

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique  
UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL-OUED  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire Présenté En Vue De L'Obtention Du Diplome :  
Master En Mathématiques  
Spécialité : Mathématiques Fondamentales Et Appliquées  
Par : Benglia Amor / Chekka Sana

Titre :

---

---

Un Modèle Mathématique Décrivant Le Comportement  
Thermomécanique De L'écoulement Du Fluide Navier-Stokes

---

---

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Safaa Mefteh	UMKB	Président
Dr. Yaccine Letoufa	UMKB	Encadreur
Dr. Hadjamar Tidjani	UMKB	Examinatrice

juin 2024

## Dédicace

Nous dédions ce modeste mémoire à :

Nos parents,

Nos frères,

Nos soeurs,

Nos amis,

Et à tous ceux qui nous sont chers et proches.

Amor / Sana

## REMERCIEMENTS

Au nom de Dieu, Très Miséricordieux, Très Miséricordieux

Tout d'abord, nous remercions Dieu de nous avoir donné la volonté, la  
santé et le courage de

Complétez cette thèse.

Un merci spécial au professeur Yassine Letoufa pour son aide, et aussi  
pour notre bénéfice

Conseils et encouragements pendant cette période.

Nous adressons nos sincères remerciements aux membres du jury qui  
ont accepté de l'évaluer

Travail et tous les enseignants du département de mathématiques.

Nous remercions nos chers parents, qui ont toujours été là pour nous.

Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une  
grande aide.

Enfin, nous aimerions remercier tous les amis et tous ceux qui ont  
contribué d'une manière ou d'une autre

Le dernier à réaliser ce travail.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Éléments de modélisation</b>	<b>4</b>
1.1 Incompressibilité . . . . .	5
1.2 Conservation de la masse . . . . .	8
1.3 Conservation et dérivation d'une grandeur générale. . . . .	9
1.4 Conservation du moment cinétique. . . . .	10
1.5 Lois de comportement des fluides classiques . . . . .	12
1.6 Modèles des fluides Navier – Stokes . . . . .	15
<b>2 Modélisation de l'écoulement non isotherme d'un fluide</b>	<b>17</b>
2.1 Lois de conservation et équation de l'énergie . . . . .	17
2.2 Modèle Non-isotherme d'un fluide Navier – Stokes . . . . .	20
2.3 Les modèles stationnaires . . . . .	23
2.4 Conditions aux limites et initiales . . . . .	24
2.4.1 Hypothèses . . . . .	30
<b>3 Problème d'évolution de Stokes avec des conditons de Fourie et de Tresca</b>	<b>32</b>

3.1	Introduction et position du problème . . . . .	33
3.2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	36
3.3	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	39

# Introduction

Les mathématiques appliquées sont l'application de méthodes mathématiques dans divers domaines tels que la science, l'ingénierie, les affaires, l'informatique et l'industrie. Les mathématiques appliquées sont une combinaison de sciences mathématiques et de connaissances spécialisées. Le terme "mathématiques appliquées" décrit également la spécialité professionnelle dans laquelle les mathématiciens travaillent à la résolution de problèmes pratiques en formulant et en étudiant des modèles mathématiques[1].

Nous consacrons ce mémoire à la modélisation du mouvement des fluides et de la thermodynamique, dans le but de formuler des équations aux dérivées partielles qui décrivent ce mouvement, d'identifier les systèmes appropriés pour chaque phénomène décrit, puis de les traiter mathématiquement.

Pour décrire mathématiquement la cinématique d'un fluide, c'est-à-dire le mouvement des particules, indépendamment des propriétés du fluide, on fait appel à la géométrie analytique. Deux systèmes cohabitent, l'un et l'autre présentant des avantages dans des situations particulières. Il s'agit de :

la description lagrangienne ; la description eulérienne. Tandis que la première consiste à décrire les trajectoires suivies par les particules au cours du temps, la seconde décrit le champ de vitesses à un instant donné.

Comme dans d'autres domaines, la cinématique sert de base à la dynamique, calcul des mouvements en fonction des forces appliquées. Les deux descriptions sont alors

liées mathématiquement par la relation des dérivées[2]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \text{grad})$$

où le terme  $\frac{d}{dt}$  dérivée totale appelée «particulaire», ou encore « dérivée lagrangienne, et le terme  $\frac{\partial}{\partial t}$  de dérivée partielle « eulérienne » par un observateur en un point fixe.

Par conséquent, les équations de base peuvent être obtenues à partir de la conservation des relations de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

Le tenseur de contraintes (ou tenseur de pression, incluant les contraintes visqueuses et compressives) et le flux de chaleur sont représentés. Pour les deux, il est supposé être lié au gradient.

Lorsque le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température, on obtient la loi de Fourier.

Le tenseur des contraintes est proportionnel au tenseur de la vitesse de déformation (hypothèse de Stokes). Dans une dimension de l'espace, cette expression s'exprime en disant que la pression visqueuse est linéairement proportionnelle au taux de cisaillement. C'est ce qui définit le flux « newtonien ».

Donc notre mémoire suit le formalisme général suivant : il se compose de trois chapitres.

**Dans le premier chapitre**, on introduit des notions générales de la mécanique de milieu continue ainsi que les différentes équations et des outils de modélisation.

**Dans le deuxième chapitre**, on s'intéresse à la modélisation de l'écoulement non isotherme du fluide, c'est-à-dire que les coefficients de viscosité du fluide dépendent de la température. Nous développons ici un système des edp composé de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et de l'équation de conservation de

l'énergie dérivée de la loi de Fourier.

**Enfin, le dernier chapitre,** sera consacré à l'étude variationnel du système de Stokes dans le cas d'évolution, dans un domaine borné  $\Omega$  à trois dimensions avec des conditions aux limites mixed, de type de Tresca sur la frontière inférieure du domaine, Dirchlet sur le bord latéral et Condition de Fourier sur le bord supérieur.

# Chapitre 1

## Eléments de modélisation

Considérons un fluide occupant un domaine  $\omega \subset \mathbb{R}^3$  pendant un intervalle de temps  $[0; T]$ [3]. Le fluide est caractérisé en tout point  $x \in \omega$  et pour tout  $t \in [0; T]$  par :

- sa vitesse  $u(x; t)$ ,
- sa densité  $\varrho(x; t)$ ,
- sa pression  $p(x; t)$ ,
- sa température  $T(x; t)$ ,

Le fluide vérifie les lois générales de conservation de[4] :

- la masse,
- la quantité du mouvement, ou moment cinétique,
- La loi de conservation de l'énergie.

Dans lesquelles interviennent des "lois de comportement" dépendant du fluide (incompressibilité, homogénéité, relation entre forces de frottement et déformations,...).

L'objet de ce chapitre est d'exprimer ces lois par des équations aux dérivées partielles

## 1.1 Incompressibilité

Considérons la partie du fluide occupant une région  $\omega$  à un instant  $t_0$ . Son volume est  $V = \int_{\omega} dx$ . Suivons le mouvement de cette partie du fluide[5].

A l'instant  $t \geq t_0$ , on note  $y(x; t)$  la position de la particule située en  $x$  à l'instant  $t$ ;

$$Y(t) = \{y(x, t) : x \in \omega\}$$

est la région occupée.

Le volume occupé à l'instant  $t$  est

$$V(t) = \int_{Y(t)} dy.$$

En effectuant le changement de variable  $y \rightarrow x$  il vient

$$V(t) = \int_{\omega} \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x, t) dx. \quad (1.1)$$

Sa dérivée est

$$\frac{dV}{dt}(t) = \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x, t) dx. \quad (1.2)$$

Un fluide est dit incompressible si le volume occupé par toute partie du fluide se conserve dans son mouvement. C'est équivalent à la nullité de la dérivée du volume[6], c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x, t_0) = 0, \forall x, \forall t_0. \quad (1.3)$$

Calculons cette quantité. On a

$$\det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \det \left( \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3} \right). \quad (1.4)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} &= \det \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3} \right) + \\ &\det \left( \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3} \right) + \\ &\det \left( \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

La vitesse du fluide au point  $y(x; t)$  à l'instant  $t$  est

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = u(y(x, t), t). \quad (1.6)$$

A l'instant  $t_0$  on a  $y(x; t_0) = x$  donc

$$\frac{\partial y}{\partial x_j}(x, t_0) = \frac{\partial x}{\partial x_j} = e_j \text{ (j}^{eme} \text{ vecteur de base)}. \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t_0) = u(x, t_0). \quad (1.8)$$

D' où

$$\det \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 & 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}. \quad (1.9)$$

On calcule de même les autres déterminants, d'où

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) (x, t_0) = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) (x, t_0) = (\operatorname{div} u)(x, t_0) \quad (1.10)$$

L'incompressibilité est équivalente à

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \omega \times ]0, T[ . \quad (1.11)$$

Ces calculs n'ont de sens que si  $v$  est assez régulier.

**Remarque 1.1.1** *Pour toute fonction scalaire  $\varphi$  on a*

$$\int_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial \omega} \varphi(s) n_i(s) ds \quad (1.12)$$

où

$\partial \omega$  est la frontière de  $\omega$  .

$n(s)$  est la normale extérieure en  $s$  à  $\partial \omega$ .

$ds$  est la mesure superficielle sur  $\partial \omega$ .

