

N° d'ordre :

N° de série :



**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire de fin d'étude**

**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

**Thème**

**Images numériques des opérateurs :  
Propriétés et Applications**

Présenté par : Halima BRAHIMI

Naouel SOBTI

Soutenu devant le jury composé de

Massaoude GUESSBA

Bakar Larbi HARAIZ

Dr. Abdelouahab MANSOUR

MAA

MAA

MCA

Président

Examineur

Rapporteur

Univ. d'El Oued

Univ. d'El Oued

Univ. d'El Oued

Année universitaire 2015 – 2016

# Dédicace

A ma mère, symbole de la bonté par excellence, la source de  
tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de  
m'encourager  
et de prier pour moi.

Et en souvenir de mon père, avec amour et gratitude.

A mon mari "Abdelkrim" et son famille  
surtout sa mère et son père.

A tous mes frères et sœurs: "Moussa, Saïd, Zahira, Hasnia et ses  
enfants

Rabab, Al-Hachemi et Maya".

A tout la famille BRAHIMI et MOSTEFAOUI.

A l'enseignant monsieur " Dr MANSOUR Abdelouahab".

A mon chéri " Naouel".

A tous mes amis surtout: "Moufida, Aouatif, Raihana,  
Halima, Rima, Zohra, Ilham et Souhir".

A tous mes collègues de la promotion MATHEMATIQUE 2015/2016.

A tous ceux qui m'aiment.

Je dédie ce modeste travail.

Avec tout mon amour et tendresse.

# Dédicace

Je dédie ce travail à :

A mes très chers parents et bien aimée mère et père symbole d'amour  
et patience.

pour ses sacrifices inestimables.

A mes grand-mère et grand-père.

A mes frères " Moussa et Hacem" de ma vie pour leur soutien morale  
et leur encouragement.

A mes grandes familles SOBTI et DAHEM qui ont été toujours  
derrière moi.

A mon chéri " Halima "

A l'enseignant monsieur "Dr MANSOUR Abdelouahab ".

Tous mes amis surtout: "Manel, Hafsia, Nour, Reguia, Amina, Kinza  
et Ikram"

A tous mes collègues de la promotion MATHEMATIQUE 2015/2016.

A tous ceux qui m'aiment

Je dédie ce modeste travail

Avec tout mon amour et tendresse

# *Remerciements*

*Nous remercions Allah le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience pour l'accomplissement de ce travail.*

*Nous remercions les chers parents qui nous ont donné la volonté pour la réussite dans notre vie.*

*Nous exprimons toutes nos gratitude à "Dr MANSOUR Abdelouahab", pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi.*

*Cela a été un plaisir et un honneur de travailler avec quelqu'un d'aussi compétent et d'aussi cultivé.*

*ainsi qu'à les professeurs "GHENDIR Said, CHEMSA Ali".*

*Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, pour leurs aides inestimables, qui nous ont donné les bases de la science.*

*Nous remercions très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examineur.*

*Nous tenons à remercier aussi l'ensemble du personnel de Faculté des sciences exactes et surtout département de Mathématiques et Informatique.*

*A toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce modeste travail particulièrement: "Zahira, Amel".*

# Table des matières

Notations générales

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaire</b>	<b>3</b>
1.1 Généralités sur les opérateurs . . . . .	3
1.1.1 Notations et définitions . . . . .	3
1.1.2 L'adjoint d'un opérateur . . . . .	4
1.1.3 Quelques classes d'opérateurs . . . . .	5
1.2 Spectre et résolvante d'un opérateur . . . . .	7
1.2.1 Inversibilité d'un opérateur . . . . .	7
1.2.2 Résolvante d'un opérateur . . . . .	7
1.2.3 Spectre d'un opérateur . . . . .	8
1.3 Propriétés et techniques opératoriennes . . . . .	12
1.3.1 Les commutateurs . . . . .	12
1.3.2 Similarité . . . . .	12
<b>2 L'image numérique d'un opérateur</b>	<b>14</b>
2.1 Propriétés et définitions . . . . .	14
2.2 L'image numérique des opérateurs dans un espace de dimension deux . . . . .	17
2.3 Rayon numérique . . . . .	19
2.4 Relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur . . . . .	22

2.4.1	Inclusion spectral . . . . .	22
2.4.2	Opérateur auto-adjoints et normaux . . . . .	24
2.5	Image numérique et similarité . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Quelques résultats sur image et rayon numérique d'un opérateur</b>	<b>28</b>
3.1	L'image numérique d'une matrice $(3 \times 3)$ . . . . .	28
3.2	L'image numérique de la somme de deux opérateurs dans un espace de dimension fini . . . . .	33
3.3	Quelques inégalités sur la norme et le rayon numérique . . . . .	39
3.3.1	Inégalité entre la norme d'opérateur et le maximum de la partie réelle de spectre . . . . .	39
3.3.2	Inégalité entre le rayon numérique et le maximum de la partie réelle de spectre . . . . .	44
3.4	Rayon numérique du produit de deux opérateurs . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Interactions entre la mécanique quantique et la théorie des opérateurs (Modèle : Image numérique)</b>	<b>51</b>
4.1	Rappel sur la physique quantique . . . . .	51
4.1.1	Les postulats de la mécanique quantique . . . . .	52
4.2	Étude le mouvement d'une particule dans une boite à seule dimension . . . . .	54
	<b>Bibliographie</b>	<b>58</b>

# Notations générales

## Notations mathématique

$T$	Opérateur
$\operatorname{Re}(T)$	Partie réel de $T$
$\operatorname{Im}(T)$	Partie imaginaire de $T$
$\mathbb{R}$	Ensemble de nombre réel
$\mathbb{R}_+$	Ensemble de nombre réel positif
$W(T)$	Image numérique de $T$
$\omega(T)$	Rayon numérique de $T$
$\partial W(T)$	Frontière d'image numérique
$\overline{W(T)}$	Adhérence d'image numérique
$\sigma(\mathbb{T})$	Spectre de $T$
$\sigma_p(\mathbb{T})$	Spectre ponctuel de $T$
$\sigma_{app}(\mathbb{T})$	Spectre approché de $T$
$\ T\ $	La norme de $T$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Le produit scalaire
$\partial\sigma(\mathbb{T})$	La frontière du spectre de $T$
$r(T)$	Rayon spectral de $T$
$\rho(T)$	Résolvante de $T$
$\vartheta_s(T)$	Le maximum de partie réel du spectre de $T$
$R_\lambda$	Application résolvante
$\mathbb{C}$	Ensemble de nombre complexe
$R(T)$	L'image de $T$
$N(T)$	Le noyau de $T$

**Notations physique**

$ \Psi(t)\rangle$	Vecteur
$\xi$	L'espace des états
$H$	Hamiltonien
$\vec{r}$	Vecteur position
$\vec{p}$	Vecteur quantité de mouvement
$\langle \cdot   \cdot \rangle$	Le produit scalaire
$A$	Grandeur physique
$\Psi(x)$	Position
$V(x)$	Potentiel
$h$	Constante de Planck
$E$	Énergie
$m$	Masse

# Introduction générale

Le domaine de l'analyse fonctionnelle présente une partie très intéressante des mathématiques pures, mais aussi des mathématiques appliquées telles que la théorie des approximations et la résolution des équations opératorielles, les spectres des opérateurs et leurs images numériques qui sont des techniques indispensables pour les chercheurs dans plusieurs domaines des sciences et techniques.

Dans ce travail, on va donner les notions l'image numérique d'un opérateur borné et quelques propriétés. L'image numérique  $W(T)$  d'un opérateur borné  $T$  sur un espace de Hilbert complexe  $H$  est définie par

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$$

et est un outils très important et efficace pour étudier les propriétés des opérateurs. Elle a aidé au développement de la théorie des opérateurs. En 1918, Toéplitz a prouvé que la frontière  $\partial W(T)$  est une courbe convexe puis Hausdorff a donné en 1919 son théorème, devenue classique sur la convexité de  $W(T)$ . Dans la physique quantique, il existe une correspondance forte entre les notions de la valeur moyenne d'un observable et l'image numérique d'un opérateur.

Dans le premier chapitre de ce mémoire on fournit quelques éléments de base sur les opérateurs. De plus nous donnons les définitions et quelques propriétés d'un spectre, résolvente d'un opérateur et quelques techniques opératorielles dont on aura besoin pour la suite.

Le second chapitre est consacré à étudier l'image numérique et rayon numérique d'un opérateur avec leurs propriétés et des exemples, en particulier l'images numériques des

opérateurs dans un espace de dimension deux, et la relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur.

Dans le troisième chapitre on propose quatre parties: D'abord, nous exposons les classifications des images numériques d'une matrice  $(3 \times 3)$  avec quelques exemples et leurs figures. Ensuite, nous démontrons l'égalité  $W(T + S) = W(T) + W(S)$  avec  $T$  et  $S$  deux matrices carrées de dimensions finies. Aussi, nous exposons deux théorèmes qui lient entre le maximum de la partie réelle du spectre, la norme et le rayon numérique d'un opérateur, de plus on a pu extraire quelques corollaires de ce théorème. On termine ce chapitre par quelques théorèmes sur le rayon numérique du produit de deux opérateurs avec un exemple.

Dans le dernier chapitre nous donnons un rappel sur la physique quantique avec quelques définitions utiles pour faire la correspondance entre la mécanique quantique et la théorie des opérateurs, précisément on applique les notions de l'image numérique pour étudier le mouvement des particules dans une boîte.

# Chapitre 1

## Préliminaire

Nous exposons dans ce chapitre quelques notions de la théorie d'opérateur dans un espace de Hilbert, plus particulièrement le spectre et la résolvante d'un opérateur et les propriétés et techniques opératoriennes comme les commutateurs et la similarité.

Nous commençons par les définitions et les propriétés de base sur les opérateurs.

### 1.1 Généralités sur les opérateurs

#### 1.1.1 Notations et définitions

Dans le contenu de ce mémoire, on désigne par  $H$  un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie muni d'un produit scalaire dénoté par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ou parfois  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

Un opérateur  $T$  sur un espace de Hilbert  $H$  est une application linéaire de  $H$  dans lui-même ou dans un autre espace  $K$ .

\*  $B(H, K)$  désigne l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur  $H$  à image dans  $K$ .

**Définition 1.1.1** *Soit un opérateur  $T : H \rightarrow K$*

1) *Le noyau de  $T$  est un sous-espace vectoriel de  $H$ . On le notera par  $N(T)$ , et est défini par*

$$N(T) = \{x \in H, Tx = 0\}$$

2) *L'image de  $T$  est un sous-espace vectoriel de  $K$ . On le notera par  $R(T)$ , et est défini par*

$$R(T) = \{Tx, x \in H\}$$

**Définition 1.1.2** Soit  $T$  un opérateur linéaire borné, La trace de  $T$  est la somme des éléments diagonaux de la matrice de l'opérateur  $T$  dans une base quelconque, on la note  $\text{tr}T$ .

**Définition 1.1.3** Soit  $T$  un opérateur linéaire borné dans  $B(H)$ , on définit la norme d'opérateur par

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_H}{\|x\|_H} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_H, \quad x \in H$$

**Définition 1.1.4** On appelle  $F$  fonction de Lagrange toute fonction écrite sous la forme

$$F(X, \lambda) = \varphi(X) + \lambda\psi(X)$$

Tel que est  $\varphi(X)$  la fonction à optimiser,  $\lambda$  le multiplicateur de Lagrange et  $\psi(X)$  la contrainte du programme d'optimisation.

## 1.1.2 L'adjoint d'un opérateur

**Définition 1.1.5** [2] Pour tout opérateur  $T \in B(H)$ ,  $T^*$  désigne l'opérateur adjoint de l'opérateur  $T$ , est défini par

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \quad \text{pour tout } x, y \in H$$

**Théorème 1.1.1** Si  $T$  et  $S$  sont deux opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Hilbert  $H$ , alors leurs adjoints  $T^*$  et  $S^*$  sont aussi deux opérateurs linéaires bornés sur  $H$  et les propriétés suivantes sont vérifiées:

- 1)  $\|T^*\| = \|T\|$
- 2)  $(S + T)^* = S^* + T^*$
- 3)  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$
- 4)  $(T^*)^* = T$
- 5)  $(ST)^* = T^*S^*$
- 6)  $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ , si  $T$  est inversible

On démontre seulement les propriétés 5) et 6)

**Preuve.** Soit  $T$  et  $S$  deux opérateurs linéaires bornés et  $T^*$  et  $S^*$  leurs adjoints respectivement

$$5) \forall x, y \in H, \langle STx, y \rangle = \langle Tx, S^*y \rangle = \langle x, T^*S^*y \rangle$$

$$\text{Donc } (ST)^* = T^*S^*$$

6) Soit  $T$  inverssible, son inverse  $T^{-1}$

$$\text{On a } TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

$$\text{On passe à l'adjoint } (TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^* = I$$

$$\text{D'après 5) } T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^*T^* = I$$

$$\text{Alors } (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}. \blacksquare$$

### 1.1.3 Quelques classes d'opérateurs

**Définition 1.1.6** Soit  $T$  un opérateur dans  $B(H)$  et  $T^*$  son adjoint, on dit que  $T$  est un opérateur auto-adjoint si  $T = T^*$

**Exemple 1.1.1** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $P \in B(H)$  un projecteur orthogonal. Notons par  $F$  son image. i.e,  $PH = F$ . Alors  $P$  est auto-adjoint.

