REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

Thème

Sur les solutions positives d'un type d'équations opérateurs non linéaires et applications

Présenté par : Asma Ghedeir brahim

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

HABBITA Khaled	MCA.	Président	Univ. El Oued
GUEDDA Lamine	MCA.	Rapporteur	Univ. El Oued
MENECEUR Bekker	MCB.	Examinateur	Univ. El Oued

Promotion : 2021/2022

Remerciements

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant, qui nous a donné la force, et le courage et la patience d'accomplir ce présent travail.

Je tiens tout à remercier Monsieur ***Dr.Lamine Guedda*** *d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beacoup de patience. Je le remercie vivement pour son excellente pédagogie et la rigueur scientifique qui restera un modèle pour moi.*

Je tiens à remercier tout particulièrement ma famille qui m'a accordé la liberté d'action et la patience nécessaires pour réaliser ce travail ainsi que toutes les personnes qui m'ont soutenue.

Je tiens tout à remercier Mon amie ***Triki Nour El Imane*** *d'avoir son soutien moral tout au long de mon parcours universitaire.*

Dédicace

J*e dédie ce modeste travail à :*

Mes très chers parents.

J*e vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.*

T*ous les membres de ma famille,*
mes frères et sœurs, belles-sœurs .

T*ous les professeurs honorables*
pour leurs efforts avec nous tout au long de notre carrière universitaire.

E*t à tout ceux qui m'ont aidé et encouragé pour finir ce travail.*

Table des matières

NOTATIONS

ϵ, λ, μ	: Des paramètres positives.
A	: L'opérateur A.
P	: Cône .
$\mathring{P}$	:L'intérieur de P .
P_h	:Classe d'équivalence de h.
θ	:L'élément neutre de E.
$\preceq$ où $\leq$	: La relation d'ordre partielle dans E.
$\sim$	: La relation d'équivalence dans E.
ϕ	: L'ensemble vide.
X	: Ensemble non vide.
$\mathbf{K}$	: le corps $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.
$\mathbb{R}$	: L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	: L'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^N$	: Espace Euclidien de dimension N.
$\mathbb{N}$	: des nombres naturels.
$\mathbb{C}$	: L'ensemble des nombres complexes.
$C^k[[0,1],\mathbb{R}]$	: L'ensemble des fonctions continument dérivable jusqu'a l'ordre k de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
$\mathfrak{B}(X,E)$	: Espace des applications bornées de X dans E.
$\ell^p(\mathbb{N})$	: Espace des suites p-sommables $x=(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de K.
$L^p([0,1])$	: $\{f=[0,1]\to\mathbb{R},\ f$ est mesurable $\parallel f(x) \parallel_p < \infty\}$.
$L^2([0,1])$	: $\{f=[0,1]\to\mathbb{R},\ f$ est mesurable $\parallel f(x) \parallel_2 < \infty\}$.
$C_B(\mathbb{R}^N)$	: L'ensemble de toutes les fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^N$.
$C_B^+(\mathbb{R}^N)$	: Le sous ensemble de toutes les fonctions positives de $C_B(\mathbb{R}^N)$.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

De nombreux problèmes en science et en ingénierie définis par des équations d'opérateurs non linéaires peuvent être résolus en les réformulant à des problèmes de point fixe. En fait, une équation d'opérateur

$$Ax = 0$$

peut être exprimée au problème de point fixe

$$Fx = x,$$

où $F = A + I$ avec un domaine approprié.

La théorie du point fixe fournit des outils essentiels pour résoudre les problèmes qui se posent dans diverses branches de l'analyse mathématique, tels que les problèmes d'optimisation non linéaire, les problèmes d'équilibre, les problèmes de complémentarité et les problèmes de prouver l'existence de solution, pour des équations intégrales où différentielles.

Dans ce mémoire, on va étudier l'existence et l'unicité de solutions positives pour le problème de point fixe suivant

$$Ax + x_0 = x, \tag{1}$$

où A est un opérateur non linéaire monotone défini sur une classe d'équivalence d'un espace de Banach partiellement ordonné par un cône.

Il y a eu beaucoup de résultats de recherche concernant ce type d'équations non-linéaires (1) ces dernières années. À cause du rôle crucial joué par les équations non linéaires en sciences appliquées qu'en mathématiques[1][11][21]. De plus, l'analyse fonctionnelle non linéaire a été un domaine de recherche actif et les opérateurs non linéaires qui apparaissent dans le cadre d'équations différentielles où intégrales non linéaires ont été largement étudiées au cours de ces recherches[2][12][14].

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

Premier chapitre : Contient plusieurs définitions et propérités concernant des notions topologiques comme : les espaces métriques, les espaces complets, les espaces de Banach et quelques, définitions et propérités concernant des notions sur les cônes comme, la relation d'ordre partielle induit par un cône, cône normal et solide, intervalle ordonné. Ainsi que les notions d'un operateur monotone où concave généralisé par rapport à un élément donné h du cône.

Deuxième chapitre : Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques théorèmes d'existence et l'unicité des solutions positives pour l'équation (1) où A est un opérateur concave généralisé et monotone.

Troisième chapitre : Est consacré à appliquer les résultats obtenus dans le 2ème chapitre pour étudier l'existence et l'unicité de solutions positives pour des problèmes a valeur initiale du premier ordre où de 2ème ordre et des problèmes aux limites à deux points, en les reformulant sous la forme de l'équation (1).

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions et définitions de l'analyse fonctionnelle que nous avons utilisés tout au long de ce mémoire. Les définitions et les résultats que nous allons énoncer sont pris des références [15][8][6]

1.1 Espace métrique

Soit K un corps commutatif, non discret (par exemple le corps des réels où des complexes)

Définition 1.1.1 *[17] **(Distance)***
Soit E une ensemble non vide. Une distance (où métrique) sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- ***Séparation :*** $\forall u, v \in E$; $d(u, v) \geq 0$ *et* $d(u, v) = 0$ *si est seulement si* $u = v$.
- ***Symétrique :*** $d(u, v) = d(v, u)$.
- ***Inégalité triangulaire :*** $\forall u, v, w \in E; d(u; w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Exemple 1.1.1 *1) Sur* $\mathbb{R}^n$ *on peut considérer les distances suivantes :*

- $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid$,
- $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$,
- $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \mid x_i - y_i \mid$.

2) Sur $C([0, 1], \mathbb{R})$. *On peut également définir les distances suivantes :*

- $d_1(f, g) = \int_0^1 \mid f(t) - g(t) \mid \mathrm{d}t$,
- $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 \mathrm{d}t}$.
- $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} \mid f(t) - g(t) \mid$

3)Sur un ensemble X non vide quelconque, l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, *définie par*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y\ ; \\ 1 & si\ x \neq y \end{cases}$$

est une distance dite distance discrète.

Définition 1.1.2 ***(Espace métrique)***
On appelle espace métrique tout couple (E, d) constitué d'un ensemble non vide E et d'une distance d sur E.

Définition 1.1.3 ***1) (Suite convergente dans un espace métrique) :****Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique (E, d) est convergente s'il existe $l \in E$, tel que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies d(x_n, l) < \epsilon,$$

et dans ce cas , on écrit $\lim x_n = l$.

2) (Suite de Cauchy dans un espace métrique) :*Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique (E, d) est dite de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon,$$

où encore si le diamètre de l'ensemble des termes d'indices supérieur à $\mathbf{n}_0$ tend vers $\mathbf{0}$ quand $\mathbf{n}$ tend vers $+\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} d(x_m, x_n) = 0$$

Propriétés :

1. Dans un espace métrique, toute suite convergente est de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle-même une suite de Cauchy.
4. L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.
5. Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence et si elle en a une , alors elle converge.
6. Toute suite de Cauchy ayant une sous-suite convergente est convergente.

Définition 1.1.4 ***(Espace complet) :*** *Si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E, on dit que l'espace métrique (E, d) est complet .*

1.2 Espace vectoriel normé- Espace de Banach

Définition 1.2.1 ***(Espace normé) :*** *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel . Une norme sur E est une application $\| \,.\, \|$ $E \times E \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant les hypothèses suivantes :*

1. ***Séparation :*** $\forall x \in E, \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
2. ***Homogénéité*** $\forall (\lambda, x) \in K \times E, \| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$
3. ***Sous-additivité(où inègalité triangulaire) :*** $\forall (x, y) \in E^2, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Définition 1.2.2 *[15] Le couple $(E, \| \,.\, \|)$où E est un espace vectoriel et $\| \,.\, \|$ définit une norme sur E est appelé espace normé .*

Exemple 1.2.1 *1.* $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$

2. $\| x \|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} | x_i |$

3. $\| x \|_2 = \sqrt{\sum_1^n | x_i |^2}$
sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^n$ *muni par une de ces normes est un espace vectoriel normé.*

Exemples fondamentaux :

1) Pour tout ensemble non vide X et tout espace vectoriel normé E, l'espace $\mathfrak{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E, muni de la norme de la convergence uniforme

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in X} \| f(x) \|$$

est un espace vectoriel normé.

2) Le corps K (ègal ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), muni de sa valeur absolue où module, est un K-espace vectoriel normé.

3) Si $1 \leq p < \infty$ l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$, noté simplement ℓ^p, est l'espace des suites p-sommables $x = (x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de K, muni de la norme

$$\| x \|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} | x_n |^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace vectoriel normé.

Définition 1.2.3 ***(distance associée à la norme) :*** *Soit* $\| \cdot \|$ *une norme sur* E*. La fonction* $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $d(x, y) = \| x - y \|$ *définie une distance* E *s'appelle la distance associée à la norme* $\| \cdot \|$ *.*

Définition 1.2.4 ***(Espace de Banach) :*** *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance associée sa norme.*

Exemple 1.2.2 *1.* $\ell^1 = \{(x_n \subset \mathbb{R} \sum_{k=0}^{\infty} | x_k | < \infty)\}$

$$\| x_n \|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} | x_n |$$

$(\ell^1, \| \cdot \|_1)$ *est un espace de Banach.*

2. $E = L^2([0, 1], \mathbb{R})$ *muni de la norme :* $\| f \|_2 = \left(\int_0^1 | f(x) |^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ *est un espace de Banach .*

3. $L^p([0, 1]) = \{f = [0, 1] \to \mathbb{R},\ f$ *est mesurable* $\| f(x) \|_p < \infty\}$

$$\| f \|_p = \left(\int_0^1 | f(x) |^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$1 \leq p < \infty$ *est un espace de Banach.*

1.3 Cône d'un espace de Banach

Dans toute la suite E est un espace de Banach, θ est l'élément neutre de E pour l'addition.

Définition 1.3.1 *[8]* ***(Cône)***
On appelle cône toute partie non vide, non triviale, fermée et convexe P *de* E *qui vérifie les conditions suivantes :*

i) $\forall \lambda \geq 0, \forall x \in P : \lambda . x \in P$ *i.e* $(\lambda . P \subset P)$.

ii) $\forall x \in E;\ x \in P$ *et* $-x \in P \Rightarrow x = \theta$ *i.e* $P \cap (-P) = \{\theta\}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, la définition d'un cône correspond exactement à notre intuition géométrique, avec la stipulation que le sommet doit coïncider avec l'origine. Dans $\mathbb{R}$, les nombres non négatifs forment un cône. Dans $\mathbb{R}^2$, toute partie du plan qui s'étend à l'infini à partir de l'origine est un cône . On peut aussi trouver des exemples plus abstraits. Dans tout espace L^p(y compris L^∞), l'ensemble $C = \{f : f \geq 0\}$ est un cône.

Quelques propriétés
Il est facile de prouver les propriétés suivantes :

1. La réunion d'une famille de cônes est un cône.
2. La somme de deux cônes est un cône.
3. Le complémentaire d'un cône est un cône
4. L'intersection d'une famille non vide de cônes est un cône.

Dans la suite, nous allons définir un ordre partiel de l'espace de Banach par rapport à un cône.

1.4 Espace de Banach partiellement ordonné

Soit P un cône de E . On définie dans E la relation binaire $\preceq$ suivante : $\forall (x,y) \in E^2, x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in P$. .... $\preceq$ .... est une relation d'ordre partielle dans E.
Preuve : On vérifie simplement que la relation satisfait les critères nécessaires.

- **Réflexivité** : Puisque $\theta \in P$, on voit que $x \preceq x$ pour tout point x.
- **Antisymétrie** : Si $x \preceq y$ et $y \preceq x$, alors $y - x \in P$ et $-(y - x) \in P$. Il s'ensuit que $y - x = 0$, et donc $x = y$.
- **Transitivité** : Si $x \preceq y$ et $y \preceq z$, alors $y - x \in P$ et $z - y \in P$. Par convexité et propriété **i)**, $2\{\frac{1}{2}(y-x) + \frac{1}{2}(z-y)\} \in P$.

Convention $x \prec y \Longleftrightarrow x \preceq y$ et $x \neq y$
Il est facile de remaquer que cet ordre partiel satisfait également plusieurs autres propriétés, qui découlent immédiatement de la définition d'un cône.

1. La multiplication par un scalaire non négatif préserve l'ordre. C'est à dire que pour tout $x, y \in E$ et $\alpha \geq 0$; $x \preceq y \Longrightarrow \alpha x \preceq \alpha y$.
2. L'ajout d'un vecteur fixe préserve l'ordre i.e L'inégalité $x \preceq y$ implique que $x + z \preceq y + z$ pour tout vecteur $z \in E$.
3. L'ordre conserve des limites. Si $y_n \to l$ et chaque $y_n \preceq y$, alors $l \preceq y$.

Il s'avère que tout ordre partiel dans un espace de Banach qui satisfait ces trois propriétés supplémentaires définira un cône.

Définition 1.4.1 *[8] (* ***Cône normal)***
P est normal $\Longleftrightarrow \forall (x,y) \in E \times E, \exists \eta > 0;\ \theta \preceq x \preceq y \Rightarrow \| x \| \preceq \eta \| y \|$
η est dite constante de normalité de P.

Définition 1.4.2 *[8]**(Cône solide)***
On dit que P est un cône solide si son intérieur est non vide c'est à dire que :
$\overset{\circ}{P} = \{x \in E \setminus\ x \textit{ point intereur de } P\} \neq \phi$

Définition 1.4.3 *[8]* ***(Intervalle ordonné)***
$[x_1, x_2] = \{x \in E; x_1 \preceq x \preceq x_2\}$ *où* $x_1, x_2 \in E$ *s'appelle intervalle ordonné entre x_1 et x_2.*

1.5 Opérateur positif- opérateur monotône

Dans toute la suite E est un espace de Banach, P est un cône de E et $A : E \to E$ est un opérateur.

Définition 1.5.1 ***(Opérateur positif)*** *[8]*
On dit que l'opérateur A est positif par rapport au cône si $A(P) \subset P$.

