \quad (2.2.12)$$

Pour les problèmes d'évolutions, on discrétise également l'intervalle de temps. Cela revient à considérer le domaine $q = \Omega \times]0,T[$

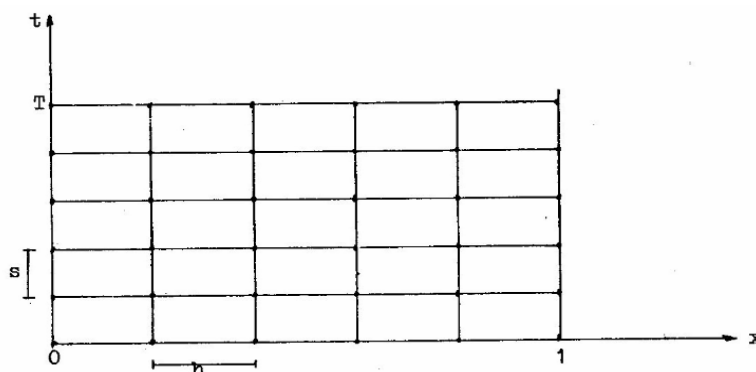


Fig. 2.4

Soient N_X et N_T , on pose $h = \frac{1}{N_X}$ et $s = \frac{T}{N_T}$. Notons $u_i^n = u(ih, ns)$.

1)- Méthode Explicite [3]

Cosidérons l'équations aux dérivées partielles **E.D.P**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x; t), \quad (2.2.13)$$

pour $(x, t) \in R_{hs}, x \in]0, 1[, t \in]0, T[$, nous pouvons écrire:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{s} + o(s) = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + 0(h^2); \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N_X - 1 \\ n = 1, \dots, N_T - 1 \end{array} .$$

Définissons, alors un ensemble de valeurs approchées u_i^n notées v_i^n par le schéma

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{s} = \frac{v_{i-1}^n - 2v_i^n + v_{i+1}^n}{h^2}; i = 1, \dots, N_X - 1; n = 1, \dots, N_T - 1, \quad (2.2.14)$$

ou, en posant $\lambda = \frac{s}{h^2}$, nous obtenons

$$v_i^{n+1} = \lambda v_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)v_i^n + \lambda v_{i+1}^n; j = 1, \dots, N_X - 1; n = 1, \dots, N_T - 1. \quad (2.2.15)$$

Pour tenir compte des conditions initiales et aux limites, nous devons rajouter

$$\begin{cases} v_0^{n+1} = g_0((n+1)s) = g_0^{n+1} \\ v_{N_X}^{n+1} = g_1((n+1)s) = g_1^{n+1} \end{cases}, \quad (2.2.16)$$

$$v_i^0 = f(ih) = f_i, \quad i = 0, \dots, N_X. \quad (2.2.17)$$

L'algorithme (2.2.15), (2.2.16), (2.2.17) permet de déterminer ainsi de proche en proche des approximations de la solution du problème (2.2.12) aux divers points du réseau R_{hs} . Si on connaît toutes les valeurs $(v_i^n)_i$ au temps $t = ns$, l'équation (2.2.15) permet de calculer les valeurs $(v_i^{n+1})_i$, directement. La méthode est alors **Explicite**.

2)- Méthode implicite [3]

Si nous considérons l'**E.D.P**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t + s) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t + s) \quad \text{pour } (x, t) \in R_{hs}, x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \quad (2.2.18)$$

nous pouvons écrire

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{s} + 0(s) = \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} + 0(h^2) \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N_X - 1 \\ n = 1, \dots, N_T - 1 \end{array} .$$

Définissons encore un ensemble de valeurs approchées de u_i^n notées v_i^n par

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{s} = \frac{v_{i-1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i+1}^{n+1}}{h^2} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N_X - 1 \\ n = 1, \dots, N_T - 1 \end{array} , \quad (2.2.19)$$

et en posant $\lambda = \frac{s}{h^2}$

$$-\lambda v_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda) v_i^{n+1} - \lambda v_{i+1}^{n+1} = v_i^n; \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N_X - 1 \\ n = 1, \dots, N_T - 1 \end{array} , \quad (2.2.20)$$

Pour tenir compte des conditions initiales et aux limites, nous devons ajouter

$$\begin{cases} v_0^{n+1} = g_0((n+1)s) = g_0^{n+1} \\ v_{N_X}^{n+1} = g_1((n+1)s) = g_1^{n+1} \end{cases} , \quad (2.2.21)$$

$$v_i^0 = f(ih) = f_i, \quad i = 0, \dots, N_X, \quad (2.2.22)$$

L'algorithme (2.2.20) (2.2.21) (2.2.22) permet de déterminer de proche en proche des approximations de la solution du problème (2.2.12) aux divers points du réseau R_{hs} . Connaissant toutes les valeurs $(v_i^n)_i$ au temps $t = ns$, l'équation (2.2.20) permet de calculer les valeurs (v_i^{n+1}) , mais cette opération nécessite la résolutions d'un système linéaire. La méthode est alors **implicite**.

2.2.4 Approximation des conditions initiales et conditions aux limites

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^2$, considérons la condition initiale $u(x, y) = g(x, y); (x, y) \in \Omega$ aux points du réseau R_{hk} , nous avons $u_{i,j}^\circ = u(A + ih, C + jk, 0) = g(A + ih, C + jk) = g_{i,j}$, $i = 0, \dots, N_X$, $j = 0, \dots, N_Y$ et nous pouvons prendre comme approximation $v_{i,j}^\circ$

$$v_{i,j}^\circ = u_{i,j}^\circ = g_{i,j}; \quad (2.2.23)$$

cette approximation est très souvent légitime lorsque la fonction g est constante ou a de très faibles variations. On peut également prendre comme approximation aux points du réseau la moyenne de g sur un intervalle de longueur h , centré au point générique ih en dimension 1, ou encore la moyenne, sur un rectangle de côtés h et k , centré au point générique (i, j) du réseau de dimension 2:

$$v_i^\circ = \frac{1}{h} \int_{A+ih-\frac{h}{2}}^{A+ih+\frac{h}{2}} g(x) dx \quad \text{en dimension 1,} \quad (2.2.24)$$

$$v_{i,j}^\circ = \frac{1}{h-k} \int_{A+ih-\frac{h}{2}}^{A+ih+\frac{h}{2}} \int_{C+jk-\frac{k}{2}}^{C+jk+\frac{k}{2}} g(x, y) dx dy \quad \text{en dimension 2.} \quad (2.2.25)$$