En effet, pour tous  $x, x' \in F$  et  $y, y' \in F^\perp$

$$\langle P(x+y), x'+y' \rangle = \langle x, x' \rangle = \langle x+y, P(x'+y') \rangle$$

**Définition 1.1.7** Soit  $T$  un opérateur dans  $B(H)$  et  $T^*$  son adjoint, on dit que  $T$  est un opérateur normal si  $TT^* = T^*T$

**Exemple 1.1.2** Soit  $H = L^2(\Omega, \mu)$  et  $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ . Soit  $M_f$  l'opérateur de multiplication défini par  $f$ .

$$M_f(g) = fg$$

On vérifie que  $M_f$  est linéaire, continu, de norme  $\|f\|_\infty$  et  $M_f^* = M_{\bar{f}}$ .

L'opérateur de multiplication  $M_f$  est normal.

En effet,

$$M_f M_f^* = M_f M_{\bar{f}} = M_{|f|^2} = M_f^* M_f$$

**Définition 1.1.8** Un opérateur  $T \in B(H)$  est dit:

- **Compact**, si  $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$ , pour toute suite orthonormée  $(x_n)$  de  $H$ .

- **De rang fini  $n$** , si  $R(T)$  est de dimension finie  $n$ .
- **Positif**, si  $(Tx, x) \geq 0$  pour tout  $x \in H$ ; on note  $T \geq 0$ .
- **Isométrie**, si  $T^*T = I_H$ .
- **Unitaire**, si  $T^*T = TT^* = I$ .
- **Dominant**, si  $R(T - \lambda) \subseteq R(T - \lambda)^*$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ .
- **Sous-normal**, s'il admet une extension normale.
- **Quasinormal**, s'il commute avec  $T^*T$ .
- **Hyponormal**, si  $T^*T - TT^* \geq 0$ .
- **Semi-normal**, si  $T$  ou  $T^*$  est hyponormal.
- **$k$ -quasihyponormal**, si  $T^{*k}(T^*T - TT^*)T^k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 1.1.2** [22] Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe, si  $T$  est un opérateur sur  $H$ , alors  $T$  est normal si et seulement si  $\|Tx\| = \|T^*x\|$ , pour tout  $x \in H$ .

**Preuve.** Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe, et  $T$  est un opérateur sur  $H$   
On suppose que  $T$  est normal

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle$$

Comme  $T$  est normal, i.e:  $T^*T = TT^*$ . Alors

$$\langle x, T^*Tx \rangle = \langle x, TT^*x \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle = \|T^*x\|^2$$

D'où l'égalité.

Inversement, on suppose que  $\|Tx\| = \|T^*x\|$ , d'où  $\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2$

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \\ \|T^*x\|^2 &= \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle x, TT^*x \rangle \end{aligned}$$

Où

$$\langle x, T^*Tx \rangle = \langle x, TT^*x \rangle$$

Alors

$$T^*T = TT^*$$

Donc,  $T$  est normal. ■

---

## 1.2 Spectre et résolvante d'un opérateur

### 1.2.1 Inversibilité d'un opérateur

**Définition 1.2.1** On rappelle qu'un opérateur  $T \in B(H)$  est dit inversible s'il admet une inverse dans  $B(H)$ , i.e : il existe  $S \in B(H)$  tel que  $ST = TS = I$ , où  $I$  désigne l'opérateur identité de  $B(H)$ . On note  $S = T^{-1}$

**Remarque 1.2.1** Si  $T$  un opérateur unitaire, alors  $T^{-1} = T^*$ .

### 1.2.2 Résolvante d'un opérateur

**Définition 1.2.2** Soit  $T \in B(H)$ , alors

a) on appelle ensemble résolvante de  $T$  l'ensemble

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ est inversible}\}$$

b) Si  $\lambda \in \rho(T)$ , on définit l'application résolvante  $R_\lambda$  par

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$$

**Lemme 1.2.1** [22] (Identité de la résolvante) Pour  $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$  on a

$$R_{\lambda_1}(T) - R_{\lambda_2}(T) = (\lambda_1 - \lambda_2)R_{\lambda_1}(T)R_{\lambda_2}(T).$$

**Preuve.** En utilisant le fait que  $(T - \lambda_1 I)$  et  $(T - \lambda_2 I)$  commutent, on a

$$\begin{aligned} (R_{\lambda_1}(T) - R_{\lambda_2}(T))(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) &= R_{\lambda_1}(T)(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) - R_{\lambda_2}(T)(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \\ &= (T - \lambda_2 I) - (T - \lambda_1 I) = (\lambda_1 - \lambda_2)I \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R_{\lambda_1}(T) - R_{\lambda_2}(T) &= (\lambda_1 - \lambda_2)(T - \lambda_1 I)^{-1}(T - \lambda_2 I)^{-1} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)R_{\lambda_1}(T)R_{\lambda_2}(T). \end{aligned}$$

C'est qu'il fallait démontrer. ■

### 1.2.3 Spectre d'un opérateur

**Définition 1.2.3** Soit  $T \in B(H)$ ,

a) Le spectre de  $T$  noté par  $\sigma(T)$  est donné par

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\} = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

b) On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$  s'il existe  $x \in H$ , ( $x \neq 0$ )  $Tx = \lambda x$ . L'ensemble des valeurs propres de  $T$  est appelé le spectre ponctuel de  $T$ , noté par  $\sigma_p(T)$ .

c) On dit que  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre approchée de  $T$  s'il existe une suite de vecteur de  $(x_n)$  dans  $H$  telles que  $\|x_n\| = 1$  et  $(Tx_n - \lambda x_n)$  converge vers 0. L'ensemble de ces valeurs est appelé le spectre approché de  $T$ , noté  $\sigma_{app}(T)$ .

**Remarque 1.2.2** En dimension finie le spectre se réduit à l'ensemble des valeurs propres c-à-d:  $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ .

**Exemple 1.2.1** Soit  $T = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on cherche  $\sigma(I)$

$$\begin{aligned} \sigma(I) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : I - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (1 - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}. \end{aligned}$$

Si  $\lambda \in \sigma(I)$  alors

$$\begin{aligned} \det(I - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^3 = 0 \\ (1 - \lambda)^3 &= 0 \iff (1 - \lambda) = 0 \iff \lambda = 1. \end{aligned}$$

Et donc  $\sigma(I) = \{1\}$ .

**Théorème 1.2.1** [22] Soit  $T \in B(H)$  et  $T^*$  son adjoint, alors

- 1)  $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$
- 2) si  $T$  inversible,  $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\}$
- 3)  $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$  pour  $P \in \mathbb{C}[X]$

**Preuve.** 1) si  $\lambda \in \sigma(T)$  alors  $(T - \lambda I)$  non inversible.

Soit  $x, y \in H$  alors

$$\begin{aligned} \langle (T - \lambda I)x, y \rangle &= \langle Tx, y \rangle - \langle \lambda x, y \rangle \\ &= \langle x, T^*y \rangle - \langle x, \bar{\lambda}y \rangle \\ &= \langle x, (T^* - \bar{\lambda}I)y \rangle \\ &= \langle (T^* - \bar{\lambda}I)^*x, y \rangle \end{aligned}$$

alors  $(T^* - \bar{\lambda}I)^*$  non inversible donc  $(T^* - \bar{\lambda}I)$  non inversible alors  $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$

2)  $T$  inversible  $\iff (T - 0I)$  est inversible  $\iff 0 \notin \sigma(T)$

Soit

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \in \rho(T^{-1}) &\iff (T^{-1} - \lambda^{-1}I) \text{ est inversible} \\ &\iff (\lambda I - T)\lambda^{-1}T^{-1} \text{ est inversible} \\ &\iff (\lambda I - T) \text{ est inversible} \\ &\iff \lambda \in \rho(T) \end{aligned}$$

alors

$$\lambda^{-1} \notin \sigma(T^{-1}) \iff \lambda \notin \sigma(T)$$

d'où

$$\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1}) \iff \lambda \in \sigma(T)$$

Donc  $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(T)\}$ .

3)

a) On montre que  $P(\sigma(T)) \subset \sigma(P(T))$ .

Soit  $\lambda_0 \in \sigma(T)$  alors il existe  $G(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$  telque:

$$P(\lambda) - P(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)G(\lambda)$$

et

$$P(T) - P(\lambda_0 I) = (T - \lambda_0 I)G(T)$$

comme  $(T - \lambda_0 I)$  est non inversible, alors  $P(T) - P(\lambda_0 I)$  est inversible.

D'où  $P(\lambda_0) \in \sigma(P(T))$ , donc  $P(\sigma(T)) \subset \sigma(P(T))$ .

b) On montre que  $\sigma(P(T)) \subset P(\sigma(T))$

Soit  $\lambda_0 \in \sigma(P(T))$  alors  $P(T) - \lambda_0 I$  est non inversible

$$P(T) - \lambda_0 = \alpha(T - \lambda_1)(T - \lambda_2)\dots(T - \lambda_n) \implies \exists k \in \mathbb{N} : T - \lambda_k \text{ est non inversible}$$

$T - \lambda_k$  est non inversible *i.e.*:  $\lambda_k \in \sigma(T)$  donc  $\lambda_0 = P(\lambda_k) \implies \lambda_0 \in P(\sigma(T))$ , alors  $\sigma(P(T)) \subset P(\sigma(T))$

Alors d'après a) et b)

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)).$$

D'où le résultat. ■

**Proposition 1.2.1**  $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{app}(T)$ , où  $\partial\sigma(T)$  dénote la frontière de  $\sigma(T)$ .

**Proposition 1.2.2** Soit  $T \in B(H)$  un opérateur auto-adjoint. Alors le spectre de  $T$  est inclus dans l'ensemble de nombre réels  $\mathbb{R}$ .

**Preuve.** Soit  $T$  un opérateur auto-adjoint, remarquons d'abord qu'il est facile de vérifier que  $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ .

Soit maintenant  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  et notons  $\alpha = |\operatorname{Re} \lambda| > 0$ , Vérifions d'abord que  $(T - \lambda Id)$  est à image dense. En effet, si  $y \perp \operatorname{Im}(T - \lambda Id)$ , alors pour tout  $x \in H$ ,  $0 = \langle (T - \lambda Id)x, y \rangle =$

$\langle x, (T - \bar{\lambda}Id) y \rangle$ , ce qui implique  $Ty = \bar{\lambda}y$ . Mais comme  $\bar{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , ce n'est pas une valeur propre de  $T$  et donc  $y = 0$ . Comme  $\langle Tx, x \rangle$  est réel pour tout  $x$ , on a l'inégalité

$$\alpha \|x\|^2 \leq |\langle (T - \lambda Id) x, x \rangle| \leq \|(T - \lambda Id) x\| \|x\|,$$

d'où l'on déduit que  $\|(T - \lambda Id) x\| \geq \alpha \|x\|$  pour tout  $x$  dans  $H$ . Ceci implique d'une part que  $(T - \lambda Id)$  est injectif, et d'autre part que son image est fermée. En effet, si  $((T - \lambda Id) x_n)$  converge vers  $y$ , cette inégalité implique que la suite  $(x_n)$  est de Cauchy, donc converge. Si on note  $x$  sa limite, la continuité de  $(T - \lambda Id)$  implique  $y = (T - \lambda Id) x$ . Ainsi l'image de  $(T - \lambda Id)$  est fermée et dense, donc  $(T - \lambda Id)$  est surjectif. Nous savons déjà qu'il est injectif, le théorème de l'opérateur inverse implique alors que  $(T - \lambda Id)$  est inversible. C.Q.F.D. ■

**Proposition 1.2.3** *Soit  $T \in B(H)$  un opérateur auto-adjoint. Alors  $T$  est positif si et seulement si son spectre est contenu dans  $\mathbb{R}_+$ .*

**Preuve.** Supposons que  $T$  est positif. Il est clair que  $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}_+$ . Comme  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$  si  $\lambda < 0$  on a  $\langle (T - \lambda Id) x, x \rangle \geq |\lambda| \|x\|^2$ . On montre alors que  $T - \lambda Id$  est inversible de la même manière que dans la preuve de la proposition précédent. Réciproquement, supposons que  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+$ . Comme la fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est continue sur  $\sigma(T)$  le calcul fonctionnel permet de définir  $S = \sqrt{T}$ , c'est-à-dire un opérateur auto-adjoint tel que  $\sigma(S) \subset \mathbb{R}_+$  et  $S^2 = T$ . Mais alors  $\langle Tx, x \rangle = \langle S^2 x, x \rangle = \langle Sx, Sx \rangle = \|Sx\|^2 \geq 0$ , et donc  $T$  est positif. ■

**Définition 1.2.4** (*Rayon spectral*) *Le rayon spectral de  $T$  est défini par*

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

**Théorème 1.2.2** *Soit  $T \in B(H)$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$  existe et est égale à  $r(T)$ .*

**Remarque 1.2.3** *Soit  $T \in B(H)$  et  $T^*$  opérateur adjoint de  $T$ , alors*

- 1)  $r(T^*) = r(T)$
- 2)  $r(T^n) = r(T)^n$

## 1.3 Propriétés et techniques opératoriels

### 1.3.1 Les commutateurs

**Définition 1.3.1** 1) Un élément  $X$  de  $B(H)$  est appelé commutateur s'il existe  $A$  et  $B$  de  $B(H)$ , tels que  $X = AB - BA = [A, B]$

2) Le commutant de  $A \in B(H)$  est l'ensemble défini par

$$\{A\}' = \{B \in B(H), AB = BA\}$$

3) Le bicommutant de  $A \in B(H)$  est l'ensemble défini par

$$\{A\}'' = \left\{ C \in B(H), CB = BC, \forall B \in \{A\}' \right\}$$

#### Propriétés

- 1)  $\{A\}'' = \{\{A\}'\}'$ .
- 2)  $\{A\}'$  est une sous-algèbre de  $B(H)$ .
- 3)  $\{A\}''$  est une sous-algèbre commutative de  $B(H)$ .
- 4) Tout polynôme de  $A$  appartient à  $\{A\}''$ .

