



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Espaces vectoriels topologiques uniformes:
introduction et applications**

Présenté par: Ouani Afaf

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Mr. Guedda Lamine	MCA/Prof.	Président	Univ. El Oued
Dr. Nisse Lamine	Prof.	Rapporteur	Univ. El Oued
Dr. Fareh Abd Alfatah	MCA/MC	Examineur	Univ. El Oued

Table des matières

CHAPITRE

Notions générale Page 1

CHAPITRE

Introduction Page 2

CHAPITRE 1

Espaces uniformes Page 4

- 1.1 Rappel sur les espaces topologiques 4
- 1.2 Espace métrique 10
- 1.3 Structure uniforme 16
- 1.4 Espace semi-normé 18
- 1.5 La relation entre les uniformités et l'espace semi-métrique 20
- 1.6 Espace vectoriel topologique défini par une semi-métrique 21

CHAPITRE 2

Le Point Fixe Page 26

- 2.1 Théorème de Banach (type métrique) 26
- 2.2 Généralisation du principe de contraction pour les structures non métriques 27
- 2.3 Extension du principe de contraction au cas non métrique 28

CHAPITRE 3

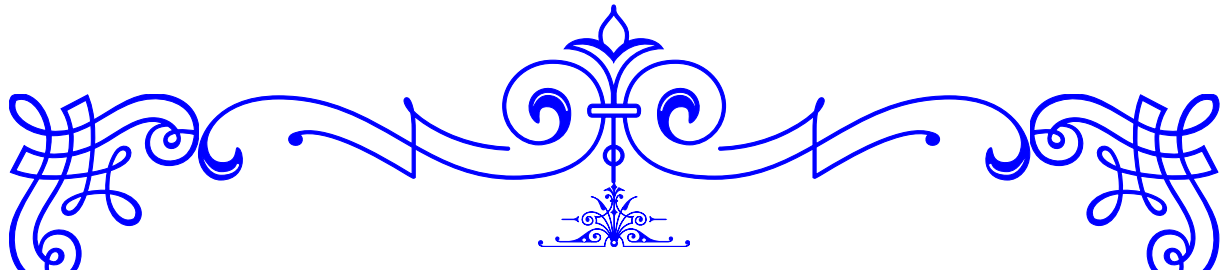
Application Page 34

CHAPITRE

Conclusion Page 38

CHAPITRE

Bibliographie Page 39



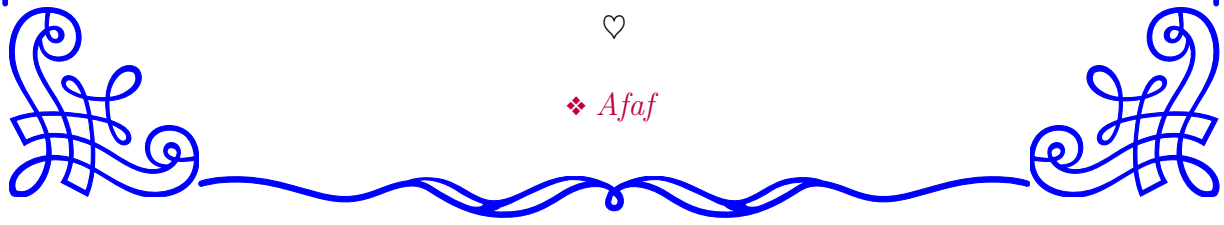
Remerciements



*En premier lieu, mes remercie-
ments s'adressent à ALLAH le tout puissant pour les chances
qui m'offre pour réaliser ce travail. Je tiens à remercier toutes les personnes
qui ont contribué au succès de mon étude et qui m'ont aidée lors de la rédaction de ce mé-
moire. Je voudrais dans un premier temps remercier, mon encadreur de mémoire M. Nisse La-
mine, professeur de Mathématique à l'université de Hamma Lakhdar - El-Oued, pour sa pa-
tience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma ré-
flexion. Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université de Hamma Lakhdar
- El-Oued et les intervenants professionnels responsables de ma formation, pour avoir assuré
la partie théorique de celle-ci. Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes
suivantes, pour leur aide dans la réalisation de ce mémoire : Monsieur Fareh Abd Al-
fatah qui a partagé ses connaissances et aide-moi à choisir les références appro-
priées. Monsieur Moumen Bekouch Mohamed pour ses conseils concernant
mon style d'écriture, ils ont grandement facilité mon travail. Mes pa-
rentes, pour leur soutien constant et leurs encouragements et
leurs confiance. Ma famille et mes amis et collègues
qui m'ont apporté leur soutien moral et
intellectuel tout au long de
ma démarche.*



❖ Afaf



Notations générales

Soient X, Y deux ensembles, et A, B sous-ensembles de X .

Notation	:	Définition
$A \subset X$	:	$\forall x \in A, x \in X$
$\emptyset$	:	l'ensemble vide
$\mathbb{C}$	:	l'ensemble de nombres complexes
$\mathbb{R}$	:	l'ensemble des nombres réels
$\mathbb{N}$	:	l'ensemble des nombres naturelles
$C_X A$	:	le complément de A dans X , tel que $A \subset X$
$A \cap B$	$\doteq$	$\{x \in A \text{ tel que } x \in B\}$
$A \cup B$	$\doteq$	$\{x \in A \text{ ou } x \in B\}$
$X + Y$	$\doteq$	$\{x + y; x \in X, y \in Y\}$
$X \times Y$	$\doteq$	$\{(x, y); x \in X, y \in Y\}$
$C(X, Y)$	$\doteq$	$\{f : X \longrightarrow Y \text{ t.q. : } f \text{ est continue}\}$
$C(X)$	$\doteq$	$\{f : X \longrightarrow X \text{ t.q. : } f \text{ est continue}\}$
$B(X, \mathbb{K})$	$\doteq$	$\{f : X \longrightarrow Y \text{ t.q. : } f \text{ est bornée } \}$ tel que $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$
∂X	:	la frontière de X
$\inf(A)$	$\doteq$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \inf(A) + \varepsilon$
$\sup(A)$	$\doteq$	$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \sup(A) - \varepsilon < x$
$\mathcal{P}(X)$	:	l'ensemble des parties de X
$\mathcal{V}(x)$	:	un système de voisinages

Introduction

Dans ce mémoire, on étudie l'extension du principe de contraction de Banach sur des espaces non métriques, qui admettent une structure uniforme. En analyse, si on considère une équation de la forme $g(x) = 0$ ou g est une fonction à valeurs réelles, en lui associant la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) + x, \end{aligned}$$

alors la solution x_0 de $g(x) = 0$ est une solution de $f(x) = x$, qui s'appelle un point fixe de f . Il est noté que la théorie de point fixe est fondamentale en mathématique. En effet, cette théorie nous offre un moyen efficace pour montrer l'existence d'une solution pour certains systèmes d'équations non linéaires (différentielles ou intégrales). Ces systèmes peuvent s'écrire sous forme d'équations abstraites $f(x) = x$ ou l'application f est définie d'un ensemble E dans lui même. D'où l'importance de l'étude et du développement de la théorie de point fixe. Ces systèmes sont généralement issus de la modélisation de divers problèmes en physique, chimie et en biologie.