Définition 1.5.2 *[8]**(Opérateur monotône)***

1. *On dit que A est croissante si : $\forall x_1, x_2 \in E$; $x_1 \preceq x_2 \Rightarrow Ax_1 \preceq Ax_2$;*
2. *et que A est décroissante si : $\forall x_1, x_2 \in E$; $x_1 \preceq x_2 \Rightarrow Ax_2 \preceq Ax_1$.*

1.5.1 Opérateur concave généralisé

Définition 1.5.3 *[19] On dit que A est concave généralisé si :*

1. *$\forall x \in P, \forall t \in (0,1), \exists \alpha(t) \in (t,1]$ tels que : $A(tx) \geq \alpha(t).Ax$ ou*
2. *$\forall x \in P, \forall t \in (0,1), \exists \alpha(t,x) \in (t,1]$ tels que : $A(tx) \geq \alpha(t,x).Ax$: telle que $\alpha(t,x)$ est décroissante par rapport x.*

1.5.2 Opérateur h-concave

Définition 1.5.4 *[13] On dit que A est h-concave si :*

1. *Pour toute $x > \theta$ il existe $\alpha = \alpha(x) > 0$ et $\beta = \beta(x) > 0$ tels que : $\alpha.h \leq Ax \leq \beta.h$ et*
2. *Pour toute $x \in P$ satisfait $\alpha_1.h \leq x \leq \beta_1.h, (\beta_1 = \beta_1(x) > 0, \alpha_1 = \alpha_1(x) > 0)$ et tout $0 < t < 1$, il existe $\eta(t,x) > 0$ tels que : $A(tx) \geq (1+\eta)tAx$*

Remarque 1.1
1. *Si l'opérateur A est un opérateur $h-$concave en P, alors on a $A(P \backslash \theta) \subset P_h$. Si x est un point fixe non nul de A, alors $x = Ax \in P_h$*
2. *Si l'opérateur A est un opérateur croissante $h-$concave, alors on obtient $t < t(1 + \eta(t,x)) \leq 1, \forall t \in (0,1), x \in P_h$*
3. *A est un opérateur $h-$concave si et sulemment si pour $t \in (0,1)$ et $x \in P_h$, il existe $\eta(t, \frac{1}{t}x) > 0$ tels que :*

$$A\left(\frac{1}{t}x\right) \leq \frac{1}{t(1+\eta(t,\frac{1}{t}x))} Ax = \frac{1}{t}\left[1 + \eta\left(t, \frac{1}{t}x\right)\right]^{-1} Ax$$

1.5.3 Opérateur $\beta-$concave généralisé

Définition 1.5.5 *[16] On dit que A est $\beta-$concave généralisé si :*

1. *L'opérateur $A : P \to P$ est croissante, et satisfait $A(tx) \geq t^{\beta(t)}Ax$ pour $t \in (0,1)$ et $x \in P$ tels que $0 < \beta(t) < 1$ pour $t \in (0,1)$ ou*
2. *L'opérateur $A : P \to P$ est croissante, et satisfait $A(tx) \geq t^{\beta(t,x)}Ax$ pour $t \in (0,1)$ et $x \in P$ tels que $\beta : (0,1) \times P$ est croissante par rapport x.*

Remarque 1.2
1. *Si $\beta(t) = \beta \in (0,1)$, alors l'opérateur A s'appelle opérateur $\beta-$concave*
2. *[6] Si $\beta(t) = \beta(a,b) \in (0,1)$, avec $(a,b) \subset [0,1]$alors l'opérateur A s'appelle opérateur $\beta-$sous-linéaire.*

3. d'après la définition (1.5.5) on posé $x = \frac{1}{t}x$, alors on a :

$$A(x) \geq t^{\beta(t)} A(\frac{1}{t}x) \Rightarrow A\left(\frac{1}{t}x\right) \leq \frac{1}{t^{\beta(t)}} Ax, \forall t \in (0,1), x \in P$$

$$A(x) \geq t^{\beta(t,x)} A(\frac{1}{t}x) \Rightarrow A\left(\frac{1}{t}x\right) \leq \frac{1}{t^{\beta(t,\frac{1}{t}x)}} Ax, \forall t \in (0,1), x \in P$$

1.5.4 Relation d'équivalence sur l'espace de Banach

On définit sur E la relation $\sim$ [19] suivante

$$\forall x, y \in E; x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu > 0;\ \lambda.x \preceq y \preceq \mu.x,$$

où d'une manière équivalente $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu > 0;\ y \in [\lambda.x, \mu.x]$.
Il est clair que $\sim$ est une relation d'équivalence dans E en effet ;

- **Reflexive :** $\forall x \in E,\ 1.x \preceq x \preceq 1.x$ ce qui implique $x \sim x$.
- **symétrique :** $x \sim y \Longrightarrow \exists \lambda, \mu > 0;\ \lambda.x \preceq y \preceq \mu.x \Longrightarrow \frac{1}{\mu}.y \preceq x \preceq \frac{1}{\lambda}.y \Longrightarrow y \sim x$.
- **Transitive :** $x \sim y$ et $y \sim z \Longrightarrow \exists \lambda, \mu, \lambda', \mu' > 0;\ \lambda.x \preceq y \preceq \mu.x$ et $\lambda'.y \preceq z \preceq \mu'.y \Longrightarrow (\lambda'\lambda).x \preceq z \preceq (\mu'.\mu).x$.

1.5.5 Classe d'équivalence d'un élément donné

[19] Soit $\theta \prec h$ donné de E i.e. $h \in P$ et $h \neq \theta$. On note :

$$P_h = \{x \in E; x \sim h\} = \{x \in E; \exists \lambda, \mu > 0; \lambda.x \preceq h \preceq \mu.x\}$$

P_h est la classe d'équivalence de h.
propriétés :

1) Si $\mathring{P} \neq \phi$, et $h \in \mathring{P}$, alors c'est clair que $P_h = \mathring{P}$

2) $P_h \subset P$

3) $\forall \lambda > 0; \lambda.P_h = P_h$

En effet

1) c'est évident.

2) Soit $x \in P_h$ alors il existe $\lambda, \mu > 0$ tels que : $\lambda.x \preceq h \preceq \mu.x \Rightarrow \theta \prec \frac{1}{\mu}h \preceq x \Rightarrow \theta \preceq x \Rightarrow x \in P$ (car $\preceq$ est transitive). Alors $P_h \subset P$.

3) Soit $x \in \lambda.P_h$ alors $x = \lambda.r($ avec $r \in P_h)$. Par définition de P_h il existe $\lambda_1, \mu_1 > 0$ tels que $\lambda_1 r \preceq h \preceq \mu_1 r$, alors on obtient

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \lambda\lambda_1 r \preceq \lambda.h \preceq \lambda\mu_1 r \\
&\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda}(\lambda.r) \preceq h \preceq \frac{\mu_1}{\lambda}(\lambda.r) \\
&\Leftrightarrow \lambda.r \sim h \Leftrightarrow x = \lambda.r \in P_h
\end{aligned}$$

1.6 Méthode de sous et sur solution

Dans ce section, on s'intéresse en particulier à la méthode de sous et sur solution. Cette méthode est utilisée pour la résolution des EDO et EDP.

Principe de la méthode de sous et sur solution

Le principe de la méthode consiste à chercher une solution qui se situe entre la sous et la sur solution sous certaines conditions.
On défini par exemple le problème suivant :

$$\begin{cases} u' = f(t, u(t)), & t \in [a, b] \\ u(a) = u(b) \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.6.1 ***(Sous solution)****[3]*
Soit $\alpha(t) \in C^1[a, b]$, on dit que α est sous solution pour le problème (1.1) si :

$$\forall t \in [a, b], \quad \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) \quad et \quad \alpha(a) \leq \alpha(b)$$

Définition 1.6.2 ***(Sur solution)****[3]*
Soit $\beta(t) \in C^1[a, b]$, on dit que β est sur solution pour le problème (1.1) si :

$$\forall t \in [a, b], \quad \beta'(t) \geq f(t, \beta(t)) \quad et \quad \beta(a) \geq \beta(b)$$

Soit D est défini par :

$$D = \{(t, u(t)) \in [a, b] \times \mathbb{R} \ \textit{tels que} : \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)\}$$

Soit Q est défini par :

$$Q = \{(t, u(t)) \in [a, b] \times \mathbb{R} \ \textit{tels que} : \beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t)\}$$

Théorème 1.1 *[7] Soit α et β est sous et sur solution successivement pour le problème (1.1) tels que $\alpha \leq \beta$. Supposons que f continue sur D et que le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \\ u(a) = u_0 & u_0 \in [\alpha(a), \beta(a)] \end{cases}$$

admet une solution unique. Alors le problème (1.1) a au moins une solution $u \in C^1[a, b]$, tel que : $\forall t \in [a, b]; \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$

Théorème 1.2 *[4] Soit α et β est sous et sur solution successivement pour le problème (1.1)tels que $\alpha \geq \beta$. Supposons que f continue sur Q et que le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \\ u(b) = u_0 & u_0 \in [\beta(b), \alpha(b)] \end{cases}$$

admet une solution unique. Alors le problème (1.1) a au moins une solution $u \in C^1[a, b]$,tel que : $\forall t \in [a, b]; \beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t)$

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET UNICITÉ DE SOLUTIONS POSITIVES POUR L'ÉQUATION $AX + X_0 = X$

Dans ce chapitre, nous considérons l'existence et l'unicité des solutions positives pour l'équation (1) avec un opérateur concave non linéaire généralisé incluant un opérateur $h-$concave et un opérateur $\beta-$concave généralisé. On suppose toujours que E est un espace de Banach réel avec un ordre partiel induit par un cône P de E. Soit $h \in E, h > \theta$ et P_h est donnée comme dans le chapitre1.

2.1 Lemmes auxiliaires

Dans tout ce qui suite on note par $\leq$ la relation d'ordre partielle.

Lemme 2.1 *Supposons que $Ah \in P_h$ et A est un opérateur vérifie :*

i) *$A : P \to P$ est croissante en P*

ii) *$\forall x \in P$ et $t \in (0,1)$, $\exists\, \alpha(t) \in (t,1]$ tels que : $A(tx) \geq \alpha(t)Ax$*

alors il existe $u_0, v_0 \in P_h$ et $r \in (0,1)$ tels que : $rv_0 \leq u_0 < v_0$, $u_0 \leq Au_0 \leq Av_0 \leq v_0$

Preuve : *puisque $Ah \in P_h$ on peut choisir un nombre suffisamment petit $t_0 \in (0,1)$ tel que :*

$$t_0 h \leq Ah \leq \tfrac{1}{t_0}h. \tag{2.1}$$

Noter que $t_0 < \alpha(t_0) \leq 1$, on peut choisir un entier positif k tel que :

$$\left(\tfrac{\alpha(t_0)}{t_0}\right)^k \geq \frac{1}{t_0}. \tag{2.2}$$

*On pose $u_0 = t_0^k h, v_0 = \frac{1}{t_0^k}h$, évidemment $u_0, v_0 \in P_h$ car $(\lambda.P_h = P_h)$ et $u_0 = t_0^{2k}v_0 < v_0$. Prenons n'importe quel réel $r \in (0, t_0^{2k}]$ alors $r \in (0,1)$ et $u_0 \geq rv_0$. Par le fait que A est croissante, on a $Au_0 \leq Av_0$ en plus, d'après la condition **ii)** et les réssultat (2.1) (2.2) on a*

$$\begin{aligned} Au_0 &= A(t_0^k h) = A(t_0.t_0^{k-1}h) \geq \alpha(t_0)A(t_0^{k-1}h) \\ &= \alpha(t_0)A(t_0.t_0^{k-2}h) \geq \alpha(t_0).\alpha(t_0)A(t_0^{k-2}h) \geq \ldots.. \\ &\geq (\alpha(t_0))^k Ah \geq (\alpha(t_0))^k t_0 h \geq t_0^k h = u_0. \end{aligned}$$

*De la condition **ii)**, en remplaçant* $x =$ *par* $\frac{1}{t}x$ *on obtient*

$$\begin{aligned} A(tx) &\geq \alpha(t)Ax \\ Ax &\geq \alpha(t)A\left(\frac{1}{t}x\right) \\ A\left(\frac{1}{t}x\right) &\leq \frac{1}{\alpha(t)}Ax, \forall t \in (0,1), x \in P \end{aligned}$$

ainsi on a

$$\begin{aligned} Av_0 &= A\left(\frac{1}{t_0^k}h\right) = A\left(\frac{1}{t_0}.\frac{1}{t_0^{k-1}}h\right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha(t_0)}A\left(\frac{1}{t_0^{k-1}}h\right) = \frac{1}{\alpha(t_0)}A\left(\frac{1}{t_0}.\frac{1}{t_0^{k-2}}h\right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha(t_0)}.\frac{1}{\alpha(t_0)}A\left(\frac{1}{t_0^{k-2}}h\right) \leq ...... \end{aligned}$$

car $t_0 \leq Ah \leq \frac{1}{t_0}$ *donc*

$$\leq \frac{1}{(\alpha(t_0))^k}Ah \leq \frac{1}{t_0(\alpha(t_0))^k}h$$

une application de (2.2) $\frac{1}{\alpha(t_0)^k} \leq \frac{1}{t_0^{k-1}}$ *implique que*

$$Av_0 \leq \frac{1}{t_0(\alpha(t_0))^k}h \leq \frac{1}{t_0^k}h = v_0$$

ainsi on a $u_0 \leq Au_0 \leq Av_0 \leq v_0$.

Lemme 2.2 *Supposons que l'opérateur* A *satisfait :*

i) $A : P \to P$ *est croissante.*

ii) $\forall x \in P$ *et* $t \in (0,1)$ $\exists \alpha(t,x) \in (t,1]$ *tels que :*$A(tx) \geq \alpha(t,x)Ax$ *telle que* $\alpha(t,x)$ *est décroissante par rapport* x.

iii) $\exists h > \theta$ *et* $t_0 \in (0,1)$ *tels que* $t_0h \leq Ah \leq t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h$ *et* $\alpha(t,x)$ *donnée dans **ii)***

alors il existe $u_0, v_0 \in P_h$ *et* $r \in (0,1)$ *tels que* $rv_0 \leq u_0 < v_0, u_0 \leq Au_0 \leq Av_0 \leq v_0$.