Si  $u$  est une fonction vectorielle on a donc la formule de Gauss-Ostrogradski.

$$\int_{\omega} (\operatorname{div} V)(x) dx = \int_{\partial \omega} V(s) \cdot n(s) ds. \quad (1.13)$$

La dérivée du volume occupé à l'instant  $t$  par le fluide qui occupait la région  $\omega$  à l'instant  $t_0$  vaut, d'après (1.3) et (1.10) à

$$\frac{dV}{dt}(t_0) = \int_{\omega} (\operatorname{div} u)(x, t_0) dx = \int_{\partial \omega} u(s, t_0) \cdot n(s) ds. \quad (1.14)$$

En observant que  $u \cdot n$  est le flux à travers la surface  $\partial \omega$ , cette formule exprime

le fait que la variation de volume est égale à l'intégrale du flux.

## 1.2 Conservation de la masse

Considérons à nouveau la partie du fluide qui occupe la région  $\omega$  à l'instant  $t_0$ . Sa masse est  $M = \int_{\omega} \varrho(x; t_0) dx$ . A l'instant  $t \geq t_0$  cette partie du fluide occupe la région  $Y(t)$  et sa masse est

$$M = \int_{Y(t)} \varrho(y; t) dy \quad (1.15)$$

En effectuant le changement de variable  $y \longrightarrow x$  il vient

$$M = \int_{\omega} \varphi(x; t) dx \quad (1.16)$$

où

$$\varphi(x, t) = \varrho(y(x; t), t) \left( \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x, t) \right) \quad (1.17)$$

La loi de conservation de la masse dit que  $M$  est indépendant de  $t$ , donc que sa dérivée est nulle, i.e.

$$\int_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t_0) dx = 0, \forall t_0 \quad (1.18)$$

Ce qui est équivalent à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t_0) = 0, \forall t_0 \quad (1.19)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y(x, t), t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varrho}{\partial x_i}(y(x, t), t) \frac{\partial y_i}{\partial t}(x, t) (\det \frac{\partial y_i}{\partial t})(x, t) \\ &\quad + \varrho(y(x, t), t) \left( \frac{\partial}{\partial t} \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)(x, t) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Rappelons, que

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x, t) = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \quad , \quad \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j). \quad (1.21)$$

Donc

$$\left( \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) (x, t) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (1.22)$$

et il vient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t_0) &= \left( \frac{\partial \varrho}{\partial t}(x, t_0) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varrho}{\partial x_i}(x, t_0) u_i(x, t_0) \right) \times 1 + \varrho(x, t_0) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x, t_0) \\ &= \left( \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varrho u_i}{\partial x_i} \right) (x, t_0) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Donc l'équation (1.19) de conservation de la masse est équivalente à

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \text{ dans } \omega \times ]0, T[ \quad (1.24)$$

### 1.3 Conservation et dérivation d'une grandeur générale.

Soit  $\varphi$  une grandeur liée au fluide (densité, pression, ...) définie en tout point  $x$  et à tout instant  $t$ . Sa valeur totale dans une région  $\omega$  à l'instant  $t_0$  est  $\Phi(t_0) = \int_{\omega} \varphi(x; t_0) dx$ .

A l'instant  $t \geq t_0$  cette partie du fluide occupe la région  $Y(t)$  et on définit.

$$\Phi(t) = \int_{Y(t)} \varphi(x, t_0) dy \quad (1.25)$$

Les calculs ci-dessus montrent, en remplaçant  $\varrho$  par que  $\phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0) = \int_{\omega} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi u) \right) (x, t_0) dx \quad (1.26)$$

De façon générale la conservation de  $\phi$  est donc équivalente à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi u) = 0 \quad (1.27)$$

On retrouve la conservation du volume (incompressibilité) en prenant  $\varphi \equiv 1$ , et la conservation de la masse en prenant  $\varphi = \varrho$ .

**Remarque 1.3.1** Avec la formule de **Gauss-Ostrogradski** il vient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0) = \int_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t_0) dx + \int_{\partial \omega} \varphi(s, t_0) u(s, t_0) n(s) ds \quad (1.28)$$

Ce qui s'interprète ainsi :

- la 1<sup>ère</sup> intégrale représente la variation de  $\varphi$  dans le domaine fixe  $\omega$ .
- la 2<sup>ème</sup> intégrale représente le flux de  $\varphi$  à travers la frontière  $\partial \omega$ .

## 1.4 Conservation du moment cinétique.

Considérons encore le fluide qui occupe la région  $\omega$  au temps  $t_0$ . Son moment cinétique est  $M = \int_{\omega} \varrho(x; t_0) u(x; t_0) dx$ . A l'instant  $t$  ce fluide occupe la région  $Y(t)$  et son moment cinétique (ou quantité de mouvement) est

$$M(t) = \int_{Y(t)} \varrho(y; t) u(y; t) dy \quad (1.29)$$

En l'absence de forces ce moment serait conservé. En présence de forces internes  $F^{inter}$  ou externes  $F^{exter}$  la dérivée de la quantité de mouvement égale la force appliquée.

$$\frac{dM}{dt}(t_0) = \int_{\omega} F(x, t_0) dx \quad (1.30)$$

où

$$F = F^{inter} + F^{exter}. \quad (1.31)$$

**Les forces externes.** Par exemple la gravitation.

$$F^{exter} = \rho g \quad \text{où } g \text{ est le champ de gravité.} \quad (1.32)$$

**Les forces internes.** Sont celles contraintes résultant des pressions et du mouvement permanent entre les particules d'un fluide, Elles sont reliées à la vitesse  $u$  et la pression  $p$ .

Les grandeurs  $M$  sont vectorielles, on va calculer la  $i^{eme}$  composante. D'après (1.26) il vient

$$\int_{\omega} \left( \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \text{div}(\rho u_i u) \right) (x, t_0) dx = \int_{\omega} F_i(x, t_0) dx \quad (1.33)$$

Ceci est vérifié pour tout  $\omega$ ,  $t_0$  et  $i$  donc,  $\forall i$ ,

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \text{div}(\rho u_i u) = F_i \text{ dans } \omega \times ]0, T[ \quad (1.34)$$

Le premier membre peut s'écrire

$$u_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) \right) + \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (1.35)$$

D'après l'équation (1.24) de conservation de la masse le 1<sup>er</sup> terme est nul.

L'équation (1.34) de conservation du moment cinétique s'écrit alors

$$\varrho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \varrho g_i + F_i^{inter} \quad (1.36)$$

$g_i$  la  $i^{ieme}$  composante du champ gravitationnelle  $g$ .

## 1.5 Lois de comportement des fluides classiques

La question posée : Quelle est la forme de la relation entre la force interne  $F^{inter}$ , la vitesse  $u$  et la pression  $p$ . Chaque fluide est caractérisé par une spécifique loi de comportement prenant en compte les forces suivantes

**La force de pression.**

$$F^{press} = -\nabla p \quad (1.37)$$

où  $\nabla$  est le vecteur gradient de composantes  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Observons que la force totale due à la pression  $p$  est

$$\int_{\omega} -(\nabla p)(x, t) dx = \int_{\partial\omega} -p(s, t) n(s) ds \quad (1.38)$$

Il s'agit donc de la force exercée sur le fluide occupant la région  $\omega$  par le matériau occupant la région  $\Omega \setminus \omega$ .

**La force de frottement des particules**

Elle est liée aux déformations du fluide en mouvement triaxial. Sa  $i^{ieme}$  composante est

$$F_i^{frott} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 d_{jj}(u) \right) + 2\mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} d_{ij}(u). \quad (1.39)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des coefficients de viscosité et où  $D = (d_{ij}(u))$  est le tenseur des

vitesse de déformation, de composantes

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), 1 \leq i, j \leq 3 \quad (1.40)$$

Donc

$$\begin{aligned} F_i^{frott} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \mu \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{div} u + \mu \Delta u_i \end{aligned} \quad (1.41)$$

**Remarque 1.5.1** Les forces internes  $F^{inter}$  s'écrit encore  $F^{inter} = (F_i^{inter})_i$ ,

$$F_i^{inter} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (i=1,2,3) \quad (1.42)$$

où

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \sum_{i=1}^3 d_{ii}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad (1.43)$$

Les  $\sigma_{ij}$  forment le tenseur des contraintes et cette relation et elle s'appelle *loi de comportement*.

**Remarque 1.5.2** La loi de comportement (1.43) s'écrit de manière vectorielle

$$\sigma = 2\mu D(u) + \lambda \operatorname{Tr} D(u) Id_3 - p Id_3 \quad (1.44)$$

où

–  $D = (d_{ij}(u))$  est le tenseur des taux de déformation (défini par (1.40)).

–  $Id_3$  est la matrice identité de rang 3.

–  $TrD(u)$  désigne la trace de  $D(u)$  définie par

$$TrD(u) = \sum_{i=1}^3 d_{ii}(u) \quad (1.45)$$

**Remarque 1.5.3** *Un fluide est dit **parfait** si les forces de frottement sont nulles, donc si les coefficients de viscosité  $\lambda$  et  $\mu$  sont nuls.*

**Remarque 1.5.4** *La conservation du moment pour un fluide parfait est donc*

$$\varrho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) = \varrho g - \nabla p \quad (1.46)$$

**Forme générale de l'équation du mouvement :**

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \text{div}(\sigma) + f \quad (1.47)$$

où  $f = (f_i)$  un champs de forces extérieures et  $\sigma = (\sigma_{ij})$  est le tenseur des contraintes (qui exprime les forces intérieure).