Il y'a plusieurs théorèmes de point fixe, comme : Brower, Schauder, Schaefer, Ces théorèmes (de type topologique) donnent l'existence de point fixe sans garantir l'unicité. Pour l'unicité, on a le célèbre théorème (de type métrique), qui s'appelle théorème de Banach (principe de contraction de Banach). Ce dernier fournit de plus, un algorithme d'approximation du point fixe par une limite d'une suite itérée. Ce théorème montre qu'une contraction dans un espace métrique complet a un point fixe unique.

D'autre part, les conditions sur l'application (contractive) et l'espace ne peuvent pas être vérifiées dans un certain nombre de problèmes. D'où la nécessité d'étendre et de généraliser le principe de contraction de Banach afin d'élargir son domaine d'application.

Alors, par quel moyen peut-on généraliser ce principe si on a pas une structure métrique ?

La réponse à cette question est l'objet de notre mémoire. En fait, l'étude présentée ici est inspirée d'un travail publié dans l'article [17], dont le théorème principal est une généralisation du principe de contraction de Banach. On peut voir l'une de ses applications dans [6]

Le mémoire est composé de trois chapitre. Dans premier chapitre, on rappelle quelques notions et définitions mathématiques, en particulier la notion d'espace uniforme et sa relation avec l'espace vectoriel topologique. Cette structure d'uniformité constitue une base nécessaire pour cette étude. Dans le deuxième chapitre, on rappelle le principe de contraction de Banach sur un espace métrique.

Ensuite, on généralise ce théorème dans un cadre particulier, sur un espace non métrique qui admet une structure uniforme. On passe d'abord par l'extension de certaines notions telles que la bornitude et la contraction introduites dans [17]. On termine ce chapitre par un exemple illustratif du résultat obtenu. Dans le troisième chapitre, on applique les résultats précédents à un problème à valeur initiale, dont les équations sont un modèle mathématique, qui représentent de nombreux processus technologiques.



Chapitre 1

Espaces uniformes

Dans le premier chapitre on rappelle quelques notions mathématiques. On commence par les principaux axiomes de la topologie. Puis, on définit l'espace métrique, l'espace normé, l'espace semi-normé et le filtre de voisinage et ses propriétés fondamentales. Ensuite, on présente la notion d'espace uniforme qui est l'outil central dans notre étude, ainsi que sa relation avec la structure d'espace vectoriel topologique. Dans la fin de ce chapitre, on donne quelques définitions, qui généralisent les notions de contraction et l'ensemble borné dans ces nouvelles structures. Les principaux ouvrages utilisés dans cette partie de notre travail sont [7], [11] et [2].

1.1 Rappel sur les espaces topologiques

Espaces topologiques

La topologie, ou l'étude de lieux est la formalisation mathématique de notions géométriques intuitives comme proximité, éloignement, voisinage, position limite d'un point mobile, etc..., dans l'espace euclidien de dimension 2 ou 3. Cette formalisation s'exprime dans un langage axiomatique très général. La généralité du langage introduit possède un avantage, celui de s'appliquer à des situations très variées, par exemple à l'étude des "espaces fonctionnels". L'inconvénient est que l'on perd un certain nombre de propriétés intuitivement évidentes dans le cas concret d'où l'on était parti ; par exemple la possibilité de séparer deux points par des voisinages disjoints. En fait, dans bien des cas, on sera amené à restreindre la généralité par des axiomes supplémentaires de manière à se rapprocher de l'intuition initiale ; étude des espaces séparés, des espaces métriques, etc. On rappelle que si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X .

Définition 1.1. (voir [11] page 1) une **topologie** sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X , i.e. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, vérifiant les propriétés suivantes, appelées **axiomes des ouverts**.

(O1) L'ensemble vide $\emptyset$, et l'ensemble X appartiennent à $\mathcal{T}$.

(O2) Si $u, v \in \mathcal{T}$, alors $u \cap v \in \mathcal{T}$.

(O3) Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de X appartenant à $\mathcal{T}$, alors $\cup_{i \in I} u_i \in \mathcal{T}$ (où I est un ensemble d'indices quelconque).

L'ensemble X , muni de la topologie $\mathcal{T}$, est appelé **espace topologique**. On notera quelques fois $(X, \mathcal{T})$ un tel espace. Les parties de X qui appartiennent à $\mathcal{T}$ sont dites **parties ouvertes** ou **ouverts** de X . Les éléments de X sont généralement appelés **points**.

Ainsi, en appelant les éléments de $\mathcal{T}$ des ouverts, les propriétés (O1), (O2) et (O3) peuvent être reformulées de la manière suivante :

- La partie vide $\emptyset$ et l'ensemble X sont des ouverts.
- l'intersection de deux ouverts est un ouvert.
- La réunion de toute famille des ouverts est un ouvert.

Construction d'une topologie à partir d'une base d'ouverts (voir [11] page 3)

Définition 1.2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{T}$. Alors, on dit que $\mathcal{B}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}$, si elle possède les deux propriétés suivantes.

(B1) Pour tout $x \in X$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$.

(B2) Pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, et tout $x \in U_1 \cap U_2$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

Réciproquement, si X est un ensemble et si $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant (B1) et (B2), alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base.