Les conditions aux limites, soit de trois types:

$$u = g \quad \text{Dirichlet,} \quad (2.2.26)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta \frac{\partial u}{\partial s} = g \quad \text{Neumann,} \quad (2.2.27)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta \frac{\partial u}{\partial s} + \gamma u = y \quad \text{Mixte ou 3ème type,} \quad (2.2.28)$$

où $\frac{\partial u}{\partial n}$ et $\frac{\partial u}{\partial s}$ désignent respectivement les dérivées suivant la direction de la normale (dirigée vers l'extérieur du domaine) et de la tangente.

Il y a lieu de considérer de manière différente les cas où les points de la frontière sont des points du réseau.

1. Supposons $\Omega =]0, L[\times]0, M[$. Nous construisons un réseau R_{hk} .

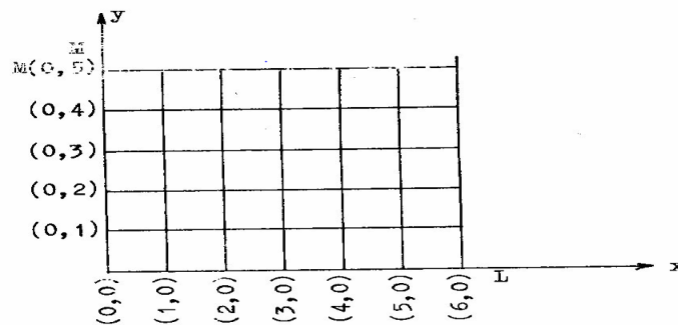


Fig. 2.5

$$h = \frac{1}{N_X}, \quad k = \frac{M}{N_Y}$$

$$R_{hk} = \{M_{ij}/M_{ij} = (ih, jk), i = 0, \dots, N_X, j = 0, \dots, N_Y\}. \quad (2.2.29)$$

Les points frontière du réseau sont donc les points $M_{ij}, \forall i, i \in \{0, N_X\} \forall j, j \in \{0, N_Y\}$

a)- Si la condition aux frontières est $u(x, y) = g(x, y), x, y \in \Gamma$, on posera alors $u_{i,j} = g_{i,j}, i \in \{0, N_X\} \forall j, j \in \{0, N_Y\}$

b)- Si la condition à la frontière est $\frac{\partial u}{\partial n}(0, y) = g(0, y)$, alors la dérivée normale est la dérivée en x . Nous avons donc $u_{1,j} = u_{0,j} + h \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(h^3)$, les dérivées étant prises au point $(0, jk)$. D'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{h^2} \left[u_{1,j} - u_{0,j} - h \frac{\partial u}{\partial n} \right] + o(h), \quad (2.2.30)$$

on peut approcher $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ au point $(0, jk)$ par

$$\frac{2}{h^2} [v_{1,j} - v_{0,j} - hg_{0,j}], \quad (2.2.31)$$

c)- Si la condition à la frontière est $\alpha \frac{\partial u}{\partial n}(0, y) + \beta u(0, y) = g(0, y)$ en reprenant (2.2.30), nous pouvons donc approcher $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ au point $(0, jk)$ par

$$\frac{2}{h^2} \left[v_{1,j} \left(1 - \frac{\beta h}{\alpha}\right) v_{0,j} - \frac{h}{\alpha} g_{0,j} \right]. \quad (2.2.32)$$

Dans notre exemple, la dérivée tangentielle n'est autre que la dérivée en y .

2. Considérons maintenant le cas d'une frontière ne passant pas par les points du réseau R_{hk} .

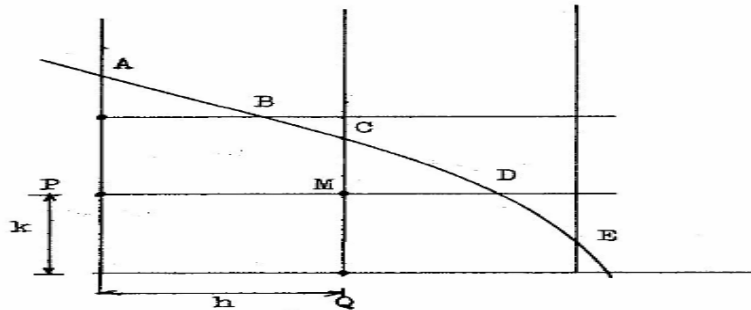


Fig. 2.6

Cherchons une approximation de Δu au point M , nous noterons $u_A, u_B, u_C, u_D, u_E, u_M, u_P, u_Q$ les valeurs de u aux points A, B, C, D, E, M, P, Q . On pose $MD = ah$ et $MC = bk$.