En particulier si l'on substitue l'équation de comportement (1.43) dans (1.47) on déduit **l'équation du mouvement pour un fluide classique,**

$$\varrho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - (\lambda + \mu) \frac{\partial \text{div} u}{\partial x_i} - \mu \Delta u_i = \varrho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (i=1,2,3) \quad (1.48)$$

Ce qui s'écrit, sous forme vectorielle :

$$\varrho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) - (\lambda + \mu) \nabla \text{div} u - \mu \Delta u = \varrho g - \nabla p \quad (1.49)$$

## 1.6 Modèles des fluides Navier – Stokes

En dimension 3 on a 5 inconnues scalaires :  $u_1, u_2, u_3, p$  et  $\rho$ .

La conservation de la masse et du moment donnent les équations (1.24) et (1.49), c'est-à-dire 4 équations scalaires.

Il manque une équation, on considère l'incompressibilité qui comme une loi supplémentaire. On a vu (1.11) que

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{1.50}$$

Un fluide visqueux et incompressible est donc décrit par les équations suivantes,

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) - \mu \Delta u = \rho g - \nabla p \end{cases} \tag{1.51}$$

dites de Navier–Stokes avec densité variable (i.e. Navier–Stokes Non-Homogène).

### Equations de Navier–Stokes Homogène.

Le fluide est dit homogène si sa densité est indépendante de  $x$ . Alors l'équation de conservation de la masse se réduit à  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  donc finalement à  $\rho = \rho_0$  constante indépendante de  $x$  et  $t$ .

Un fluide visqueux incompressible et homogène est donc décrit par les équations suivantes, dites de **Navier–Stokes**.

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u = g - \nabla p \end{cases} \tag{1.52}$$

où

$\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$  est le coefficient de viscosité cinématique.

$\nu = \frac{p}{\rho_0}$  est la pression normalisée.

### Equations d'Euler.

Un fluide est dit parfait s'il est non visqueux, c'est à-dire si les forces internes de frottement sont nulles, donc si les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont nuls. Donc  $\nu = 0$ .

Un fluide parfait incompressible et homogène est donc décrit par les équation suivantes, dites d'Euler.

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = g - \nabla p. \end{cases} \quad (1.53)$$

### Equations de Navier–Stokes linéarisées.

Lorsque la vitesse  $u$  est assez petite, le terme non-linéaire  $(u \cdot \nabla)u$  peut être négligé.

Un fluide incompressible et homogène animé d'un mouvement assez lent est donc d'écrit par les équations linéarisées suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = g - \nabla p. \end{cases} \quad (1.54)$$

### Equations de Stokes

Un fluide parfait incompressible, homogène et d'un écoulement stationnaires est donc décrit par les équation suivantes,

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ -\nu \Delta u = g - \nabla p. \end{cases} \quad (1.55)$$

dites d'Stokes.

(Ecoulements stationnaires, lorsque la vitesse ne varie pas avec le temps)

# Chapitre 2

## Modélisation de l'écoulement non isotherme d'un fluide

Nous présentons ici brièvement les lois de conservation évoquées dans le chapitre 1. A partir de ces lois on cherche les équations aux dérivées partielles e.d.p modélisant l'écoulement non isotherme d'un fluide Navier–Stokes dans un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  pendant un intervalle de temps. Ensuite, nous donnons le modèle stable (ou stationnaire) pour cet écoulement. Pour la suite nous considérons un milieu continu qui occupe un domaine ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  pendant un intervalle de temps  $[0, T]$ . Pour les références bibliographiques, nous avons consulté [15].

### 2.1 Lois de conservation et équation de l'énergie

Les problèmes de mécanique des milieux continus non isothermes sont modélisés d'une part par les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement couplées à la loi de conservation de l'énergie, et d'autre part par des lois de comportement spécifiques à chaque type de milieu continu.

i) La loi de conservation de la masse. Soit  $v(x; t)$  le champ des vecteurs vitesse à

l'instant  $t \in [0, T]$  des points  $x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega$  du milieu continu en mouvement par rapport au repère  $Ox$ . La forme locale de la conservation de la masse est

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div}(v) = 0 \quad (2.1)$$

où  $v(x; t)$  est le champ des vitesses,  $\rho = \rho(x; t)$  est la densité du milieu à l'instant  $t$  des points  $x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega$ .  $\nabla$  est le vecteur gradient de composantes  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). (voir chapitre 1)

ii) La loi de conservation de la quantité de mouvement. Elle est dérivée du principe fondamental de la dynamique, voir chapitre 1, l'équation (2.1) conduit à,

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = \operatorname{div}(\sigma) + \rho f \quad (2.2)$$

où

$f = (f_i)$ , ( $i = 1; 2; 3$ ), représente une distribution volumique de forces extérieures.

$\sigma = (\sigma_{ij})$ , ( $i; j = 1; 2; 3$ ), est le tenseur des contraintes résultant du taux de déformation.

iii) La loi de conservation de l'énergie.

Le premier principe de la thermodynamique établit que, lors de toute transformation, il y a conservation de l'énergie, Si le système est fermé, la variation de son énergie est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, par transfert thermique (chaleur) et transfert mécanique (travail). Ce qui donne la loi suivante :

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sigma \cdot D(v) - \operatorname{div}(q) + R \quad (2.3)$$

t.q.

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + v \cdot \nabla E \\ \sigma \cdot D(v) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} d_{ij}(v) \end{cases} \quad (2.4)$$

où

- $E$  est l'énergie interne spécifique du milieu continu .
- $R$  est l'apport d'énergie par unité de masse et de temps .
- $q$  , de composantes  $q_i$  , est le vecteur transfert thermique.
- $D(v)$  est le tenseur des taux de déformation, avec des composantes

$$d_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), 1 \leq i, j \leq 3 \quad (2.5)$$

**Récapitulation.** Les lois de conservation nous fournissent trois équations scalaires et vectorielles :

1. L'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div}(v) = 0 \quad (2.6)$$

2. Les équations du mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = \operatorname{div}(\sigma) + f \quad (2.7)$$

3. L'équation de l'énergie :

$$\rho \left( \frac{\partial E}{\partial t} + v \cdot \nabla E \right) = \sigma \cdot D(v) - \operatorname{div}(q) + R. \quad (2.8)$$

**Remarque 2.1.1** Sachant que le tenseur des contraintes  $\sigma$  est symétrique ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ), le problème comporte quatorze inconnues ; les six composantes  $\sigma_{ij}$ , les trois composantes  $v_i$  de la vitesse, la densité  $\rho$ , l'énergie interne  $E$  ; en plus les composantes  $q_i$

du vecteur transfert thermique.

**Remarque 2.1.2** *D'un point de vue mathématique et physique, cinq équations ne suffisent pas pour déterminer quatorze inconnues. Les lois de conservation doivent être complétées par d'autres relations appelées lois de comportement.*

**Remarque 2.1.3** *S'il s'agit d'un problème de statique ou dit stationnaire or stable, le premier membre des équations (2.7) est identiquement nul et nous les appelons alors "équations d'équilibre".*

## 2.2 Modèle Non-isotherme d'un fluide Navier – Stokes

Les équations fondamentales pour l'écoulement non isotherme d'un fluide Navier-Stokes sont représentées par le Eq., combiné à la condition d'incompressibilité  $\operatorname{div} v = 0$  et à la loi de comportement du fluide Newtonienne (1.43) – (1.44), que nous avons déjà évoquée au chapitre 1. Rappelons que le tenseur des contraintes d'un fluide Newtonien s'écrit

$$\sigma = 2\mu D(v) + [\lambda \operatorname{Tr} D(v) - p] Id_3 \quad (2.9)$$

Si le fluide est incompressible, c'est à dire son divergence est nul,

$$\operatorname{div}(v) = 0,$$

ce qui vaut  $\operatorname{Tr} D(v) = 0$ . La loi de comportement (2.9) devient alors

$$\sigma = 2\mu D(v) - p Id_3 \quad (2.10)$$

**Remarque 2.2.1** *On remarque qu'un fluide Newtonien incompressible a un coeffi-*

cient de viscosité spécifique  $\mu$  et est déterminé expérimentalement. Le fluide étant non isotherme, sa viscosité dynamique dépend de la température  $T$ ;

$$\mu = \mu(T).$$

La loi de comportement d'un fluide Newtonien incompressible non-isotherme est donc

$$\sigma = 2\mu(T)D(v) - pId_3 \quad (2.11)$$

Rappelons que l'équation de la conservation de la masse (2.7) implique que pour un fluide incompressible et Homogène se réduit à  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  donc on a

$$\rho = \text{constante}$$

Il est même possible de fixer  $\rho = 1$ , et revient simplement à choisir l'unité de densité. Le terme :  $\sigma.D$  dans (2.8), parfois appelé fonction de dissipation, peut être simplifié,

$$\sigma.D(v) = (2\mu(T)D(v) - pI) .D(v) = 2\mu(T)D(v).D(v) - p\text{Tr}D(v). \quad (2.12)$$

Puisque le fluide est incompressible ( $\text{Tr}D(v) = 0$ ), il vient que

$$\sigma.D(v) = 2\mu(T)D(v).D(v). \quad (2.13)$$

et l'équation de l'énergie (2.8) devient

$$\frac{dE}{dt} = 2\mu(T)D(v).D(v) - \text{div}(q) + r \quad (2.14)$$

On suppose que

- l'énergie interne du fluide est donnée par la loi

$$\frac{dE}{dt} = C_v(T) \frac{dT}{dt} \quad (2.15)$$

où  $C_v(T)$  désigne la chaleur spécifique à volume constant .