### 1.3.2 Similarité

**Définition 1.3.2** Soient  $S$  et  $T$  deux opérateurs dans  $B(H)$ , on dit que  $S$  et  $T$  sont similaires si et seulement s'il existe un opérateur inversible  $U$  tel que  $T = USU^{-1}$ .

**Définition 1.3.3** Soient  $T, S \in B(H)$ , on dit que  $T, S$  deux opérateurs unitairement similaire s'il existe  $U \in B(H)$  unitaire tel que  $T = U^*SU$ .

**Lemme 1.3.1** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs dans  $B(H)$ ,  $R_\lambda(S)$  et  $R_\lambda(T)$  leurs applications résolvantes respectivement, alors  $R_\lambda(S)$  et  $R_\lambda(T)$  sont similaires si et seulement si  $S$  et  $T$  les sont.

**Preuve.** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs similaires dans  $B(H)$ , alors il existe un opérateur inversible  $U$  tel que  $A = UBU^{-1}$

On a

$$R_\lambda(B) = R_\lambda(QAQ^{-1})$$

$$\begin{aligned} &= (QAQ^{-1} - \lambda I)^{-1} = [(QA - \lambda Q)Q^{-1}]^{-1} \\ &= Q(QA - \lambda Q)^{-1} = Q[Q(A - \lambda I)]^{-1} \\ &= Q(A - \lambda I)^{-1}Q^{-1} = QR_\lambda(A)Q^{-1} \end{aligned}$$

d'où la similarité de  $R_\lambda(A)$  et  $R_\lambda(B)$ .

Pour le sens inverse de la démonstration, on utilise l'inversibilité de l'application  $R_\lambda$ . ■

# Chapitre 2

## L'image numérique d'un opérateur

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et propriétés de base de l'image numérique d'un opérateur dans  $B(H)$ . Plus précisément, on va voir propriétés et inégalités sur le rayon numérique d'un opérateur. Nous allons également proposer plusieurs exemples des images numériques des opérateurs.

Nous commençons par la définition de l'image numérique.

### 2.1 Propriétés et définitions

**Définition 2.1.1** [8] Soit  $T$  un opérateur dans  $B(H)$ , l'image numérique de  $T$  est l'ensemble  $W(T)$  des nombres complexes définie par

$$W(T) = \{ \langle Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \}.$$

**Proposition 2.1.1** [8] Pour tous opérateurs  $T$  et  $S$  dans  $B(H)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . On a les propriétés suivantes:

- 1)  $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$
- 2)  $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$
- 3)  $W(T^*) = \{ \bar{\lambda}, \lambda \in W(T) \}$ , où  $T^*$  est l'adjoint de  $T$ .
- 4)  $W(U^*TU) = W(T)$ , où  $U$  est un opérateur unitaire.

On démontre seulement les propriétés 1), 3) et 4)

**Preuve.** 1) Soit  $T \in B(H)$  pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
 W(\alpha I + \beta T) &= \{ \langle (\alpha I + \beta T)x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} \\
 &= \{ \langle \alpha Ix + \beta Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} \\
 &= \{ \langle \alpha Ix, x \rangle + \langle \beta Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} \\
 &= \{ \langle \alpha Ix, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} + \{ \langle \beta Tx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} \\
 &= \alpha W(I) + \beta W(T)
 \end{aligned}$$

3) Soit  $T \in B(H)$

$$\begin{aligned}
 W(T^*) &= \{ \langle T^*x, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} \\
 &= \{ \langle x, Tx \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} \\
 &= \{ \overline{\langle Tx, x \rangle} : x \in H, \|x\| = 1 \} \\
 &= \{ \bar{\lambda}, \lambda \in W(T) \}
 \end{aligned}$$

4) Soit  $T \in B(H)$  et  $U$  est un opérateur unitaire

$$\begin{aligned}
 W(U^*TU) &= \{ \langle U^*TUx, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} \\
 &= \{ \langle TUx, Ux \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \}
 \end{aligned}$$

On pose  $Ux = y$  tel que  $\|y\| = 1$

$$\begin{aligned}
 W(U^*TU) &= \{ \langle TUx, Ux \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \} \\
 &= \{ \langle Ty, y \rangle : y \in H, \|y\| = 1 \} \\
 &= W(T)
 \end{aligned}$$

C.Q.F.D. ■

**Théorème 2.1.1** [5] *L'image numérique de  $T$  est un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{C}$ .*

**Preuve.** Soient  $\lambda$  et  $\mu$ , deux points distincts de  $W(T)$ . Alors, il existe  $x, y \in H \setminus \{0\}$  tels que

$$\lambda = \frac{\langle Tx, x \rangle}{\|x\|^2}, \quad \mu = \frac{\langle Ty, y \rangle}{\|y\|^2}$$

Si on a besoin, on remplace  $y$  par  $\exp(i\theta)y$  et on aura

$$\frac{\langle (T - \lambda I)x, y \rangle}{\mu - \lambda} - \frac{\langle (T^* - \bar{\lambda} I)y, x \rangle}{\bar{\mu} - \bar{\lambda}} \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\frac{\langle (T - \lambda I)x, y \rangle + \langle (T - \lambda I)y, x \rangle}{\mu - \lambda} = \frac{\langle (T - \lambda I)x, y \rangle}{\mu - \lambda} - \frac{\langle (T^* - \bar{\lambda} I)x, y \rangle}{\bar{\mu} - \bar{\lambda}} + 2 \operatorname{Re} \frac{\langle (T - \lambda I)x, y \rangle}{\mu - \lambda} \in \mathbb{R}$$

Posons alors, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\langle T(x + ty), x + ty \rangle - \lambda \langle x + ty, x + ty \rangle}{(\mu - \lambda) \langle x + ty, x + ty \rangle} \\ &= t \frac{\langle (T - \lambda I)x, y \rangle + \langle (T - \lambda I)x, y \rangle}{(\mu - \lambda) \langle x + ty, x + ty \rangle} + t^2 \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x + ty, x + ty \rangle} \end{aligned}$$

La fraction rationnelle  $\varphi$  est donc continue sur  $\overline{\mathbb{R}}$  et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Comme  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(\infty) = 1$ , alors le théorème des valeurs intermédiaires entraîne que pour tout  $\tau \in (0, 1)$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi(t) = \tau$ . On a donc

$$\begin{aligned} (1 - \tau)\lambda + \tau\mu &= (\mu - \lambda)\varphi(t) + \lambda \\ &= \frac{\langle T(x + ty), x + ty \rangle}{\langle x + ty, x + ty \rangle} \in W(T) \end{aligned}$$

On en déduit que le segment joignant  $\lambda$  et  $\mu$  est contenu dans  $W(T)$ . ■

**Exemple 2.1.1** Soit  $T \in B(H)$  tel que  $H = \mathbb{C}^2$  défini par la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(T) &= \{ \langle Tx, x \rangle : x = (x_1, x_2) \in H, \|x\| = 1 \} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle : x = (x_1, x_2) \in H, \|x\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle : x = (x_1, x_2) \in H, \|x\| = 1 \right\} \\ &= \{ \overline{x_1}x_2 : x = (x_1, x_2) \in H, \|x\| = 1 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x \rangle| &= |x_1| |x_2| \\ &\leq \frac{1}{2} (|x_1|^2 + |x_2|^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors

$$W(T) = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Alors,  $W(T)$  est un disque de rayon  $\frac{1}{2}$ .

**Exemple 2.1.2** Soit  $T \in B(H)$  avec  $H = \ell^2$ . Pour tout  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \in H$ ,  $\|\xi\| = 1$ , on considère  $T \xi = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots)$  et on a

$$\langle T\xi, \xi \rangle = \xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_4 + \dots$$

Avec  $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots = 1$ .

On a

$$\begin{aligned} |\langle T\xi, \xi \rangle| &\leq |\xi_1| |\xi_2| + |\xi_2| |\xi_3| + \dots \\ &\leq \frac{1}{2} (|\xi_1|^2 + 2|\xi_2|^2 + 2|\xi_3|^2 + \dots) \\ &\leq \frac{1}{2} (2 - |\xi_1|^2) \end{aligned}$$

Ainsi  $|\langle T\xi, \xi \rangle| \leq 1$ . Donc  $W(T)$  est un disque de rayon 1.

## 2.2 L'image numérique des opérateurs dans un espace de dimension deux

**Lemme 2.2.1** [15] Soit  $T$  un opérateur dans un espace à deux dimensions. Alors  $W(T)$  est une ellipse dont les foyers sont les valeurs propres de  $T$ .

**Preuve.** Sans perte de généralité nous pouvons choisir  $T$  comme une matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de  $T$ .

Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  nous avons

$$W(T - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W(T - \lambda I) = \left\{ z, \quad |z| \leq \frac{|a|}{2} \right\}$$

Donc  $W(T)$  est un cercle de centre  $a$  et de rayon  $\frac{|a|}{2}$

Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  et  $a = 0$  nous avons

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(T) &= \{ \langle Tx, x \rangle : x = (x_1, x_2) \in H, \|x\| = 1 \} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle : x = (x_1, x_2) \in H, \|x\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle : x = (x_1, x_2) \in H, \|x\| = 1 \right\} \\ &= \{ \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2 : x = (x_1, x_2) \in H, \|x\| = 1 \} \\ &= \{ t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2 : \text{ou } t = |x_1|^2 \text{ et } \|x\| = 1, x = (x_1, x_2) \in H \} \end{aligned}$$

Donc,  $W(T)$  est l'ensemble des combinaisons convexes de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et est le segment qui les relie.

Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  et  $a \neq 0$  nous avons

$$\begin{aligned} T - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} & a \\ 0 & \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} \end{pmatrix} \\ \exp(-i\theta) \left( T - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right) &= \begin{pmatrix} r & \exp(-i\theta) \\ 0 & -r \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

où  $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = r \exp(i\theta)$ .  $W(B)$  est une ellipse dont le centre est  $(0, 0)$  et axe mineur  $|a|$  et les foyers à  $(r, 0)$  et  $(-r, 0)$ .

Ainsi  $W(T)$  est une ellipse avec des foyers à  $\lambda_1, \lambda_2$  et le grand axe a une inclinaison de  $\theta$  avec l'axe réel. ■

## 2.3 Rayon numérique

**Définition 2.3.1** [8] Soit  $T$  un opérateur défini sur  $H$ ,  $W(T)$  son image numérique. Le rayon numérique  $\omega(T)$  d'opérateur  $T$  est donnée par

$$\omega(T) = \sup \{|z|, z \in W(T)\}.$$

**Exemple 2.3.1** Soit  $T \in B(H)$  tel que  $\mathbb{C}^n$  défini par la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'abord, on calcule  $W(T)$

$$\begin{aligned} W(T) &= \{ \langle Tx, x \rangle : x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in H, \|x\| = 1 \} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H, \|x\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle, x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in H, \|x\| = 1 \right\} \\ &= \{ x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_3 + \cdots + x_{n-1} \bar{x}_n : x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in H, \|x\| = 1 \} \end{aligned}$$

Ainsi

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq |x_1| |x_2| + |x_2| |x_3| + \cdots + |x_{n-1}| |x_n|$$

On calcule

$$\sup \{ |x_1| |x_2| + |x_2| |x_3| + \cdots + |x_{n-1}| |x_n| \}$$

On a la condition  $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$ .

Soit  $r_i = |x_i|$  et on considère la fonction de Lagrange [voir Ch1]

$$F(r_1, r_2, \dots, r_n, \lambda) = r_1 r_2 + r_2 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n - \lambda \left( \sum_{i=1}^n r_i^2 - 1 \right)$$

Calculons les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r_1} &= r_2 - 2\lambda r_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_2} &= r_1 + r_3 - 2\lambda r_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_3} &= r_2 + r_4 - 2\lambda r_3 = 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial F}{\partial r_{n-1}} &= r_{n-2} + r_n - 2\lambda r_{n-1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_n} &= r_{n-1} - 2\lambda r_n = 0 \end{aligned}$$

On transforme ces équations sous forme matricielle  $AR = 2\lambda R$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que  $A = 2B$ . Où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda$  est une valeur propre de  $B$  tel que

$$\lambda = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

On cherche expression de  $\lambda$ , on a

$AR = 2\lambda R$  et  $A = 2B$  alors  $2BR = 2\lambda R$  donc

$$\langle 2BR, R \rangle = 2\lambda \langle R, R \rangle$$

$$\langle 2BR, R \rangle = 2\lambda \langle R, R \rangle$$

$$2(r_1r_2 + r_2r_3 + \dots + r_{n-1}r_n) = 2\lambda \sum_{i=1}^n r_i^2$$

Comme  $\sum_{i=1}^n r_i^2 = 1$ , alors  $\lambda = r_1r_2 + r_2r_3 + \dots + r_{n-1}r_n$ . On deduire la valeur maximal de expression de  $\lambda$  est  $\omega(T)$

$$\omega(T) = \sup \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Donc

$$\omega(T) = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

**Théorème 2.3.1** [15] *Le rayon numérique et la norme d'opérateur sont deux normes équivalentes. Où*

$$\omega(T) \leq \|T\| \leq 2\omega(T)$$

**Preuve.** Soit  $x \in H$  tel que  $\|x\| = 1$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\langle Tx, x \rangle \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\|$$

d'où  $\omega(T) < \|T\|$ . De l'identité de polarisation, on obtient

$$\begin{aligned} 4|\langle Tx, y \rangle| &\leq |\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle + i\langle T(x+iy), x+iy \rangle - \langle T(x-iy), x-iy \rangle| \\ &\leq \omega(T) [\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2] \\ &\leq 4\omega(T) [\|x\|^2 + \|y\|^2] \end{aligned}$$

En prenant  $\|x\| = \|y\| = 1$ . On trouve

$$4|\langle Tx, y \rangle| \leq 8\omega(T)$$

Ce qu'implique que  $\|T\| \leq 2\omega(T)$ . ■

## 2.4 Relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur

### 2.4.1 Inclusion spectral

**Théorème 2.4.1** [8] *On a toujours  $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$ , où le  $\overline{W(T)}$  dénote la fermeture de l'image numérique de l'opérateur  $T$ .*

**Preuve.** Soit  $\lambda \in \sigma_{app}(T)$  (le spectre approché de  $T$ ) et soit  $(x_n)$  une suite de vecteurs unitaires telles que  $\|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$ . De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\langle (T - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq \|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$$

Donc  $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$  et par suite  $\lambda \in \overline{W(T)}$ , on a alors

$$\sigma_{app}(T) \subseteq \overline{W(T)}.$$

Ainsi, d'après la proposition, on a  $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{app}(T) \subset \overline{W(T)}$ . De la convexité de  $\overline{W(T)}$ , il s'en suit que  $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$ .