Preuve : *Du fait que* $t_0 < \alpha(t_0,h) \leq 1$,*on peut choisir un entier positif* k *tel que*

$$\left(\frac{\alpha(t_0,h)}{t_0}\right)^k \geq \frac{1}{t_0} \tag{2.3}$$

on pose $u_0 = t_0^k h, v_0 = \frac{1}{t_0^k}h$, *évidemment* $u_0, v_0 \in P_h$ *et* $u_0 = t_0^{2k}v_0 < v_0$.*Prends n'importe* $r \in (0, t_0^{2k}]$ *donc* $r \in (0,1)$ *et* $u_0 \geq rv_0$. *Par la monotonie de* A, *on a* $Au_0 \leq Av_0$. *Comme* $\alpha(t,x)$ *est décroissante par rapport* x *et* $Ah \geq t_0h$,*on a*

$$\begin{aligned} Au_0 &= A(t_0^k h) = A(t_0.t_0^{k-1}h) \geq \alpha(t_0, t_0^{k-1}h)A(t_0^{k-1}h) \\ &= \alpha(t_0, t_0^{k-1}h)A(t_0.t_0^{k-2}h) \geq \alpha(t_0, t_0^{k-1}h).\alpha(t_0, t_0^{k-2}h)A(t_0^{k-2}h) \\ &\geq .... \geq \alpha(t_0, t_0^{k-1}h).\alpha(t_0, t_0^{k-2}h)....\alpha(t_0, t_0h).\alpha(t_0,h)Ah \\ &\geq (\alpha(t_0,h))^k Ah \geq (\alpha(t_0,h))^k t_0 h \geq t_0^k h = u_0. \end{aligned}$$

*De **iii)** en remplaçant $x =$ par $\frac{1}{t}x$ on obtient*

$$\begin{aligned} A(tx) &\geq \alpha(t,x)Ax \\ Ax &\geq \alpha(t,\frac{1}{t}x)A\left(\frac{1}{t}x\right) \\ A\left(\frac{1}{t}x\right) &\leq \frac{1}{\alpha(t,\frac{1}{t}x)}Ax, \forall t \in (0,1), x \in P. \end{aligned}$$

Sachant que $\alpha(t,x)$ est décroissante par rapporte x et $Ah \leq t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h$, on a

$$\begin{aligned} Av_0 &= A(\frac{1}{t_0^k}h) = A(\frac{1}{t_0}.\frac{1}{t_0^{k-1}}h) \\ &\leq \frac{1}{\alpha(t_0,\frac{1}{t_0^k h})}A(\frac{1}{t_0^{k-1}}h) = \frac{1}{\alpha(t_0,\frac{1}{t_0^k}h)}A(\frac{1}{t_0}.\frac{1}{t_0^{k-2}}h) \\ &\leq \frac{1}{\alpha(t_0,\frac{1}{t_0^k}h)}.\frac{1}{\alpha(t_0,\frac{1}{t_0^{k-1}}h)}A(\frac{1}{t_0^{k-2}}h) \leq .... \\ &\leq \frac{1}{\alpha(t_0,\frac{1}{t_0^k}h).\alpha(t_0,\frac{1}{t_0^{k-1}}h)....\alpha(t_0,\frac{1}{t_0}h)}Ah \\ &\leq \frac{1}{\alpha(t_0,\frac{1}{t_0}h)^{k-1}\alpha(t_0,\frac{1}{t_0}h)} \qquad \left(puisque\ \ \alpha(t_0,\frac{1}{t_0}h) \leq t_0\right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{t_0^{(k-1)}.\alpha(t_0,\frac{1}{t_0}h)}.t_0^{-1}\alpha(t_0,t_0^{-1}h)h = \frac{1}{t_0^k}h = v_0$$

ainsi on a $u_0 \leq Au_0 \leq Av_0 \leq v_0$.

2.2 Résultat d'existence et unicité pour un opérateur concave généralisé

Théorème 2.1 *Soit P un cône normal et A un opérateur qui vérifie :*

- ***i)*** *$A : P \to P$ est croissante sur P*
- ***ii)*** *$\forall x \in P$ et $t \in (0,1)$ $\exists \alpha(t) \in (t,1]$ tels que $A(tx) \geq \alpha(t)Ax$*

en outre $x_0 \in P$ satisfait $Ah + x_0 \in P_h$ alors, l' équation(1) a une solution unique en P_h.
Preuve :*On définie l'opérateur C par $Cx = Ax + x_0, \forall x \in P$.Pour $x_0 \in P$, nous savons que $C : P \to P$. Par la monotonie de A, on déduit que l'opérateur $C : P \to P$ est croissante, car : soit $x_1, x_2 \in P$ tels que : $x_1 \leq x_2$ donc $Ax_1 \leq Ax_2$, l'ajout de x_0, on aboutit à $Cx_1 \leq Cx_2$ donc C est croissante, d'un autre côté $\forall x \in P$ et $t \in (0,1)$, on a*

$$C(tx) = A(tx) + x_0 \geq \alpha(t)Ax + x_0.$$

Puisque $\alpha(t) \leq 1$ alors, $x_0\alpha(t) \leq x_0$ et par suite

$$C(tx) \geq \alpha(t)Cx \tag{2.4}$$

donc l'opérateur C remplit les condition ***i),ii)*** *aussi on a*

$$Ch = Ah + x_0 \in P_h. \tag{2.5}$$

Lemme(2.1) implique qu'il existe $u_0, v_0 \in P$ et $r \in (0,1)$ tels que

$$rv_0 \leq u_0 < v_0, u_0 \leq Cu_0 \leq Cv_0 \leq v_0 \tag{2.6}$$

construisons successivement les deux suites

$$u_n = Cu_{n-1}, v_n = Cv_{n-1}, n = 1, 2, 3.......$$

par la monotonie de C, on a $u_1 = Cu_0 \leq Cv_0 = v_1$. D'une manière générale on obtient $u_n \leq v_n, n = 1, 2, 3....$ il découle de (2.6) et de la monotonie de C que

$$u_0 \leq u_1 \leq ..... \leq u_n \leq .... \leq v_n \leq ..... \leq v_1 \leq v_0. \tag{2.7}$$

Notons que $u_0 \geq rv_0$, on peut obtenir $u_n \geq u_0 \geq rv_0 \geq rv_n, n = 1, 2, ...$ Soit

$$t_n = \sup\{0 < t < 1 | \ u_n \geq tv_n\}, n = 1, 2, ...$$

ainsi on a $u_n \geq t_n v_n, n = 1, 2, ...$ et par suite

$$u_{n+1} =\geq u_n \geq t_n v_n \geq t_n v_{n+1}, n = 1, 2, ...$$

donc $t_{n+1} \geq t_n i.e\ t_n$ est une suite croissante avec $t_n \subset (0, 1]$. Supposons que $t_n \to t^*$ quand $n \to \infty$, alors $t^* = 1$. Sinon $0 < t^* < 1$, on distingue deux cas

Premier cas : *il existe un entier N tel que $t_N = t^*$. dans ce cas on sait que $t_n = t^*\ \forall n \geq N$ donc pour $n \geq N$, on a*

$$u_{n+1} = Cu_n \geq C(t^* v_n) \geq \alpha(t^*)Cv_n = \alpha(t^*)v_{n+1}$$

par définition de $t_n, t_{n+1} = t^* \geq \alpha(t^*)$ et on a $\alpha(t^*) > t^*$ qui est une contradiction

Deuxième cas : *$\forall n, t_n < t^*$. alors on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= Cu_n \geq C(t_n v_n) = C(\frac{t_n}{t^*}t^* v_n) \geq \alpha(\frac{t_n}{t^*})C(t^* v_n) \\ &\geq \alpha(\frac{t_n}{t^*}).\alpha(t^*)Cv_n \geq \frac{t_n}{t^*}.\alpha(t^*)v_{n+1}, \end{aligned}$$

par définition de $t_n, t_{n+1} \geq \frac{t_n}{t^*}.\alpha(t^*)$. Lorsque $n \to \infty$, on a $t^* \geq \alpha(t^*)$ et on a $\alpha(t^*) > t^*$, qui est une contradiction, donc $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$. Pour tout nombre naturel p on a

$$\begin{aligned} \theta < u_{n+p} - u_n &\leq v_n - u_n \leq v_n - t_n v_n = (1 - t_n)v_n \leq (1 - t_n)v_0, \\ \theta &\leq v_n - v_{n+p} \leq v_n - u_n \leq (1 - t_n)v_0. \end{aligned}$$

Comme le cône P est normal on a

$$\begin{aligned} \| u_{n+p} - u_n \| &\leq N(1 - t_n) \| v_0 \| \to 0 (n \to \infty) \\ \| v_n - v_{n+p} \| &\leq N(1 - t_n) \| v_0 \| \to 0 (n \to \infty), \end{aligned}$$

ici N la constante de normalité.
Donc on peut conclure que u_n et v_n sont des suites de Cauchy, et comme E est complet, alors $\exists u^*, v^*$ tels que :$u_n \to u^*, v_n \to v^*$ quand $n \to \infty$. Par (2.7) nous déduisons que $u_n \leq u^* \leq v^* \leq v_n$ avec $u^*, v^* \in P_h$ et

$$\theta \leq v^* - u^* \leq v_n - u_n \leq (1 - t_n)v_0,$$

de plus de

$$\| v^* - u^* \| \leq N(1 - t_n) \| v_0 \| \to 0 (n \to \infty),$$

et ainsi $u^* = v^*$. On pose $x^* = u^* = v^*$ alors, on obtient

$$u_{n+1} = Cu_n \leq Cx^* \leq Cv_n = v_{n+1}$$

lorsque $n \to \infty$ alors on aboutit à $x^* = Cx^*$ c'est-à-dire que x^* est un point fixe de l'opérateur C dans P_h.
Dans la suite on prouve que x^* est l'unique point fixe de C dans P_h, en fait supposons que x^- est un autre point fixe de C dans P_h, puisque $x^*, x^- \in P_h$, il existe des nombres positifs $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ tels que :

$$\mu_1 h \leq x^* \leq \lambda_1 h, \mu_2 h \leq x^- \leq \lambda_2 h.$$

D'où on obtient

$$x^- \geq \mu_2 h = \frac{\mu_2}{\lambda_1}\lambda_1 h \geq \frac{\mu_2}{\lambda_1}x^*.$$

Puisque $t_1 = \sup\{t > 0 | \; x^- \geq tx^*\}$, évidemment $0 < t_1 < \infty, x^- \geq t_1 x^*$; par la suite nous prouvons $t_1 \geq 1$.
Si $0 < t_1 < 1$ alors

$$x^- = Cx^- \geq C(t_1 x^*) \geq \alpha(t_1)Cx^* = \alpha(t_1)x^*,$$

puisque $\alpha(t_1) > t_1$, cela contredit la définition de t_1 ; donc $t_1 \geq 1$, ce qui donne $x^- \geq t_1 x^* \geq x^*$ de même on peut prouver $x^* \geq x^-$; on a

$$x^* = \mu_1 h = \frac{\mu_1}{\lambda_2}\lambda_2.h \geq \frac{\mu_1}{\lambda_2}x^-.$$

Puisque $t_2 = \sup\{t > 0 | \; x^* \geq tx^-\}$, évidemment $0 < t_2 < \infty, x^* \geq t_2 x^-$; par la suite nous prouvons $t_2 \geq 1$.
Si $0 < t_2 < 1$ alors

$$x^* = Cx^* \geq C(t_2 x^-) \geq \alpha(t_2)Cx^- = \alpha(t_2)x^-,$$

puisque $\alpha(t_2) > t_2$, cela contredit la définition de t_2 ; Donc $t_2 \geq 1$, ce qui donne $x^* \geq t_2 x^- \geq x^-$ i.e. $x^- = x^*$ alors C admet un unique point fixe x^* dans P_h c'est -à- dire que $Ax + x_0 = x$ a une solution unique dans P_h.

Théorème 2.2 *Soit $x_0 \in P$ où P est un cône normale. Supposons que l'opérateur A satisfait :*

i) *$A : P \to P$ est croissante sur P.*

ii) *$\forall x \in P$ et $t \in (0, 1)$, $\exists \alpha(t, x) \in (t, 1]$ tels que : $A(tx) \geq \alpha(t, x)Ax$, telle que $\alpha(t, x)$ est décroissante par rapport à x,*

iii) *il existe $t_0 \in (0, 1)$ tel que :*

$$t_0 h \leq Ah + x_0 \leq t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h$$

alors l'équation $Ax + x_0 = x$ admet une solution unique en P_h.

Preuve : *De même que la preuve du théorèm (2.1), on peut considérer l'opérateur C par*

$$Cx = Ax + x_0, \forall x \in P$$

*à partir de **i), ii)** il est facile de prouver que $C : P \to P$ est croissante en effet : soit $x_1, x_2 \in P$ tels que : $x_1 \leq x_2$ donc $Ax_1 \leq Ax_2$, l'ajout de x_0, on aboutit à $Cx_1 \leq Cx_2$ alors C est croissante, d'un autre côté $\forall x \in P$ et $t \in (0, 1)$, on a*

$$C(tx) = A(tx) + x_0 \geq \alpha(t, x)Ax + x_0.$$

Puisque $\alpha(t, x) \leq 1$ alors, $x_0\alpha(t, x) \leq x_0$ et par suit

$$C(tx) \geq \alpha(t, x)Cx, \quad \forall x \in P$$

et $t \in (0, 1)$

*en outre d'après **iii)***

$$t_0 h \leq Ah + x_0 = Ch \leq t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h.$$

Donc, le lemme(2.2) implique qu'ils existent $u_0, v_0 \in P_h$ et $r \in (0, 1)$ tels que :

$$rv_0 \leq u_0 < v_0, u_0 \leq Cu_0 \leq Cv_0 \leq v_0. \tag{2.8}$$

Construissons successivement les suites

$$u_n = Cu_{n-1}, v_n = Cv_{n-1}, n = 1, 2, ...$$

Par la monotonie de C, on a $u_1 = Cu_0 \leq Cv_0 = v_1$ d'une façons généralé, on obtient $u_n \leq v_n, n = 1, 2, ...$ De (2.8) et de la monotonie de C, il découle que

$$u_0 \leq u_1 \leq .... \leq u_n \leq ... \leq v_n \leq ... \leq v_1 \leq v_0 \tag{2.9}$$

de même que dans la preuve du théorème (2.1) soit la suite (t_n)

$$t_n = \sup\{t > 0| \ u_n \geq tv_n\}, n = 1, 2, ...$$

Ainsi on a $u_n \geq t_n v_n, n = 1, 2, ..$ et

$$u_{n+1} \geq u_n \geq t_n v_n \geq t_n v_{n+1}, n = 1, 2, ...$$

$t_{n+1} \geq t_n$ i.e $\{t_n\}$ est croissante avec $\{t_n\} \subset (0, 1]$. Supposer $t_n \to t^*, n \to \infty$ alors $t^* = 1$, autrement $0 < t^* < 1$ on distingue deux cas :