- l'apport d'énergie par unité de masse et de temps  $R$  dépend de la température  $T$

$$R = R(T) \quad (2.16)$$

- le vecteur transport d'énergie  $q$  est donné par la loi de Fourier

$$q = -K(T)\nabla T \quad (2.17)$$

Elle est non linéaire du fait que la conductivité thermique  $K$  est une fonction de la température  $T$  . Dans ces conditions l'équation de l'énergie (2.14) s'écrit

$$C_v(T) \frac{dT}{dt} = 2\mu(T)D(v).D(v) + \operatorname{div} (K(T)\nabla T) + R(T). \quad (2.18)$$

Finalement, les équations générales de *l'écoulement non isotherme d'un fluide Navier*

- *Stokes Homogène* sont données par le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v = \operatorname{div} (\sigma) + f \\ \sigma = 2\mu(T)D(v) - pId_3 \\ \operatorname{div}(v) = 0 \\ C_v(T) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v.\nabla T \right) = 2\mu(T)D(v).D(v) + \operatorname{div} (K(T)\nabla T) + R(T) \end{array} \right. \quad (2.19)$$

- A la lumière de chapitre 1, Lorsque la vitesse  $v$  est suffisamment petite, le terme non linéaire  $(v.\nabla)v$  peut être négligé. Par conséquent, *le faible écoulement non iso-*

*therme d'un fluide Navier-Stokes Homogène* sont données par les équations linéaires suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div}(\sigma) + f \\ \sigma = 2\mu(T)D(v) - pId_3 \\ \operatorname{div}(v) = 0 \\ C_v(T)\frac{\partial T}{\partial t} = 2\mu(T)D(v).D(v) + \operatorname{div}(K(T)\nabla T) + R(T). \end{array} \right. \quad (2.20)$$

## 2.3 Les modèles stationnaires

Lorsque les forces appliquées  $f$  sont indépendantes du temps, nous pouvons extraire des équations qui décrivent le comportement du fluide indépendamment du temps[7], c'est-à-dire tel que

$$p(x, t) = p(x), \quad T(x, t) = T(x), \quad v(x, t) = v(x). \quad (2.21)$$

On en déduit alors *le régime d'écoulement stationnaire et non isotherme pour un fluide Navier-Stokes homogène* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma) + f = 0 \\ \sigma = 2\mu(T)D(v) - pId_3 \\ \operatorname{div}(v) = 0 \\ \operatorname{div}(K(T)\nabla T) + 2\mu(T)D(v).D(v) + R(T) = 0 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

*Le cas isotherme*, c'est à dire lorsque  $T = \text{cte}$ , le système (2.22) se réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma) + f = 0 \\ \sigma = 2\mu D(v) - pId_3 \\ \operatorname{div}(v) = 0 \end{array} \right. \quad (2.23)$$

**Remarque 2.3.1** *Il convient de noter que la vitesse  $v$  d'un mouvement stationnaire est indépendante de  $t$ . Mais la position  $x$  dépend de  $t$ , sinon la vitesse serait nulle!*

## 2.4 Conditions aux limites et initiales

Pour résoudre un problème différentiel, il faut savoir[8]

- les conditions initiales en  $t = 0$  : quelle était la configuration de l'écoulement ?
- les conditions aux limites sur le bord : qu'impose-t-on à l'écoulement ?

Nous considérons deux types de frontières :

- L'interface fluide-solide, ici le bord reste stable (conserve sa configuration) avec le temps, ou peut se déformer très lentement.
- L'interface fluide-matériel, rappelons que la matière se trouve dans ses trois états : solide, liquide ou gazeux. c'est une interface mouvante (ou surface libre) entre le deux milieux et dans certains cas, peut occuper une surface fixe de l'espace.

Supposons que le fluide soit confiné dans  $\Omega$ , son bord  $\Gamma$ . Soit  $n$  le vecteur normal orienté de  $\Gamma$ .

**L'interface fluide-solide.** Ici on considère que la vitesse vérifie les deux conditions suivantes

- Condition de non-pénétration : le fluide ne peut pas traverser à la paroi solide (qui est imperméable), donc la composante normale de la vitesse est nulle :

$$v_n = v \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.24)$$

- Condition de non-glissement (d'adhérence) : le fluide adhère à la paroi solide, donc la composante tangentielle doit également être nulle :

$$v_\tau = v \cdot \tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.25)$$

avec  $\tau$  un vecteur tangent à  $\Gamma$ . Autrement dit il y a un frottement visqueux entraîne l'absence de glissement sur la paroi.

**Remarque 2.4.1** *Il s'agit que la vitesse  $v$  est nulle le long l'interface fluide-solide,*

$$v = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

*Cette condition rend les équations de Navier-Stokes bien posées.*

**Remarque 2.4.2** *La condition (2.25) est suffisante pour que les équations d'Euler soient "bien posées".*

**L'interface fluide-matériel.** Le fluide n'est pas confiné dans  $\Omega$ , c'est à dire le fluide peut traverser le bord  $\Gamma$ . L'une des situations suivantes peut bien préciser le problème de Navier-Stokes

– Connaitre les entrées et les sorties par une fonction. C'est-à-dire

$$v = g \quad \text{sur } \Gamma, \text{ où } g = (g_i) \text{ fonction donnée sur } \Gamma.$$

– Si l'interface est stable, on applique le principe d'action et de réaction, on a

$$\sigma^1 \cdot n + \sigma^2 \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{2.26}$$

avec  $\sigma^1$  le tenseur de contrainte fluides et  $\sigma^2$  le tenseur des contrainte matériel de l'autre côté du bord.

– Pour une écoulement de frontière libre avec l'équation  $y = h(x, t)$  d'une partie de la frontière  $\Gamma$ , avec  $h$  l'épaisseur de domaine. Cette partie s'écrit  $F(x, t) = 0$  où  $F(x, t) = y - h(x, t)$  et elle vérifie l'équation de continuité

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \text{div}(vF) = 0 \tag{2.27}$$

**Remarque 2.4.3** *On néglige parfois l'effet d'action  $\sigma^2$  de la material s'opposant au fluide, par exemple l'effet du mouvement de l'air sur l'écoulement de l'eau d'une rivière. Dans ce cas, la condition (2.27) se redouire*

$$\sigma.n = 0 \text{ sur } \Gamma$$

avec  $\sigma$  le tenseur de contrainte fluide.

**Remarque 2.4.4** *La condition [14] doit respecter la condition d'incompressibilité. Cela signifie que la somme des entrées et des sorties est égale à zéro; D'après la formule de Gauss-Ostrogradsky*

$$\int_{\Gamma} g(s).n(s)ds = 0. \quad (2.28)$$

**Exemple 2.4.1** . *(Ecoulement de fluide unidimensionnel)*

Dans cette section, nous allons écrire les équations suivantes dans le cas d'écoulement unidimensionnel, puis y trouver une solution.

1. L'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v.\nabla \rho = 0 \quad (2.29)$$

2. Les équations du mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v.\nabla v \right) = \text{div}(\sigma) + f \quad (2.30)$$

3. L'équation de l'énergie :

$$\rho C_v(T) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v.\nabla T \right) = \sigma.D(v) + \text{div} (K(T)\nabla T) + R(T) \quad (2.31)$$

4. Loi de comportement

$$\sigma = 2\mu(T)D(v) - pId_3 \quad (2.32)$$

5. Incompressibilité

$$\operatorname{div}(v) = 0$$

A savoir que  $\sigma$  est symétrique, nous avons 12 inconnues et 12 équations scalaire en dimension 3.

Les incnnues sont  $\rho, v_i (i = 1, 2, 3), \sigma_{ij} (i, j = 1, 2, 3), p, T$ .

Les données  $f, \mu, C_v, K, R$ .

**Exemple 2.4.2** (*E'coulement de fluide unidimensionnel*)

Construisez un x-axe des abscisses longeant la ligne médiane d'un long cylindre avec une section transversale  $A$ . Considérez

le mouvement d'un gaz entraîné par un piston et se déplaçant avec une vitesse  $v_1 = u$  dans la direction x- D'un Eulérien

point de vue nous imaginons un volume de contrôle fixé à l'intérieur du cylindre et supposons des forces corporelles nulles. Nous avons besoin

les équations suivantes soient satisfaites.

Conservation de la masse  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$  qui dans une dimension se réduit à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad (2.33)$$

.

Conservation de la quantité de mouvement, l'équation (2.5.28) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.34)$$

Conservation de l'énergie, équation (2.5.48) en l'absence de flux de chaleur et de production de chaleur interne, devient dans une dimension

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} \right) + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.35)$$

. En utilisant la relation de conservation de masse ceci l'équation peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho e u) + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.36)$$

En revanche, d'un point de vue lagrangien, nous laissons le volume de contrôle se déplacer avec le flux et considérons conditions d'advection. Cela donne les trois équations suivantes qui peuvent ensuite être comparées aux précédentes E'quations eulériennes du mouvement.