■

En général, pour  $S$  et  $T$  dans  $B(H)$ , l'ensemble  $\sigma(T + S)$  n'a aucun lien avec  $\sigma(T)$  et  $\sigma(S)$ . Mais d'après [6] on a

$$\sigma(T + S) \subseteq \overline{W(T + S)} \subseteq \overline{W(T)} + \overline{W(S)}.$$

L'ensemble  $W(T)$  n'est pas toujours fermé. En fait, on peut voir des opérateurs dont les images numériques sont toujours fermées.

**Exemple 2.4.1** Soit  $H = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , et  $T$  un opérateur représenté par la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $X = (x_1, x_2)$ . On a

$$\begin{aligned} \langle TX, X \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_1 \overline{x_2} \end{aligned}$$

Alors

$$W(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Et on a

$$\det(T - \lambda I) = 0 \iff \det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

Donc  $\sigma(T) = \{0\}$ .

**Théorème 2.4.2** [15] Soit  $\overline{W(T)} = [m, M]$ , alors  $m, M \in \sigma(T)$ .

**Preuve.** On a  $m \in \overline{W(T)}$ , alors il existe une suite de vecteur unitaire  $\{x_n\}$  tel que:  $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow m$  donc

$$\| \langle (T - mI)x_n, x_n \rangle \| = \left\| (T - mI)^{\frac{1}{2}} x_n \right\|^2 \rightarrow 0$$

alors,  $\| (T - mI)x_n \| \rightarrow 0$  et donc  $m \in \sigma_{app}(T) \subseteq \sigma(T)$ . ■

## 2.4.2 Opérateur auto-adjoints et normaux

**Théorème 2.4.3** [4] *T est un opérateur auto-adjoint si et seulement si  $W(T)$  est une intervalle de  $\mathbb{R}$ .*

**Preuve.** Si  $T$  est auto-adjoint, alors pour tout  $x \in H$

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$$

On a donc  $W(T) \subset \mathbb{R}$ .

Inversement, si  $W(T) \subset \mathbb{R}$ , alors  $\langle Tx, x \rangle$  est un réel pour tout  $x \in H$ , on a

$$\langle Tx, x \rangle - \langle x, Tx \rangle = 0 \iff \langle (T - T^*)x, x \rangle = 0$$

Donc

$$(T - T^*) = 0 \iff T = T^*.$$

Alors  $T$  est auto-adjoint. ■

**Théorème 2.4.4** [8] *Soit  $T \in B(H)$  avec  $T$  est auto-adjoint. Alors*

$$\|T\| = r(T) = w(T).$$

**Preuve.** On a

$$r(T) \leq w(T) \leq \|T\|$$

On va montrer que  $r(T) = \|T\|$ , comme  $T$  est un opérateur auto-adjoint nous allons la propriété suivante

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$$

Alors

$$\|T^2\| = \|TT^*\| = \sup_{\|x\|=1} \langle T^*Tx, x \rangle = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, Tx \rangle = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2$$

Comme n'importe quelle puissance entière de  $T$  est encore auto-adjoint, on peut étendre ce résultat à  $T^4$  :

$$\|T^4\| = \|(T^2)^2\| = (\|T^2\|)^2 = \|T\|^4$$

Et par récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}.$$

Donc, en utilisant la définition de rayon spectral:

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|T\|.$$

Alors

$$\|T\| = r(T) = w(T).$$

C'est qu'il fallait démontrer. ■

**Théorème 2.4.5** [4] *Si  $T$  est un opérateur normal, alors  $\|T^n\| = \|T\|^n$  pour tout  $n \geq 1$ .*

*De plus,  $r(T) = w(T) = \|T\|$ .*

**Preuve.** On a toujours

$$r(T) \leq w(T) \leq \|T\|$$

Pour tout  $x \in H$ , on a

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| = \|T^2x\| \|x\| \leq \|T^2\| \|x\|^2.$$

(Car pour un opérateur normal, on a toujours  $\|Tx\| = \|T^*x\|$  [voir Ch1]).

Il découle donc que  $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ . Comme l'inégalité  $\|T^n\| \leq \|T\|^n$  est toujours vraie, on a  $\|T\|^2 = \|T^2\|$ . De plus

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^n x, T^n x \rangle = \langle T^*T^n x, T^{n-1}x \rangle \leq \|T^*T^n x\| \|T^{n-1}x\| = \|T^{n+1}x\| \|T^{n-1}x\| \quad \forall n \geq 2$$

Cette inégalité implique que

$$\|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\| \quad \forall n \geq 2$$

Fixons un entier  $n \geq 2$  et supposons que  $\|T\|^k \leq \|T^k\|$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Il suit que

$$\|T\|^{2n} \leq \|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1}\| \|T^{n-1}\| \leq \|T^{n+1}\| \|T\|^{n-1}$$

Ainsi

$$\|T\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}\|.$$

On déduit par induction que  $\|T^n\| \leq \|T\|^n$  pour tout  $n \geq 1$ . Finalement, la formule du rayon spectral entraîne que  $r(T) = \|T\|$ , et on a donc  $r(T) = w(T) = \|T\|$ . ■

## 2.5 Image numérique et similarité

**Théorème 2.5.1** *Si  $T, S$  deux opérateurs unitairement similaire alors  $W(T) = W(S)$ .*

**Preuve.** On a  $T, S$  deux opérateurs unitaires similaires alors il existe  $U$  unitaire (*i.e.* :  $U^{-1} = U^*$ ) tel que  $T = U^*SU$ , donc d'après la propriété de l'image numérique d'opérateur

$$W(S) = W(U^*SU) = W(T)$$

Alors  $W(S) = W(T)$ . ■

# Chapitre 3

## Quelques résultats sur image et rayon numérique d'un opérateur

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats sur l'image numérique et le rayon numérique d'un opérateur  $T$  dans  $B(H)$  où  $H$  espace de Hilbert. Plus précisément on va étudier l'image numérique d'une matrice  $(3 \times 3)$  et quelques autres propriétés telles que l'image numérique de la somme de deux opérateurs dans un espace de dimension fini, rayon numérique du produit de deux opérateurs, et quelques inégalités sur la norme.

Nous commençons par l'image numérique d'une matrice  $(3 \times 3)$ .

### 3.1 L'image numérique d'une matrice $(3 \times 3)$

**Proposition 3.1.1** [9] *L'image numérique d'une matrice  $(3 \times 3)$  est classé à*

- 1) *Enveloppe convexe de ses valeurs propres.*
- 2) *Enveloppe convexe d'une ellipse et un point (Ce qui réduit à une ellipse si le point est à l'intérieur).*
- 3) *Forme quelconque avec une partie plate sur la frontière.*
- 4) *Forme ovulaire.*

Les exemples suivants clarifient les classifications de l'image numérique d'une matrice  $(3 \times 3)$

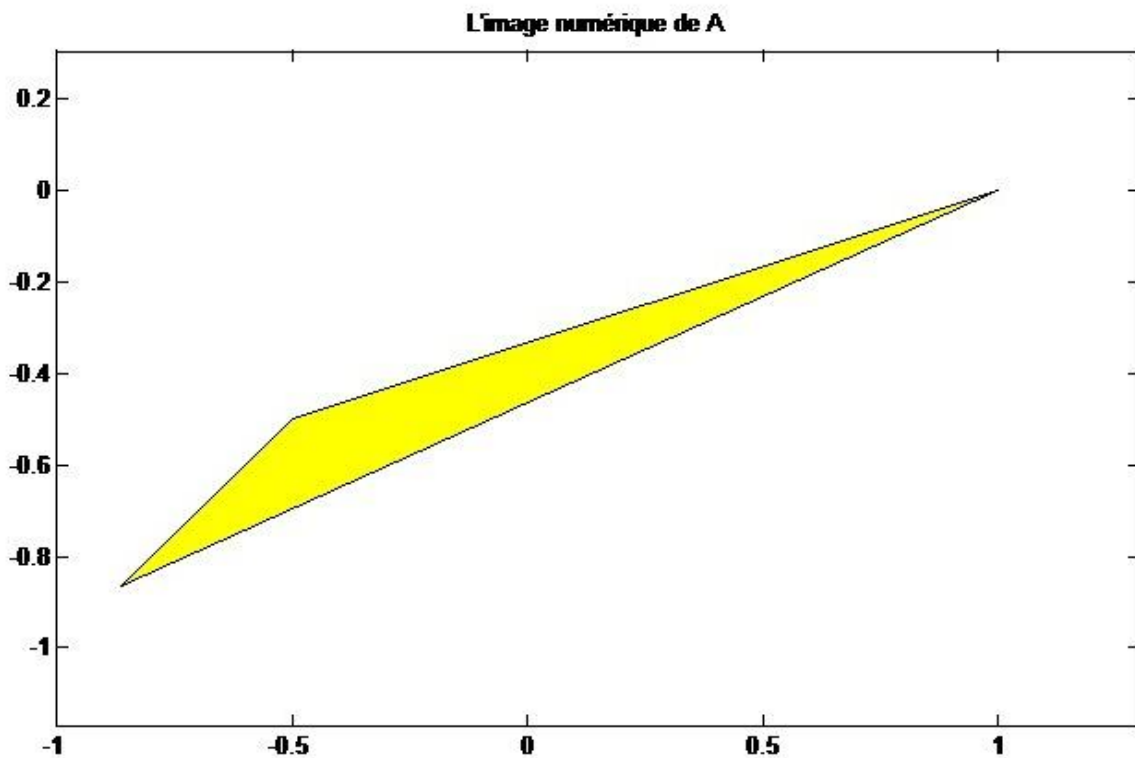
**Exemple 3.1.1** Soit  $A \in B(H)$  défini par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Pour tout  $X = (x_1, x_2, x_3) \in H$ , on a

$$\begin{aligned} W(A) &= \{ \langle AX, X \rangle, \|X\| = 1 \} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle, \|X\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ |x_1|^2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right) |x_2|^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) |x_3|^2, \|X\| = 1 \right\} \end{aligned}$$

L'image numérique de  $A$  est un triangle avec sommets  $1$ ,  $-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$  et  $-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



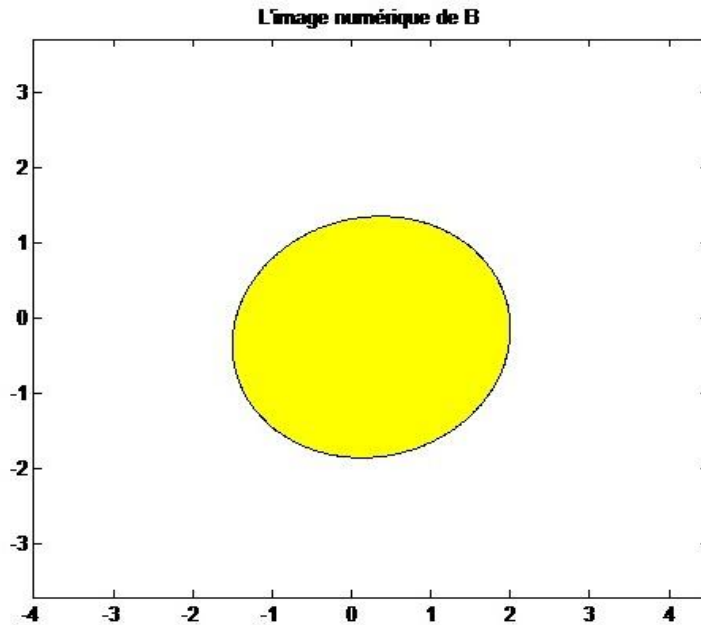
**Exemple 3.1.2** Soit  $B \in B(H)$  défini par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3+i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Pour tout  $X = (x_1, x_2, x_3) \in H$ , on a

$$\begin{aligned} W(B) &= \{ \langle BX, X \rangle, \|X\| = 1 \} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3+i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle, \|X\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ |x_1|^2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right) |x_2|^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) |x_3|^2 + (3+i) \overline{x_1}x_2, \|X\| = 1 \right\} \end{aligned}$$

Alors l'image numérique de  $B$  est une ellipse.