En effet, il suffit de prendre :

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X; U \text{ étant une réunion quelconque d'ensembles appartenant à } \mathcal{B}\}.$$

Autrement dit, un sous-ensemble U de X est un ouvert de $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Construction d'une topologie à partir des axiomes des fermés

Définition 1.3. (voir [11] page 2) Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. On dit que A est un **fermé** ou **partie fermée** de X si le complémentaire de A dans X est ouvert.

Autrement dit, si l'on a $C_X A \in \mathcal{T}$.

La famille $\mathcal{F}$ des fermés d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérifie les propriétés suivantes, appelées **axiomes des fermés**.

(F1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$, i.e. la partie vide $\emptyset$ et l'ensemble X sont des fermés.

(F2) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$, i.e. la réunion de deux fermés est un fermé.

(F3) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de X appartenant à $\mathcal{F}$, alors $\cap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$, i.e. l'intersection de toute famille de fermés est un fermé.

Réciproquement, on peut définir une topologie à partir des ensembles fermés. De façon plus précise, si X est un ensemble et si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant (F1), (F2) et (F3), alors $\mathcal{T} = \{C_X A; A \in \mathcal{F}\}$ est une topologie sur X dont l'ensemble des fermés est $\mathcal{F}$. Certaines structures topologiques possèdent des caractères de nature à produire des propriétés dans ces espaces topologiques, qui les rendent riches de résultats importants et très utiles en analyse fonctionnelle. Il s'agit par exemple, de la séparation, la complétude, l'uniformité, Un outil central pour définir et manipuler ces notions s'appelle **voisinage**.

Définition 1.4. (voir [7] page 21-22) On appelle *voisinage* d'un point x de X toute partie de X contenant au moins un ouvert contenant lui-même x . On désignera souvent par $\mathcal{B}(x)$ l'ensemble des voisinages de x . Les voisinages d'un point x possèdent les propriétés suivantes, outre la propriété de contenir tous x :

1. Toute partie qui contient un voisinage de x est un voisinage de x .
2. Toute intersection d'un nombre fini de voisinages de x est un voisinage de x .

On doit noter que le mot français "voisinage" est ici quelque peu trompeur : on pourrait croire qu'un voisinage de x est un ensemble très voisin de x , et qu'il est d'autant plus facile pour une partie de X d'être un voisinage de x qu'elle est plus petite.

Or il n'en est rien. La propriété (T1) des voisinages montre au contraire qu'il est d'autant plus facile, pour une partie A , d'être un voisinage de x qu'elle est plus grande. L'espace entier X est un voisinage de x , et, sauf dans des cas exceptionnels (comme la métrique discrète), la partie réduite à x n'est pas un voisinage de x .

Construction d'une topologie à partir d'une base de voisinages

Définition 1.5 (Système de voisinages). (voir [11] page 5) Soit X un ensemble non vide. supposons que pour tout $x \in X$ il existe un ensemble non vide $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ qui satisfait

- (T1) Si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors $x \in V$;
- (T2) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subseteq W$, alors $W \in \mathcal{V}(x)$;
- (T3) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$, alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$;
- (T4) Si $x \in V$ et $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \in \mathcal{V}(y)$ pour tout $y \in W$.

Une telle entité $\mathcal{V}(x)$ est appelé **un système de voisinages** de $x \in X$. Un élément $V \in \mathcal{V}(x)$ est appelé **un voisinage** de $x \in X$.

Ainsi, on peut définir une topologie sur X à partir d'une base de voisinages telle qu'elle est définie ci-dessous.

Un sous-ensemble $U \subseteq X$ est appelé **ouvert** ssi $U \in \mathcal{V}(x)$ pour chaque $x \in U$. L'ensemble $\mathcal{T}$ de tous les ensembles ouverts est appelé une **topologie** sur X et le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé un **espace topologique**.

Définition 1.6 (Base de voisinage). (voir [11] page 5) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On appelle *base de voisinage* de x , toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x , il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$. Notons que si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x , alors on a :

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X; \text{ il existe } W \in \mathcal{B}(x) \text{ avec } W \subset V\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des parties de X contenant un élément de $\mathcal{B}(x)$. Ainsi, on obtient $\mathcal{V}(x)$ à partir de $\mathcal{B}(x)$.

La base d'ouverts dans un espace topologique X , et les systèmes de voisinages d'un point de X possèdent des rôles comparables, néanmoins cette dernière notion est plus appropriée pour l'étude et l'analyse locales dans ces structures.

Il y'a plusieurs propriétés topologiques fondamentales qui utilisent les voisinages. L'une des plus importante est la continuité.

Continuité

Définition 1.7. Soient X et Y deux ensembles non vides. Si pour tout $x \in X$ on peut associer un unique élément $y \in Y$ (par une certaine loi), alors cette association est appelée application de X vers Y .

Définition 1.8. (voir [7] page 39) Soit f une application d'un espace topologique X dans un espace topologique Y .

On dit que f est continue en un point a de X si, quel que soit V voisinage de $f(a)$, il existe U voisinage de a , tel que : $f(U) \subset V$.

Ou encore : Si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a .

Une application de X dans Y est dite continue, si elle est continue en tout point de X .

Théorème 1.1. Pour qu'une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y soit continue, il faut et il suffit que l'image réciproque par f de tout ouvert de Y soit un ouvert de X .

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est nécessaire : Supposons f continue, soit B un ouvert de Y , et posons $A = f^{-1}(B)$. Soit $a \in A$. f est continue en a , or B est un voisinage de $f(a)$, donc A doit être un voisinage de a ; ainsi A est un voisinage de chacun de ses points, donc c'est un ensemble ouvert .

Montrons maintenant que la condition est suffisante : Supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de Y soit un ouvert de X . Alors, pour tout point a de X , soit V un voisinage de $f(a)$ dans Y . Alors V contient un ouvert B contenant $b = f(a)$, donc l'image réciproque $f^{-1}(V)$ contient $f^{-1}(B)$ qui est un ouvert contenant a . Alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a , ce qui prouve que l'application f est continue en a . $\square$

Théorème 1.2. (voir [7] page 40) Pour qu'une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y soit continue, il faut et il suffit que l'image réciproque par f de tout fermé de Y soit un fermé de X .