Conservation de la destruction massive  $\frac{d}{dt}(\rho J)$  ce qui en une dimension équivaut à

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.37)$$

Conservation de la quantité de mouvement, équation (2.5.25) en une dimension

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.38)$$

Conservation de l'énergie, équation (2.5.48) en une dimension

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.39)$$

Dans les équations ci-dessus  $\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}() + u \frac{\partial}{\partial x}()$ . Le point de vue lagrangien donne trois équations dans les trois inconnues  $\rho; u; e$ . Dans les équations eulérienne et lagrangienne, la pression  $p$  représente la pression totale  $p = p_g + p_v$

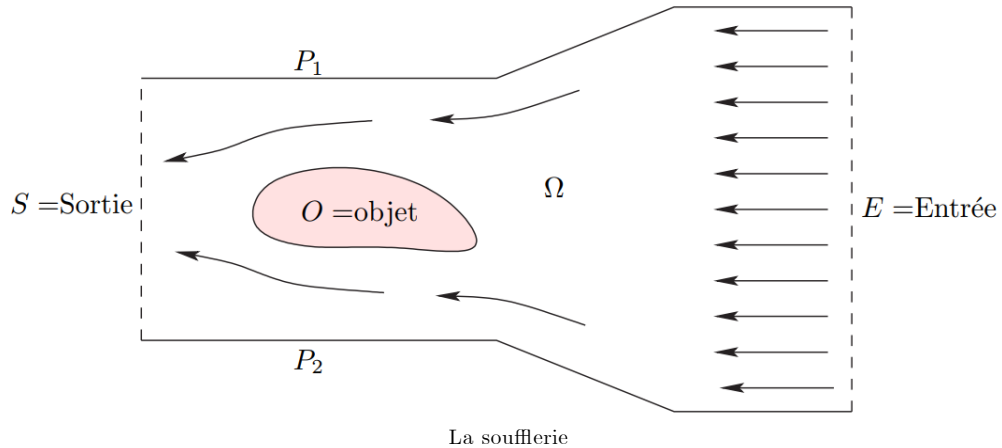
où  $p_g$  est la pression du gaz et  $p_v$  est la pression visqueuse qui entraîne une perte d'énergie cinétique. La pression du gaz est une fonction de  $\rho, e$  et est déterminée à partir de la loi des gaz parfaits

$$p_g = \rho RT = \rho(c_p - c_v)T = \rho\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)c_v T \quad (2.40)$$

ou  $p_g = \rho(\gamma - 1)e$ . Une sorte d'hypothèse est généralement faite pour représenter la pression visqueuse  $p_v$  en fonction de  $e; u$ . Les équations ci-dessus sont ensuite soumises à des conditions limites et initiales et sont généralement résolues numériquement.

**Exemple 2.4.3** : *Étude d'une soufflerie*

On souhaite étudier l'écoulement de l'air autour d'un objet dans une soufflerie (cf. figure ci-dessous). L'air est considéré comme un fluide parfait (non visqueux), incompressible, de densité  $\rho > 0$ . On note  $\Omega$  l'intérieur de la soufflerie. La frontière de  $\Omega$ , lorsque la soufflerie est vide, se décompose en  $E \cup S \cup P_1 \cup P_2$  comme sur la figure. On note  $x = (x_1, x_2)^T$  un point de  $\Omega$  et  $t$  le temps.



Pour décrire le mouvement d'un fluide on choisit généralement comme inconnues d'une partie la pression du fluide  $\rho(x, t)$  et l'autre part la vitesse eulérienne  $\mathbf{u}(x, t) = ((u_1(x, t), u_2(x, t)))^T$  qui est la vitesse d'une particule du fluide occupant a l'instant  $t$  la position  $x$ . La trajectoire  $X(t)$  d'une particule du fluide se trouvant au temps  $t = 0$  au point  $x_0$ , test solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{dt}(t) = u(X(t), t), X(0) = x_0$$

### 2.4.1 Hypothèses

On suppose que le fluide n'est soumis a aucune force extérieure (la gravité est négligée) et que le régime dans la soufflerie bestpermanent, c'est a dire que  $u$  et  $p$  ne dépendent plus de  $t$ . Alors  $u$  et  $p$  sont solutions du système d'équations d'Euler suivant :

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } E.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } S.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } P_1 \cup P_2$$

où  $\mathbf{v}_E$  et  $\mathbf{v}_S$  sont les vitesses d'entrée et de sortie du fluide, supposées connues.

La premiere équation se traduit, composante par composante, par :

$$\rho \sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j = 1, 2.$$

On introduit alors le rotationnel (ou tourbillon) défini par  $\omega = \text{rot}(u) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ .

On note que  $\omega(x)$  test solution de l'esp  $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0$  sur  $\Omega$ . Alors que  $\omega$  est constant

le long des trajectoires des particules du fluide. Ceci entraîne en particulier que si  $\omega = 0$  sur  $E$  alors

$$\omega = 0 \text{ sur } \Omega$$

L'écoulement du fluide est donc irrotationnel.

# Chapitre 3

## Problème d'évolution de Stokes avec des conditions de Fourier et de Tresca

- 3.1. Introduction et position du problème ;
- 3.2. Formulation variationnelle du problème ;
- 3.3. Résultats d'existence et d'unicité

### 3.1 Introduction et position du problème

Dans ce chapitre on étudie le comportement asymptotique d'un fluide de Stokes en régime dynamique[?] dans un domaine mince  $\Omega$  avec la condition de frottement de Tresca sur une partie du bord. Le domaine  $\Omega$  est un film mince défini par

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3; x' \in \omega, 0 < x_3 < h(x')\},$$

avec

$$h \in C^2(\omega), \exists \bar{h}, \underline{h} > 0 : \quad \bar{h} < h(x) < \underline{h}.$$

Nous rappelons que  $\Gamma$  est sa frontière

$$\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L.$$

Le vecteur normal extérieur unitaire à  $\Gamma$  sera noté  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ .

La normale unitaire extérieure à  $\omega$  est le vecteur  $(0, 0, -1)$ .

On définit les composantes normales et tangentielles  $u_\nu$  et  $u_\tau = (u_{\tau_i})_{1 \leq i \leq 3}$  de la vitesse par

$$u_\nu = u \cdot \nu,$$

$$u_{\tau_i} = u_i - u_\nu \cdot \nu_i.$$

De même, les composantes normales et tangentielles  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau = (\sigma_{\tau_i})_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}^3$  du tenseur des contraintes sont définies par

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu_i) \cdot \nu_j,$$

$$\sigma_{\tau_i} = \sigma_{ij} \cdot \nu_j - (\sigma_\nu) \cdot \nu_i$$

où le tenseur  $\sigma$  d'un fluide de Stokes est décomposé comme suit

$$\sigma_{ij}(u, p) = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}(u), \quad (3.1.1)$$

où

- $u$  est la vitesse du fluide,
- $p$  est sa pression,
- $\mu$  est sa viscosité,
- $\delta_{ij}$  est le symbole de Kröneckner,
- $(d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  est le tenseur des taux de déformation :

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Les équations qui gouvernent l'écoulement dynamique d'un fluide de Stokes dans le domaine  $\Omega$  sont les suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \text{Div}(\sigma) = f, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]$$

$$\sigma_{ij}(u, p) = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}(u), \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (3.1.2)$$

$$\text{div } u = 0, \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (3.1.3)$$

Afin d'écrire les conditions aux limites pour la vitesse sur la frontière de  $\Omega$ , on introduit d'abord la fonction vectorielle  $g$  telle que

$$g(t) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \text{ et } \int_{\Gamma} g(t) \cdot \nu \, ds = 0, \forall t \in [0, T]$$

De référence [15], on peut montrer par que cette condition est équivalente à l'exis-

tence d'un relèvement  $G(t) \in H^1(\Omega)^3$  de  $g(t)$  sur  $\Omega$  pour tout  $t \in [0, T]$  vérifiant

$$\operatorname{div} G = 0 \text{ dans } \Omega, \quad G = g \text{ sur } \Gamma_L, \quad G \cdot \nu = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma_1.$$

La vitesse sur le bord  $\Gamma_L$  est connue et donnée par la fonction  $g$ .

$$u = g \quad \text{sur } \Gamma_L \times [0, T]. \quad (3.1.4)$$

Sur  $\omega \cup \Gamma_1$  la vitesse est supposée inconnue et elle vérifie la condition de non-pénétration :

$$u \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } (\omega \cup \Gamma_1) \times ]0, T[, \quad (3.1.5)$$

nous supposons la condition non linéaire de Fourier [18]

$$\sigma_\tau(u) = -lu, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times ]0, T[, \quad (3.1.6)$$

telle que  $l > 0$  est une constante donnée.

Sur  $\omega$ , supposons qu'il existe le frottement est modélisé par la loi non linéaire de Tresca :

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau| < k \implies u_\tau(t) = s \\ |\sigma_\tau| = k \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau(t) = s - \beta \sigma_\tau \end{array} \right\} \text{ sur } \omega \times ]0, T[, \quad (3.1.7)$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ ,  $s$  la vitesse de cisaillement et  $k$  le seuil de frottement.