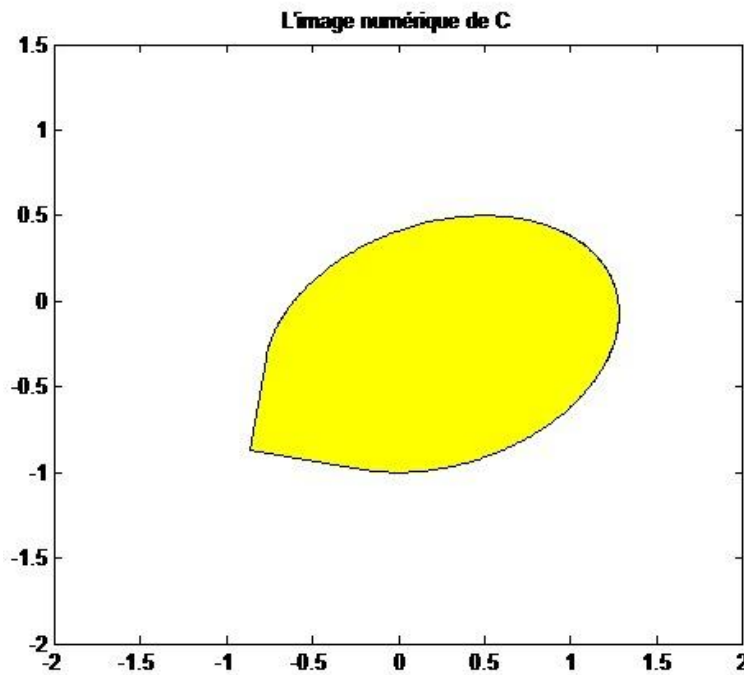
**Exemple 3.1.3** Soit  $C \in B(H)$  défini par la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Pour tout  $X = (x_1, x_2, x_3) \in H$ , on a

$$\begin{aligned} W(C) &= \{ \langle CX, X \rangle, \|X\| = 1 \} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle, \|X\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ |x_1|^2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right) |x_2|^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) |x_3|^2 + (1+i) \bar{x}_1 x_2, \|X\| = 1 \right\} \end{aligned}$$

Alors l'image numérique de  $C$  est une forme de cône enveloppe convexe d'une ellipse et un point extérieur à l'ellipse.



**Exemple 3.1.4** Soit  $D \in B(H)$  défini par la matrice

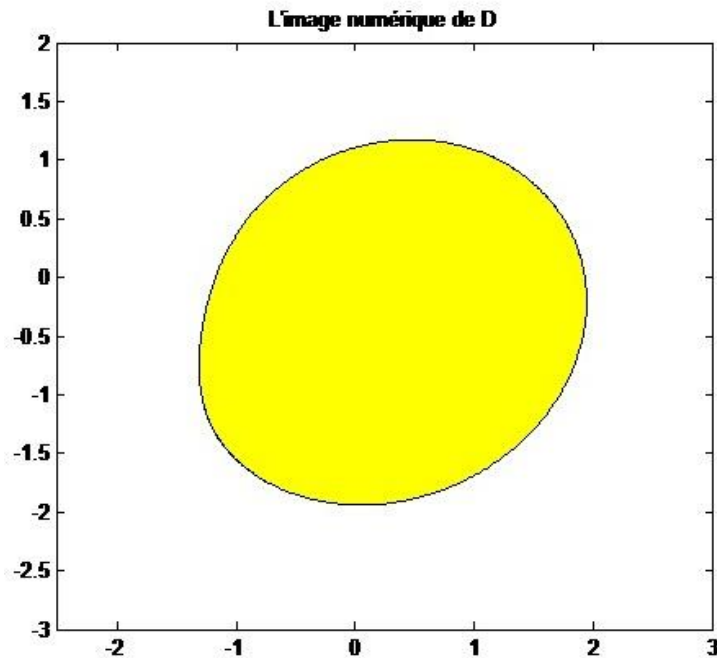
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

### 3.1. L'image numérique d'une matrice (3 × 3)

Pour tout  $X = (x_1, x_2, x_3) \in H$ , on a

$$\begin{aligned}
 W(D) &= \{ \langle DX, X \rangle, \|X\| = 1 \} \\
 &= \left\{ \left\langle \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle, \|X\| = 1 \right\} \\
 &= \left\{ |x_1|^2 + \left( -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \right) |x_2|^2 + \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) |x_3|^2 + 2\overline{x_1}x_2 + 2\overline{x_1}x_3 + \overline{x_2}x_3, \|X\| = 1 \right\}
 \end{aligned}$$

L'image numérique de  $D$  a une partie plate sur la frontière.



**Exemple 3.1.5** Soit  $E \in B(H)$  défini par la matrice

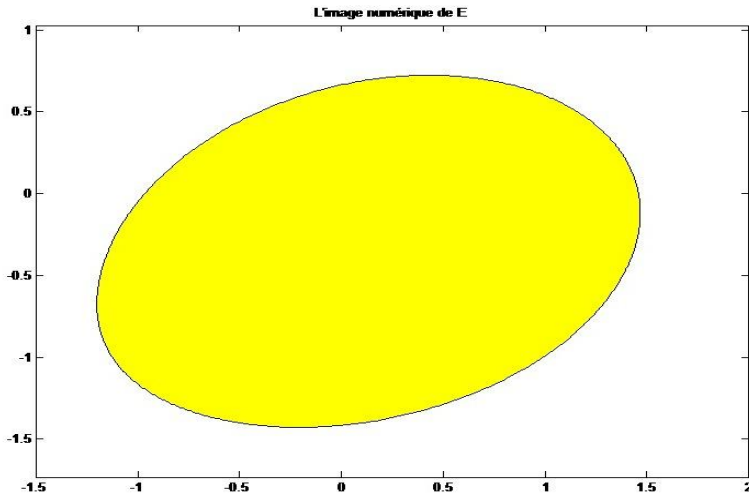
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

### 3.2. L'image numérique de la somme de deux opérateurs dans un espace de dimension fini

Pour tout  $X = (x_1, x_2, x_3) \in H$ , on a

$$\begin{aligned} W(T) &= \{ \langle EX, X \rangle, \|X\| = 1 \} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle, \|X\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ |x_1|^2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right) |x_2|^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) |x_3|^2 + (1+i)\bar{x}_1x_2 + (1-i)\bar{x}_1x_3, \|X\| = 1 \right\} \end{aligned}$$

Donc, l'image numérique de  $E$  est une forme ovulaire.



### 3.2 L'image numérique de la somme de deux opérateurs dans un espace de dimension fini

En général on a l'inclusion suivante  $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$  [voir Ch 2]. Dans ce partie, nous présentons l'égalité entre l'image numérique de la somme de deux opérateurs et la somme de deux images numériques des opérateurs, dans le cas dimension finie.

**Théorème 3.2.1** Pour tous opérateurs  $T$  et  $S$  dans  $B(\mathbb{R}^n)$  de dimensions finies  $n$ ,  $W(T)$ ,  $W(S)$  et  $W(T + S)$  dénotent les images numériques de  $T$ ,  $S$  et  $T + S$  respectivement, alors

$$W(T + S) = W(T) + W(S)$$

3.2. L'image numérique de la somme de deux opérateurs dans un espace de dimension fini

**Preuve.** Soient  $T$  et  $S$  deux opérateurs  $T$  et  $S$  dans  $B(\mathbb{R}^n)$  de dimensions finies  $n$ . Avec  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$  et  $\|X\| = 1$ ,

Pour  $n = 2$ , soient

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad T + S = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

On calcule  $W(T)$

$$\begin{aligned} W(T) &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\ &= \{ a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 \} \end{aligned}$$

On calcule  $W(S)$

$$\begin{aligned} W(S) &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\ &= \{ b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + (b_{12} + b_{21})x_1x_2 \} \end{aligned}$$

On calcule  $W(T + S)$

$$\begin{aligned} W(T + S) &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2 \\ (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\ &= \{ (a_{11} + b_{11})x_1^2 + (a_{12} + b_{12})x_2x_1 + (a_{21} + b_{21})x_1x_2 + (a_{22} + b_{22})x_2^2 \} \\ &= \{ (a_{11} + b_{11})x_1^2 + (a_{22} + b_{22})x_2^2 + (a_{12} + a_{21} + b_{12} + b_{21})x_2x_1 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(T) + W(S) &= \{ (a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2) + (b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + (b_{12} + b_{21})x_1x_2) \} \\ &= \{ (a_{11} + b_{11})x_1^2 + (a_{22} + b_{22})x_2^2 + (a_{12} + a_{21} + b_{12} + b_{21})x_2x_1 \} \\ &= W(T + S) \end{aligned}$$

3.2. L'image numérique de la somme de deux opérateurs dans un espace de dimension fini

Pour  $n = 3$ , alors

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$T + S = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

On calcule  $W(T)$

$$W(T) = \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

$$= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

$$= \{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3\}$$

On calcule  $W(S)$

$$W(S) = \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

$$= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

$$= \{b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + (b_{12} + b_{21})x_1x_2 + (b_{13} + b_{31})x_1x_3 + (b_{23} + b_{32})x_2x_3\}$$

3.2. L'image numérique de la somme de deux opérateurs dans un espace de dimension fini

On calcule  $W(T + S)$

$$\begin{aligned}
 W(T + S) &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\
 &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2 + (a_{13} + b_{13})x_3 \\ (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2 + (a_{23} + b_{23})x_3 \\ (a_{31} + b_{31})x_1 + (a_{32} + b_{32})x_2 + (a_{33} + b_{33})x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\
 &= \{(a_{11} + b_{11})x_1^2 + (a_{22} + b_{22})x_2^2 + (a_{33} + b_{33})x_3^2 + (a_{12} + b_{12} + a_{21} + b_{21})x_1x_2 \\
 &\quad + (a_{13} + b_{13} + a_{31} + b_{31})x_1x_3 + (a_{23} + b_{23} + a_{32} + b_{32})x_2x_3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(T) + W(S) &= \{(a_{11} + b_{11})x_1^2 + (a_{22} + b_{22})x_2^2 + (a_{33} + b_{33})x_3^2 + (a_{12} + b_{12} + a_{21} + b_{21})x_1x_2 \\
 &\quad + (a_{13} + b_{13} + a_{31} + b_{31})x_1x_3 + (a_{23} + b_{23} + a_{32} + b_{32})x_2x_3\} \\
 &= W(T + S)
 \end{aligned}$$

Pour  $n$  quelconque, alors

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & S &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\
 T + S &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & 0 & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3.2. *L'image numérique de la somme de deux opérateurs dans un espace de dimension fini*

On calcule  $W(T)$

$$\begin{aligned}
 W(T) &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\
 &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n (a_{ij} + a_{ji})x_i x_j \right\}
 \end{aligned}$$

On calcule  $W(S)$

$$\begin{aligned}
 W(S) &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\
 &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \vdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n (b_{ij} + b_{ji})x_i x_j \right\}
 \end{aligned}$$

3.2. L'image numérique de la somme de deux opérateurs dans un espace de dimension fini

On calcule  $W(T + S)$

$$\begin{aligned}
 W(T + S) &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & 0 & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\
 &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2 + \cdots + (a_{1n} + b_{1n})x_n \\ (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2 + \cdots + (a_{2n} + b_{2n})x_n \\ \vdots \\ (a_{n1} + b_{n1})x_1 + (a_{n2} + b_{n2})x_2 + \cdots + (a_{nn} + b_{nn})x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii})x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n (a_{ij} + b_{ij} + a_{ji} + b_{ji})x_i x_j \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W(T) + W(S) &= \left\{ \left( \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n (a_{ij} + a_{ji})x_i x_j \right) + \left( \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n (b_{ij} + b_{ji})x_i x_j \right) \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii})x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n (a_{ij} + b_{ij} + a_{ji} + b_{ji})x_i x_j \right\} \\
 &= W(T + S)
 \end{aligned}$$

Donc  $W(T + S) = W(T) + W(S)$  ■

**Exemple 3.2.1** Soient  $T, S \in B(H)$  défini par

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad T + S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule  $W(T), W(S)$  et  $W(T + S)$

Pour  $X = (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}
 W(T) &= \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \|X\| = 1 \right\} \\
 &= \{x_2 \overline{x_1}, \quad \|X\| = 1\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(S) &= \left\{ \left\langle \left( \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \mid \|X\| = 1 \right\} \\ &= \{2|x_1|^2 + |x_2|^2 - \overline{x_2}x_1, \quad \|X\| = 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(T+S) &= \left\{ \left\langle \left( \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \mid \|X\| = 1 \right\} \\ &= \{2|x_1|^2 + |x_2|^2, \quad \|X\| = 1\} \end{aligned}$$

En effet  $W(T+S) = W(T) + W(S)$ .

### 3.3 Quelques inégalités sur la norme et le rayon numérique

Soit  $T \in B(H)$ , le maximum de la partie réelle du spectre de  $T$  noté par  $v_s(T)$ , est donné par

$$v_s(T) = \sup_{\|x\|=1} \operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle = \max\{\lambda, \lambda \in \sigma(\operatorname{Re} T)\}$$

Dans la suite, nous exposons quelques inégalités qui lient entre la norme d'opérateur, le rayon numérique et le maximum de la partie réelle du spectre avec quelques corollaires.