Premier cas : *il existe un entier N tel que : $t_N = t^*$, dans ce cas on sait $t_n = t^* \forall n \geq N$. Donc pour $n \geq N$, on a*

$$u_{n+1} = Cu_n \geq C(t^* v_n) \geq \alpha(t^*, v_n)Cv_n \geq \alpha(t^*, v_0)Cv_n = \alpha(t^*, v_0)v_{n+1}$$

par la définition de $t_n, t_{n+1} = t^* \geq \alpha(t^*, v_0) > t^*$ qui est une contradiction

Deuxième cas : *$\forall n, t_n < t^*$ alors on obtient*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= Cu_n \geq C(t_n v_n) = C(\frac{t_n}{t^*}t^* v_n) \geq \alpha(\frac{t_n}{t^*}, t^* v_n)C(t^* v_n) \\ &\geq \frac{t_n}{t^*}.\alpha(t^*, v_n)Cv_n \geq \frac{t_n}{t^*}.\alpha(t^*, v_0)v_{n+1} \end{aligned}$$

par la définition de $t_n, t_{n+1} \geq \frac{t_n}{t^*}.\alpha(t^*, v_0)$ *lorsque* $n \to \infty$, *on obtient* $t^* \geq \alpha(t^*, v_0) > t^*$ *c'est une contradiction donc* $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$.
La preuve du reste est similaire à la preuve du théorème(2.1), pour tout nombre naturel p *on a*

$$\begin{aligned} \theta < u_{n+p} - u_n &\leq v_n - u_n \leq v_n - t_n v_n = (1-t_n)v_n \leq (1-t_n)v_0, \\ \theta &\leq v_n - v_{n+p} \leq v_n - u_n \leq (1-t_n)v_0. \end{aligned}$$

Comme le cône P *est normal on a*

$$\begin{aligned} \| u_{n+p} - u_n \| &\leq N(1-t_n) \| v_0 \| \to 0 (n \to \infty) \\ \| v_n - v_{n+p} \| &\leq N(1-t_n) \| v_0 \| \to 0 (n \to \infty), \end{aligned}$$

ici N *la constante de normalité.*
Donc on peut conclure que u_n *et* v_n *sont des suites de Cauchy, et comme* E *est complet, alors* $\exists u^*, v^*$ *tels que :*$u_n \to u^*, v_n \to v^*$ *quand* $n \to \infty$. *Par (2.9) nous déduisons que* $u_n \leq u^* \leq v^* \leq v_n$ *avec* $u^*, v^* \in P_h$ *et*

$$\theta \leq v^* - u^* \leq v_n - u_n \leq (1-t_n)v_0,$$

de plus de

$$\| v^* - u^* \| \leq N(1-t_n) \| v_0 \| \to 0(n \to \infty),$$

et ainsi $u^* = v^*$. *On pose* $x^* = u^* = v^*$ *alors, on obtient*

$$u_{n+1} = Cu_n \leq Cx^* \leq Cv_n = v_{n+1}$$

lorsque $n \to \infty$ *alors on aboutit à* $x^* = Cx^*$ *c'est-à-dire que* x^* *est un point fixe de l'opérateur* C *dans* P_h.
Dans la suite on prouve que x^* *est l'unique point fixe de* C *dans* P_h. *En fait supposons que* x^- *est un autre point fixe de* C *dans* P_h. *Puisque* $x^*, x^- \in P_h$, *il existe des nombres positifs* $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ *tels que :*

$$\mu_1 h \leq x^* \leq \lambda_1 h, \mu_2 h \leq x^- \leq \lambda_2 h.$$

D'où on obtient

$$x^- \geq \mu_2 h = \frac{\mu_2}{\lambda_1}\lambda_1 h \geq \frac{\mu_2}{\lambda_1}x^*$$

puisque $t_1 = \sup\{t > 0 |\ x^- \geq tx^*\}$, *évidemment* $0 < t_1 < \infty, x^- \geq t_1 x^*$. *Par la suite nous prouvons* $t_1 \geq 1$.
Si $0 < t_1 < 1$ *alors*

$$x^- = Cx^- \geq C(t_1 x^*) \geq \alpha(t_1, x^*)Cx^* = \alpha(t_1, x^*)x^*.$$

Puisque $\alpha(t_1, x^*) > t_1$, *cela contredit la définition de* t_1. *Donc* $t_1 \geq 1$, *ce qui donne* $x^- \geq t_1 x^* \geq x^*$ *de même on peut prouver* $x^* \geq x^-$; *on a*

$$x^* = \mu_1 h = \frac{\mu_1}{\lambda_2}\lambda_2.h \geq \frac{\mu_1}{\lambda_2}x^-$$

puisque $t_2 = \sup\{t > 0 | \ x^* \geq tx^-\}$, *évidemment* $0 < t_2 < \infty, x^* \geq t_2x^-$. *Par la suite nous prouvons* $t_2 \geq 1$.
Si $0 < t_2 < 1$ *alors*

$$x^* = Cx^* \geq C(t_2x^-) \geq \alpha(t_2, x^-)Cx^- = \alpha(t_2, x^-)x^-.$$

Puisque $\alpha(t_2, x^-) > t_2$, *cela contredit la définition de* t_2. *Donc* $t_2 \geq 1$, *ce qui donne* $x^* \geq t_2x^- \geq x^-$ *i.e.* $x^- = x^*$ *donc on déduit que* C *a un point fixe et unique* x^* *en* P_h *c'est-à-dire que l'équation* $Ax + x_0 = x$ *a une solution unique en* P_h.

Corollaire 2.1 *Avec les mêmes conditions que dans le théorème(2.1) pour tout donné* $\lambda > 0$ *l'équation* $\lambda.x = Ax + x_0$ *a une solution unique dans* P_h.
Preuve : *Pour* $\lambda > 0$ *fixé, définir un opérateur* $C : P \to E$ *tel que :*

$$Cx = \frac{1}{\lambda}(Ax + x_0), \forall x \in P$$

de même que la preuve du théorème du (2.1), nous pouvons facilement obtenir

i) $C : P \to P$ *est croissante. En effet : soit* $x_1, x_2 \in P$ *tels que :*$x_1 \leq x_2$ *donc par la monotonie de* A *on a* $Ax_1 \leq Ax_2$, *l'ajout de* x_0, *en mutipliant le deux membre par le terme positif* $\frac{1}{\lambda}$, *on aboutit à* $Cx_1 \leq Cx_2$ *alors* C *est croissante.*

ii) $C(tx) \geq \alpha(t)Cx$ *pour toutes* $x \in P$ *et* $t \in (0, 1)$ *en effet :*

$$C(tx) = \frac{1}{\lambda}(A(tx) + x_0) \geq \frac{1}{\lambda}(\alpha(t)Ax + x_0).$$

Puisque $\alpha(t) \leq 1$ *alors,* $x_0\alpha(t) \leq x_0$ *et par suite*

$$C(tx) \geq \frac{1}{\lambda}\alpha(t)(A(tx) + x_0) \Rightarrow C(tx) \geq \alpha(t)Cx$$

iii) $Ch = \frac{1}{\lambda}(Ah + x_0) \in P_h$. *En effet :*$(Ah + x_0) \in P_h \Rightarrow \frac{1}{\lambda}(Ah + x_0) \in \frac{1}{\lambda}P_h$, *puisque* $\frac{1}{\lambda}P_h = P_h$, *donc* $Ch \in P_h$

ainsi par théorème (2.1) C *a un point fixe et unique en* P_h *c'est -à- dire l'équation* $\lambda.x = Ax+x_0$ *a une solution unique en* P_h.

Corollaire 2.2 *Soit* $x_0 \in P$ *où* P *est un cône normal, supposons que l'opérateur* A *satisfait :*

- $A : P \to P$ *est croissante en* P.
- $\forall x \in P$ *et* $t \in (0, 1), \exists\alpha(t, x) \in (t, 1]$ *tels que :* $A(tx) \geq \alpha(t, x)Ax$ *telle que* $\alpha(t, x)$ *est décroissante par rapporte* x.

Donc :

1. *S'il existe* $t_0, \lambda^* \in (0, 1)$ *tels que :*

$$t_0h \leq Ah + x_0 \leq \lambda^* t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h$$

alors pour tout $\lambda \in [\lambda^*, 1)$ *l'équation* $\lambda.x = Ax + x_0$ *a une solution unique en* P_h

2. *S'il existe* $t_0 \in (0, 1)$ *et* $\lambda^* \in (1, +\infty)$, *tels que :*

$$\lambda^* t_0h \leq Ah + x_0 \leq t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h$$

alors pour tout $\lambda \in (1, \lambda^*]$, *l'équation* $\lambda.x = Ax + x_0$ *a une solution unique dans* P_h.

Preuve :

1. *Définir un opérateur $C : P \to E$ tel que :*

$$Cx = \frac{1}{\lambda}(Ax + x_0), \forall x \in P$$

de même que la preuve du théorème(2.2), nous pouvons facilement obtenir

i) *$C : P \to P$est croissante, en effet : soit $x_1, x_2 \in P$ tels que : $x_1 \leq x_2$ donc par la monotonie de A on a $Ax_1 \leq Ax_2$ l'ajout de x_0, en mutipliant le deux membre par le terme positif $\frac{1}{\lambda}$, on aboutit à $Cx_1 \leq Cx_2$. Alors C est croissante.*

ii) *$C(tx) \geq \alpha(t, x)Cx$ pour tout $x \in P$et $t \in (0, 1)$, en effet :*

$$C(tx) = \frac{1}{\lambda}(A(tx) + x_0) \geq \frac{1}{\lambda}(\alpha(t, x)Ax + x_0).$$

Puisque $\alpha(t, x) \leq 1$ alors $x_0\alpha(t, x) \leq x_0$ et par suite

$$C(tx) \geq \frac{1}{\lambda}\alpha(t, x)(A(tx) + x_0) \Rightarrow C(tx) \geq \alpha(t, x)Cx$$

iii) *$t_0h \leq Ah + x_0 \leq Ch = \frac{1}{\lambda}(Ah + x_0) \leq \frac{1}{\lambda^*}(Ah + x_0) \leq t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h$. Car :*

$$\begin{aligned} \lambda^* \leq \lambda \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda^*} \geq \frac{1}{\lambda} \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda^*}(Ah + x_0) \geq \frac{1}{\lambda}(Ah + x_0) \geq (Ah + x_0) \end{aligned}$$

donc par hypothèse

$$t_0h \leq \frac{1}{\lambda}(Ah + x_0) = Ch \leq t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h \Rightarrow Ch \in P_h.$$

Ainsi par théorème(2.2) C a un point fixe et unique en P_h, donc pour $\lambda \in [\lambda^*, 1)$ l'équation $\lambda.x = Ax + x_0$ a une solution unique en P_h

2. *nous montrons que ce cas est de même que la preuve du cas (1).*
Définir un opérateur $C : P \to E$ tel que :

$$Cx = \frac{1}{\lambda}(Ax + x_0), \forall x \in P$$

de même que la preuve du théorème(2.2), nous pouvons facilement obtenir

i) *$C : P \to P$est croissante. Car : soit $x_1, x_2 \in P$ tels que : $x_1 \leq x_2$ donc par la monotonie de A on a $Ax_1 \leq Ax_2$ l'ajout de x_0, en mutipliant le deux membre par le terme positif $\frac{1}{\lambda}$, on aboutit à $Cx_1 \leq Cx_2$. Alors C est croissante.*

ii) *$C(tx) \geq \alpha(t, x)Cx$ pour toutes $x \in P$ et $t \in (0, 1)$. Car :*

$$C(tx) = \frac{1}{\lambda}(A(tx) + x_0) \geq \frac{1}{\lambda}(\alpha(t, x)Ax + x_0).$$

Puisque $\alpha(t, x) \leq 1$ alors $x_0\alpha(t, x) \leq x_0$ et par suite

$$C(tx) \geq \frac{1}{\lambda}\alpha(t, x)(A(tx) + x_0) \Rightarrow C(tx) \geq \alpha(t, x)Cx$$

iii) $t_0 h \leq \frac{1}{\lambda^*}(Ah + x_0) \leq Ch = \frac{1}{\lambda}(Ah + x_0) \leq (Ah + x_0) \leq t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h$. *Car :*

$$\begin{aligned} 1 \leq \lambda \leq \lambda^* &\Rightarrow \frac{1}{\lambda^*} \leq \frac{1}{\lambda} \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda^*}(Ah + x_0) \leq \frac{1}{\lambda}(Ah + x_0) \leq (Ah + x_0) \end{aligned}$$

donc par hypothèse

$$t_0 h \leq \frac{1}{\lambda}(Ah + x_0) = Ch \leq t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h \Rightarrow Ch \in P_h.$$

Ainsi par théorème(2.2) C a un point fixe et unique en P_h, donc pour $\lambda \in (1, \lambda^*]$ l'équation $\lambda.x = Ax + x_0$ a une solution unique en P_h

2.3 Résultat similaire pour un opérateur $h-$concave

Théorème 2.3 *Soit P est un cône normal et $A : P(ou\ P_h) \to P_h$ est un opérateur croissante et $h-$concave, supposer que :*
i)*il y a une constante $l \geq 0$ tel que : $x_0 \in [\theta, lh]$ et $\eta(t, x) = \eta(t)$ i.e $\eta(t, x)$ est indépendant de x, donc l'éq(1) a une solution unique en P_h ce qui implique que l'opérateur $h-$concave A a un point fixe et unique en P_h*
Preuve : *Soit $\alpha(t) = t(1 + \eta(t))$ puis par remarque(1.1), on a $\alpha(t) \in (t, 1]$ et*

$$A(tx) \geq \alpha(t)Ax, \forall t \in (0, 1), x \in P_h$$

puisque $Ah \in P_h, \exists \lambda, \mu > 0$ tels que : $\lambda.h \leq Ah \leq \mu.h$, donc on obtient

$$\lambda.h \leq Ah + x_0 \leq \mu.h + x_0 \leq \mu.h + lh = (\mu + l)h.$$

Donc $Ah + x_0 \in P_h$, alors en conclusion on a :

- *$A : P(ouP_h) \to P_h$ est croissante.*
- *A est concave généralisé.*
- *$Ah + x_0 \in P_h$.*

Il découle de théorème(2.1) que l'équation $x = Ax + x_0$ a une solution unique en P_h, prise $x_0 = \theta$, alors l'équation $x = Ax$ a une solution unique en P_h, donc on peut affirmer que l'opérateur $h-$concave A a un point fixe et unique en P_h