Le problème complet consiste donc à trouver un champ de vitesse  $u$  et une pression  $p$  vérifiant les équations (3.1.1)-(3.1.7) avec la condition initiale suivante

$$u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.1.8)$$

Afin de donner la formulation variationnelle du problème (3.1.1)-(3.1.8), nous allons établir le lemme suivant :

**Lemme 4.1.1** [12] *La condition (3.1.7) est équivalente à la relation suivante :*

$$(u_\tau - s) \sigma_\tau + k|u_\tau - s| = 0 \quad \text{sur } \omega \times ]0, T[. \quad (3.1.9)$$

## 3.2 Formulation variationnelle du problème

Nous commençons à décrire le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et nous définissons la formulation variationnelle du problème (3.1.1)-(3.1.8). Pour l'ouvert  $\Omega$  on définit l'espace suivants :

$$H^1(\Omega)^3 = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall i, j = 1, \dots, 3 \right\},$$

l'espace de Sobolev munit de la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ , où la norme de  $(L^2(\Omega))^3$  sera noté  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ .

Nous utilisons les ensembles et les espaces vectoriels suivants

$$K = \left\{ \phi \in H^1(\Omega)^3 : \phi = G \text{ on } \Gamma_L, \phi \cdot \nu = 0 \text{ on } \omega \cup \Gamma_1 \right\},$$

$$K_{\text{div}} = \left\{ \phi \in K : \text{div}(\phi) = 0 \right\},$$

$$H_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L \right\},$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}.$$

Pour simplifier l'écriture, on posera

$$a(u, \phi) = 2\mu \int_{\Omega} d_{ij}(u) d_{ij}(\phi) dx, \quad (3.2.1)$$

$$\check{a}(u, \phi - u) = a(u, \phi - u) + l \int_{\Gamma_1} u \cdot (\phi - u) d\tau, \quad (3.2.2)$$

$$(f, \phi) = \int_{\Omega} f_i \phi_i dx. \quad (3.2.3)$$

Pour  $\phi \in H^1(\Omega)^3$ , on définit la fonctionnelle  $J$  par

$$J(\phi) = \int_{\omega} k |\phi - s| dx' \quad (3.2.4)$$

**Remarque 3.2.1.** La forme bilinéaire  $\check{a}(\cdot, \cdot)$  est coercive et continue sur  $K_{\text{div}} \times K_{\text{div}}$ . Soient  $\psi$  et  $\phi$  des éléments de  $K_{\text{div}}$ . Par l'inégalité de Korn et de Cauchy-Schwartz, on obtient [11]

$$\check{a}(\psi, \psi) = a(\psi, \psi) + l \int_{\Gamma_1} \psi^2 d\tau \geq 2\mu C_K \|\psi\|_{1,\Omega}^2,$$

$$|\check{a}(\varphi, \psi)| \leq (2\mu + lC_0(\Omega)) \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}.$$

Où  $C_k > 0$  et  $C(\Omega) > 0$ .

La fonction  $J$  est convexe, semi-continue inférieurement et propre sur  $K_{\text{div}}$  et il existe [10] une constante positive  $C_0(\Omega) > 0$  telle que

$$|J(\phi) - J(\psi)| \leq |\omega|^{1/2} \|k\|_{\infty,\omega} C_0(\Omega) \|\varphi - \psi\|_{1,\Omega}, \quad \forall (\varphi, \psi) \in K_{\text{div}} \times K_{\text{div}}.$$

**Lemme 3.2.1.** *Si  $u$  et  $p$  des solutions du problème (3.1.1)-(3.1.8), alors elles véri-*

fient le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Pv : \text{Trouver } \{u, p\} \text{ où } u(t) \in K_{\text{div}}, \frac{\partial u}{\partial t}(t) \in K \text{ et } p(t) \in L_0^2(\Omega), \text{ telle que} \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t), \phi - u(t) \right) + a(u(t), \phi - u(t)) + l \int_{\Gamma_1} u \cdot (\phi - u) d\tau + \\ - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \phi dx + J(\phi) - J(u(t)) \geq (f, \phi - u(t)), \forall t \in [0, T], \forall \phi \in K, \\ \text{avec } u(0) = 0. \end{array} \right.$$

**Preuve.** En multipliant l'équation (3.1.2) par  $(\phi - u)$ , où  $\phi \in K$ , et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t), \phi - u(t) \right) + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi_i - u_i(t)) dx - \\ & - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \nu_j (\phi_i - u_i(t)) ds = \int_{\Omega} f_i (\phi_i - u_i(t)) dx, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Les conditions aux limites (3.1.4), (3.1.5) et le fait que  $\sigma_{ij} \nu_j = \sigma_{\tau_i} + \sigma_{\nu} \nu_i$ , impliquent que :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \nu_j (\varphi_i - u_i) d\sigma &= \int_{\omega \cup \Gamma_1} \sigma_{ij} \nu_j (\varphi_i - u_i) dx' \\ &= \int_{\omega \cup \Gamma_1} \sigma_{\tau_i} (\varphi_i - u_i) dx' + \int_{\omega \cup \Gamma_1} \sigma_{\nu} \nu_i (\varphi_i - u_i) dx' \\ &= \int_{\omega \cup \Gamma_1} \sigma_{\tau_i} (\varphi_i - u_i) dx'. \end{aligned}$$

De (3.1.6), (3.1.7) et si on ajoute et on retranche le terme  $\int_{\omega} k (|\varphi - s| - |u - s|) dx'$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \nu_j (\varphi_i - u_i) d\sigma + \int_{\omega} k (|\varphi - s| - |u - s|) dx' \\ &= -l \int_{\Gamma_1} u \cdot (\phi - u) d\tau + \int_{\omega} \sigma_{\tau \cdot} (\varphi - u) dx' + \int_{\omega} k (|\varphi - s| - |u - s|) dx'. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.1.1 , on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \nu_j (\varphi_i - u_i) d\sigma + \int_{\omega} k (|\varphi - s| - |u - s|) dx' \\ &= -l \int_{\Gamma_1} u. (\phi - u) d\tau + \int_{\omega} (\sigma_{\tau.} (\varphi - s) + k|\varphi - s|) dx'. \end{aligned}$$

Mais le second terme du côté droit est positif, donc (3.2.5) équivalente à l'inéquation variationnelle

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t), \phi - u(t) \right) + a(u(t), \phi - u(t)) + l \int_{\Gamma_1} u. (\phi - u(t)) d\tau - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \phi dx \\ & + J(\phi) - J(u(t)) \geq (f, \phi - u(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \phi \in K, \\ & \text{avec} \quad u(0) = 0, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

où la fonctionnelle  $J$  est déjà définie dans (3.2.4).

Si nous choisissons la fonction test  $\phi$  dans  $K_{\operatorname{div}}$ , on trouve le problème variationnel en vitesse

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t), \phi - u(t) \right) + a(u(t), \phi - u(t)) + l \int_{\Gamma_1} u. (\phi - u(t)) d\tau \\ & + J(\phi) - J(u(t)) \geq (f, \phi - u(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \phi \in K_{\operatorname{div}}, \\ & \text{avec} \quad u(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

### 3.3 Résultats d'existence et d'unicité

Dans la suite nous établissons un résultat d'existence et d'unicité. Tout d'abord, on régularise la fonctionnelle  $J$  par une famille de fonctionnelles  $J_{\zeta}$  ( $\zeta > 0$ ), telle que

$$J_{\zeta}(v) = \int_{\omega} k(x, t) \varphi_{\zeta} (|v_{\tau}|) dx',$$

$$\text{où} \quad \varphi_{\zeta}(\lambda) = \frac{1}{1 + \zeta} |\lambda|^{(1+\zeta)}$$

On a donc

$$\left\langle (J_\zeta)'(v), \phi \right\rangle = \int_{\omega} k \psi_\zeta(v_\tau) \cdot \phi_\tau dx',$$

où  $\psi_\zeta(v_\tau) = |v_\tau|^{\zeta-1} v_\tau$ .