Démonstration. On passe du théorème précédent à celui-ci en remplaçant les parties ouvertes considérées dans X et dans Y par leurs parties complémentaires fermées. $\square$

Remarque 1.1. (voir [7] page 40) Si, dans les deux théorèmes précédents, on remplaçait les images réciproques par des images directes, on aboutirait à des résultats inexacts. Considérons par exemple, en premier lieu, une application constante de X dans Y . Une telle application est manifestement

continue. Cependant l'image par cette application de n'importe quel ouvert de X , en particulier de X lui-même, est réduite à un point de Y , et en général une partie réduite à un point n'est pas ouverte.

Suite convergente

Définition 1.9. (voir [11] page 36) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans un espace topologique X .

1. On dit qu'un point l de X est **limite de la suite** $(x_n)_{n \geq 0}$, ou que cette suite **converge vers** l , ou encore que, x_n tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout voisinage V de l dans X , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \in V$.
2. La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est dite **convergente** si elle a une limite, sinon elle est dite **divergente**.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

Filtre de voisinages

Définition 1.10. (voir [7] page 51) Soit X un ensemble. Un filtre $\mathcal{F}$ sur X est une famille non vide de parties de X telle que :

1. $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B \in \mathcal{F}$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$.
3. Si $A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset X$, alors $B \in \mathcal{F}$.

Exemple 1.1. 1. Soit $A \subset X, A \neq \emptyset$. Alors $\{B \subset X / A \subset B\}$ est un filtre sur X .

2. Soit X un ensemble infini. Alors $\{A \subset X / C_X A \text{ fini}\}$ est un filtre sur X . En effet : $C_X(A \cap B) = C_X A \cup C_X B$.

$\emptyset$ est de complémentaire infini, tandis que le complémentaire de X est fini, et si $A \subset B$, alors $C_X B \subset C_X A$.

Lorsque $X = \mathbb{N}$, on appelle ce filtre de Fréchet. On verra plus loin son lien avec les suites convergentes.

3. Soit X un espace topologique, $x_0 \in X$. L'ensemble $\mathcal{V}_{x_0}$ des voisinages de x_0 est un filtre sur X (les vérifications sont immédiates). Plus généralement, l'ensemble des voisinages d'une partie quelconque non vide de X est un filtre.
4. Soit $(X, \leq)$ un ensemble muni d'un ordre partiel, filtre croissante (ie : si $x, y \in X, \exists z \in X$ tel que $z \geq x$ et $z \geq y$).
Soit $x \in X$. On définit $A_x = \{y \in X / y \geq x\}$. Alors $\{B \in X / \exists x \in X, A_x \subset B\}$ est un filtre sur X . Si X est $\mathbb{N}$ muni de son ordre naturel, on retrouve le filtre de Fréchet.

Définition 1.11 (Base de filtre). (voir [3] page 11) On dit qu'une famille $\mathfrak{B} = (B_i / i \in I)$ est une base de filtre (ou base) si l'on a :

1. $(\forall i) : B_i \neq \emptyset$.
2. $(\forall i)(\forall j)(\exists k) : B_k \subset B_i \cap B_j$.

$\mathfrak{B}' = (B'_j / j \in J)$ est une sous-base de $\mathfrak{B}$, si $\mathfrak{B}$ base, et si

$$(\forall i)(\exists j) : B'_j \subset B_i.$$

Autrement dit, $\mathfrak{B}' \vdash \mathfrak{B}$

Exemple 1.2. Considérons l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels ; si

$$S_m = \{n/n \in \mathbb{N}; n \geq m\}$$

désigne la section commençante à m , la famille $\mathcal{S} = (S_m / m \in \mathbb{N})$ est évidemment une base de filtre dans $\mathbb{N}$. Cette base est appelée la base de Fréchet.

La base $\mathcal{S} = (S_{2p} / p \in \mathbb{N})$ est une base telle que $\mathcal{S}' \vdash \mathcal{S}$, et $\mathcal{S} \vdash \mathcal{S}'$; on a donc $\mathcal{S}' \simeq \mathcal{S}$.

Comparaison des filtres , ultrafiltres.

Définition 1.12. (voir [7] page 52) Un filtre $\mathcal{F}_1$ est plus fin qu'un filtre $\mathcal{F}_2$, si tout élément de $\mathcal{F}_2$ est un élément de $\mathcal{F}_1$. On écrira donc $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$ et on dira que $\mathcal{F}_1$ est strictement plus fin que $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_1$ contient strictement $\mathcal{F}_2$.

Remarque 1.2. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de filtres, cette famille admettra une borne supérieure, si pour toute sous-famille finie $(\mathcal{F}_i)_{i \in J}$, J finie $\subset I$, et pour tout système $A_i \in \mathcal{F}_i$, l'intersection des $A_i, i \in J$ est non vide.

On déduit de cette remarque l'importante proposition suivante :

Proposition 1.1. tout ensemble totalement ordonné de filtres sur E admet une borne supérieure.

En effet pour tout ensemble de filtres totalement ordonné, les A_i de la remarque précédente appartiennent à l'un des $\mathcal{F}_j$, leur intersection étant non vide, alors on en déduit l'existence d'une borne supérieure.

Définition 1.13. (voir [7] page 52) $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, si $\mathcal{U}$ est un filtre et s'il n'existe pas de filtre strictement plus fin que $\mathcal{U}$.

Exemple 1.3. La famille de tous les ensembles contenant un point donné a de X est un ultrafiltre $\mathcal{U}$; on l'appelle ultrafiltre trivial défini par a . (C'est le seul exemple d'ultrafiltres que l'on puisse obtenir sans utiliser l'axiome de choix.) Si en effet $\mathcal{U}'$ était un filtre strictement plus fin que $\mathcal{U}$, il devrait contenir au moins un ensemble $A \subset E$ ne contenant pas a ; comme a appartient à $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ contiendrait $\emptyset$, ce qui est impossible.

Théorème 1.3. Étant donné un filtre il existe toujours un ultrafiltre qui le contienne.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un filtre et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des filtres plus fins que $\mathcal{F}$. $\mathcal{S}$ est, comme on l'a vu, inductif et non vide puisqu'il contient au moins $\mathcal{F}$; donc, d'après le théorème de Zorn, $\mathcal{S}$ possède un élément maximal qui est un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$. $\square$

Ceci prouve l'existence d'ultrafiltres différents des ultrafiltres triviaux. Soit X un espace topologique, $\{a\}$ un point non isolé de X , c'est-à-dire tel que a ne soit pas ouvert. L'ensemble des $V - a = V \cap C_E\{a\}$, V voisinages de a , est alors une base de filtre ; soit $\mathcal{F}$ le filtre qu'elle définit.

Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$. Les ensembles de $\mathcal{F}$ n'ont aucun point commun, donc il en est de même a fortiori des ensembles de $\mathcal{U}$. En effet, si $b \neq a$, il existe un voisinage V de a qui ne contient pas b , alors $V - a$ est dans $\mathcal{F}$ et ne contient pas b . D'autre part $V - a$ ne contient pas non plus a .

Définition 1.14 (Espace de Hausdorff). (voir [7] page 40) *Un espace topologique est dit séparé ou Hausdorff si et seulement si pour tout deux points distincts $x_1, x_2 \in X$ il existe deux ouverts disjoints $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ tel que $x_1 \in U_1$ et $x_2 \in U_2$. Ce qui est équivalent à : l'intersection de tous les voisinages fermés de $x \in X$ contient seulement x .*

Dans l'espace topologique de Hausdorff, tout ensemble $\{x\}$ pour $x \in X$ est fermé.

Parmi les structures topologiques importantes utiles en analyse fonctionnelle, on rencontre souvent celles qui sont associées aux structures d'espaces métriques.

1.2 Espace métrique

Définition 1.15. (voir [11] page 69-70) *On appelle espace métrique un ensemble E muni d'une fonction distance, c'est-à-dire d'une application d de $E \times E$ dans la demi-droite de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+ = \{x; x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$). qui, au couple (x, y) de $E \times E$, fait correspondre un nombre $d(x, y) \geq 0$, appelé distance de x et de y .*

Cette distance doit posséder les trois propriétés suivantes :

1. *Symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$;*
2. *Positivité : $d(x, y) \geq 0$ si $x \neq y$, et $d(x, x) = 0$;*
3. *Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*

(tout coté d'un triangle est au plus égale à la somme des deux autres).

On en déduit immédiatement l'inégalité :

$$d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|$$

(tout coté d'un triangle est au moins égale à la différence des deux autres).

Cela entraîne aussi que si $x_1, x_2, \dots, x_n$, sont n points arbitraires de E on ait :

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Définition 1.16. (voir [11] page 71) *Soient (E, d) un espace métrique, $a \in E$, $r > 0$.*

1. *On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble :*

$$B(a, r) = \{x \in E; d(a, x) < r\}.$$

2. *On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble :*

$$B'(a, r) = \{x \in E; d(a, x) \leq r\}.$$

3. *On appelle **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble :*

$$S(a, r) = \{x \in E; d(a, x) = r\}.$$

Topologie des espaces métriques

Proposition 1.2. (voir [11] page 74-75) Soit (E, d) un espace métrique.

1. L'ensemble E est la réunion des boules ouvertes.
2. Soient $a \in E$ et $r > 0$. Soit $x \in B(a, r)$ et $\rho = r - d(a, x)$, alors $\rho > 0$ et on a $B(x, \rho) \subset B(a, r)$.
3. Soient $a, b \in E$ et $r_1, r_2 > 0$. Pour tout $x \in B(a, r_1) \cap B(b, r_2)$, il existe $\rho > 0$ tel que $B(x, \rho) \subset B(a, r_1) \cap B(b, r_2)$. Donc l'intersection de deux boules ouvertes est réunion des boules ouvertes.

Démonstration. 1. Soient $a \in E$ et $r > 0$, alors on a $a \in B(a, r)$, donc E est la réunion des boules ouvertes.

2. Soit $y \in B(x, \rho)$, alors on a $d(x, y) < \rho = r - d(a, x)$, d'où $d(a, x) + d(x, y) < r$. D'après l'inégalité triangulaire, on a $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y)$. Par conséquent, on a $d(a, y) < r$. Autrement dit, on a $y \in B(a, r)$, donc $B(x, \rho) \subset B(a, r)$.

3. Soit $\rho = \inf\{r_1 - d(a, x), r_2 - d(b, x)\}$, alors $\rho > 0$ et il résulte de 2 que l'on a $B(x, \rho) \subset B(a, r_1) \cap B(b, r_2)$.

□

Soit (E, d) un espace métrique. On déduit de la proposition précédente que les boules ouvertes de (E, d) vérifient les propriétés 1.1. Par conséquent, il existe une unique topologie $\mathcal{T}_d$ sur E pour laquelle les boules ouvertes forment une base d'ouverts. La topologie $\mathcal{T}_d$ est appelée **topologie associée à la distance** d . Un espace métrique (E, d) sera toujours considéré comme un espace topologique, muni de la topologie $\mathcal{T}_d$.

Ce qu'il faut retenir concernant la définition de la topologie $\mathcal{T}_d$ est :

Soit U sous-ensemble de E , alors U est un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}_d$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

Proposition 1.3. Soit (E, d) un espace métrique. Alors il est séparé.

Démonstration. Soient $x, y \in E$ tel que $x \neq y$, alors on a $d(x, y) > 0$. Soit $r = \frac{d(x, y)}{2}$, alors on a $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Par conséquent, (E, d) est séparé. □

Proposition 1.4 (Continuité). (voir [7] page 39) Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, on dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est continue, si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d_E(a, x) \leq \eta$ entraîne $d_F(f(a), f(x)) \leq \varepsilon$; on a bien là une généralisation de la continuité telle qu'elle était connue pour $E = F = \mathbb{R}$.

Ou encore :

Si, quelle que soit la boule ayant pour centre $f(a)$, il existe une boule de centre a dont l'image par f soit dans la précédente.

Démonstration. Ceci résulte de la définition de la continuité 1.8, et de la topologie associée à une distance. □

Définition 1.17 (Continuité uniforme). (voir [9] page 9) Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et $f : E \rightarrow F$. On dit que f est uniformément continue sur E si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 \in X; d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Par rapport à la définition de la continuité, on a remplacé " $\forall x \in X, \exists \delta > 0$ " par " $\exists \delta > 0, \forall x \in X$ " : δ dépend toujours de ε , mais ne dépend plus de x . Toute fonction uniformément continue est continue, mais la réciproque est fausse.