Théorème 2.4 *Soit $x_0 \in P$ et P est un cône normal, supposons que l'opérateur $A : P(ou\ P_h) \to P_h$ est croissante et $h-$concave et que :*

i) *$\eta(t, x) : (0, 1) \times P_h \to (0, 1)$ est décroissante en x pour t fixe*

ii) *il existe $t_0 \in (0, 1)$ tel que :*

$$t_0 h \leq Ah + x_0 \leq \left(1 + \eta(t_0, \frac{1}{t_0}h)\right)h.$$

Donc l'éq(1) a une solution unique en P_h, ce qui implique que l'opérateur $h-$concave A a un unique point fixe en P_h
Preuve :*Soit $\alpha(t,x) = t(1+\eta(t,x))$ puis par remarque(1.1), nous savons $t < \alpha(t,x) \leq 1$ et*

$$A(tx) \geq \alpha(t,x)Ax, \forall t \in (0,1), x \in P$$

*de **i)**, nous savons que $\alpha(t,x)$ est décroissante en x pour t fixe, donc la condition : {" pour $x \in P$ et $t \in (0,1)$ $\exists\, \alpha(t,x) \in (t,1]$ tels que :$A(tx) \geq \alpha(t,x)Ax$ telle que $\alpha(t,x)$ est décroissante en x pour t fixe "} est satisfait. De **ii)**, on a*

$$t_0 h \leq Ah + x_0 \leq \left(1 + \eta(t_0, \frac{1}{t_0}h)\right) h = t_0^{-1}.t_0\left(1 + \eta(t_0, t_0^{-1}h\right) = t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h.$$

Donc en conclusion on a :

- *$A : P(ouP_h) \to P_h$ est croissante.*
- *A concave généralisé.*
- *$t_0 h \leq Ah + x_0 \leq \alpha(t_0, t_0^{-1}h)h$.*

Ainsi d'après le théorème(2.2), l'équation $x = Ax + x_0$ a une solution unique en P_h, prise $x_0 = \theta$, alors l'équation $x = Ax$ a une solution unique en P_h, donc on peut affirmer que l'opérateur h-concave A a un point fixe et unique en P_h

2.4 Résultat similaire pour un opérateur $\beta-$concave

Théorème 2.5 *Soit P est un cône normale et A est un opérateur satisfait **i) :** $A : P \to P$ est croissante tel que : $A(tx) \geq t^{\beta(t)}Ax$ pour $t \in (0,1)$ et $x \in P$ où $0 < \beta(t) < 1$ pour $t \in (0,1)$ en outre $x_0 \in P$ satisfait $Ah + x_0 \in P_h$ puis l'éq(1) a une solution unique en P_h, ce qui implique que l'opérateur généralisé $\beta-$concave A a un point fixe et unique dans P_h*
***Preuve :** Soit $\alpha(t) = t^{\beta(t)}$ puis par **i)** on a $\alpha(t) \in (t,1]$ et*

$$A(tx) \geq \alpha(t)Ax, \forall t \in (0,1), x \in P$$

donc en conclusion on a :

- *$A : P(ouP_h) \to P_h$ est croissante.*
- *A est concave généralisé.*
- *$Ah + x_0 \in P_h$.*

Il découle de théorème(2.1) que l'équation $x = Ax + x_0$ a une solution unique en P_h, prise $x_0 = \theta$, alors l'équation $x = Ax$ a une solution unique en P_h, donc on peut affirmer que l'opérateur $\beta-$concave A a un point fixe et unique en P_h.

Théorème 2.6 *Soit P est un cône normale et $x_0 \in P$ et A est un opérateur satisfait **ii) :** $A : P \to P$ est croissante tel que : $A(tx) \geq t^{\beta(t,x)}Ax$ pour $t \in (0,1)$ et $x \in P$ où $\beta : (0,1) \times P \to (0,1)$ est croissante en x pour $t \in (0,1)$ fixe, en outre il existe $t_0 \in (0,1)$ tel que :*

$$t_0 h \leq Ah + x_0 \leq \frac{1}{t_0^{1-\beta(t_0, \frac{1}{t_0}h)}}h.$$

Puis l'éq(1) a une solution unique en P_h, ce qui implique que l'opérateur généralisée $\beta-$concave A a un point fixe unique dans P_h
***Preuve :** Soit $\alpha(t) = t^{\beta(t,x)}$ puis par **ii)** nous savons $t < \alpha(t,x) \leq 1$ et*

$$A(tx) \geq \alpha(t,x)Ax, \forall t \in (0,1), x \in P$$

de plus, nous savons que $\alpha(t,x)$ est décroissant en x pour t fixe.Ainsi la condition "$\forall x \in P, t \in (0,1), \exists\alpha(t,x) \in (t,1]$ tels que : $A(tx) \geq \alpha(t,x)Ax$ avec $\alpha(t,x)$ est décroissante en x pour t fixe " est satisfait, évidemment nous savons

$$t_0 h \leq Ah + x_0 \leq \frac{1}{t_0^{1-\beta(t_0,\frac{1}{t_0}h)}} h = t_0^{-1} t_0^{\beta(t_0,\frac{1}{t_0}h)} h = t_0^{-1}\alpha(t_0, t_0^{-1}h)h.$$

Donc en conclusion on a :

- $A : P(ouP_h) \to P_h$ *est croissante.*
- A *concave généralisé.*
- $t_0 h \leq Ah + x_0 \leq \alpha(t_0, t_0^{-1}h)h.$

Ainsi d'après le théorème(2.2), l'équation $x = Ax + x_0$ a une solution unique en P_h, prise $x_0 = \theta$, alors l'équation $x = Ax$ a une solution unique en P_h, donc on peut affirmer que l'opérateur $\beta-$concave A a un point et fixe unique en P_h.

CHAPITRE 3

QUELQUES APPLICATIONS

Dans ce chapitre, nous avons appliqué les résultats obtenus dans le chapitre 2(les théorèmes (2.1)(2.2)(2.3).....) pour étudier l'existence et l'unicité des solutions pour des problèmes avec des conditions initiales, où à valeurs aux limites associées à des équations différentielles ordinaires linéaires où non et ainsi que des systèmes non linéaires algèbriques .

3.1 Problème à valeur initiale associé à une équation différentielle ordinaire d'ordre 1

Considérons le problème à la valeur initiale [19] suivant

$$x' = f(t,x),\ \ x(0) = a_0 \tag{3.1}$$

où $f(t,x) : I \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$.

On sait que l'ensemble $C(I,\mathbb{R})$ de toutes les fonctions continues sur l'intervalle $I = [0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\| x \| = \sup\{|x(t)|; t \in I\}$ est un espace de Banach. Soit le sous-ensemble $P = \{x \in C(I,\mathbb{R})\ x(t) \geq 0, t \in I\}$. Il est facile de vérifier que P est un cône normale et solide dans $C(I,\mathbb{R})$, $\mathring{P} = \{x \in C(I,\mathbb{R})/x(t) > 0, t \in I\}$. En effet

- P **est non vide** car $x(t) = a > 0$(constante) est un élément de P.
- Soit $x \in P$ et $\lambda > 0$ alors, pour tout $t \in I$; $x(t) \geq 0 \Rightarrow \lambda.x(t) \geq 0$ donc $\lambda.P \subset P$.
- Soit $x(t) \in C(I,\mathbb{R})$. Si pour tout $t \in I$; $x(t) \geq 0$ et $-x(t) \geq 0$ alors $x(t) = 0$ d'où $(-P) \cap P = \{\theta\}$
- **Pour** $0 \leq x(t) \leq y(t)$ on a $\| x \| = \sup\{| x(t) |, t \in (0,1) \leq 1. \| y \|\}$, donc P est un normale.
- On a $\mathring{P} = \{x \in C(I,\mathbb{R})/x(t) > 0, t \in I\}$ soit $x(t) = e^t > 0 \Rightarrow e^t \in \mathring{P}$ alors $\mathring{P} \neq \phi$ donc P est solide.
- Soient $s \in (0,1)$ et $x(t), y(t) \in P$. On a $x(t), y(t) \geq 0$ alors $sx(t) + (1-s)y(t) \geq 0 \Rightarrow sx(t) + (1-s)y(t) \in P$ donc P est convexe.
- **(**P **est fermé) puisque on a**

  1. On a $P \subset \bar{P}$

2. Soit $x \in \bar{P}$ alors, il existe une suite $(x_n) \subset P$ telle que : $x_n \to x$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$; $x_n \in P$ i.e. $x_n(t) \geq 0$ ce qui entraine que pour tout $t \in I$, $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \geq 0$.
   Pour $t_0 \in I$; on a $|x(t) - x(t_0)| \leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x(t_0)| \to 0$ quand $n \to +\infty$ et $t \to t_0$ car x_n converge simplement vers x et x_n est continue en tout point t de I, d'où la continuité de x. Alors $x \in P$ donc $\bar{P} = P$, ainsi P est fermé.

La relation partielle défini par P dans $C(I, \mathbb{R})$ est toujours noté $\leq$.
Nous supposons également que :

(C_1) Il existe une constante $M > 0$ telle que pour touts $u \geq v \geq 0$ on a, $f(t,u) - f(t,v) \geq -M(u-v)$.

(C_2) Pour tout $\lambda \in (0,1)$ et $u \geq 0$, il existe $\alpha(\lambda) \in (\lambda, 1]$ telle que :

$$f(t, \lambda u) - \alpha(\lambda) f(t,u) \geq [\alpha(\lambda) - \lambda] Mu, \forall t \in I$$

3.1.1 Reformulation du problème

On va démontrer que le problème (3.1) est équivalent à l'équation intégrale suivante

$$x(t) = a_0 e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,x(s)) + Mx(s)]\mathrm{d}s, t \in I. \tag{3.2}$$

Preuve : L'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ est équivalente à $x'(t) + Mx(t) = f(t, x(t)) + Mx(t)$ qui est une équation différentielle linéaire de premier ordre avec deuxième membre dont la solution générale est

$$x(t) = C.e^{-Mt}.$$

En utilisant la méthode de variation des constantes, on pose $x(t) = C(t).e^{-Mt}$ d'où $x'(t) = C'(t)e^{-Mt} - M.e^{-Mt}.C(t)$ donc $x'(t) + Mx(t) = C'(t)e^{-Mt} = f(t, x(t)) + Mx(t)$ c'est à dire que $C'(t) = e^{Mt}(f(t, x(t)) + Mx(t))$, alors $C(t) = C(0) + \int_0^t e^{Ms}[f(s,x(s)) + Mx(s)]\mathrm{d}s$ et comme $C(0) = x(0) = a_0$, on obtient finalement

$$x(t) = a_0.e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,x(s)) + Mx(s)]\mathrm{d}s.$$

Donc x est une solution du problème à valeur initiale (3.1) sur I si et seulement si x est une solution du problème (3.2).

Théorème 3.1 *On suppose que les conditions (C_1), (C_2) soient satisfaites et que $a_0 > 0$. Alors ils existent $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tels que, le problème (3.1) admet une unique solution x^* vérifiant $\lambda_1 e^{-Mt} \leq x^*(t) \leq \lambda_2 e^{-Mt}$.*
Preuve : *On définit l'opérateur $A : P \to C(I, \mathbb{R})$ par*

$$Ax(t) = a_0 e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,x(s)) + Mx(s)]\mathrm{d}s, t \in I$$

comme a_0, $M > 0$ et $f(t,x) \geq 0$, on a $Ax(t) \geq 0$ pour $t \in I$. C'est à dire que, $A : P \to P$. Il découle de la condition (C_1) que l'opérateur A est croissante sur le cône P car : Soit $x_1, x_2 \in C(I, \mathbb{R})$ tels que : $x_1(t) \leq x_2(t)$ pour tout t de I d'après (C_1) on a $f(t, x_2(t)) - f(t, x_1(t)) \geq -M(x_2(t) - x_1(t))$ alors $f(t, x_2(t)) + Mx_2(t) \geq f(t, x_1(t)) + Mx_1(t)$. En mutipliant les deux membres par le terme positif $e^{-M(t-s)}$ puis tenant l'intégrale de 0 à t et finalement l'ajout de

a_0e^{-Mt},*on aboutit à* $Ax_2(t) \geq Ax_1(t)$ *donc* A *est croissante .*
Pour $\lambda \in (0,1)$ *et* $x \in P$*, d'après la condition* (C_2) *on obtient*

$$A(\lambda.x)(t) = a_0e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,\lambda.x(s)) + M\lambda.x(s)]\mathrm{d}s,$$

en remplaçant u *par* $x(s)$ *dans* (C_2)*, on peut écrire*

$$f(s,\lambda.x(s)) + \lambda.Mx(s) \geq \alpha(\lambda)(Mx(s) + f(s,x(s))),$$

parconséquent

$$A(\lambda.x)(t) \geq a_0e^{-Mt} + \alpha(\lambda)\int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,x(s)) + Mx(s)]\mathrm{d}s.$$

Puisque $\alpha(\lambda) \leq \lambda < 1$*, alors* $\alpha(\lambda)a_0e^{-Mt} \leq \lambda.a_0e^{-Mt} < a_0e^{-Mt}$ *donc*

$$A(\lambda.x)(t) \geq \alpha(\lambda))\left[a_0e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,x(s)) + Mx(s))]\mathrm{d}s\right]$$

donc $A(\lambda.x)(t) \geq \alpha(\lambda)Ax(t)$ *pour* $\lambda \in (0,1)$ *et* $x \in P$ *alors, l'opérateur* A *est concave généralisé.*
Prenons $h(t) = e^{-Mt}$ *et* $x_0 = 0$ *dans l'équation(1). Il est clair que* $h \in P$*,* $h \neq 0$*, vérifie d'un part*

$$\begin{aligned} Ah &= a_0e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,h(s)) + Mh(s)]\mathrm{d}s \\ &= \left(a_0 + \int_0^t e^{Ms}[f(s,h(s)) + Mh(s)]\mathrm{d}s\right)h(t) \geq a_0h(t). \end{aligned}$$

Car $\int_0^t e^{Ms}[f(s,h(s)) + Mh(s)]\mathrm{d}s \geq 0$*, et d'un autre côté*

$$\begin{aligned} Ah &= a_0e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,h(s)) + Mh(s)]\mathrm{d}s \\ &\leq \left(a_0 + e^M\int_0^1 [f(s,h(s)) + Mh(s)]\mathrm{d}s\right)h(t). \end{aligned}$$

Car $\int_0^t e^{Ms}[f(s,h(s)) + Mh(s)] \leq \int_0^1 e^M[f(s,h(s)) + Mh(s)]\mathrm{d}s$.
On pose $\lambda_1 = a_0$*,* $\lambda_2 = a_0 + e^M\int_0^1[f(s,h(s)) + Mh(s)]\mathrm{d}s$*, donc* $\lambda_1h \leq Ah \leq \lambda_2h$*, alors* $Ah \in P_h$*. Ainsi on conclut que*

1. $A : P \to P$ *est croissante.*
2. A *est concave généralisé .*
3. $Ah \in P_h$.

Donc par le théorème (2.1) l'équation $x = Ax + x_0$ *a une unique solution, ce qui montre que le problème (3.1) a une unique solution sur* $x^* \in P_h$*, puisqu'elle vérifie* $\lambda_1e^{-Mt} \leq x^*(t) \leq \lambda_2e^{-Mt}$.