On remplace dans (3.2.7)  $\phi$  par  $u_\zeta(t) \pm \lambda \phi$ , où  $\lambda > 0$  et faisant tendre  $\lambda$  vers 0, on trouve l'équation approchée suivante :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t), \phi \right) + a(u_\zeta(t), \phi) + l \int_{\Gamma_1} u(t) \cdot \phi d\tau \\ & + \left\langle (J_\zeta)'(u_\zeta(t)), \phi \right\rangle = (f(t), \phi), \quad \forall \phi \in K_{\text{div}} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

avec

$$u_\zeta(0) = 0 \quad (3.3.2)$$

**Théorème 3.3.1.** *Supposons que*

$$f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad f(0) \in L^2(\Omega)^3, \quad (3.3.3)$$

$$k \in C_0^\infty(\omega), \quad k > 0 \text{ ne depend pas de } t, \quad (3.3.4)$$

$$u(0) = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (3.3.5)$$

Alors, il existe un et un seul  $u$  dans l'espace  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^3)$  satisfaisant le problème (3.2.7) avec

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^3). \quad (3.3.6)$$

**Preuve de l'existence de la solution.** Comme dans [13] nous allons commencer la démonstration en supposant que  $k$  peut dépendre de  $t$ , avec

$$k, \frac{\partial k}{\partial t} \in L^\infty(\omega \times ]0, T[).$$

L'équation (3.3.1) pour  $\phi = u_\zeta(t)$ , et comme  $\langle (J_\zeta)'(u_\zeta), u_\zeta \rangle \geq 0$ , nous donne ce qui suit

$$\left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t), u_\zeta(t) \right) + a(u_\zeta(t), u_\zeta(t)) + l \int_{\Gamma_1} |u_\zeta(t)|^2 d\tau \leq (f(t), u_\zeta(t))$$

donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\zeta(t)\|_{0,\Omega}^2 + a(u_\zeta(t), u_\zeta(t)) + l \int_{\Gamma_1} |u_\zeta(t)|^2 d\tau \leq (f(t), u_\zeta(t)) \quad (3.3.7)$$

Par la coercitivité de la forme  $\check{a}$  comme dans la remarque 3.2.1 et l'intégrale de (3.3.7) en  $t$ , on trouve

$$\|u_\zeta(t)\|_{0,\Omega}^2 + 4\mu C_K \int_0^t \|u_\zeta(\sigma)\|_{1,\Omega}^2 d\sigma \leq 2 \int_0^t (f(\sigma), u_\zeta(\sigma)) d\sigma \quad (3.3.8)$$

$C_K$  est une constante de Korn.

Comme

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t (f(\sigma), u_\zeta(\sigma)) d\sigma &\leq 2 \int_0^t \|f(\sigma)\|_{0,\Omega} \|u_\zeta(\sigma)\|_{0,\Omega} d\sigma \\ &\leq \int_0^t \|f(\sigma)\|_{0,\Omega}^2 d\sigma + \int_0^t \|u_\zeta(\sigma)\|_{0,\Omega}^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Alors, de (3.3.8) on a

$$\begin{aligned} \|u_\zeta(t)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \|u_\zeta(\sigma)\|_{1,\Omega}^2 d\sigma &\leq c + c \int_0^t \|u_\zeta(\sigma)\|_{0,\Omega}^2 d\sigma + \\ 2 \int_0^t (f(\sigma), u_\zeta(\sigma)) d\sigma &\leq c(1 + \int_0^t \|u_\zeta(\sigma)\|_{1,\Omega}^2 d\sigma) + \\ 2 \int_0^t \|f(\sigma)\|_{0,\Omega} \|u_\zeta(\sigma)\|_{0,\Omega} d\sigma & \end{aligned}$$

D'après (3.3.3),

$$\int_0^t \|f(\sigma)\|_{0,\Omega}^2 \leq \text{constante},$$

d'où

$$\|u_\zeta(t)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \|u_\zeta(\sigma)\|_{1,\Omega}^2 d\sigma \leq c \left( 1 + \int_0^t \|u_\zeta(\sigma)\|_{0,\Omega}^2 d\sigma \right). \quad (3.3.9)$$

En particulier de (3.3.9), on a

$$\|u_\zeta(t)\|_{0,\Omega}^2 \leq c \left( 1 + \int_0^t \|u_\zeta(\sigma)\|_{0,\Omega}^2 d\sigma \right),$$

et d'après le lemme de Gronwall, on trouve

$$\|u_\zeta(t)\|_{0,\Omega}^2 \leq c. \quad (3.3.10)$$

De (3.3.9) et (3.3.10), on a

$$\|u_\zeta(t)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \|u_\zeta(\sigma)\|_{1,\Omega}^2 d\sigma \leq c \quad (3.3.11)$$

où  $c$  est constante indépendante de  $\zeta$ .

On dérive (3.3.1) en  $t$ , on obtient :

$$\left( \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial t^2}(t), \phi \right) + a \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t), \phi \right) + l \int_0^t \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \cdot \phi d\sigma + \left( \frac{d}{dt} (J_\zeta)'(u_\zeta(t)), \phi \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t), \phi \right)$$

on prend  $\phi = \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t)$ , on trouve

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right) + a \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right) + l \int_0^t \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \cdot \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) d\sigma \\ & + \left\langle \frac{d}{dt} \left( J_\zeta \right)' (u_\zeta(t)), \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right\rangle = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Mais

$$\begin{aligned} \left\langle \left( J_\zeta \right)' (v), \phi \right\rangle &= \int_\omega k \psi_\zeta(v_\tau) \cdot \phi_\tau dx' \\ &= \int_\omega k |v_\tau|^{\zeta-1} v_\tau \cdot \phi_\tau dx' \end{aligned}$$

où  $\psi_\zeta(v_\tau) = |v_\tau|^{\zeta-1} v_\tau$ , en observant la monotone de l'opérateur  $\left( J_\zeta \right)'$ , on a

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d}{dt} \left( J_\zeta \right)' (\phi(t)), \phi'(t) \right\rangle = \int_\omega \frac{\partial k}{\partial t} \psi_\zeta(\phi_\tau(t)) \cdot \phi'_\tau(t) dx' + \\ & + \int_\omega k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_\zeta(\phi_\tau(t+h)) - \psi_\zeta(\phi_\tau(t))}{h} \cdot \frac{\phi_\tau(t+h) - \phi_\tau(t)}{h} dx' \\ & \geq \frac{\partial k}{\partial t} \psi_\zeta(\phi_\tau(t)) \cdot \phi'_\tau(t) dx' dx'. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

De (3.3.12), (3.3.13) et si on remplace  $\phi$  par  $\frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t)$ , on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 + a \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right) + l \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Gamma_1}^2 \\ & + \int_\omega \frac{\partial k}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi_\zeta \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right) dx' \leq \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right). \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Il existe  $\rho$  et  $\alpha > 0$  tels que

$$a(v, v) + \rho \|v\|_{0,\Omega}^2 \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2.$$

En intégrant (3.3.14) de 0 à  $t$ , on en déduit

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 + \alpha \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{1,\Omega}^2 d\sigma + 2l \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Gamma_1}^2 d\sigma \leq & \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega}^2 + \\
 + \rho \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega}^2 d\sigma + 2 \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial t}(\sigma), \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right) d\sigma - & \\
 - 2 \int_0^t \int_\omega \frac{\partial k}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi_\zeta \left( \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t} \right)_\tau(\sigma) \right) dx' d\sigma, & 
 \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

et comme  $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ , alors avec l'inégalité de Cauchy Schwartz et Young respect,

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial t}(\sigma), \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right) d\sigma & \leq 2 \int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega} d\sigma \\
 & \leq \int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega}^2 d\sigma + \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega}^2 d\sigma.
 \end{aligned}$$

Donc, l'inéquation (3.3.15) devient comme suit :

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 + \alpha \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{1,\Omega}^2 d\sigma + 2l \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Gamma_1}^2 d\sigma \leq & \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega}^2 + \\
 + (\rho + 1) \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega}^2 d\sigma + \int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega}^2 d\sigma + & \\
 + 2 \left| \int_0^t \int_\omega \frac{\partial k}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi_\zeta \left( \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t} \right)_\tau(\sigma) \right) dx' d\sigma \right|. & 
 \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

On fait une estimation du terme  $\left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(0) \right\|_{0,\Omega}^2$  par (3.3.1)-(3.3.2) et l'hypothèse (3.3.3) comme ce qui suit

$$\left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(0), \phi \right) = (f(0), \phi), \quad \forall \phi \in K_{\text{div}},$$

d'où

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(0) = f(0) \in L^2(\Omega)^3. \quad (3.3.17)$$

Et comme  $\frac{\partial k}{\partial t} = 0$  (l'hypothèse (3.3.4)), donc le dernier terme de (3.3.16) est

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\omega \frac{\partial k}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi_\zeta \left( \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t} \right)_\tau (\sigma) \right) dx' d\sigma = \\ & \int_\omega \frac{\partial k}{\partial t}(x', 0) \cdot \psi_\zeta \left( \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t} \right)_\tau (t) \right) dx' - \int_\omega \frac{\partial k}{\partial t}(x', 0) \psi_\zeta \left( \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t} \right)_\tau (0) \right) dx' \\ & + \int_0^t \int_\omega \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(x', 0) \cdot \psi_\zeta \left( \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t} \right)_\tau (\sigma) \right) dx' d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

De (3.3.16), (3.3.17) et (3.3.18) on a

$$\left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{1,\Omega}^2 d\sigma + l \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Gamma_1}^2 d\sigma \leq c \left[ 1 + \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Omega}^2 d\sigma \right],$$

en utilisant le lemme de Gronwall on obtient

$$\left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{1,\Omega}^2 d\sigma + l \int_0^t \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(\sigma) \right\|_{0,\Gamma_1}^2 d\sigma \leq c. \quad (3.3.19)$$