#### 3.3.1 Inégalité entre la norme d'opérateur et le maximum de la partie réelle de spectre

**Théorème 3.3.1** [5] Pour  $T \in B(H) \setminus \{0\}$  et  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . On a l'inégalité

$$0 \leq \|T\| - \omega(T) \leq \|T\| - v_s\left(\frac{\overline{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq \frac{1}{2|\lambda|} \|T - \lambda I\|^2$$

Si  $\|T - \lambda I\| \leq |\lambda|$ , alors on a:

$$\sqrt{1 - \left\| \frac{1}{\lambda}T - I \right\|^2} \leq \frac{v_s\left(\frac{\overline{\lambda}}{|\lambda|}T\right)}{\|T\|} \leq \frac{\omega(T)}{\|T\|} \leq 1$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T\|^2 - \omega^2(T) \leq \|T\|^2 - v_s^2\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq 2 \left( |\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - \|T - \lambda I\|^2} \right) v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \\ &\leq 2 \left( |\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - \|T - \lambda I\|^2} \right) \omega(T) \end{aligned}$$

**Preuve.** On utilise dans [5, le propriété (av)]. On a

$$\omega(T) = \omega\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \geq \left| v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \right| \geq v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)$$

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et  $T \in B(H) \setminus \{0\}$ . On a

$$(\|T\| - |\lambda|)^2 \geq 0 \implies \frac{1}{2} (\|T\|^2 + |\lambda|^2) \geq |\lambda| \|T\|$$

Par l'inégalité

$$\frac{1}{2} (\|T\|^2 + |\lambda|^2) \geq v_s(\bar{\lambda}T) \geq \frac{1}{2} (\|T\|^2 + |\lambda|^2) - \frac{1}{2} \|T - \lambda I\|^2$$

Alors,

$$v_s(\bar{\lambda}T) \geq |\lambda| \|T\| - \frac{1}{2} \|T - \lambda I\|^2 \implies \frac{1}{|\lambda|} v_s(\bar{\lambda}T) \geq \|T\| - \frac{1}{2|\lambda|} \|T - \lambda I\|^2$$

Comme  $v_s$  est linéaire alors

$$v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \geq \|T\| - \frac{1}{2|\lambda|} \|T - \lambda I\|^2 \implies \|T\| - v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq \frac{1}{2|\lambda|} \|T - \lambda I\|^2.$$

On utilise le théorème 3 dans [5] et comme  $\|T - \lambda I\| \leq |\lambda|$ , alors

$$v_s(\bar{\lambda}T) \geq \frac{1}{2} \left( \|T\|^2 + \left( \sqrt{|\lambda|^2 - \|T - \lambda I\|^2} \right)^2 \right) \geq \|T\| \sqrt{|\lambda|^2 - \|T - \lambda I\|^2}.$$

Donc

$$\frac{v_s(\bar{\lambda}T)}{\|T\|} \geq |\lambda| \sqrt{1 - \left\| \frac{1}{\lambda}T - I \right\|^2} \implies \frac{v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)}{\|T\|} \geq \sqrt{1 - \left\| \frac{1}{\lambda}T - I \right\|^2}.$$

On a

$$v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq \omega(T) \implies \frac{v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)}{\|T\|} \leq \frac{\omega(T)}{\|T\|}.$$

Comme  $\omega(T) \leq \|T\|$  alors,  $\frac{\omega(T)}{\|T\|} \leq 1$ .

Donc

$$\sqrt{1 - \left\| \frac{1}{\lambda}T - I \right\|^2} \leq \frac{v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)}{\|T\|} \leq \frac{\omega(T)}{\|T\|} \leq 1.$$

D'après [14, le théorème 3] on peut affirmer que

$$\|Tx\|^2 + |\lambda|^2 \leq 2 \operatorname{Re} \langle \bar{\lambda}Tx, x \rangle + r^2, \quad \|x\| = 1$$

où l'on note  $r := \|T - \lambda I\| \leq |\lambda|$ , nous avons également.

On observe que  $\operatorname{Re} \langle \bar{\lambda}Tx, x \rangle > 0$  pour  $x \in H$ ,  $\|x\| = 1$ .

Maintenant, on divise par  $\operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle > 0$ , on a

$$\frac{\|Tx\|^2}{\operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle} \leq 2|\lambda| + \frac{r^2}{\operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle} - \frac{|\lambda|^2}{\operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle} \quad \text{pour } \|x\| = 1$$

Nous soustrayons des deux côtés de la quantité  $\operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle$ , alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\|Tx\|^2}{\operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle} - \operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle &\leq 2|\lambda| + \frac{r^2 - |\lambda|^2}{\operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle} - \operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle \\ &= 2|\lambda| - \left( \frac{r^2 - |\lambda|^2}{\sqrt{\operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle}} - \sqrt{\operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle} \right)^2 - 2\sqrt{|\lambda|^2 - r^2} \\ &\leq 2(|\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - r^2}) \end{aligned}$$

Ce qui implique évidemment que

$$\|Tx\|^2 \leq \left( \operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle \right)^2 + 2 \left( |\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - r^2} \right) \operatorname{Re} \langle \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}Tx, x \rangle \quad \text{pour tout } x \in H, \|x\| = 1$$

pour tout  $x \in H, \|x\| = 1$ , en passant au supremum, on trouve

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &\leq v_s^2\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) + 2\left(|\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - r^2}\right) v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \quad \text{pour tout } x \in H, \|x\| = 1 \\ \|T\|^2 - v_s^2\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) &\leq 2\left(|\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - r^2}\right) v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \\ &\leq 2\left(|\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - r^2}\right) \omega\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T\|^2 - \omega^2(T) \leq \|T\|^2 - v_s^2\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq 2\left(|\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - \|T - \lambda I\|^2}\right) v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \\ &\leq 2\left(|\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - \|T - \lambda I\|^2}\right) \omega(T) \end{aligned}$$

C.Q.F.D. ■

**Corollaire 3.3.1** *Pour tout  $T \in B(H) \setminus \{0\}$  et  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . On a l'inégalité*

$$0 \leq \|T\| - \omega(T) \leq \|T\| - v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq \frac{1}{2|\lambda|} \|T - \lambda I\|^2$$

Si  $\|T - \lambda I\| = |\lambda|$ , alors on a

$$\frac{1}{2|\lambda|} \|T\| \leq \frac{v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)}{\|T\|} \leq \frac{\omega(T)}{\|T\|} \leq 1$$

Et

$$0 \leq \|T\|^2 \leq 2|\lambda| v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)$$

**Preuve.** On utilise [5, propriété (av)]. On a

$$\omega(T) = \omega\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \geq \left|v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)\right| \geq v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)$$

Pour tout  $T \in B(H) \setminus \{0\}$  et  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . On a

$$\frac{1}{2} (\|T\|^2 + |\lambda|^2) \geq |\lambda| \|T\|$$

Par [5, théorème 3]. On a

$$v_s(\bar{\lambda}T) \geq |\lambda| \|T\| - \frac{1}{2} \|T - \lambda I\|^2$$

Donc

$$0 \leq \|T\| - \omega(T) \leq \|T\| - v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq \frac{1}{2|\lambda|} \|T - \lambda I\|^2$$

Par [5, théorème 3] et comme  $\|T - \lambda I\| = |\lambda|$ . Alors

$$v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \geq \frac{1}{2|\lambda|} \|T\|^2$$

On a  $v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq \omega(T)$  et comme  $\frac{\omega(T)}{\|T\|} \leq 1$ . Donc

$$\frac{1}{2|\lambda|} \|T\| \leq \frac{v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)}{\|T\|} \leq \frac{\omega(T)}{\|T\|} \leq 1$$

On

$$0 \leq \|Tx\|^2 - 2 \operatorname{Re}[\langle \bar{\lambda}Tx, x \rangle] + |\lambda|^2 \leq \|T - \lambda I\|^2$$

Et comme  $\|T - \lambda I\| = |\lambda|$ , on a

$$\|Tx\|^2 \leq 2 \operatorname{Re}[\langle \bar{\lambda}Tx, x \rangle]$$

Pour tout  $x \in H$ ,  $\|x\| = 1$ , en passant au supremum et comme  $v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq \omega(T)$ . On obtient

$$\|T\|^2 \leq 2|\lambda| v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq 2|\lambda| \omega(T).$$

D'où l'inégalité désirée. ■

**Corollaire 3.3.2** *Sous les conditions du théorème précédent et si l'application  $(T - \lambda I)$  est contractant ( $\|T - \lambda I\| \leq 1$ ). Alors*

$$\sqrt{1 - \|T - \lambda I\|^2} \leq \frac{v_s(\bar{\lambda}T)}{\|T\|} \leq \frac{\omega(T)}{\|T\|} \leq 1$$

Et

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T\|^2 - \omega^2(T) \leq \|T\|^2 - v_s^2(\bar{\lambda}T) \\ &\leq 2 \left(1 - \sqrt{1 - \|T - \lambda I\|^2}\right) v_s(\bar{\lambda}T) \\ &\leq 2 \left(1 - \sqrt{1 - \|T - \lambda I\|^2}\right) \omega(T) \end{aligned}$$

En effet, d'après le théorème précédent dans le cas général mais  $\|T - \lambda I\| \leq 1$  et  $\|\lambda\| = 1$ .

On trouve le resultat

### 3.3.2 Inégalité entre le rayon numérique et le maximum de la partie réelle de spectre

**Théorème 3.3.2** [5] Pour  $T \in B(H) \setminus \{0\}$  et  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . On a l'inégalité

$$0 \leq \omega(T) - \left| v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \right| \leq \omega(T) - v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq \frac{1}{2|\lambda|} \omega^2(T - \lambda I) \leq \frac{1}{2|\lambda|} \|T - \lambda I\|^2$$

Si  $\|T - \lambda I\| \leq |\lambda|$ , alors on a:

$$\sqrt{1 - \omega^2\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)} \leq \frac{v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)}{\omega(T)} \leq \frac{\left| v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \right|}{\omega(T)} \leq 1$$

Et

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega^2(T) - v_s^2\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq 2 \left( |\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - \omega^2(T - \lambda I)} \right) v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \\ &\leq 2 \left( |\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - \omega^2(T - \lambda I)} \right) \omega(T) \end{aligned}$$

**Preuve.** On a

$$\left| v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \right| \geq v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)$$

Alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\omega(T) - \left| v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \right| \leq \omega(T) - v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right)$$

Et on a

$$\frac{1}{2} (\omega^2(T) + |\lambda|^2) \geq |\lambda| \omega(T)$$

Par [5, théorème 3]. On a

$$\begin{aligned} v_s(\bar{\lambda}T) &\geq \frac{1}{2} (\omega^2(T) + |\lambda|^2) - \frac{1}{2} \omega^2(T - \lambda I) \\ &\geq |\lambda| \omega(T) - \frac{1}{2} \omega^2(T - \lambda I) \end{aligned}$$

Donc

$$\omega(T) - v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}T\right) \leq \frac{1}{2|\lambda|} \omega^2(T - \lambda I) \leq \frac{1}{2|\lambda|} \|T - \lambda I\|^2$$

Par [5, théorème 3] et avec  $\|T - \lambda I\| \leq |\lambda|$ . Alors

$$\sqrt{1 - \omega^2 \left( \frac{1}{\lambda} T - I \right)} \leq \frac{v_s(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} T)}{\omega(T)} \leq \frac{|v_s(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} T)|}{\omega(T)} \leq 1$$

d'après la dernière inégalité dans le théorème (3.1.4) et avec l'inégalité  $\frac{1}{2} \|T\| \leq \omega(T) \leq \|T\|$ .

On a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega^2(T) - v_s^2\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} T\right) \leq 2 \left( |\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - \omega^2(T - \lambda I)} \right) v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} T\right) \\ &\leq 2 \left( |\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 - \omega^2(T - \lambda I)} \right) \omega(T) \end{aligned}$$

D'où l'inégalité désirée. ■

Dans ce théorème on peut extraire des cas particuliers

**Corollaire 3.3.3** *Pour tout  $T \in B(H) \setminus \{0\}$  et  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . On a l'inégalité*

$$0 \leq \omega(T) - \left| v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} T\right) \right| \leq \omega(T) - v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} T\right) \leq \frac{1}{2|\lambda|} \omega^2(T - \lambda I) \leq \frac{1}{2|\lambda|} \|T - \lambda I\|^2$$

Si  $\omega(T - \lambda I) = |\lambda|$ , alors on a

$$\frac{1}{2|\lambda|} \omega(T) \leq \frac{v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} T\right)}{\omega(T)} \leq 1$$

Et

$$\omega^2(T) \leq 2|\lambda| v_s\left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} T\right) \leq 2|\lambda| \omega(T).$$

Si  $\omega(T - \lambda I) \leq |\lambda|$

$$\sqrt{1 - \omega^2 \left( \frac{1}{\lambda} T - I \right)} \leq \frac{v_s(\bar{\lambda} T)}{\omega(T)} \leq \frac{|v_s(\bar{\lambda} T)|}{\omega(T)} \leq 1$$

Et

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega^2(T) - v_s^2(\bar{\lambda} T) \leq 2 \left( 1 - \sqrt{1 - \omega^2(T - \lambda I)} \right) v_s(\bar{\lambda} T) \\ &\leq 2 \left( 1 - \sqrt{1 - \omega^2(T - \lambda I)} \right) \omega(T) \end{aligned}$$

### 3.4 Rayon numérique du produit de deux opérateurs

$$\text{Soit } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ alors } T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après l'exemple [2.3.1] le rayon numérique de la matrice  $T$  est  $\omega(T) = \cos(\frac{\pi}{5})$ .

a) On calcule le rayon numérique de  $T^2$ .