Théorème 3.2 *Supposons que* $a_0 \geq 0$ *et les deux conditions* $(C_1), (C_2)$ *sont satisfaites. De plus, ils existent* $h \in P$ *avec* $h \neq 0$ *et deux réels* $M_1, M_2 > 0$ *tels que :*

$$M_1h(t) \leq a_0e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s,h(s)) + Mh(s)]\mathrm{d}s \leq M_2h(t), \forall t \in I \tag{3.3}$$

alors le problème (3.1) a une unique solution dans P_h.
Preuve : *On définit l'opérateur $A : P \to C(I, \mathbb{R})$ par*

$$Ax(t) = \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s, x(s)) + Mx(s)]\mathrm{d}s, \forall t \in I$$

notons que $f(t, x) \geq 0$, par hypothèse alors, on a $Ax(t) \geq 0$ pour $t \in I$. Soit $A : P \to P$ il découle de (C_1) que l'opérateur A est croissante sur P ***car :*** *Soit $x_1(t), x_2(t) \in C(I, \mathbb{R})$ tels que : $x_1(t) \leq x_2(t)$ on prend dans la condition (C_1) $v = x_1(t), u = x_2(t)$ alors on a $f(t, x_2(t)) - f(t, x_1(t)) \geq -M(x_2(t) - x_1(t))$ ce qui nous permet de conclure que*

$$\begin{aligned} Ax_2(t) - Ax_1(t) &= \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s)) + M(x_2(s) - x_1(s))]\mathrm{d}s \\ &\geq \int_0^t e^{-M(t-s)}[-M(x_2(s) - x_1(s)) + M(x_2(s) - x_1(s))]\mathrm{d}s \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

alors $Ax_2(t) \geq Ax_1(t)$ donc A est croissante.
Pour $\lambda \in (0, 1)$ et $x \in P$, par la condition (C_2)

$$A(\lambda.x)(t) = \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s, \lambda.x(s)) + M\lambda.x(s)]\mathrm{d}s.$$

En posant $u = x(s)$ dans (C_2) on obtient

$$\begin{aligned} f(s,\lambda.x(s)) - \alpha(\lambda)f(s, x(s)) &\geq [\alpha(\lambda) - \lambda]Mx(s), \\ f(s, \lambda.x(s)) + \lambda.Mx(s) &\geq \alpha(\lambda)(Mx(s) + f(s, x(s))) \end{aligned}$$

$$A(\lambda.x)(t) \geq \alpha(\lambda) \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s, x(s)) + Mx(s)]\mathrm{d}s = \alpha(\lambda)Ax(t).$$

Donc $A(\lambda.x)(t) \geq \alpha(\lambda)Ax(t)$ pour $\lambda \in (0, 1)$ et $x \in P$ ce qui prouve que A est concave généralisé .

On pose $x_0(t) = a_0e^{-Mt}, t \in I$. Puisque $a_0 \geq 0$, on sait $x_0(t) \geq 0$, i.e $x_0 \in P$; de plus, pour $t \in I$, d'après (3.3) on a

$$M_1h(t) \leq Ah(t) + x_0(t) = a_0e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s, h(s)) + Mh(s)]\mathrm{d}s \leq M_2h(t).$$

D'où, $M_1h \leq Ah + x_0 \leq M_2h$. Autrement dit, $Ah + x_0 \in P_h$. Ainsi on conclut que

1. *$A : P \to C(I, \mathbb{R})$ est croissante.*
2. *A est concave généralisé .*
3. *$Ah + x_0 \in P_h$.*

Donc d'après le théorème(2.1) l'équation $x = Ax + x_0$ a un unique solution, alors l'équation

$$Ax(t) + x_0 = a_0e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)}[f(s, x(s)) + Mx(s)]\mathrm{d}s$$

a un unique solution donc le problème (3.1) a une solution unique dans P_h

3.2 Problème à valeur initiale pour une équation différentielle impulsive non linéaire

Soit le problème [19]

$$\left\{ \begin{array}{c} u'(t) = f(t, u(t)), \ t \in [0;1] - \{t_1, t_2, ..., t_m\} \\ I_k(u(t_k)) = u(t_k^+) - u(t_k^-), k = 1, 2, ..., m \\ u(0) = a_0 \end{array} \right\} \tag{3.4}$$

où $0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < 1; a_0 > 0$ et $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Soit $PC([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les applications $u : [0;1] \to \mathbb{R}$; continue pour tout $t \neq t_k$ et pour $k = 1, 2, ..., m$ on a $u(t_k^-) = u(t_k)$, $u(t_k^+)$ existe. Cet ensemble muni de la norme $\|u\| = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|$ est un espace de Banach.

3.2.1 Reformulation du problème

On démontre que u est une solution du problème(3.4) si et seulement si $u = Au$, où

$$Au(t) = a_0 e^{-Mt} + \sum_{0<t_k<t} e^{-M(t-t_k)} I_k(u(t_k)) + \int_0^t e^{-M(t-s)} (f(s, u(s)) + Mx(s))\, ds, t \in [0,1]$$

en effet, toute solution u du problème(3.4) vérifie :

1. Pour $t \in [0, t_1]$, $u(t) = a_0 e^{-Mt} + \int_0^t e^{-M(t-s)} (f(s, u(s)) + Mx(s))\, ds.$

2. Si $t \in]t_k, t_{k+1}]$, $u(t) = u(t_k^+) e^{-M(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{-M(t-s)} (f(s, u(s)) + Mx(s))\, ds.$

Et comme on a

$\int_{t_k}^t e^{-M(t-s)} (f(s,u(s)) + Mx(s))\, ds = \int_0^t e^{-M(t-s)} (f(s,u(s)) + Mx(s))\, ds - \int_0^{t_k} e^{-M(t-s)}(f(s,u(s)) + Mx(s))ds = \int_0^t e^{-M(t-s)} (f(s,u(s)) + Mx(s))\, ds - e^{-M(t-t_k)} \int_0^{t_k} e^{-M(t_k-s)} (f(s,u(s)) + Mx(s))\, ds.$

Alors, pour $t \in]t_k, t_{k+1}]$; on obtient

$u(t) = (u(t_k^+) - \int_0^{t_k} e^{-M(t_k-s)}(f(s,u(s)) + Mx(s))ds)e^{-M(t-t_k)} + \int_0^t e^{-M(t-s)}(f(s,u(s)) + Mx(s))ds.$

Si $t \in]t_1, t_2]$, $\int_0^{t_1} e^{-M(t_1-s)}(f(s,u(s)) + Mx(s))ds = u(t_1^-) - a_0 e^{-Mt_1}$ donc

$u(t) = (u(t_1^+) - u(t_1^-) + a_0 e^{-Mt_1})e^{-M(t-t_1)} + \int_0^t e^{-M(t-s)}(f(s,u(s)) + Mx(s))ds$

$= a_0 e^{-Mt} + I_1(u(t_1))e^{-M(t-t_1)} + \int_0^t e^{-M(t-s)}(f(s,u(s)) + Mx(s)ds.$

En utilisant la dernière résultat, on trouve pour $t \in]t_2, t_3]$;

$\int_0^{t_2} e^{-M(t_2-s)}(f(s,u(s)) + Mx(s))ds = u(t_2^-) - a_0 e^{-Mt_2} - I_1(u(t_1))e^{-M(t_2-t_1)}$, ce qui nous permet de conclure que

$u(t) = (u(t_2^+) - u(t_2^-) + a_0 e^{-Mt_2} + I_1(u(t_1))e^{-M(t_2-t_1)})e^{-M(t-t_2)} + \int_0^t e^{-M(t-s)}(f(s,u(s)) + Mx(s))ds$

$= a_0 e^{-Mt} + I_2(u(t_2))e^{-M(t-t_2)} + I_1(u(t_1))e^{-M(t-t_1)} + \int_0^t e^{-M(t-s)}(f(s,u(s)) + Mx(s))ds$, et ainsi de suite.

La fonction f est définie comme ci-dessus et satisfait les deux conditions (C_1) et (C_2). Si en outre, $I_k :\to [0, +\infty[$ est croissante et vérifie $I_k(\lambda u) \geq \alpha(\lambda) I_k(u)$ pour tout $\lambda \in (0,1)$ et $u \geq 0$. Alors, en appliquant le théorème prcédente on démontre que le problème impulsive (3.4) admet une solution dans $\mathring{P} = \{x \in PC([0;1], \mathbb{R}); x(t) > 0, t \in [0,1]\}$.

3.3 Problèmes aux limites non linéaire à deux points associé à une équation différentielle ordinaire

Les équations avec l'opérateur p-Laplacien apparait dans la modélisation de différents phénomènes naturels, mécaniques non newtoniennes, biologie des populations, lois d'écoulement non linéaire, et système d'équations aux dérivées partielles de Monge-Kantorovich. Dans cette section, nous nous intéressons de l'existence et l'unicité de solutions positives pour des problèmes aux limites avec un p-Laplacien unidimensionnel. On considère le problème aux limites non linéaire à deux points [19] suivants

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + f(t,u) = 0, & t \in (0,1), \\ u(0) = a & u'(1) = b \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\phi_p(s) = \mid s \mid^{p-2} s, p > 1, a \geq 0, b \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nous utiliserons le théorème(2.3) et le théorème(2.4) pour établir l'existence de l'unique positive solution du problème(3.5). Nous supposons également que $E = C(0,1)$ et $P = \{x \in E| \ x(t) \geq 0, \ t \in [0,1]\}$. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

(C_3) Pour touts $\lambda \in (0,1)$ et $u \geq 0$ il existe $\eta(\lambda)$telle que :

$$f(t, \lambda.u) \geq [\lambda(1+\eta(\lambda))]^{p-1} f(t,u), \quad \forall t \in [0,1]$$

(C_4) Pour touts $\lambda \in (0,1)$ et $u \in P$ il existe une fonction $\eta(\lambda, u) : (0,1) \to (0,1)$ telle que :

$$f(t, \lambda.u(t)) \geq [\lambda(1+\eta(\lambda,u))]^{p-1} f(t,u(t))$$

telle que $\eta(\lambda, u)$ est décroissante par rapport à u.

(C_5) Il existe $t_0 \in (0,1)$ tel que :

$$t_0 \leq a + \int_0^t \phi_q\left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r,1)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \leq 1 + \eta(t_0, \frac{1}{t_0}), t \in [0,1]$$

3.3.1 Reformulation du problème

On démontre que le problème peut être formulé sous la forme de l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = a + \int_0^t \phi_q\left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s$$

Preuve : Soit $u(t) \in E$ on a en intégrant de t à 1 les deux membres et substituant la condition au bord $u'(1) = b$, on obtient

$$\phi_p(u'(t)) = \phi_p(b) + \int_t^1 f(r,u(r))\mathrm{d}r$$

et comme $(\phi_p)^{-1} = \phi_q$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$u'(t) = \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_t^1 f(r, u(r))\mathrm{d}r \right)$$

intégrons une deuxième fois les deux membres et utilisons la condition initiale $u(0) = a$, on trouve

$$u(t) = a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u(r))\mathrm{d}r \right) ds.$$

Théorème 3.3 *Suppose que $f(t, u) : [0, 1] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est croissante par rapport à u et vérifie la condition (C_3). Alors :*

1. *Si $a > 0$, alors le problème (3.5) a une solution positive et unique dans $\overset{\circ}{P}$.*
2. *Si $a = 0$ et il existe $M_1, M_2 > 0$ et $h \in P$ avec $h \neq 0$ tels que :*

$$M_1 h(t) \leq \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, h(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s \leq M_2 h(t).$$

Alors le problème(3.5) a une solution positive et unique dans P_h.

Preuve :

1. *On défini l'opérateur $A : P \to E$ par*

$$Au(t) = a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(t, u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}.s$$

Puisque $a > 0, b > 0$ et $f(t, u) \geq 0$, on a $Au(t) > 0$. C'est à dire que , $A : P \to \overset{\circ}{P}$. Il est clair que A est croissante, car : soit u_1, $u_2 \in P$ et $u_1 \leq u_2$ alors, par hypothèse $f(t, u_1) \leq f(t, u_2)$ alors

$$\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u_1(r))\mathrm{d}r \leq \phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u_2(r))\mathrm{d}r,$$

la fonction ϕ_q est stictement croissante, par conséquent

$$\phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(t, u_1(r))\mathrm{d}r \right) \leq \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(t, u_2(r))\mathrm{d}r \right),$$

d'où $\int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u_1(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s \leq \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u_1(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s$ et par suite $Au_1 \leq Au_2$ donc A est croissante.
Pour touts $\lambda \in (0, 1)$ et $u \in \overset{\circ}{P}$ par (C_3) nous savons il existe $\eta(\lambda) > 0$ telle que :

$$f(t, \lambda.u(t)) \geq [\lambda(1 + \eta(\lambda))]^{p-1} f(t, u(t)).$$

Noter que $\lambda < \lambda(1 + \eta(\lambda)) \leq 1$, alors pour touts $\lambda \in (0, 1)$ et $u \in \overset{\circ}{P}$, on a

$$\begin{aligned} A(\lambda.u)(t) &= a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, \lambda.u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s \\ &\geq a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + [\lambda(1 + \eta(\lambda, u))]^{p-1} \int_s^1 f(r, \lambda.u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

On pose $\lambda(1+\eta(\lambda)) = \alpha(\lambda)$.*Puisque* $\alpha(\lambda) \leq 1$ *alors* $\alpha(\lambda)^{p-1} \leq 1$ *donc* $\alpha(\lambda)^{p-1}\phi_p(b) \leq \phi_p(b)$, *alors*

$$\begin{aligned}
&\geq a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b)[\lambda(1+\eta(\lambda))]^{p-1} + [\lambda(1+\eta(\lambda,u))]^{p-1} \int_s^1 f(r, \lambda.u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s \\
&\geq a + \int_0^t \phi_q \left([\lambda(1+\eta(\lambda))]^{p-1} \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u(r))\mathrm{d}r \right) \right) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

On a pour $\beta > 0$, $\phi_q(\beta) =\mid \beta.x \mid^{q-2} \beta.x = \beta^{q-1} \mid x \mid^{q-2} x = \phi_q(\beta)\phi_q(x)$, *on a* $\phi_p(\alpha(\lambda)) = [\lambda(1+\eta(\lambda,u))]^{p-1}$, *donc*

$$\begin{aligned}
&\geq a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(\alpha(\lambda)) \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u(r))\mathrm{d}r \right) \right) \mathrm{d}s \\
&\geq a + \int_0^t \phi_q(\phi_p(\alpha(\lambda)))\phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s \\
&\geq a + \lambda(1+\eta(\lambda)) \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

On a $\alpha(\lambda).a \leq a$

$$\begin{aligned}
&\geq \lambda(1+\eta(\lambda)) \left[a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s \right] \\
&= \lambda(1+\eta(\lambda))Au(t).
\end{aligned}$$

On déduit que $A(\lambda.u) \geq \lambda(1+\eta(\lambda))Au(t)$, $\forall \lambda \in (0,1)$, $u \in \mathring{P}$ *donc* A *est* $h-$*concave.Ainsi en conclusion on a*

- $A : P \to \mathring{P}$ *est croissante.*
- A *est* $h-$*concave.*

Donc d'après le théorème(2.3) l'équation $x = Ax + x_0$ *a une unique solution, c'est à dire la même chose pour l'équation*

$$Au(t) = a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(t, u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s$$

ce qui prouve que le problème(3.5) a une unique solution dans $\mathring{P}$.