Définition 1.18 (L'application lipschitzienne). (voir [9] page 10) Une application $F : M \subset E \rightarrow E$ est dite lipschitzienne si, $\exists k > 0$ t.q : $\forall x, y$ dans M , on a

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

($k \doteq$ coefficient de Lipschitz).

Définition 1.19 (L'application contractante). (voir [9] page 10) Une application $F : M \subset E \rightarrow E$ est dite contractante, si elle est lipschitzienne avec coefficient de Lipschitz $k \in]0, 1[$.

Remarque 1.3 (L'application non expansive). (voir [9] page 10) Si $k = 1$, on dit que F est non expansive.

On peut définir sur les espaces métriques une structure large qui s'appelle **la norme**.

Espace normé

Définition 1.20. (voir [11] page 221) Une **norme** sur un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel E est une application :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

possédant les propriétés suivantes :

(N1) pour tout $x \in E$ non nul, on a $\|x\| \neq 0$;

(N2) pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(N3) pour tout $x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**inégalité de convexité**).

L'espace E , muni de la norme $\|\cdot\|$, est dit **espace normé** ou **espace vectoriel normé** (ou $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel normé**, si on veut préciser le corps $\mathbb{K}$). On note souvent un tel espace $(E, \|\cdot\|)$. On déduit de la propriété (N2) que l'on a $\|0\| = 0$.

Proposition 1.5. (voir [11] page 222) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

1. La propriété (N2) ci-dessus est équivalente à la forme affaiblie suivante :

(N2') pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|$.

2. On peut remplacer la propriété (N3) ci-dessus par la propriété suivante :

(N3') pour tout $x, y \in E$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\|.$$

3. pour tout $x, y \in E$, on a l'inégalité $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

4. L'inégalité (N3) se généralise à n points. Pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$, on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$$

Démonstration. 1. Il est clair que (N2) $\implies$ (N2'). Réciproquement, supposons (N2') vérifiée.

Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda = 0$, alors $0 \leq \|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\| = 0$. Si $\lambda \neq 0$, alors on a $|\lambda| \|x\| = |\lambda| \|\lambda^{-1}(\lambda x)\| \leq \|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|$. On déduit (N2).

2. Supposons (N3) vérifiée. alors pour tout $x, y \in E$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\|tx + (1-t)y\| \leq \|tx\| + \|(1-t)y\| = t\|x\| + (1-t)\|y\|.$$

Réciproquement, Supposons (N3') vérifiée. Soient $x, y \in E$, en prenant $t = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\|x + y\| = \left\| \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}(2y) \right\| \leq \frac{1}{2}\|2x\| + \frac{1}{2}\|2y\| = \frac{1}{2}2\|x\| + \frac{1}{2}2\|y\| = \|x\| + \|y\|.$$

3. On a $\|x\| = \|y + (x - y)\| \leq \|y\| + \|x - y\|$, d'où $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. de même, on a $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$. Par conséquent, on a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. La dernière propriété est triviale. On vérifie celle-ci par récurrence sur n .

□

Distance associée à une norme.(voir [11] page 222) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$. On vérifié facilement que d est une distance sur E , appelée **distance associée à la norme**. La topologie correspondante sera appelée **topologie normique**. Sauf mention du contraire, on munit tous les espaces normés de la topologie normique. La distance d associée à la norme possède les propriétés suivantes :

(a) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ quels que soient $x, y, z \in E$.

(b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$ pour tout $x \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Réciproquement, si E est un $\mathbb{K}$ -un espace vectoriel muni d'une distance d possédant les des propriétés (a) et (b) ci-dessus, alors d est définie à partir d'une norme; il suffit de poser $\|x\| = d(x, 0)$, pour tout $x \in E$.

Proposition 1.6. (voir [11] page 223) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors on a :

1. L'application :

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

est lipschitzienne, donc uniformément continue.

2. L'application suivante est continue.

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

3. L'application suivante est lipschitzienne, donc uniformément continue.

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

4. La translation, et les homothéties de rapport non nul sont des homéomorphismes de E . Autrement dit, pour tout $a \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, non nul, les applications suivantes sont des homéomorphismes de E .

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x + a \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

Démonstration. Voir [11] page 223. □

Corollaire 1.1. (voir [11] page 223) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ deux suites convergentes dans E et $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite convergente dans $\mathbb{K}$. Alors les suites $(x_n + y_n)_{n \geq 0}$, $(\lambda_n x_n)_{n \geq 0}$ et $(\|x_n\|)_{n \geq 0}$ sont convergentes dans leurs espaces respectives, et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n x_n = (\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n)(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$.

Définition 1.21. (voir [11] page 224) Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un espace vectoriel E sont dites **équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.

On va voir que deux normes sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie sur E .

Remarque 1.4. (voir [11] page 224) Soient E un espace vectoriel et $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ deux normes sur E . S'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans E telle que la suite $(\|x_n\|)_{n \geq 0}$ soit bornée et la suite $(\|x_n\|')_{n \geq 0}$ ne soit pas bornée alors les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 1.7 (Suite convergente). (voir [11] page 36) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans un espace métrique (E, d) .

On dit que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est **convergente** si elle admet une limite.

C'est-à-dire, $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite convergente si

$$\exists l \in E; \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, d(x_n, l) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.22 (Suite de Cauchy). (voir [11] page 87-88) Soit (E, d) un espace métrique.

Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans (E, d) est dite **suite de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, m \geq n_0$, on ait $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Il revient au même de dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.

Remarque 1.5. (voir [11] page 88) Soit (E, d) un espace métrique. On a une formulation géométrique de la définition de suite de Cauchy.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ suite dans (E, d) et on note par $A_n = \{x_k; k \geq n\}$, alors la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy si et seulement si la suite de nombre réels positifs $(\delta(A_n))_{n \geq 0}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Proposition 1.8. (voir [11] page 88) Soit (E, d) un espace métrique.

1. Toute suite convergente dans E est de Cauchy.

2. Toute suite de Cauchy dans E est bornée.
3. Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Démonstration. 1. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite convergente vers x dans E . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour tout $n, m \geq N$, on a $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Par conséquent, $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy.

2. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans (E, d) , alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n, m \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) \leq 1$. Soit :

$$r = \max\{1, d(x_0, x_N), d(x_1, x_N), \dots, d(x_{N-1}, x_N)\}.$$

Alors $r \in]0, +\infty[$ et pour tout $n \geq 0$, on a $x_n \in B(x_N, r)$. Donc la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée.

3. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans (E, d) et $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ une sous-suite de $(x_n)_{n \geq 0}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n, m \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$. D'après le lemme 1.7.1, pour tout $k \geq 0$, on a $n_k \geq k$. Donc, pour tout $k, p \geq N$ on a $n_k \geq n_N \geq N$ et $n_p \geq n_N \geq N$, d'où $d(x_{n_k}, x_{n_p}) < \varepsilon$. Donc $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ est de Cauchy.

□

Proposition 1.9. (voir [11] page 88) Soient (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans E .

La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est convergente si et seulement si elle possède une sous-suite convergente. Autrement dit, une suite de Cauchy dans E possédant une valeur d'adhérence est convergente. La valeur d'adhérence est alors unique. C'est la limite de la suite.

Démonstration. il est clair que toute sous-suite d'une suite convergente est convergente. Réciproquement, supposons qu'il existe une sous suite $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ de $(x_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers un élément $a \in E$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geq n$, donc pour tout $k \geq 0$, on a $n_k \geq k$. Soit $p = \max(N, k_0)$, alors $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq p$, on a $d(x_n, x_{n_p}) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_{n_p}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_p}) + d(x_{n_p}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $(x_n)_{n \geq 0}$ est convergente vers a . □

Définition 1.23 (Espace complet). (voir [11] page 89) Soit (E, d) un espace métrique.

1. On dit que (E, d) est **complet** si toute suite de Cauchy dans (E, d) est convergente.
2. Un sous-ensemble A de (E, d) est dit complet si A muni de la distance induite est un espace métrique complet.

L'importance fondamentale des espaces métriques complets réside dans le fait que, pour démontrer qu'une suite est convergente dans un tel espace, il n'est pas nécessaire de connaître d'avance la valeur de la limite.

Exemple 1.4. (voir [11] page 89) Soit (E, d) un espace métrique discret, alors (E, d) est complet car on a $d(x, y) = 0$ si $x = y$, donc toute suite de Cauchy dans E est stationnaire, donc convergente.

Définition 1.24 (Espace de Banach). (voir [11] page 224) Un espace de **Banach** est un espace normé $(E, |||)$ qui est complet pour la distance associée à la norme.

Remarque 1.6. (voir [11] page 224) soient E un espace vectoriel et $|||, |||'$ deux normes équivalentes sur E . Alors $(E, |||)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, |||')$ est un espace de Banach.

Exemple 1.5. (voir [11] page 224-225)

1. La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, le module est une norme sur $\mathbb{C}$.
2. Sur le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, on peut définir les trois normes suivantes :
pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

La norme $\|x\|_2$ est appelée la **norme euclidienne** sur $\mathbb{K}^n$.

3. Soient X un ensemble non vide et $B(X, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des applications bornées définies sur X et à valeur dans $\mathbb{K}$. Pour tout $f \in B(X, \mathbb{K})$, on pose
 $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $B(X, \mathbb{K})$. Notons que cette norme est associée à la distance d_∞ ; définie par $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.
4. Soient X un espace compact et $C(X)$ l'espace vectoriel des applications continues de X dans $\mathbb{K}$, on a $C(X) \subset B(X, \mathbb{K})$. Donc $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace normé.

Les exemples ci-dessus sont des espaces de Banach

Comme les topologies (basiques) sont pauvres en propriétés fondamentales dans l'analyse fonctionnelle comme : la continuité uniforme, la contraction, ... ; on se trouve obligé de définir de nouvelles structures pour généraliser ces notions sur les espaces topologiques. Il s'agit des structures dites **structures uniformes**

1.3 Structure uniforme

La relation

(voir [8] page 29)

1. Relations binaires

Définition 1.25. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est une association entre les éléments de X en couples d'éléments liés par une propriété bien définie. On notera $x\mathcal{R}y$ le fait que la propriété est vraie pour le couple $(x, y) \in X \times X$.

Définition 1.26. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble X .

- $\mathcal{R}$ est réflexive si pour tout $x \in X$, on a $x\mathcal{R}x$;
- $\mathcal{R}$ est symétrique si pour tout $x, y \in X$, on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique si pour tout $x, y \in X$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$;

- $\mathcal{R}$ est transitive si pour tout $x, y, z \in X$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

2. Relations d'équivalence (voir [8] page 29)

Définition 1.27. Une relation binaire est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 1.28. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X , et x un élément de X . On appelle classe d'équivalence de x l'ensemble $\mathcal{C}(x) = \{y \in X, y\mathcal{R}x\}$.

l'Uniformité

Soit X un ensemble non vide. On considère une collection $\mathcal{U}$ de sous-ensemble E de $X \times X \doteq \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in X\}$. l'ensemble $\Delta \doteq \{(x, x) : x \in X\}$ est appelé la **diagonale**. Pour $E \subseteq X \times X$ on note $E^{-1} \doteq \{(x_2, x_1) : (x_1, x_2) \in E\}$ et $E \diamond E \doteq \{(x_1, x_2) : \exists x \in X : (x_1, x), (x, x_2) \in E\}$.

Définition 1.29. (voir [2] page 48-49) Soit X est un ensemble non vide. Un ensemble $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ est dit une **uniformité** sur X ssi

(U1) $E \in \mathcal{U}$, $E \subseteq E'$ implique $E' \in \mathcal{U}$ et $E_1, E_2 \in \mathcal{U}$ implique $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{U}$;

(U2) Si $E \in \mathcal{U}$, alors $\Delta \subseteq E$;

(U3) Si $E \in \mathcal{U}$, alors il existe $E' \in \mathcal{U}$ tel que $E' \subseteq E^{-1}$;

(U4) Si $E \in \mathcal{U}$, alors il existe $E' \in \mathcal{U}$ tel que $E' \diamond E' \subseteq E$.

la couple $(X, \mathcal{U})$ est appelé un espace uniforme. Les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés **entourages**.

L'uniformité $\mathcal{U}$ est dite séparée ssi

(U5) $\bigcap_{E \in \mathcal{U}} E = \Delta$.

Une uniformité $\mathcal{U}$ sur X est un filtre par (U1), (U4).