a)- **La conditions à la frontière est** $u(x, y) = g(x, y)$. En utilisant les développements de Taylor, nous avons

$$\begin{cases} u_C = u_M + bk \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{(bk)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + 0(k)^3 \\ u_Q = u_M - k \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + 0(k)^3 \end{cases}, \quad (2.2.33)$$

$$\begin{cases} u_D = u_M + ah \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(ah)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + 0(h)^3 \\ u_P = u_M - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + 0(h)^3 \end{cases}, \quad (2.2.34)$$

toutes les dérivées étant prises au point M . En éliminant $\frac{\partial u}{\partial y}$ dans (2.2.33) et $\frac{\partial u}{\partial x}$ dans (2.2.34), on calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \Delta u(M)$ et on obtient :

$$\Delta u = \frac{2}{h^2} \left[\frac{u_D}{a(1+a)} + \frac{u_P}{1+a} - \frac{u_D}{a} \right] + \frac{2}{k^2} \left[\frac{u_C}{b(1+b)} + \frac{u_Q}{1+b} - \frac{u_M}{b} \right] + 0(k+h), \quad (2.2.35)$$

ce qui permet d'obtenir une approximation de Δu au point M . Si nous notons v_A, \dots, v_Q , les approximations de u aux points A, \dots, Q et g_A, \dots, g_Q les valeurs de la fonction g aux points A, \dots, E , nous avons l'approximation

$$\Delta V_M = \frac{2}{h^2} \left[\frac{g_D}{a(1+a)} + \frac{v_P}{1+a} - \frac{v_D}{a} \right] + \frac{2}{k^2} \left[\frac{g_C}{b(1+b)} + \frac{v_Q}{1+b} - \frac{v_M}{b} \right]. \quad (2.2.36)$$

b)- **La conditions à la frontière est** $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y)$

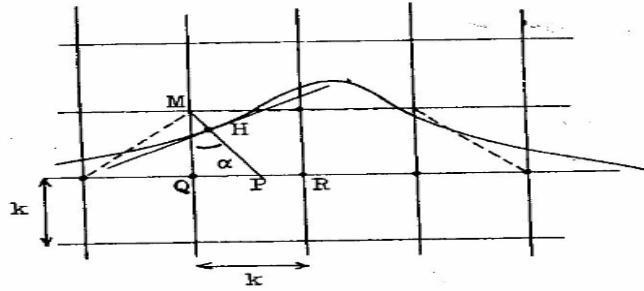


Fig. 2.7

1. Notons α l'angle QMP , et u_M, u_H, u_P, u_Q, u_R les valeurs de u aux points M, \dots, Q , les approximations de u a ces points. Nous avons

$$QP = MQ \operatorname{tg} \alpha = k \operatorname{tg} \alpha.$$

Nous pouvons donc approcher u_P en utilisant une interpolation linéaire entre v_Q et v_R :

$$u_p \simeq v_p = \frac{k}{h} tg\alpha v_R + (1 - \frac{k}{h} tg\alpha) v_Q,$$

et on peut approcher $\frac{\partial u}{\partial n}$ au point H par

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \simeq \frac{(v_P - v_M) \cos \alpha}{h}.$$

Donc la condition aux limites peut s'approcher par

$$\frac{\partial u}{\partial n}(H) \simeq \frac{\cos \alpha}{k} (\frac{k}{h} tg\alpha v_R + (1 - \frac{k}{h} tg\alpha) v_Q - v_M) = g_H,$$

c'est -à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial n} \simeq \frac{\sin \alpha}{h} v_R + (\frac{1}{k} - \frac{1}{h}) \sin \alpha v_Q - \frac{\cos \alpha}{k} v_M = g_H. \quad (2.2.37)$$

c)- Si la condition à la frontière est de type mixte, on peut obtenir son approximation en utilisant simultanément les deux méthodes précédentes.

1)- Consistance, stabilité et convergence Pour simplifier les notations, nous allons considérer dans ce paragraphe le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}$. L'inconnue est donc la fonction:

$$u(x, t); x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, t \in [0, T] \subset \mathbb{R},$$

soit l'équation

$$A(u) = 0. \quad (2.2.38)$$

Nous définissons une équation approchée

$$\tilde{A}(v) = 0, \quad (2.2.39)$$

en construisant un réseau

$$R_{hs} = \left\{ M_i^n = (a + ih, ns) \mid i = 0, \dots, N_X, n = 0, \dots, N_T, h = \frac{b-a}{N_X}, s = \frac{T}{N_T} \right\}. \quad (2.2.40)$$

Par exemple, partant de l'E.D.P.

$$A(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (2.2.41)$$

nous pouvons considérer le schéma numérique

$$\tilde{A}(v) = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{s} - \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{h^2} = 0, \quad (2.2.42)$$

où les v_i^n sont des approximations de $u(a + ih, ns) = u_i^n$, $i = 0, \dots, N_X$, $h = 0, \dots, N_T$.

Définition 2.2.1 [3]

Le schéma (2.2.39) est consistant avec l'équation (2.2.38), si on a :

$$\max \left| A(u_i^n) - \tilde{A}(u_i^n) \right| \rightarrow 0 \text{ quand } (h, s) \rightarrow (0, 0). \quad (2.2.43)$$

Étudions la consistance du schéma (2.2.42) avec l'équation (2.2.41)

$$\tilde{A}(u) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{s} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2},$$

$$A(u) - \tilde{A}(u) = \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \right]_{(a+ih,s)} - \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{s} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}.$$

$$\text{Or } u_i^{n+1} = u_i^n + s \frac{\partial u}{\partial t} + o(s^2)$$

$$\text{on a } u_{i\pm 1}^n = u_i^n \pm h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + o(h^4). \text{ Alors :}$$

$$\left| A(u) - \tilde{A}(u) \right| \leq o(s) + o(h^2) \quad (2.2.44)$$

Donc le schéma (2.2.42) est consistant avec l'équation (2.2.41).

Supposons que nous remplaçons, au cours de l'algorithme, une valeur v_j^p , approximation de $u(a + jh, ps)$, par une valeur perturbée $w_j^p = v_j^p + \varepsilon_j^p$ puis nous poursuivons les calculs avec w_j^p . Nous obtiendrons donc une suite (w_i^n) différente de (v_i^n) pour tous les indices (i, n) intervenant dans la suite de l'algorithme. Nous appellerons déviation au point (i, n) différence $\delta_i^n = w_i^n - v_i^n$. Dans la pratique, la perturbation ε_j^p provient d'erreurs d'arrondi ou calculs-machine. La perturbation peut évidemment porter sur plusieurs valeurs. Dans le cas des problèmes linéaires, plusieurs perturbations ont un effet égal à la somme de l'algorithme des effets de chacune d'elles prise séparément; en outre les perturbations apparaissant à chaque pas ($n \rightarrow n+1$) s'ajoutent. Pour tenir compte de ces différents cas, nous noterons les perturbations $w_j^p = v_j^p + \varepsilon(j, p)$, et nous appellerons déviation totale la différence $\delta_i^n = w_i^n - v_i^n$ résultat de l'ensemble des perturbations de l'algorithme. Nous pouvons remarquer que δ_i^n est fonction de la valeur des perturbations et du nombre de pas qui séparent le début de l'algorithme et le point où l'on observe δ_i^n .