On fait maintenant un passage à la limite en  $\xi$ , d'après les estimations (3.3.11) et (3.3.19), on peut extraire de  $u_\zeta$  une suite notée encore  $u_\zeta$ , telle que

$$\begin{aligned} u_\zeta &\longrightarrow u && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^3) \\ \frac{\partial u_\zeta}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)^3) \\ u_\zeta &\longrightarrow u && \text{dans } H^1(0, T; L^2(\Gamma_1)^3) \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

on déduit de l'équation (3.3.1) que

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}, \phi - u_\zeta \right) + a(u_\zeta, \phi - u_\zeta) + l \int_{\Gamma_1} u_\zeta \cdot (\phi - u_\zeta) d\tau + J_\zeta(\phi) - \\
 & \quad - J_\zeta(u_\zeta) - (f, \phi - u_\zeta) = J_\zeta(\phi) - \\
 & \quad - J_\zeta(u_\zeta) - \left\langle (J_\zeta)'(u_\zeta), \phi - u_\zeta \right\rangle \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Prenant dans (3.3.21)  $\phi = \phi(t)$ ,  $\phi \in L^2(0, T; K_{\text{div}})$ , on en déduit que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left[ \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t), \phi \right) + a(u_\zeta, \phi) + l \int_{\Gamma_1} u_\zeta \cdot \phi d\tau + J_\zeta(\phi) - (f, \phi - u_\zeta) \right] dt \geq \\
 & \int_0^T \left[ \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t), u_\zeta(t) \right) + a(u_\zeta, u_\zeta(t)) + l \int_{\Gamma_1} |u_\zeta|^2 d\tau + J_\zeta(u_\zeta) \right] dt \\
 & \quad = \frac{1}{2} \|u_\zeta(T)\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^T a(u_\zeta(t), u_\zeta(t)) dt + \\
 & \quad + l \int_0^T \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Gamma_1}^2 dt + \int_0^T J_\zeta(u_\zeta) dt,
 \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

on déduit alors de (3.3.22) que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t), \phi - u \right) + a(u, \phi) + l \int_{\Gamma_1} u \cdot \phi d\tau + J(\phi) - (f, \phi - u) \right] dt \geq \\
 & + \liminf_{\xi \rightarrow 0} \int_0^T a(u_\zeta(t), u_\zeta(t)) dt + \liminf_{\xi \rightarrow 0} l \int_0^T \left\| \frac{\partial u_\zeta}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Gamma_1}^2 ds + \liminf_{\xi \rightarrow 0} \int_0^T J_\zeta(u_\zeta) dt.
 \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Les fonctions  $u \rightarrow \int_0^T a(u, u) dt$ ,  $u \rightarrow \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$  et  $v \rightarrow \int_0^T J(v) dt$  sont des fonctions semi-continues inférieurement pour la topologie faible de  $L^2(0, T; K_{\text{div}})$ , et donc

(3.3.23) devient

$$\int_0^T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \phi - u \right) + a(u, \phi - u) + l \int_{\Gamma_1} u \cdot (\phi - u) d\tau + J(\phi) - J(u) - (f, \phi - u) \right] dt \geq 0, \quad \forall \phi \in L^2(0, T; K_{\text{div}}). \quad (3.3.24)$$

Par [6, 11], on passe de (3.3.24) à l'inégalité ponctuelle (3.2.7).  $\square$

**Preuve de l'unicité de la solution.** Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions éventuelles. En choisissant dans (3.2.7)  $\phi = u_2(t)$  dans l'inéquation relative à  $u_1$  et  $\phi = u_1(t)$  dans l'inéquation relative à  $u_2$ , il vient, en posant  $w = u_1 - u_2$  :

$$- \left( \frac{\partial w}{\partial t}, w \right) - a(w, w) - l \int_{\Gamma_1} |w|^2 d\tau \geq 0,$$

donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{0,\Omega}^2 + a(w(t), w(t)) + l \int_{\Gamma_1} |w(t)|^2 d\tau \leq 0.$$

Comme  $a(v, v) + l \int_{\Gamma_1} |v|^2 d\tau \geq 2\mu C_K \|v\|_{1,\Omega}^2$ , on a

$$\|w(t)\|_{0,\Omega}^2 + 4\mu C_K \int_0^t \|w(\sigma)\|_{1,\Omega}^2 d\sigma \leq \|w(0)\|_{0,\Omega}^2 = 0, \quad \forall t \Rightarrow w(t) = 0,$$

d'où l'unicité de la solution.

# Bibliographie

- [1] Lascaux, P., & Théodor, R. (1986). Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur (Vol. 2, pp. 508-509). Paris : Masson.
- [2] Ryhming, I. L., & Ryhming, I. L. (2004). Dynamique des fluides : un cours de base du deuxième cycle universitaire. EPFL Press.
- [3] Milcent, T. (2009). Une approche eulérienne du couplage fluide-structure, analyse mathématique et applications en biomécanique (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I).
- [4] Mercier, M. (2009). Etude de différents aspects des EDP hyperboliques : persistance d'onde de choc dans la dynamique des fluides compressibles, modélisation du trafic routier, stabilité des lois de conservation scalaires (Doctoral dissertation, Université Claude Bernard-Lyon I).
- [5] Serre, D. (1987). Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence. Japan Journal of Applied Mathematics, 4, 99-110.
- [6] Lassabatère, T. (1994). Couplages hydromécaniques en milieu poreux non saturé avec changement de phase. Application au retrait de dessiccation (Doctoral dissertation, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées).
- [7] Berestycki, H., & Larrouturou, B. (1988). Quelques aspects mathématiques de la propagation des flammes prémélangées (Doctoral dissertation, INRIA).
- [8] Serre, D. (1991). Variations de grande amplitude pour la densité d'un fluide visqueux compressible. Physica D : Nonlinear Phenomena, 48(1), 113-128.

- [9] Duclercq, M. (2010). Etude de l'interaction entre un fluide et une structure oscillante : régimes d'écoulement et de forces, du cylindre isolé au réseau de cylindres (Doctoral dissertation, Ecole Polytechnique X).
- [10] L. Chupin, Modélisation et Analyse mathématique en ...lms minces, Institut Camille Jordan - INSA de Lyon, (2009). ([math.univlyon1.fr/~chupin/FICHIERS.../chupin-hdr-soutenance.pdf](http://math.univlyon1.fr/~chupin/FICHIERS.../chupin-hdr-soutenance.pdf)).4
- [11] M. SOFONEA, Problèmes non Linéaires dans la Théorie de l'Elasticité, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées à l'Université de Sétif (1993)
- [12] F. Saidi, Sur quelques problèmes de lubri...cation par des fluides newtoniens nonisothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Etudemathématique et numérique, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne,(2004).
- [13] R. Kh. Zeytounian, Les Modeles Asymptotiques de la Mecanique des Fluides 1. LNP0245, Springer, (1986)
- [14] Perron, S. (2001). Résolution numérique d'écoulements 3 dimensions avec une nouvelle méthode de volumes finis pour maillages non structurés. Université du Québec à Chicoutimi.
- [15] M. Boukrouche, F. Saidi, Non-isothermal lubrication problem with Trescafluid-solid interface law. Part I, *Nonlinear Anal.* 7(2006), 1145-1166.
- [16] Benterki, D., Benseridi, H., & Dilmi, M. (2017). Asymptotic behavior of solutions to a boundary value problem with mixed boundary conditions and friction law. *Boundary Value Problems*, 2017(1), 55.
- [17] Saadallah, A. (2018). Comportement asymptotique de différents problèmes de contact avec frottement en film mince dans le cas isotherme et non-isotherme (Doctoral dissertation).

- [18] Alais, P., & Hennion, P. Y. (1979). Etude par une méthode de Fourier de l'interaction non linéaire de deux rayonnements acoustiques dans un fluide absorbant. Cas particulier de l'émission paramétrique. *Acta Acustica united with Acustica*, 43(1), 1-11.

## Résumé

Le but de ce mémoire est de modéliser l'écoulement des fluides, sur la base d'hypothèses de continuité et d'équations générales de conservation. Nous formons ici des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles qui décrivent le comportement des fluides à l'état thermique ou non thermique. Des arguments d'existence et d'unité sont présentés pour un système dynamique d'écoulement fluide de Stokes, dans un domaine borné tridimensionnel  $\Omega$  avec des conditions aux limites mixtes.

**Mots-clés :** Analyse variationnelle, Condition aux limite, Navier Stokes, Espace de Sobolev, , Loi de Fourier, Equation de l'énergie.

**AMS Classification :** 35R35, 76F10, 78M35.

---

## Abstract

The objective of this thesis is to model fluid flow, based on continuity hypotheses and general conservation equations. Here we form systems of partial differential equations which describe the behavior of fluids in the thermal or non-thermal state. The theory of existence and unity is presented for a dynamic Stokes fluid flow system, in a three-dimensional finite field  $\Omega$  with mixed boundary conditions.

**Keywords :** Variational analysis, Boundary condition, Navier Stokes, Sobolev space, Fourier's law, Energy equation.

**AMS Subject Classification :** 35R35, 76F10, 78M35.

---

## ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو نمذجة تدفق الموائع، بناءً على فرضيات الاستمرارية ومعادلات الحفظ العامة. نحن هنا نشكل أنظمة المعادلات التفاضلية الجزئية التي تصف سلوك الموائع في الحالة الحرارية أو غير الحرارية. تم تقديم نظرية الوجود والوحدة لنظام تدفق مائع ستوكس الديناميكي، في مجال محدود ثلاثي الأبعاد  $\Omega$  مع ظروف حدودية مختلطة.

**كلمات المفاتيح:** التحليل التبايني، الشروط الحدودية، نافير ستوكس، فضاء سوبوليف، قانون فوري، معادلة الطاقة.