D'abord, on calcule l'image numérique de  $T^2$

$$\begin{aligned} W(T^2) &= \{ \langle T^2 X, X \rangle, \quad \|X\| = 1 \} \\ &= \{ x_1 \bar{x}_3 + x_2 \bar{x}_4, \quad \|X\| = 1 \} \end{aligned}$$

Alors le rayon numérique de  $T^2$  est

$$\omega(T) = \sup \{ x_1 \bar{x}_3 + x_2 \bar{x}_4 \mid \|X\| = 1 \}$$

Donc

$$\begin{aligned} | \langle T^2 X, X \rangle | &= | x_1 \bar{x}_3 + x_2 \bar{x}_4 | \\ &\leq |x_1| |x_3| + |x_2| |x_4| \end{aligned}$$

On a  $\sum_{i=1}^4 |x_i|^2 = 1$ , et on pose  $r_i = |x_i| \quad i = \overline{1, 4}$ , alors la fonction de lagrange [Voir ch1] est

$$F(r_1, r_2, r_3, r_4, \lambda) = r_1 r_3 + r_2 r_4 - \lambda \left( \sum_{i=1}^4 r_i^2 - 1 \right)$$

Calculons les dérivées partielles

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r_1} &= r_3 - 2\lambda r_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_2} &= r_4 - 2\lambda r_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_3} &= r_1 - 2\lambda r_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_4} &= r_2 - 2\lambda r_4 = 0\end{aligned}$$

On transforme ces équations sous forme matricielle  $AR = 2\lambda R$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que  $A = 2B$  tel que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On observe que  $\lambda$  est une valeur propre de  $B$  tel que  $\lambda = \cos(\frac{k\pi}{4})$ , et on a  $AR = 2\lambda R$  alors  $2BR = 2\lambda R$  donc

$$\langle 2BR, R \rangle = 2\lambda \langle R, R \rangle \implies r_1 r_3 + r_2 r_4 = \lambda \sum_{i=1}^4 r_i^2$$

comme  $\sum_{i=1}^4 r_i^2 = 1$ , alors  $\lambda = r_1 r_3 + r_2 r_4$ .

On déduit que la valeur maximal de  $\lambda$  est  $\omega(T^2)$

$$\omega(T^2) = \sup \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right), \quad k = \overline{1, 4} \right\}$$

Donc, le rayon numérique de  $T^2$  est

$$\omega(T^2) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

b) On calcule le rayon numérique de  $T^3$ .

Pour calculer  $W(T^3)$ , on suit la même manière précédant

$$\begin{aligned} W(T^3) &= \{ \langle T^3 X, X \rangle, \quad \|X\| = 1 \} \\ &= \{ x_1 \overline{x_4}, \quad \|X\| = 1 \}. \end{aligned}$$

Et la fonction de lagrange est

$$F(r_1, r_2, r_3, r_4, \lambda) = r_1 r_4 - \lambda \left( \sum_{i=1}^4 r_i^2 - 1 \right)$$

Calculons les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r_1} &= r_4 - 2\lambda r_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_2} &= -2\lambda r_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_3} &= -2\lambda r_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial r_4} &= r_1 - 2\lambda r_4 = 0 \end{aligned}$$

La forme matricielle  $SR = 2\lambda R$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

On remarque que  $S = 2C$  tel que  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on observe que  $\lambda$  est une valeur

propre de  $C$  tel que  $\lambda = \cos(\frac{k\pi}{4})$ .

Alors, le rayon numérique de  $T^3$  est

$$\omega(T^3) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2} = \omega(T^3) > \omega(T)\omega(T^2) = \cos(\frac{\pi}{5}) \cdot \frac{1}{2} = 0.40450$$

**Théorème 3.4.1** [8] Soit  $A \in B(H)$ , alors

$$\omega(A^n) \leq \omega^n(A).$$

**Théorème 3.4.2** [8] Soit  $T, S \in B(H)$ , alors

$$\omega(TS) \leq 4\omega(T)\omega(S)$$

Si  $TS = ST$ , alors

$$\omega(TS) \leq 2\omega(T)\omega(S)$$

**Preuve.** De l'équivalence de norme, théorème [1.3.1] nous le savons

$$\omega(TS) \leq \|TS\| \leq \|T\| \|S\| \leq 4\omega(T)\omega(S).$$

Si  $TS = ST$  alors, on peut supposer que  $\omega(T) = \omega(S) = 1$  pour montrer que  $\omega(TS) \leq 2$ . parceque dans le théorème [1.3.1] le rayon numérique est une norme.

Alors l'inégalité triangulaire et théorème [2.1.1] dans [Gust] et le sous-additivité de  $\omega$ , on a:

$$\begin{aligned} \omega(TS) &= \omega\left(\frac{1}{4}[(A+B)^2 - (A-B)^2]\right) \\ &\leq \frac{1}{4}[\omega((A+B)^2) + \omega((A-B)^2)] \leq \frac{1}{4}[(\omega(A+B))^2 + (\omega(A-B))^2] \\ &\leq \frac{1}{4}[(\omega(A) + \omega(B))^2 + (\omega(A) - \omega(B))^2] \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donc  $\omega(TS) \leq 2\omega(T)\omega(S)$ . ■

**Corollaire 3.4.1** *Soit  $T$  et  $S$  deux opérateurs unitaire, alors*

$$\omega(TS) \leq 1$$

**Preuve.** Soit  $T$  et  $S$  deux opérateurs unitaire, alors  $\|T\| = \|S\| = 1$ .

Donc

$$\omega(TS) \leq \|TS\| \leq \|T\| \|S\| = 1$$

D'où le résultat. ■

**Corollaire 3.4.2** *Soit  $T$  et  $S$  deux opérateurs. Si  $T$  ou  $S$  normal. Alors,*

$$\omega(ST) \leq 2\omega(S)\omega(T)$$

**Preuve.** Soit  $T$  et  $S$  deux opérateurs. Si  $T$  normal alors

$$\omega(ST) \leq \|ST\| \leq \|S\| \|T\|$$

Comme  $T$  normal alors,  $\omega(T) = \|T\|$ . Donc

$$\omega(ST) \leq \|S\| \omega(T) \leq 2\omega(S)\omega(T).$$

C'est qu'il fallait démontrer. ■

# Chapitre 4

## Interactions entre la mécanique quantique et la théorie des opérateurs (Modèle : Image numérique)

En science de l'ingénierie et en physique quantique, il existe une correspondance forte entre les notions de la valeur moyenne d'un observable et l'image numérique d'opérateur au sens mathématique.

Dans la suite nous exposons un rappel sur la physique quantique et la définition de la valeur moyenne d'un observable, en plus des exemples sur le calcul de la valeur moyenne.

### 4.1 Rappel sur la physique quantique

En mécanique classique l'état d'une particule à un instant donné est complètement défini lorsqu'on connaît son vecteur position  $\vec{r}$  et son vecteur quantité de mouvement  $\vec{p}$ . De plus comme toutes les grandeurs physiques associées à cette particule s'expriment en fonction de  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$ , on peut les mesurer avec toute la précision nécessaire sans perturber le mouvement de la particule. Enfin si l'on connaît les forces qui s'exercent sur la particule en chaque point de l'espace, on peut (en résolvant les équations de Newton) prédire sa position et sa vitesse à tout instant. Il en est de même pour l'état d'un système matériel qui est complètement

déterminé si l'on connaît en fonction du temps la position et la vitesse de chacun de ses points.

A l'échelle quantique nous avons vu qu'on ne peut mesurer simultanément la position et la vitesse de la particule et ce fait ne provient pas de la précision limitée des instruments de mesure mais des propriétés de la nature elle-même, exprimées par les relations d'incertitude de Heisenberg. La position et la quantité de mouvement d'une particule ne caractérisent plus son état puis qu'on ne peut plus les mesurer simultanément et définir ainsi une trajectoire.

A la description classique en termes de position et d'impulsion il faut donc substituer une description quantique en termes d'autres données représentatives de l'état du système et des grandeurs physiques qui lui sont associées.

Cette nouvelle vision, différente de notre manière de pensée classique est construite à partir des postulats de la mécanique quantique qui vont nous permettre de décrire :

- L'état d'un système physique à un instant donné.
- Les grandeurs physiques associées au système et la prédiction des résultats de leurs mesures.
- L'évolution du système au cours du temps.
- Les règles de quantification des grandeurs physiques.

### 4.1.1 Les postulats de la mécanique quantique

#### Premier postulat : Etat d'un système

L'état d'un système physique est complètement défini à tout instant  $t$  par la donnée d'un vecteur  $|\Psi(t)\rangle$  appartenant à l'espace des états  $\xi$ .  $|\Psi(t)\rangle$  est appelé vecteur d'état.

En général la norme de  $|\Psi(t)\rangle$  est arbitraire mais il est commode d'utiliser des vecteurs d'état normés, c'est à dire pour lesquels

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = 1$$

**Deuxième postulat : Description d'une grandeur physique**

En mécanique quantique l'état d'un système et les grandeurs mesurables sont représentés par des êtres mathématiques différents : alors que l'état est décrit par un vecteur, les grandeurs physiques sont décrites par des opérateurs.

**Troisième postulat : Mesure d'une grandeur physique**

Les résultats de mesure possibles d'une grandeur physique  $A$  sont strictement les valeurs propres de l'observable  $A$  correspondante.

**Quatrième postulat : Evolution dans le temps**

En mécanique classique l'évolution au cours du temps du mouvement d'un système de  $n$  particules peut être obtenue soit à partir des équations de Lagrange soit à partir des équations de Hamilton-Jacobi qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt} &= \frac{dH}{dp_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{dH}{dq_i}\end{aligned}$$

Où  $H$  est l'hamiltonien du système et  $p_i$  les moments conjugués de chacune des coordonnées généralisées  $q_i$ .

**Cinquième postulat : Quantification des grandeurs physiques**

Ce postulat indique les règles de construction d'une observable  $A$  associée à une grandeur physique  $A$  ayant un équivalent classique. Comme la grandeur  $A$  s'exprime en fonction des variables dynamiques  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$ , l'observable  $A$  s'exprimera en fonction des opérateurs  $\vec{R}$  et  $\vec{P}$  suivant les règles de quantification.

**Définition 4.1.1** [14] (*L'équation de Schrödinger*) On appelle l'équation de Schrödinger indépendante du temps toute équation écrite sous la forme

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + V(x) \right) \Psi(x) = E\Psi(x)$$

## 4.2. Étude le mouvement d'une particule dans une boite à seule dimension

---

Où  $\Psi(x)$  est une fonction de la position,  $V(x)$  est le potentiel et est indépendant du temps,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  où  $h$  constante de Planck,  $m$  est la masse et  $E$  est l'énergie positive car le potentiel est nul.

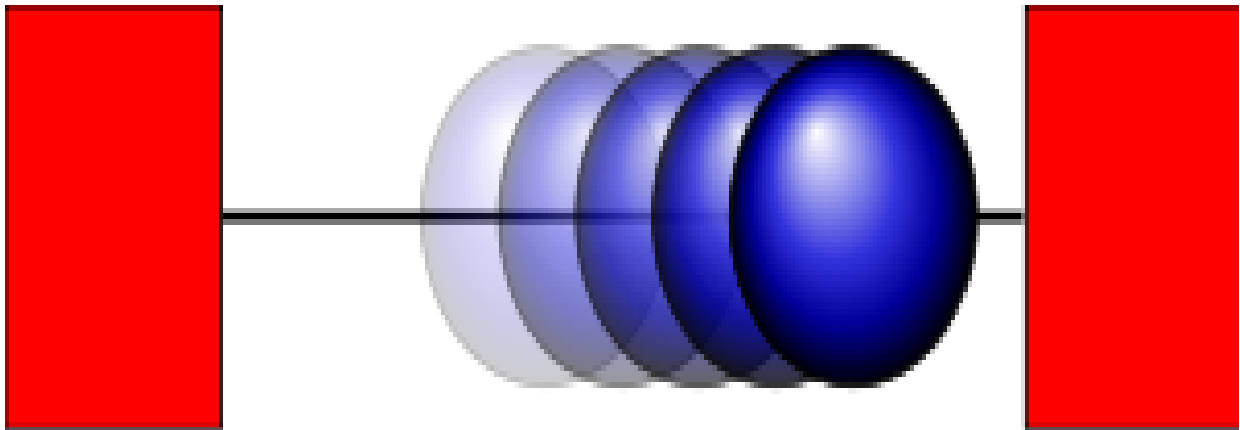
**Définition 4.1.2** [1] (Valeur moyenne) Lorsqu'on mesure la grandeur physique  $A$  sur un grand nombre de systèmes identiques tous dans le même état  $|\Psi(t)\rangle$  On définit la valeur moyenne de  $A$  dans cet état comme la moyenne des résultats obtenus et on la note  $\langle A \rangle$ . On donne sous la forme

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \Psi_1 | x | \Psi_1 \rangle = \int \Psi_1^* x \Psi_1 dx$$

## 4.2 Étude le mouvement d'une particule dans une boite à seule dimension

Le continue de cette paragraphe dans [1]

On veut étudier le mouvement d'une particule dans un domaine borné de  $x = 0$  à  $x = a$  où  $a$  réel. La probabilité d'existence de cette particule à l'extérieur de la boite est nulle, où  $\Psi(x, t) = 0$ , pour  $x > a$  et  $x < 0$



## 4.2. Étude le mouvement d'une particule dans une boite à seule dimension

---

Maintenant, on cherche  $\Psi(x, t)$  dans la boite.