Définition 2.2.2 [3]

Nous dirons que la méthode (2.2.39) est stable si la déviation $\delta_i^n \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon(j, p) \rightarrow 0$ et si elle ne croît pas plus vite qu'une puissance de $\frac{1}{h}$ et de $\frac{1}{s}$ lorsque $(h, s) \rightarrow 0$.

Nous avons vu au paragraphe précédent, que la méthode implicite (2.2.15) est stable si $\lambda = \frac{s}{h^2} \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ et que la méthode explicite (2.2.20) est inconditionnellement stable. En effet, nous avons pu majorer les déviations totales pour tout $n \leq N_X$.

Définition 2.2.3 la méthode (2.2.39) est dit convergente si les valeurs v_i^n obtenues vérifient

$$\lim_{h \rightarrow 0, s \rightarrow 0} \|v_i^n - u(a + ih, ns)\| = 0, \quad (2.2.45)$$

on démontre que la méthode explicite (2.2.15) pour $\lambda \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ et la méthode explicite (2.2.20) sont convergentes. Il n'est pas toujours facile d'obtenir directement une estimation de la déviation totale.

2.3 Problèmes paraboliques

On a vu au paragraphe comme exemple type de problème parabolique l'équation de la chaleur instationnaire: $u_t - \Delta u = f$, qui fait intervenir la dérivée en temps d'ordre 1, u_t ainsi qu'un opérateur différentiel d'ordre 2 en espace.

Pour que ce problème bien posé, il faut spécifier les conditions aux limites sur la frontière du domaine Ω et la condition initiale en $t = 0$.

2.3.1 Le problème continu et la discétisation espace temps

On considère maintenant le même problème en une dimension d'espace. Au temps $t = 0$, on se donne une condition initiale u_0 , et on considère des conditions aux limites de type Dirichlet homogène, le problème unidimensionnel s'écrit :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \forall x \in]0, 1[, \forall t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \forall t \in]0, T[, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où $u(x, t)$ représente la température au point x et au temps t .

Théorème 2.3.1 (Résultat d'existence et d'unicité) [7]

Si $u_0 \in C(]0, 1[, \mathbb{R})$, alors il existe une unique fonction $u \in C^2(]0, 1[\times]0, T[, \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times [0, T], \mathbb{R})$ qui vérifie, (2.3.1).

Proposition 2.3.1 (Principe du maximum) Sous les hypothèses du théorème précédent, soit u la solution du problème (2.3.1)

1. Si $u_0 \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors $u_0(x, t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, 1[$.

2. $\|u\|_{L^\infty_{(]0,1[\times]0,T[)}} \leq \|u_0\|_{L^\infty_{(]0,1])}}$.

Pour calculer une solution approchée, on se donne une discrétisation en temps et en espace, qu'on note D . On choisit pour l'instant de discrétiser par différences finies en temps et en espace. La discrétisation consiste donc à se donner un exemple de points t_n , $n = 1, \dots, M$ de l'intervalle $]0, T[$, et un exemple de point x_i , $i = 1, \dots, N$ de l'intervalle $]0, 1[$. Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et espace.

Soit $h = \frac{1}{N} = \Delta x$, le pas de la discrétisation en espace, $k = \frac{T}{M} = \Delta t$, le pas de la discrétisation en temps. On pose alors: $t_n = 0 + nk$; $n = 0, \dots, M$ et $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$. On recherche à calculer une solution approchée u_D du problème (2.3.1). Plus précisément, on cherche à déterminer $u_D(x_i, t_n)$ pour $i = 1, \dots, N - 1$ et $n = 1, \dots, M$.

2.3.2 Discrétisation par Euler explicite en temps

L'approximation en temps par la méthode d'Euler explicite consiste à écrire la première équation de (2.3.1) en chaque point x_i et temps t_n , à approcher $u_t(x_i, t_n)$ pour le quotient différentiel suivant: $\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k}$, et $u_{xx}(x_i, t_n)$ par: $\frac{1}{h^2}(2u(x_i, t_n) - u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i-1}, t_n))$

On obtient le schéma suivant: ($u(x_i, t_n) = u_i^n$)

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2u_i^n - u_{i-1}^n - u_{i+1}^n) = 0 & ; i = 0 \dots N - 1 & ; n = 0 \dots M - 1 \\ u_i^0 = u_0(x_i) & ; i = 1 \dots N - 1 \\ u_0^n = u_N^n = 0 & ; n = 0 \dots M \end{cases} \quad . \quad (2.3.2)$$

Le schéma est dit explicite, car la formule ci dessus donne u_i^{n+1} de manière explicite en fonction de $(u_i^n)_{i=1, N}$, $u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(2u_i^n - u_{i-1}^n - u_{i+1}^n)$ où $\lambda = \frac{k}{h^2}$.

1)- Consistance du schéma

soit $\bar{u}_i^n = \bar{u}(x_i, t_n)$ la valeur exacte de la solution u en (x_i, t_n) . L'erreur de consistance R_i^n en (x_i, t_n) peut s'écrire comme la somme des erreurs de consistance en temps et en espace, $R_i^n = \tilde{R}_i^n - \hat{R}_i^n$, avec: $\tilde{R}_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} - u_t(x_i, t_n)$, $\hat{R}_i^n = -\frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n - \bar{u}_{i+1}^n) - u_{xx}(x_i, t_n)$.