2. *Pour* $a = 0$ *on définit l'opérateur* $A : P \to E$ *par*

$$Au(t) = \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s.$$

Comme $b > 0$ *et* $f(t,u) \geq 0$, *on a* $Au(t) > 0$. *C'est à dire que,* $A : P \to P$. *Par la monotonie de* $f(t,u)$ *par rapport à* u *pour* $t \in [0,1]$ *fixé, on obtient que* $A : P \to P$ *est* *croissante. De plus, pour touts $\lambda \in (0,1)$ et $u \in P$, par la précédente preuve, on sait qu'il existe une $\eta(\lambda) > 0$ telle que*

$$A(\lambda.u)(t) \geq \lambda(1+\eta(\lambda)Au(t), \quad \forall\lambda \in (0,1), \quad u \in P.$$

Dans la suite, nous montrons que $A : P_h \to P_h$. D'abord, pour $t \in [0,1]$, par hypothèse on a

$$M_1 h(t) \leq \int_0^t \phi_q \left(\phi_q(b) + \int_s^1 f(r,h(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \leq M_2 h(t).$$

Ainsi,$M_1 h \leq Ah \leq M_2 h$. C'est à dire que $Ah \in P_h$ pour tout $u \in P_h$, il existe $\mu_1, \mu_2 > 0$ tels que $\mu_1 h \leq u \leq \mu_2 h$. Noter que la norme est monotone, on a $\mu_1 \parallel h \parallel \leq \parallel u \parallel \leq \mu_2 \parallel h \parallel$. Soit $d := \frac{\|u\|}{\|h\|}$ Alors $\mu_1 \leq d \leq \mu_2$. Comme A est croissante, $A(\mu_1 h) \leq Au \leq A(\mu_2 h)$. Ensuite

***si** $d < 1$, on distingue deux cas :*

- *Si $\mu_2 = d$, alors $Au \leq A(dh) \leq Ah$. Si $\mu_2 > d$, puis de remarque(1.1), on a*

$$\begin{aligned} Au &\leq A(\mu_2 h) = A(\frac{\mu_2}{d}dh) \leq \frac{\mu_2}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{d}{\mu_2}\right)\Big]^{-1}A(dh) \\ &\leq \frac{\mu_2}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{d}{\mu_2}\right)\Big]^{-1}Ah. \end{aligned}$$

- *Si $\mu_1 = d$, alors $Au \geq A(dh) \geq d[1+\eta(d)]Ah$, car A est $h-$concave. Si $\mu_1 < d$, alors*

$$\begin{aligned} Au &\geq A(\mu_1 h) = A(\frac{\mu_1}{d}dh) \geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]A(dh) \\ &\geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]d[1+\eta(d)]Ah. \end{aligned}$$

  Donc

$$\frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]d[1+\eta(d)]Ah \leq Au \leq \frac{\mu_2}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{d}{\mu_2}\right)\Big]^{-1}Ah.$$

On prouve que $Au \in P_h$

***Si** $d > 1$*

- *Si $\mu_2 = d$, alors*

$$Au \leq A(dh) \leq d\Big[1+\eta\left(\frac{1}{d}\right)\Big]^{-1}Ah$$

- *Si $\mu_2 > d \Rightarrow \mu_2 > 1$, alors*

$$Au \leq A(\mu_2 h) \leq \mu_2\Big[1+\eta\left(\frac{1}{\mu_2}\right)\Big]^{-1}Ah$$

- *Si $\mu_1 = d$, alors $Au \geq A(dh) \geq d[1+\eta(\frac{1}{d})]^{-1}Ah$. Si $\mu_1 < d$,*

$$\begin{aligned} Au &\geq A(\mu_1 h) = A(\frac{\mu_1}{d}dh) \geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]A(dh) \\ &\geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]d\Big[1+\eta\left(\frac{1}{d}\right)\Big]^{-1}Ah. \end{aligned}$$

Alors $Au \in P_h$
Si $d = 1$

- *Si* $\mu_2 = d$, *alors* $Au \leq A(dh) = Ah$. *Si* $\mu_2 > d \Rightarrow \mu_2 > 1$, *alors*
$$Au \leq A(\mu_2 h) \leq \mu_2 \Big[1 + \eta\left(\frac{1}{\mu_2}\right)\Big]^{-1} Ah.$$
- *Si* $\mu_1 = d$, *alors* $Au \geq A(dh) = Ah$. *Si* $\mu_1 < d$, *alors*
$$\begin{aligned} Au &\geq A(\mu_1 h) = A(\frac{\mu_1}{d} dh) \geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1 + \eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big] A(dh) \\ &\geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1 + \eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big] Ah. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons $Au \in P_h$.
Donc par le théorème(2.3) A *a un point fixe unique en* P_h, *donc le problème(3.5) a une unique solution sur* P_h.

Théorème 3.4 *Supposons que* $f(t, u) : [0, 1] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *est croissante par rapport à* u *et que les conditions* (C_4), (C_5) *sont satisfaites. Alors, le problème (3.5) a une unique solution sur* $\mathring{P}$.
Preuve : *On considère l'opérateur* $A : P \to E$ *défini par*
$$Au(t) = a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(t, u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s.$$
Il est clair que l'opérateur, $A : P \to P$ *est croissante, car : soit* u_1, $u_2 \in P$ *et* $u_1 \leq u_2$ *alors* $f(t, u_1) \leq f(t, u_2)$
$$\begin{aligned} \int_s^1 f(t, u_1(r))\mathrm{d}r &\leq \int_s^1 f(t, u_2(r))\mathrm{d}r \\ \phi_p(b) + \int_s^1 f(t, u_1(r))\mathrm{d}r &\leq \phi_p(b) + \int_s^1 f(t, u_2(r))\mathrm{d}r \\ \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u_1(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s &\leq \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u_1(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s \\ a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u_1(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s &\leq a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u_1(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s \\ Au_1 &\leq Au_2. \end{aligned}$$

Donc A *est croissante.*
Pour touts $\lambda \in (0, 1)$ *et* $u \in P$ *d'aprés* (C_3) *il existe* $\eta(\lambda, u) > 0$ *tel que :*
$$f(t, \lambda.u(t)) \geq [\lambda(1 + \eta(\lambda))]^{p-1} f(t, u(t)).$$
Noter que $\lambda < \lambda(1 + \eta(\lambda)) \leq 1$, *alors pour touts* $\lambda \in (0, 1)$ *et* $u \in P$, *on a*
$$\begin{aligned} A(\lambda.u(t)) &= a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, \lambda.u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s \\ &\geq a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + [\lambda(1 + \eta(\lambda, u))]^{p-1} \int_s^1 f(r, \lambda.u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

On pose $\lambda(1+\eta(\lambda))=\alpha(\lambda)$. *Puisque* $\alpha(\lambda)\leq 1$ *alors* $\alpha(\lambda)^{p-1}\leq 1$ *donc* $\alpha(\lambda)^{p-1}\phi_p(b)\leq \phi_p(b)$, *alors*

$$\begin{aligned} A(\lambda.u(t)) &\geq a+\int_0^t \phi_q\left(\phi_p(b)[\lambda(1+\eta(\lambda))]^{p-1}+[\lambda(1+\eta(\lambda,u))]^{p-1}\int_s^1 f(r,\lambda.u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &\geq a+\int_0^t \phi_q\left([\lambda(1+\eta(\lambda))]^{p-1}\left(\phi_p(b)+\int_s^1 f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\right)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

On a pour $\beta>0$, $\phi_q(\beta)=\mid \beta.x\mid^{q-2}\beta.x=\beta^{q-1}\mid x\mid^{q-2}x=\phi_q(\beta)\phi_q(x)$, *ce qui nous permet d'écrire* $\phi_p(\alpha(\lambda))=[\lambda(1+\eta(\lambda,u))]^{p-1}$, *donc*

$$\begin{aligned} A(\lambda.u(t)) &\geq a+\int_0^t \phi_q\left(\phi_p(\alpha(\lambda))\left(\phi_p(b)+\int_s^1 f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\right)\mathrm{d}s \\ &\geq a+\int_0^t \phi_q(\phi_p(\alpha(\lambda)))\phi_q\left(\phi_p(b)+\int_s^1 f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &\geq a+\lambda(1+\eta(\lambda))\int_0^t \phi_q\left(\phi_p(b)+\int_s^1 f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Comme $\alpha(\lambda).a\leq a$

$$\begin{aligned} A(\lambda.u(t)) &\geq \lambda(1+\eta(\lambda))\left[a+\int_0^t \phi_q\left(\phi_p(b)+\int_s^1 f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right] \\ &= \lambda(1+\eta(\lambda))Au(t). \end{aligned}$$

Ce qui montre que, $A(\lambda.u)\geq\lambda(1+\eta(\lambda))Au(t)$, $\forall\lambda\in(0,1)$, $u\in P$ *on pose* $x_0=0$ *et* $h=1$, *alors* $h\in\mathring{P}$ *et d'aprés* (C_5), *on a*

$$\begin{aligned} t_0=t_0h\leq Ah(t)=A1 &= a+\int_0^t \phi_q\left(\phi_p(b)+\int_s^1 f(r,1)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\ &\leq 1+\eta(t_0,\frac{1}{t_0})=\left(1+\eta(t_0,\frac{1}{t_0}h)\right)h. \end{aligned}$$

Donc $Ah\in P_h$, *pour tout* $u\in P_h$, *il existe* $\mu_1,\mu_2>0$ *tels que* $\mu_1 h\leq u\leq\mu_2 h$. *A noter que la norme est monotone, on a* $\mu_1\parallel h\parallel\leq\parallel u\parallel\leq\mu_2\parallel h\parallel$. *Soit* $d:=\frac{\|u\|}{\|h\|}$ *alors* $\mu_1\leq d\leq\mu_2$. *Comme* A *est croissante,* $A(\mu_1 h)\leq Au\leq A(\mu_2 h)$. *Ensuite*
Si $d<1$, *on distingue deux cas :*

- *Si* $\mu_2=d$, *alors* $Au\leq A(dh)\leq Ah$. *Si* $\mu_2>d$, *puis de remarque(1.1)(3), on a*

$$\begin{aligned} Au &\leq A(\mu_2 h)=A(\frac{\mu_2}{d}dh)\leq\frac{\mu_2}{d}\left[1+\eta\left(\frac{d}{\mu_2}\right)\right]^{-1}A(dh) \\ &\leq \frac{\mu_2}{d}\left[1+\eta\left(\frac{d}{\mu_2}\right)\right]^{-1}Ah. \end{aligned}$$

- *Si* $\mu_1 = d$, *alors* $Au \geq A(dh) \geq d[1+\eta(d)]Ah$, *car* A *est* $h-$*concave.Si* $\mu_1 < d$, *alors*

$$\begin{aligned} Au &\geq A(\mu_1 h) = A(\frac{\mu_1}{d}dh) \geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]A(dh) \\ &\geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]d[1+\eta(d)]Ah. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]d[1+\eta(d)]Ah \leq Au \leq \frac{\mu_2}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{d}{\mu_2}\right)\Big]^{-1}Ah.$$

Ainsi nous avons $Au \in P_h$

Si $d > 1$

- *Si* $\mu_2 = d$, *alors*

$$Au \leq A(dh) \leq d\Big[1+\eta\left(\frac{1}{d}\right)\Big]^{-1}Ah$$

- *Si* $\mu_2 > d \Rightarrow \mu_2 > 1$, *alors*

$$Au \leq A(\mu_2 h) \leq \mu_2\Big[1+\eta\left(\frac{1}{\mu_2}\right)\Big]^{-1}Ah$$

- *Si* $\mu_1 = d$, *alors* $Au \geq A(dh) \geq d[1+\eta(\frac{1}{d})]^{-1}Ah$. *Si* $\mu_1 < d$,

$$\begin{aligned} Au &\geq A(\mu_1 h) = A(\frac{\mu_1}{d}dh) \geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]A(dh) \\ &\geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]d\Big[1+\eta\left(\frac{1}{d}\right)\Big]^{-1}Ah. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons $Au \in P_h$

Si $d = 1$

- *Si* $\mu_2 = d$, *alors* $Au \leq A(dh) = Ah$. *Si* $\mu_2 > d \Rightarrow \mu_2 > 1$, *alors*

$$Au \leq A(\mu_2 h) \leq \mu_2\Big[1+\eta\left(\frac{1}{\mu_2}\right)\Big]^{-1}Ah.$$

- *Si* $\mu_1 = d$, *alors* $Au \geq A(dh) = Ah$. *Si* $\mu_1 < d$, *alors*

$$\begin{aligned} Au &\geq A(\mu_1 h) = A(\frac{\mu_1}{d}dh) \geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]A(dh) \\ &\geq \frac{\mu_1}{d}\Big[1+\eta\left(\frac{\mu_1}{d}\right)\Big]Ah. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons $Au \in P_h$. *Noter que* $P_h = \mathring{P}$. *Ainsi en conclusion on a*

(a) $A :\in P_h \to\in P_h$ *est croissante.*

(b) A *est* $h-$*concave.*

(c) $\exists\ t_0 \in (0,1)$*tel que :*

$$t_0 h \leq Ah \leq \left(1+\eta(t_0, \frac{1}{t_0}h)\right)h.$$

Donc d'après le théorème(2.4) l'équation $x = Ax + x_0$ admet une unique solution, alors l'équation

$$Au = a + \int_0^t \phi_q \left(\phi_p(b) + \int_s^1 f(r, u(r))\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s$$

a une unique solution donc le problème(3.5) a une unique solution sur P_h.