Le potentiel est nul dans la boite et infini à l'extérieur.

Alors, le potentiel ne dépend pas du temps, on cherche seulement la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = E \Psi(x) \Leftrightarrow \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x) = 0$$

On résout l'équation précédente, on remplace  $\frac{2mE}{\hbar^2}$  par  $k^2$  dans l'équation on obtient

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + k^2 \Psi(x) = 0$$

La solution de cette équation est sous la forme

$$\Psi(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

D'après les conditions sur les frontières, on trouve

$$\Psi(x) = B \sin kx, \quad \text{où } k = \frac{n\pi}{a}$$

D'après le premier postulat, on a

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

D'après l'expression de  $k$ , on trouve

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Pour savoir l'état de la particule, on calcule les valeurs moyenne de la position, l'énergie et l'impulsion. On trouve les états fondamentales pour  $n = 1$

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

**La valeur moyenne de position**

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{x} \rangle &= \langle \Psi_1 | x | \Psi_1 \rangle \\
 &= \int_0^a \Psi_1^* x \Psi_1 dx \\
 &= \int_0^a \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) x \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \int_0^a \frac{2x}{a} \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2}\right) dx
 \end{aligned}$$

Par l'intégration par partie, nous donne

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{x} \rangle &= \left[ \frac{2}{a} x \left( \frac{x}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{4\frac{\pi}{a}} \right) \right]_0^a - \frac{2}{a} \int_0^a \left( \frac{x}{2} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{4\frac{\pi}{a}} \right) dx \\
 &= a - \left[ \frac{2}{a} \left( \frac{x^2}{4} + \frac{a}{4\pi} \frac{a}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right) \right]_0^a \\
 &= a - \frac{a}{2} \\
 &= \frac{a}{2}.
 \end{aligned}$$

Donc, la valeur moyenne de position du particule est dans le centre de boite.

**La valeur moyenne de l'impulsion**

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{P} \rangle &= \langle \Psi_1 | P | \Psi_1 \rangle \\
 &= \int_0^a \Psi_1^* P \Psi_1 dx \\
 &= \int_0^a \Psi_1^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_1 dx \\
 &= \int_0^a \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \frac{2\hbar}{\pi i} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \frac{2\hbar}{\pi i} \int_0^a \sin\left(2\frac{\pi x}{a}\right) dx \\
 &= \frac{2\hbar}{\pi i} \left[ \frac{a}{2\pi} \cos\left(2\frac{\pi x}{a}\right) \right]_0^a \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Alors, la valeur moyenne de l'impulsion de la particule dans la boite est nulle. Généralement la valeur moyenne ne donne pas la réalité, comme l'impulsion est representable par un vecreur alors, soit son module est nul ou bien il a un module non nul mais dans deux sens opposés. Pour vérifier ce résultat on calcule la valeur moyenne de  $P^2$

$$\begin{aligned}
 \left\langle \hat{P}^2 \right\rangle &= \langle \Psi_1 | P^2 | \Psi_1 \rangle \\
 &= \int_0^a \Psi_1^* P^2 \Psi_1 dx \\
 &= \int_0^a \Psi_1^* \left( -\hbar^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_1 dx \\
 &= \int_0^a \frac{2}{a} \left( -\hbar^2 \right) \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) dx \\
 &= \frac{2\hbar^2}{a} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \int_0^a \sin^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) dx \\
 &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2}.
 \end{aligned}$$

Donc, l'impulsion du particule dans la boite est non nulle.

L'impulsion est une quantité physique défini classiquement par  $\vec{P} = m \vec{v}$  tel que  $m$  est une masse et  $\vec{v}$  est une vitesse.

La norme quantique de impulsion est un opérateur défini par  $\vec{P} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ .

### La valeur moyenne de l'énergie

$$\begin{aligned}
 \left\langle \hat{E} \right\rangle &= \langle \Psi_1 | H | \Psi_1 \rangle \\
 &= \int_0^a \Psi_1^* H \Psi_1 \\
 &= \int_0^a \frac{2}{a} \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \left( -\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \right) \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2m} P^2 \\
 &= \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2}
 \end{aligned}$$

#### 4.2. Étude le mouvement d'une particule dans une boite à seule dimension

---

Donc, La valeur moyenne de l'énergie est  $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$ , elle est la valeur spéciale associée à vecteur  $\Psi_1$ .

# Bibliographie

- [1] H. Bouchriha, Introduction à la physique quantique, Centre de Publication Universitaire, 2002.
- [2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.
- [3] C. C. Cowen et E. Harel, An Effective Algorithm for Computing the Numerical Range, Université de Purdue, Août 1995.
- [4] M. Crouzeix, Image numérique et calcul fonctionnel hilbertien Problèmes ouverts, UMR CNRS n<sup>o</sup> 6625, France, Janvier 2006.
- [5] S. S. Dragomir, Inequalities for the numerical radius, the norm and the maximum of the real part of bounded linear operators in Hilbert spaces, Linear algebra and its Applications 428, Australia, Mars 2008.
- [6] F. Faure, Notes de cours sur la Mécanique quantique, Université Joseph Fourier, Grenoble, novembre 2015.
- [7] H. Gaaya, Inégalités de von Neumann sous contraintes, image numérique de rang supérieur et applications a l'analyse harmonique, HAL, France, Septembre 2013.
- [8] K. E. Gustafson et K. M. R. Duggirala, Numerical Range, The Field of Values of Linear Operators and Matrices, Springer, New York, 1997.
- [9] T. R. Harris, M. Mazzella, L. J. Patton, D. Renfrew, I. M. Spitkovsky, Numerical ranges of cube roots of the identity, Linear algebra and its applications 435, United States, Juin 2011.

- 
- [10] A. Jensen, Lecture Notes on Spectra and Pseudospectra of Matrices and Operators, Université de Aalborg, 2009.
- [11] D. Keeler, L. Rodman et I. Spitkovsky, The numerical range of  $(3 \times 3)$  matrices, Linear algebra and its applications. 252, 1997.
- [12] H. Klaja, Thèse doctorat "Autour des projections orthogonales: image numérique, principe g'incertitude et problème du sous-espace invariant", Université de Lille, 2014.
- [13] R. Kippenhahn, Über den Wertevorrat einer Matrix, Math. Nachr. 6, 1951.
- [14] R. L. Liboff, Introductory quantum mechanics, Addison-Wesley, New York, 1980.
- [15] S. Mecheri, Some recent results on operator commutators and related operators with applications, Accepté à springer.
- [16] K. Pravda-Starov, Thèse doctorat "Etude du pseudo-spectre d'opérateurs non auto-adjoints", Université de Rennes I, Juin 2006.
- [17] Z. Puchala, J. A. Miszczak, P. Gawron, C. F. Dunkl, J. A. Holbrook et K. Życzkowski, Restricted numerical shadow and geometry of quantum entanglement, Arxiv: 1202.2524v2 (quant-ph), 4 Octobre 2012.
- [18] S. Raouafi, Thèse magistère "Image numérique et le théorème de Crouzeix", Université de Laval, 2010.
- [19] L. Rodman et I. Spitkovsky,  $(3 \times 3)$  matrices with a flat portion on the boundary of the numerical range, v. 397, 2005.
- [20] H. Schneider, The Numerical Range of  $3 \times 3$  Matrices, Nook-Hollad, New York, 20 August 1995.
- [21] J. H. Shapiro, Notes on the numerical range, Université de Michigan State, USA, 2010.
- [22] M. Soussane, Thèse magistère "Inégalités des opérateurs auto-adjoints", Université d'Oran, Juin 2014.

- [23] C. Tretter, Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications, Imperial College Press, London, 2008.
- [24] K. Życzkowski, Restricted Numerical Range and some its applications, Université Jagiellonian, Cracovie, et l'Académie des sciences, Varsovie, Juin 2010.

## Code matlab Pour calcule l'image numérique

```

A=input('input the matrix A=')% example: [0 1 1;1 0 0;0 1 0]

nm=ceil(norm(A));
th=[0:.01:6.29];
k=1;
w=zeros(1,630);
for j=1:630
Ath=(exp(i*(-th(j))))*A;
Hth=(Ath+Ath')/2;
[r e]=eig(Hth);
e=real(diag(e));
m=max(e);
s=find(e==m);
if size(s,1)==1
w(k)=r(:,s)'*A*r(:,s);
%
% This is the point of the numerical range contributed by
% v_t=r(:,s) when the eigenspace of Hth (H_t) is one dimensional.
%
else
Kth=i*(Hth-Ath);
pKp=r(:,s)'*Kth*r(:,s);
%
% The matrix Q described above is r(:,s)
%
[rr ee]=eig(pKp);
ee=real(diag(ee));
mm=min(ee);
sm=find(ee==mm);
w(k)=rr(:,sm(:,1))'*r(:,s)'*A*r(:,s)*rr(:,sm(:,1));
%
% This is the point of the numerical range contributed by
% v_t^- = r(:,s)*rr(:,sm(:,1))
%
k=k+1;
mM=max(ee);
sM=find(ee==mM);
w(k)=rr(:,sM(:,1))'*r(:,s)'*A*r(:,s)*rr(:,sM(:,1));
%
% This is the point of the numerical range contributed by v_t^+
%
end
k=k+1;
end
fill(real(w), imag(w), 'y')
axis([-nm, nm, -nm, nm])
axis('equal')

```

## Résumé

Ce mémoire s'articule autour d'une notion spectrale assez importante, appelée l'image numérique des opérateurs. Dans le premier chapitre de ce mémoire on fournit quelques éléments de base sur les opérateurs. De plus nous donnons les définitions et quelques propriétés du spectre, résolvante d'un opérateur et quelques techniques opératoriennes dont on aura besoin pour la suite. Le second chapitre est consacré à étudier l'image numérique et le rayon numérique d'un opérateur avec leurs propriétés et des exemples, en particulier l'image numérique des opérateurs dans un espace de dimension deux, et la relation entre l'image numérique et le spectre d'un opérateur. Dans le troisième chapitre on propose quatre parties: D'abord, nous exposons les classifications des images numériques d'une matrice  $(3 \times 3)$  avec quelques exemples et leurs figures. Ensuite, nous démontrons l'égalité  $W(T + S) = W(T) + W(S)$  avec  $T$  et  $S$  deux matrices carrées de dimensions finies. Aussi, nous exposons deux théorèmes qui lient entre le maximum de la partie réelle du spectre, la norme et le rayon numérique d'un opérateur, de plus on a pu extraire quelques corollaires de ce théorème. On termine ce chapitre par quelques théorèmes sur le rayon numérique du produit de deux opérateurs avec un exemple. Dans le dernier chapitre nous donnons un rappel sur la physique quantique avec quelques, définitions utiles pour faire la correspondance entre la mécanique quantique et la théorie des opérateurs, précisément on applique les notions de l'image numérique pour étudier le mouvement des particules dans une boîte.

**Mots-clés :** opérateur, image numérique, rayon numérique, spectre et valeur moyenne d'un observable.

## Summary

This dissertation is based on a relatively interesting spectral notion, called numerical range of operators. In the first chapter some basic elements are provided on operators. We give the definition and some properties for a spectrum, resolvent of an operator and few technics of operators that will be needed to the following. The second chapter is devoted to study the numerical range and numerical radius of operators with their properties and examples, especially the numerical range of the operators in a space of dimension two, and the relationship between the numerical range and the spectrum of an operator. In the third chapter we propose four parts: First, we outline the classifications of numerical range of a matrix  $(3 \times 3)$  with some examples and figures.

Next, we demonstrate the equality  $W(T + S) = W(T) + W(S)$  with  $T$  and  $S$  are two square finite matrices. Also, we present two theorems which link the maximum of the real part of spectrum, the norm and the numerical radius of an operator, and we were able to extract some corollaries of this theorem. In the end of this chapter we discuss some theorems on the numerical radius of product of two operators with an example. In the last chapter we give a reminder about quantum physics with some definitions useful for correspondence between quantum theory and operator theory, precisely the notions of the numerical range is applied to study the movement of particles in a box.

**Key words:** operator, numerical range, numerical radius, spectrum and middle value of an observable.

## ملخص

تتمحور هذه المذكرة حول مفهوم طيفي هام خاص بنظرية المؤثرات يسمى "الصورة الرقمية". في الفصل الأول قدمنا بعض التعاريف و الخصائص الأولية للطيف و المجموعة الحالة لمؤثر ما, بالإضافة الى بعض التقنيات المستعملة في هذا التخصص. الفصل الثاني مخصص لدراسة الصورة الرقمية و نصف القطر الرقمي لمؤثر ما, و خصوصا الصورة الرقمية الصورة الرقمية لمؤثر في فضاء ذو بعد 2. أما في الفصل الثالث عرضنا أربعة اجزاء : أولا أصناف الصورة الرقمية لمصفوفة  $(3 \times 3)$ , ثانيا اثبات المساواة بين الصورة الرقمية لمجموع و مجموع الصورة الرقمية لكل مؤثر, ثالثا نظريات تربط بين بعض القيم الطيفية الشهيرة, أما في الجزء الرابع قدمنا مؤثرين منتهيي البعد نظريات حول نصف القطر الرقمي لجداء مؤثرين. و ختمنا هذه المذكرة بمقاربة بين بعض المفاهيم المعروضة و ميكانيكا الكم و علاقتها بنظرية المؤثرات عموما.

**الكلمات المفتاحية :** الصورة الرقمية, نصف القطر الرقمي, الطيف, القيمة المتوسطة للملاحظ.