Proposition 2.3.2 [7]

Le schéma (2.3.2) est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace, c'est à dire: qu'il existe $c > 0$ ne dépendant que de u tel que $|R_i^n| \leq c, (k + h)$

Preuve. Le développement de Taylor en temps donne: $\tilde{R}_i^n = O(k)$, $|\tilde{R}_i^n| \leq c_1 k$ ($\exists c_1 > 0$), il donne aussi $\hat{R}_i^n = O(h)$, $|\hat{R}_i^n| \leq c_2 h$ ($\exists c_2 > 0$). D'on le résultat. ■

2)- La stabilité

Définition 2.3.1 [7]

On dit qu'un schéma est L^∞ stable si la solution approchée est bornée dans L^∞ indépendamment du pas de maillage

Proposition 2.3.3 Si la condition de stabilité $\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ est vérifiée alors le schéma est L^∞ stable au sens où $\sup_{i=1\dots N, n=1\dots M} |u_i^n| \leq \|u_i^0\|$

Preuve. On peut écrire le schéma (2.3.2) sous la forme suivante :

$u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + \lambda u_{i-1}^n (1 - 2\lambda) u_i^n$, avec $\lambda = \frac{k}{h^2}$. si $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$. on a : $\lambda \geq 0$ et $1 - 2\lambda \geq 0$. Soit: $M^n = \max_{1 \leq i \leq N} u_i^n$, $u_i^{n+1} \leq \lambda M^n + \lambda M^n + (1 - 2\lambda) M^n$, $u_i^{n+1} \leq M^n$, $M^{n+1} \leq M^n$, $\forall n = 0, \dots, M$. $\forall i = 1, \dots, N$. De la même manière, on démontre que : $\min_{1 \leq i \leq N} u_i^{n+1} \geq \min_{1 \leq i \leq N} u_i^n$, $\forall n = 0, \dots, M$. Dons: $\max_{1 \leq i \leq N} u_i^n \leq \max_{1 \leq i \leq N} u_i^0$, $\min_{1 \leq i \leq N} u_i^n \geq \min_{1 \leq i \leq N} u_i^0$, $\forall n = 0, \dots, M$. D'ou le résultat

:

$$\text{Si } \lambda \leq \frac{1}{2} \quad \sup_{1 \leq i \leq N, 1 \leq n \leq M} |u_i^n| \leq \|u^0\|_\infty. \quad \blacksquare$$

3)- La convergence

Définition 2.3.2 [7]

Soit u la solution du problème (2.3.1) et (u_i^n) la solution de (2.3.2). On appelle erreur de discrétisation au point (x_i, t_n) . La quantité: $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$

Théorème 2.3.2 *Sous la condition de stabilité $\lambda \leq \frac{1}{2}$, il existe $c \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que, $\|e_i^{n+1}\|_\infty \leq \|e_i^0\| + Tc(k + h^2)$ pour tout: $1 \leq i \leq N$ et $n = 0, \dots, M - 1$. Ainsi, si $\|e_i^0\| = 0$, alors $\max_{1 \leq i \leq N} \|e_i^n\|$ tend vers 0. Lorsque k et h tendent vers 0, pour tout $n = 1, \dots, M$, alors $\max_{i=1, \dots, N} \|e_i^n\|$ tend vers 0 lorsque k et h tendent vers 0. Le schéma (2.3.2) est donc convergent.*

Preuve. Soit $\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$, d'après la proposition (2.3.2): $R_i^n = \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n - \bar{u}_{i+1}^n)$. D'autre part le schéma (2.3.2) s'écrit: $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{1}{k^2}(2u_i^n - u_{i-1}^n - u_{i+1}^n) = 0$. Retranchant les relations, on obtient: $\frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{k} + \frac{1}{h^2}(2e_i^n - e_{i-1}^n - e_{i+1}^n) = R_i^n$. Alors: $e_i^{n+1} = (1 - 2\lambda)e_i^n + \lambda e_{i+1}^n + \lambda e_{i-1}^n + kR_i^n$. Alors: $\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + |k| |R_i^n|$ ($(1 - 2\lambda)e_i^n + \lambda e_{i+1}^n + \lambda e_{i-1}^n \leq \|e^n\|_\infty$). Puisque le schéma est consistant d'après la proposition (2.3.2), il existe $c \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que: $|R_i^n| \leq c(k + h^2)$. Alors: $\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + \frac{T}{M}c(k + h^2)$ donc $\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + Tc(k + h^2), \forall n = 0, \dots, M - 1$. Alors: $\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + Tc(k + h^2)$, d'où le résultat. ■

2.3.3 Discrétisation par Euler implicite en temps

Soit le schéma d'Euler implicite :

$$(1 + 2\lambda)u_j^{(n+1)} - \lambda u_{j-1}^{(n+1)} - \lambda u_{j+1}^{(n+1)} = u_j^{(n)}. \quad (2.3.3)$$

On rappelle que ce schéma est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann.

On va montrer de plus qu'il est L^∞ -stable :

Proposition 2.3.4 *(Stabilité L^∞ pour Euler implicite) [7]*

Si $(u_j^{(n)})_{j=1, \dots, N}$ est solution du schéma (2.3.3), alors : $\max_{1 < j < N} u_j^{(n+1)} \leq \max_{1 < j < N} u_j^{(n)} \leq \max_{1 < j < N} u_j^{(0)}$ de même : $\min_{1 \leq j \leq N} u_j^{(n+1)} \geq \min_{1 \leq j \leq N} u_j^{(n)} \geq \min_{1 \leq j \leq N} u_j^{(0)}$. Le schéma (2.3.3) est donc L^∞ stable.