3.4 Problème aux limites de deuxième ordre non linéaire à deux points

Soit le problème aux limites non linéaire de second ordre [19] suivant

$$\begin{cases} x'' + f(t,x) = 0, & t \in (0,1) \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

En se servant de la formule

$$\underbrace{\int_0^t \int_0^t \int_0^t \ldots\ldots \int_0^t}_{nfoit} f(s, x(s))\mathrm{d}s = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s, x(s))\mathrm{d}s,$$

et en tenant compte des conditions aux bord le problème(3.6) est équivalent à

$$\begin{aligned} x(t) &= at + b - \int_0^t (t-s) f(s, x(s))\mathrm{d}s \\ x(0) &= 0 = b \\ x(1) &= 0 \Rightarrow a = \int_0^1 (1-s) f(s, x(s))\mathrm{d}s \\ x(t) &= \int_0^1 t(1-s) f(s, x(s))\mathrm{d}s - \int_0^t (t-s) f(s, x(s))\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s))\mathrm{d}s$$

telle que :

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1 \\ s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

Définitons l'opérateur A

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s))\mathrm{d}s, t \in [0,1]$$

on suppose que :

- *$f \in C([0,1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ est croissante par rapport x.*
- *Pour touts $\lambda \in (0,1)$ et $x \ge 0$, il existe $\alpha(\lambda) \in (\lambda, 1]$ telle que :$f(t, \lambda.x) \ge \alpha(\lambda) f(t,x)$, pour $t \in [0,1]$.*

- $f(t,0) > 0$, *pour* $t \in [0,1]$.

Alors le problème (3.6) a une solution unique sur P_h.
Soit $h(t) = \frac{1}{2}t(1-t), t \in [0,1]$, *On prouve seulement que* $Ah \in P_h$.*Il est facile de voir que* $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{8}$

$$r_1 = \min_{t\in[0,1]} f(t,0), r_2 = \max_{t\in[0,1]} f\left(t, \frac{1}{8}\right)$$

alors $0 < r_1 \leq r_2$. *En outre*

$$Ah(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,h(s))\mathrm{d}s \geq r_1 h(t), t \in [0,1]$$

$$Ah(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,h(s))\mathrm{d}s \leq r_2 h(t), t \in [0,1]$$

donc $Ah \in P_h$
Remarque 3.1 *Si* $E = C_B(\mathbb{R}^N)$ *désignent l'ensemble de toutes les fonctions continues bornées sur* $\mathbb{R}^N$ *muni de la norme usuelle* $\| x \| = \sup\{| x(t) | : \ t \in \mathbb{R}^N\}$, *est un espace de Banach, soit* $P = C_B^+(\mathbb{R}^N)$ *le sous ensemble de toutes les fonctions positives de* $C_B(\mathbb{R}^N)$ *c'est un cône normale et solide .*

3.5 Système algèbrique non linéaires

Dans ce qui suit, nous appliquons également les résultats des systèmes d'équations non linéaires et équations matricielles non linéaires. Premièrement, nous considérons le système algébrique non linéaire de la forme [19]

$$x_0 + T_1 x + T_2 x^2 + ... + T_{m-1} x^{m-1} = x^m \tag{3.7}$$

où $m > 1$ *et* x *désigne le vecteur colonne* $(x_1, x_2, ..., x_n)^t, T_1, T_2, ..., T_{m-1}$*sont des matrices d'ordre* n *et dont toutes leurs entrées sont des nombres positifs. Soit* $E = \mathbb{R}^n, P = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^T | x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n\}$. *Alors* P *est un cône normale et solide dans* $\mathbb{R}^n, \mathring{P} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^T | x_i > 0, i = 1, 2, ..., n\}$ *son intérieur. Pour* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in P$ *et* $l > 0$, *soit* $x^l = (x_1^l, x_2^l, ..., x_n^l)$. *Note que si* $0 \leq x \leq y$, *alors* $\| x \| \leq \| y \|$ *et* $x^l \leq y^l$.*Un vecteur colonne* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ *est dite solution positive de (3.7) si* x_k *pour* $k \in \{1, 2, ...n\}$*et substitution* x *dans(3.7) en fait une identité.*
Théorème 3.5 *Soit* $x_0 \in \mathring{P}$, *alors le système algébrique(3.7) admet une unique solution en* $\mathring{P}$
Preuve :*On définir un opérateur* $A : P \to E$ *par*

$$Ay = T_1 y^{\frac{1}{m}} + T_2 y^{\frac{2}{m}} + ... + T_{m-1} y^{\frac{m-1}{m}}.$$

Il est facile de voir que $A : P \to P$ *est croissante.Aussi, pour* $\lambda \in (0,1)$ *et* $y \in P$

$$\begin{aligned} A(\lambda.y) &= \lambda^{\frac{1}{m}} T_1 y^{\frac{1}{m}} + \lambda^{\frac{2}{m}} T_2 y^{\frac{2}{m}} + ... + \lambda^{\frac{m-1}{m}} T_{m-1} y^{\frac{m-1}{m}} \\ &\geq \lambda^{\frac{m-1}{m}} (T_1 y^{\frac{1}{m}} + T_2 y^{\frac{2}{m}} + ... + T_{m-1} y^{\frac{m-1}{m}}) = \lambda^{\frac{m-1}{m}} Ay. \end{aligned}$$

Nous posons $h := x_0$, *alors* $h \in P$ *et* $Ah + x_0 = Ax_0 + x_0 \in \mathring{P} = P_{x_0}$. *Il résulte du théorème(2.5) que* $x_0 + Ay = y$ *a une unique solution* y^* *en* $\mathring{P}$. *Soit* $x = y^{*\frac{1}{m}}$, *alors c'est l'unique solution de(3.7) en* $\mathring{P}$. *La preuve est complète.*

Remarque 3.2 *dans le théorème(3.5), soit* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ *et* $a_0 > 0, a_1, a_2, ...a_{m-1} \geq 0$ *on peut affirmer que le polynôme* $x^m - a_{m-1}x^m ... - a_2x^2 - a_1x - a_0$ *a une unique racine positive.C'est un résultat bien connu de théorie des polynômes.*
Ensuite, nous considérons l'équation matricielle non linéaire

$$B_0 + T_1^tBT_1 + T_2^tB^2T_2 + ... + T_{m-1}^tB^{m-1}T_{m-1} = B^m \tag{3.8}$$

où $T_1, T_2, ..., T_{m-1}$ *sont* $n \times n$ *matrices réelles non singulières,* T_i^t *est transposée de* T_i*.Soit* E *l'espace de Banach réel de* $n \times n$ *matrices symétriques réelles* B *de norme* $\| B \| = \sup\{\| Bx \| : x \in \mathbb{R}^n, \| x \| = 1\}$ *et* P *désigne le cône des matrices semi-définies positives dans* E*. Ainsi* $\mathring{P}$ *est l'ensemble des matrices définies positives dans* E*. Nous commençons par une revue de quelques faits utiles élémentaires, Si* $0 \leq B_1 \leq B_2$ *et* $l \in (0,1)$*, alors* $\leq \| B_1 \| \leq \| B_2 \|$ *et* $B_1^l \leq B_2^l$*. De plus, pour* $n \times n$ *matrice réelle* $T, B \in P$ *implique* $T^tBT \in P$*, et* $B \in \mathring{P}$ *implique* $T^tBT \in \mathring{P}$ *si* T *est non singulier.*

Théorème 3.6 *Soit* $B_0 \in P$ *alors la matrice (3.7) admet une unique solution en* $\mathring{P}$
Preuve : *Définir un opérateur* $A : P \to E$ *par*

$$A(C) = T_1^tC^{\frac{1}{m}}T_1 + T_2^tC^{\frac{2}{m}}T_2 + ... + T_{m-1}^tC^{\frac{m-1}{m}}T_{m-1}.$$

Par le théorème de Loewner, il est facile de voir que $A : P \to P$ *est croissante. Aussi, pour* $\lambda > 0$ *et* $C \in P$*, on a*

$$\begin{aligned} A(\lambda.C) &= \lambda^{\frac{1}{m}}T_1^tC^{\frac{1}{m}}T_1 + \lambda^{\frac{2}{m}}T_2^tC^{\frac{2}{m}}T_2 + ... + \lambda^{\frac{m-1}{m}}T_{m-1}^tC^{\frac{m-1}{m}}T_{m-1} \\ &\geq \lambda^{\frac{m-1}{m}}\left(T_1^tC^{\frac{1}{m}}T_1 + T_2^tC^{\frac{2}{m}}T_2 + ... + T_{m-1}^tC^{\frac{m-1}{m}}T_{m-1}\right) = \lambda^{\frac{m-1}{m}}A(C). \end{aligned}$$

Soit $h := I$*, la matrice identité* $n \times n$*. Notons que chaque* T_i *est non singulier, on a* $A(I) \in \mathring{P} = P_I$ *ainsi* $Ah + B_0 = A(I) + B_0 \in \mathring{P} = P_I$*. Il résulte du théorème(2.5) que* $B_0 + A(C) = C$ *admet une unique solution* C^* *en* $\mathring{P}$ *. Soit* $B = C^{*\frac{1}{m}}$*, alors c'est l'unique solution de (3.5) en* $\mathring{P}$*. La preuve est complète.*

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons étudié l'existence et l'unicité de solutions pour une classe d'équations d'opérateurs non linéaires de la forme $x = Ax + x_0$ *dans un espace de Banach partiellement ordonné . En particulier, nous n'exigeons pas l'existence de sous et sur- solutions ainsi que les conditions de compacité où de continuité parce que ces derniers posent quelques difficultés dans les démonstrations des résultats d'existence, tandis que les conditions imposées à l'opérateur* A *(monotonie, concavité,* $h-$*concave généralisé.....) sont plus faibles que ces conditions. Les résultats obtenus sont très intéressants et efficaces, essentiellement, dans la résolution de beaucoup des problèmes à valeur initiale du premier ordre, problèmes aux limites à deux points non linéaire de second ordre et ainsi de suite.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Agarwal, R. P., O'Regan, D., Wong, P. J. (1998). Positive solutions of differential, difference and integral equations. Springer Science Business Media.

[2] Amann, H. (1976). Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. SIAM review, 18(4), 620-709.

[3] Bai, Z., Ge, W., Wang, Y. (2004). The method of lower and upper solutions for some fourth-order equations. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 5(1).

[4] Benchohra, M., Ntouyas, S. K. (2002). The lower and upper solutions method for first order differential inclusions with nonlinear boundary conditions. J. Inequal. Pure Appl. Math, 3(1).

[5] Bushell, P. J. (1976, March). On a class of Volterra and Fredholm non-linear integral equations. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 79, No. 2, pp. 329-335). Cambridge University Press.

[6] Chen, Y. Z. (2001). Continuation method for -sublinear mappings. Proceedings of the American Mathematical Society, 129(1), 203-210.

[7] Cherpion, M., De Coster, C., Habets, P. (2001). A constructive monotone iterative method for second-order BVP in the presence of lower and upper solutions. Applied Mathematics and Computation, 123(1), 75-91.

[8] Deimling, K. (2010). Nonlinear functional analysis. Courier Corporation.

[9] Darzi, R., Mohammadzadeh, B., Neamaty, A., Băleanu, D. (2013, January). Lower and upper solutions method for positive solutions of fractional boundary value problems. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2013). Hindawi.

[10] Du, S. W., Lakshmikantham, V. (1982). Monotone iterative technique for differential equations in a Banach space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 87(2), 454-459.

[11] Guo, D. (1992). Existence and uniqueness of positive fixed points for mixed monotone operators and applications. Applicable Analysis, 46(1-2), 91-100.

[12] Krasnosel'skii, M. A. (1964). Positive solutions of operator equations (Noordhoff, Groningen)(translation).

[13] Lakshmikantham, V. (1988). Nonlinear problems in abstract cones. Academic Press.

[14] Liang, Z. D., Wang, W. X., Li, S. J. (2006). On concave operators. Acta Mathematica Sinica, 22(2), 577-582.

[15] Paulin, F. (2009). Topologie, analyse et calcul différentiel. Notes de cours, École Normale Supérieure.

[16] Potter, A. J. B. (1977). Applications of Hilbert's projective metric to certain classes of non-homogeneous operators. The Quarterly Journal of Mathematics, 28(1), 93-99.

[17] Sinacer, M. L., Nieto, J. J., Ouahab, A. (2016). Random fixed point theorem in generalized Banach space and applications. Random Operators and Stochastic Equations, 24(2), 93-112.

[18] Wang, W. X., Liang, Z. D. (2005). Fixed point theorems of a class of nonlinear operators and applications. Acta mathematic sinica-chinese edition-, 48(4), 789.

[19] Zhai, C. B., Yang, C., Zhang, X. Q. (2010). Positive solutions for nonlinear operator equations and several classes of applications. Mathematische Zeitschrift, 266(1), 43-63.

[20] Zhai, C. B., Wang, W. X., Zhang, L. L. (2008). Generalizations for a class of concave and convex operators. Acta mathematic sinica-chinese edition-, 51(3), 529.

[21] Zhai, C. B., Yang, C., Guo, C. M. (2008). Positive solutions of operator equations on ordered Banach spaces and applications. Computers Mathematics with Applications, 56(12), 3150-3156.

Résumé

Dans ce mémoire, On établis l'existence et l'unicité de solutions pour l' équation $x = Ax + x_0$. où A est un opérateur concave généralisé monotone défini sur un espace de Banach ordonné ; en utilisant les propriétés d'un cône et la méthode de la technique itérative monotone. En particulier, on ne demande pas l' existence de sous et sur solutions ainsi que les conditions de compacité et de continuité. Comme applications, nous avons étudié un problème à valeur initiale de premier ordre et un problème aux limites à deux points avec le terme non linéaire doit être monotone dans son second variable.

Mots clés : Solution positive, équation opérateur non linéaire, cône normal . problème à valeur initiale, problème aux limites à deux points

ملخص

في هذه المذكرة، درسنا صنف من معادلات المؤثرات في فضاء بناخ مرتب من الشكل $x = Ax + x_0$ ، حيث A هو مؤثر مقعر عموما ورتيب. نستخدم خصائص المخاريط والتقنية التكرارية الرتيبة،أثبتنا وجود ووحدانية الحلول لهذه المعادلات ، بحيث لا نشترط وجود حلول علوية- سفلية ولا التراص و لا حتى الاستمرارية، أما بالنسبة للتطبيقات فقد درسنا مسائل القيمة الإبتدائية من الدرجة الأولى و مسائل القيم الحدية في نقطتين

كلمات مفتاحية: الحلول الموجبة. معادلةالمؤثرات غيرالخطية. مخروط عادي مسألةالقيمةالإبتدائية. مسألةالقيم الحدية. الأنظمةالجبريةغيرالخطية.

Abstract

In this memory, we establish the existence and uniqueness of solutions for the equation $x = Ax + x_0$. where A is a monotone generalized concave operator defined on an ordered Banach space ; using the properties of a cone and the method of the monotone iterative technique. In particular, we do not require the existence of upper and lower solutions as well as the conditions of compactness and continuity. As applications, we studied a first-order initial-value problem and a two-point boundary value problem with the nonlinear term must be monotonic in its second variable.

Key-words : Positive solution, nonlinear operator equation, normal cone. initial value problem, two-point boundary value problem