Théorème 2.3.3 *Soit $e^{(n)}$ l'erreur de discrétisation, définie par $e_j^{(n)} = u(x_j, t_n) - u_j^{(n)}$ pour $j = 1, \dots, N$. Alors $\|e^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e^{(0)}\| + TC(k + h^2)$. Si $\|e^{(0)}\| = 0$, le schéma est donc convergent (d'ordre 1 en temps et 2 en espace).*

2.4 Problèmes elliptiques

On cherche à discrétiser le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & , 0 < x < 1 \text{ où } c \in C([0, 1], \mathbb{R}_+) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \quad (2.4.1)$$

On se donne un pas du maillage constants $h = \frac{1}{N+1}$ et une sub-division de $]0, 1[$ note $(x_i)_{i=0, \dots, N+1} : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N+1} = 1$ tel que: $x_i = ih$. $i = 0, \dots, N+1$. Soit u_i l'inconnue discrète associée au noeud i , ($i = 0, \dots, N+1$), on pose : $u_0 = u_{N+1} = 0$, on

obtient les équations discrètes en approchant $u''(x_i)$ par développement de Taylor:

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) + c_i u_i = f_i, & i = 0, \dots, N+1 \text{ où } c \in C([0, 1], \mathbb{R}_+) \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases}, \quad (2.4.2)$$

les équations sous forme matricielle suivant:

$$A_h u_h = b_h \quad (2.4.3)$$

tel que:

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & -1 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 + c_N h^2 \end{pmatrix}$$

et

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{pmatrix}, b_h = h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Les quations dépendent de ce problème sont:

1. Le système (2.4.3) admet - il unique solution?

2. A-t-on convergent de u_h vers u ?.

Proposition 2.4.1 [7]

Soit $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T \in \mathbb{R}^N$ tel que $c_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$ alors la matrice A_h est symétrique définie positive et donc inversible

Preuve. La matrice A_h évidemment symétrique. Soit $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T \in \mathbb{R}^N$. On pose

$v_0 = v_{N+1} = 0$. calculons le produit scalaire:

$$\langle A_h.v.v \rangle = \langle v^T . A_h.v \rangle = (v_1, v_2, \dots, v_N) A_h \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N v_i (-v_{i-1} + (2 + c_i h^2) v_i - v_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^N (-v_i v_{i-1}) + \sum_{i=1}^N v_i^2 (2 + c_i h^2) + \sum_{i=1}^N (-v_i v_{i+1}) \end{aligned}$$

par changement d'indice ($i + 1 = j$), on obtient:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N (-v_i v_{i-1}) + \sum_{i=1}^N v_i^2 (2 + c_i h^2) + \sum_{j=2}^{N+1} (-v_{j-1} v_j) \\ &= \sum_{i=1}^N v_i^2 (2 + c_i h^2) + 2 \sum_{i=1}^N (-v_i v_{i-1}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^N v_i^2 + \sum_{i=1}^N c_i h^2 v_i^2 + \sum_{i=1}^N (-2v_i v_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N c_i h^2 v_i^2 + \sum_{i=1}^N (v_i - v_{i-1})^2 + v_N^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\forall v \in \mathbb{R}^N$. Soit $\langle A_h.v.v \rangle = 0 \implies \sum_{i=1}^N c_i h^2 v_i^2 = 0 \wedge \sum_{i=1}^N (v_i - v_{i-1})^2 = 0 \wedge v_N^2 = 0$

$$\implies v_i - v_{i-1} = 0, \text{ et } v_N = 0 \implies v_i = v_{i-1}, \text{ et } v_N = 0, \forall i = 1, \dots, N,$$

$$\implies v_1 = v_2 = \dots = v_N = 0 \implies v = 0.$$

Alors A_h est définie positive, alors A_h est inversible. Alors le système (2.4.3) admet une unique solution. ■

Remarque 2.4.1 (*existence et unicité*) On a montré ci dessous que A_h est symétrique définie positive, donc inversible ce qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution (2.4.2).

Définition 2.4.1 [7]

Soit $A_h \in M_N(\mathbb{R})$ de coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq N$. On dit que A est positive (on $A \geq 0$) si $a_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq N$. On dit que A est monotone si A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.

Définition 2.4.2 (*Conservation de la positivité*) Soit $A_h \in M_N(\mathbb{R})$ de coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq N$. On dit que A conserve la positivité si: $Av \geq 0$ entraîne $v \geq 0$ (Composante par composante).

Proposition 2.4.2 (*monotonie et positivité*) Soit $A_h \in M_N(\mathbb{R})$, alors : A_h conserve la positivité si et seulement si A_h est monotone.

2.4.1 Principe du maximum

Définition 2.4.3 [7]

On appelle principe du maximum continu le fait que si $f \geq 0$. Alors le maximum de la fonction u solution du problème (2.4.1) est atteint sur les bords. Soit $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T \in \mathbb{R}^N$ et $A_h \in M_N(\mathbb{R})$ qui définie à (2.4.3), si $c_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, Alors A_h monotone.

Preuve. Soit $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T \in \mathbb{R}^N$. On pose $v_0 = v_{N+1} = 0$. Soit $A_h.v \geq 0$, $-v_{i-1} + (2 + c_i h^2) v_i - v_{i+1} \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, N$, $p = \min \{i \in \{1, \dots, N\}\}$, $v_i = \min_{1 \leq j \leq N} v_j$. Supposons $v_p < 0$, alors :

$$-v_{i-1} + (2 + c_p h^2) v_p - v_{p+1} \geq 0$$

$$c_p h^2 v_p + (v_p - v_{i-1}) + (v_p - v_{p+1}) \geq 0$$

$$c_p h^2 v_p \geq (v_{i-1} - v_p) + (v_{p+1} - v_p)$$

$$h \geq 0 \implies c_p v_p \geq 0$$

Si $c_p > 0$, alors $v_p \geq 0$.

Si $c_p = 0$, alors $v_{p-1} = v_p = v_{p+1}$. est contradiction avec la définition de p , alors $v_p \geq 0$, alors A_h est monotone. ■

1)- Consistance

Proposition 2.4.3 [7]

Si la solution du problème (2.4.1) vérifie $u \in C^4([0,1])$, alors le schéma (2.4.2) est consistant d'ordre 2, et on a plus précisément:

$$|R_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}|, \quad i = 1, \dots, N.$$

Preuve. Par développement de Tylor, on a :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in]x_i, x_{i+1}[,$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\eta_i), \quad \eta_i \in]x_i, x_{i+1}[,$$

$$\frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) = u''(x_i) + \frac{h^2}{12}(u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\eta_i)),$$

$$R_i = \frac{h^2}{12}(u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\eta_i)),$$

$$|R_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}|, \quad i = 1, \dots, N.$$

■

2)- La stabilité

Proposition 2.4.4 [7]

On dit que le schéma (2.4.2) est stable au sens où la matrice de discrétisation $\frac{1}{h^2}A_h$ satisfait:

$$\left\| \left(\frac{1}{h^2}A_h \right)^{-1} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}.$$

On peut écrire : une estimation sur la matrice du système (2.4.2) :

$$\|u_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|f\|_\infty,$$

on rappelle que : $A_h \in M_N(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty = \sup_{\|x\|<1} \|A_h x\|_\infty$,

$\|x\|_\infty$

$$= \sup_{1 \leq i \leq N} |x_i|_\infty, \quad x = (x_1, \dots, x_N)^T$$

$\frac{1}{h^2} A_h = A'_h$. On va montrer que: $\|A_h^{-1}\|_\infty < \frac{1}{8}$

$$A'_h = A_{oh} + \text{diag}(c_i), \quad A_{oh} = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & \frac{-1}{h^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}$$

On a les matrices A'_h et A_{oh} sont inversibles

$$A_{oh}^{-1} - A_h'^{-1} = A_{oh}^{-1} A'_h A_h'^{-1} - A_{oh}^{-1} A_{oh}^{-1} A_h'^{-1} = A_{oh}^{-1} (A'_h - A_{oh}) A_h'^{-1} \geq 0.$$

(A_{oh}' et A_{oh} sont monotone) donc: $0 \leq A_h'^{-1} \leq A_{oh}^{-1}$ (composante par composante). $A_h \in M_N(\mathbb{R}), A \geq 0$.

$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty = \sup_{\|x\|=1} \sup_{1 \leq i \leq N} \left| \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \right| = \sup_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N a_{ij}$ alors $\|A_h'^{-1}\|_\infty \leq \|A_{oh}^{-1}\|_\infty$. Il reste à estimer $\|A_{oh}^{-1}\|_\infty$,

$\|A_{oh}^{-1}\|_\infty = \|A_{oh}^{-1} e\|_\infty$ tel que $e = (1, \dots, 1)^T, d = A_{oh}^{-1} e \in \mathbb{R}^N$. On peut calculer $\|d\|_\infty$, d est vérifie $A_{oh}^d = e$. Donc le vecteur d est la solution du schéma de la discrétisation par différence finies du problème

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases},$$

donc la solution exacte est: $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ ce qui vérifie: $u^{(4)} = 0$.

$$d_i = u(x_i) = \frac{1}{2}ih(1-ih), \quad \|d\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{1}{2}ih(1-ih) \right), \quad h = \frac{1}{N+1},$$

$$\|d\|_\infty \leq \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{2}x(1-x), \implies \|A_h'^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}.$$

3)- La convergence**Théorème 2.4.1** [7]

Soit u la solution de (2.4.1). On suppose que $u \in C^4([0, 1])$. Soit u_h est la solution de (2.4.2). Alors l'erreur de discrétisation satisfait :

$$\max_{1 \leq i \leq N} |e_i| \leq \frac{1}{96} \|u^{(4)}\| . h^2$$

Le schéma est convergent d'ordre 2.

Preuve. $e_i = \bar{u}(x_i) - u(x)$, $i = 1, \dots, N$

$$\bar{u}(x_i) = u(x), \text{ (la solution exacte), } R_i = \frac{1}{h^2} (-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1})) - (-u''(x)),$$

$$c_i u_i - c(x) u_x - f_i - f(x), \implies R = A'_h (\bar{u}_h - u_h),$$

$$e = \bar{u}_h - u_h = A'_h R, \|e\|_\infty \leq \|A'_h\| \|R\|_\infty,$$

$$\leq \frac{1}{8} \frac{1}{12} \|u^{(4)}\|_\infty . h^2,$$

$$\leq \frac{1}{96} \|u^{(4)}\| . h^2. \blacksquare$$

2.5 Problèmes hyperboliques

Commençons par étudier le cas d'une équation hyperbolique linéaire :

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (2.5.1)$$

où la vitesse de transport $c \in \mathbb{R}$ et la condition initiale $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont données. Le problème (2.5.1) s'appelle problème de Cauchy. On cherche $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, solution de ce problème. Nous commençons par une étude succincte du problème continu, pour lequel on peut trouver une solution exacte explicite.

2.5.1 Schémas numériques pour $u_t + u_x = 0$

On considère ici le problème de transport linéaire :

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}), \end{cases}, \quad (2.5.2)$$

On sait que la solution de ce problème s'écrit :

$$u(x, t) = u_0(x - ct).$$

On rappelle que u est une solution classique si $u \in C^1(\mathbb{R})$, et que u est une solution faible si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. On va chercher à retrouver cette solution par une approximation numérique. Notons que dans le cas linéaire, l'utilisation d'un schéma numérique, n'est évidemment pas utile.

1)- Schéma explicite différences finies centrées

On effectue une discrétisation espace temps en se donnant un pas de discrétisation en espace h , et en posant: $x_i = ih, \forall i \in \mathbb{Z}$, de même on se donne un pas de discrétisation en temps k , et on pose $t_n = nk, \forall n \in \mathbb{N}$. Ecrivons le schéma d'Euler explicite pour l'approximation de u_t et un schéma centré pour l'approximation de u_x . On approche $u_t(x_i, t_n)$ par $\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k}$ et $u_x(x_i, t_n)$ par $\frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{2h}$. Le schéma centré s'écrit donc, en fonction des inconnues discrètes :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) \end{cases} \quad (2.5.3)$$

(où on a supposé $u_0 \in C(\mathbb{R})$) Ce schéma est inconditionnellement instable, et il faut donc éviter de l'utiliser. Qu'entend-on par instable ? On peut montrer que :

1. Le schéma (2.5.3) ne respecte pas la positivité, car $u_0(x) \geq 0, \forall x$ n'entraîne pas forcément $u_i^n \geq 0$. En effet si u_0 est telle que

$$\begin{cases} u_i^0 = 0, \forall i \leq 0, \\ u_i^0 = 1, \forall i > 0. \end{cases}$$

Alors:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{2h}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n),$$

donne, pour $n = 0$: $u_0^1 = -\frac{k}{2h} < 0$.

2. Le schéma (2.5.3) n'est pas L^∞ stable :

$$\|u^n\|_\infty \leq C \text{ n'entraîne pas } \|u^{n+1}\|_\infty \leq C.$$

3. Le schéma (2.5.3) n'est pas L^2 stable :

$$\|u^n\|_2 \leq C \text{ n'entraîne pas } \|u^{n+1}\|_2 \leq C.$$

4. Le schéma n'est pas stable au sens de Von Neumann. En effet, si :

$$u(x) = e^{ipx}, \text{ où } i^2 = -1 \text{ et } p \in \mathbb{Z},$$

la solution exacte est $u(x, t) = e^{ip(x-t)}$. Une discrétisation de u_0 s'écrit :

$$u_j^0 = e^{ipjh} \quad j \in \mathbb{Z}.$$

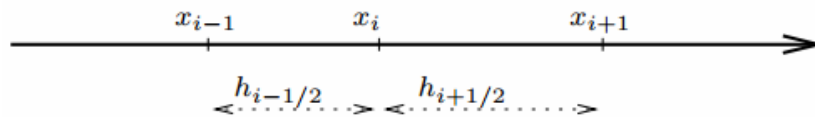
5. Le schéma (2.5.3) n'est pas convergent. En effet, on peut montrer qu'il existe u_0 , k et h telle que la solution approchée $u_{h,k} : (u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}^{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers u lorsque h et k tendent vers 0.

2)- Schéma différences finies décentré amont

On utilise toujours le schéma d'Euler explicite pour la discrétisation en temps, mais on approche maintenant

$$u_x(x_i, t_n) \text{ par } \frac{u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{h_{i-1/2}}$$

On considère de plus un pas de discrétisation variable, défini par $h_{i-1/2} = x_i - x_{i-1}$. Le schéma par différences finies avec décentrement amont s'écrit :



$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}, \quad (2.5.4)$$

Proposition 2.5.1 [7]

Le schéma (2.5.4) est stable sous condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL)

$$k \leq h = \inf_{i \in \mathbb{Z}} h_{i-1/2}, \quad h_{i-1/2} > 0. \quad (2.5.5)$$

c'est à dire que si $A \leq u_i^n \leq B$, alors $A \leq u_i^{n+1} \leq B$.

3)- Convergence du schéma (2.5.4)**Théorème 2.5.1** [7]

On suppose que $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que u_0, u_{t_0}, u_{tt_0} sont bornées. Soit $A = \inf_{x \in \mathbb{R}} u_0(x)$ et $B = \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x)$. Alors :

1. $A \leq u_i^n \leq B, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$, u est la solution exacte de (2.5.2), alors :

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}, nk \leq T} |u_i^n - \bar{u}_i^n| \leq TC_{u_0}(k + h),$$

où $TC_{u_0} \geq 0$ ne dépend que de u_0 .

Bibliographie

- [1] *A.DJADANE, B.K.SADALLAH, Calcul Differentiel, O.P.U, 1994.*
- [2] *BABA HAMED, Analyse II ,O.P.U, 1993.*
- [3] *MILOUDI Madjda, Cour Master I, Analyse numérique, Université d'Eloud 2014/2015.*
- [4] *D.E.MEDJADI, M.DOUKRA, A.DJADANE, B.K.SADALLAH, Analyse mathématiques, Fonctions de plusieurs variables réeles, O.P.U, 1996.*
- [5] *KADA ALLAB, Eements d'analyse, Fonctions d'une variable réele, O.P.U, 2002.*
- [6] *NICOLAS CHAMPAGNAT, Différences finies et analyse numérique matricielle, Cours d'harmonisation en IMAFA, 15 octobre 2010.*
- [7] *RAPHAELE HERBIN, Cour Master de mathématiques, Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Université Aix Marseille I, 26 octobre 2011.*

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'un des plus grand théorème de mathématiques, c'est la formule de Taylor.

Le premier chapitre, a été consacrer à plusieurs théorèmes qui dépendent de cette formules, ainsi que la formule de Taylor avec quelques exemples sur certaines fonctions, et puis le 2^{ième} chapitre nous avons étudié la décomposition de ses équations aux dérivées partielles appliquées aux équations différentielles tel la physique: Equation de la chaleur que à donné l'importance de cette formule de Taylor dans la décomposition par la méthode des differences finies .

المخلص

لقد تطرقنا في هذه المذكرة إلى أحد أهم النظريات في الرياضيات وهي نظرية صيغة دستور تايلور، فدرسنا في الفصل الأول جميع النظريات المتعلقة بها، ورأينا صيغ مختلفة لهذه النظرية مع إعطاء أمثلة على بعض الدوال، أما الفصل الثاني فدرسنا كيفية تجزئة المعادلات ذات التفاضل الجزئي، المطبقة في المعادلات التفاضلية الفيزيائية كالمعادلات الحرارية، وبيننا دور أهمية صيغة تايلور في تجزئة المعادلات ذات التفاضل الجزئي بطريقة الفروق المنتهية.

Summary

In this memory, we studied one of the greatest mathematical theorem is Taylor's formula. The first chapter was devoted to several theorems dependent on this formula of Taylor with a few examples of some functions. on Giving the 2nd chapter, we studied the decomposition of these partial differential equations applied to differential equations such physics heat equation that has given the importance of the Taylor formula as decomposition of differential partial differential equations by finites differences methods .