L'ensemble $\mathcal{U}_B \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ est une base d'une uniformité $\mathcal{U}$ si il satisfait (U2), (U3), (U4) avec $\mathcal{U}$ remplacé par $\mathcal{U}_B$, et avec de plus la base de filtre $\mathcal{U}_B$ pour le filtre $\mathcal{U}$ est appelée la **base de l'uniformité** $\mathcal{U}$.

Et

(U1') Si $E_1, E_2 \in \mathcal{U}_B$, il existe $E \in \mathcal{U}_B$ avec $E \subseteq E_1 \cap E_2$.

Dans ce cas, l'uniformité est obtenue par le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X \times X)$ des éléments de $\mathcal{U}_B$.

Soit $(X, \mathcal{U})$ un espace uniforme. La famille des ensembles $U(x) \doteq \{U_E(x) : E \in \mathcal{U}\}$ ou $U_E(x) \doteq \{x' \in X : (x, x') \in E\}$ est un système local de voisinages de $x \in X$, i.e. elle satisfait (T1) - (T4) de la définition 1.5 . De même, la base de l'uniformité génère la base de voisinages pour tout $x \in X$. De cette façon, l'unique topologie définie est appelée la **topologie uniforme** sur X associée à l'uniformité $\mathcal{U}$. Si l'uniformité est séparée, alors la topologie uniforme correspondante est aussi une topologie séparée.

Définition 1.30. (voir [11] page 29 et 44) Soit X un espace topologique séparé.

1. On dit que X est un **espace régulier** ou T_3 -espace si pour toute partie fermé F de X et pour tout point x de X tels que $x \notin F$, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $x \in U$ et $F \subset V$.

2. On dit que X est un **espace complètement régulier** ou espace de **Tychonoff** si pour toute partie fermée F de X et pour tout point x de X tels que $x \notin F$, il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in F$.
3. On dit que X est un **espace normal** ou T_4 -espace si pour tous ensembles fermés et disjoints A et B dans X , il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Tous les espaces définis ci-dessus sont des espaces uniformes.

1.4 Espace semi-normé

Nous avons d'abord introduit les espaces topologiques, puis les espaces métriques. Tout espace métrique est topologique, mais toute sa richesse provient de sa structure métrique et non pas de sa topologie. En effet, elle permet de considérer d'autres aspects purement métriques (suites de Cauchy et espaces complets, ensembles bornés, applications uniformément continues, etc ...). Un espace topologique dont la topologie peut être définie par une métrique est métrisable; les différentes métriques définissant sa topologie sont dites "équivalentes", mais ne sont pas "identiques", par exemple l'espace peut être complet pour certaines d'entre elles et pas pour d'autres.

D'autre part il y a des topologies non métrisables.

On peut étendre considérablement la notion d'espace métrique.

Définition 1.31. (voir [7] page 233) La définition de semi distance est coïncide à celle de la distance sauf la semi distance est semi positive (i.e : $x = y \implies d(x, y) = 0$, l'inverse est fausse).

Par contre on peut avoir $d(x, y) = 0$ même pour $x \neq y$.

Il ne serait guère intéressant de considérer un ensemble muni d'une seule semi-distance; il serait un espace topologique non séparé.

Définition 1.32. (voir [7] page 233 -234) On appelle espace semi-métrique un ensemble E muni d'une famille $(d_i)_{i \in I}$ de semi-distances (où l'ensemble d'indices est de puissance quelconque) vérifiant la condition suivante : La famille $(d_i)_{i \in I}$ est "filtrante", autrement dit, pour toute partie finie J de I , il existe $k \in I$ tel que $d_k \geq d_j$ pour tout $j \in J$.

On appelle semi-boule ouverte $B_{i,0}(a, R)$ (resp. fermée $B_i(a, R)$) de centre $a \in E$, de rayon $R > 0$, d'indice $i \in I$, l'ensemble des x de E tels que $d_i(a, x) < R$ "(resp. $\leq R$).

Un espace semi-métrique est alors muni d'une topologie (non nécessairement séparée), définie comme suit : une partie ν de E est dite ouverte si, toutes les fois qu'elle contient un point, elle contient une semi-boule l'ayant pour centre, autrement dit si :

$$\forall a \in \nu, \exists i \in I \quad \text{et} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{tels que} \quad B_i(a, \varepsilon) \subset \nu.$$

On vérifie que les axiomes 1.1 ; des ouverts sont bien satisfaits. Le seul qui ne soit pas complètement trivial est l'axiome 1.1 de l'intersection finie : toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. Soient en effet $O_1, O_2, \dots, O_n$, des ouverts, et O leur intersection. Soit $a \in O$. Il existe alors des indices $i_1, i_2, \dots, i_n$, et des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n > 0$, tels que chaque semi-boule $B_{i_j}(a, \varepsilon_j)$, soit dans O_{i_j} , $j = 1, 2, \dots, n$. Si alors k est un indice tel que d_k majore $d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_n}$ (axiome de filtration) et si $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, la semi-boule $B_k(a, \varepsilon)$ est dans O , qui est donc bien ouvert. On peut encore

dire qu'un ensemble est ouvert si et seulement s'il est réunion de semi-boules ouvertes. Les semi-boules $B_i(a, \varepsilon)$ de centre a (lorsque E et i varient) forment un système fondamental de voisinages de a .

Cette topologie est séparée (axiome d de Hausdorff) si et seulement si : Quels que soient x et y distincts de E , il existe un $i \in I$ tel que $d_i(x, y) > 0$ Ou encore : " $d_i(x, y) = 0$ pour tout i " entraîne $x = y$.

L'espace semi-métrique est dit séparé si sa topologie est séparée.

Tout espace semi-métrique séparé est régulier, car les semi-boules $B_i(a, R)$ sont fermées.

Les fonctions semi-distances d_i , sont trivialement continues de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$. La topologie $\mathcal{T}_0$ définie comme précédemment à partir des d_i , est d'ailleurs la moins fine des topologies $\mathcal{T}$ sur E rendant continues les applications d_i , de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$. En effet, pour une telle topologie $\mathcal{T}$, toute " semi-boule ouverte "

$$B_{i,0}(a, R) = \{x \in E; d(a, x) < R\}$$

est nécessairement ouverte; donc tout ouvert de $\mathcal{T}_0$, réunion de semi-boules ouvertes, est ouvert pour $\mathcal{T}$, et $\mathcal{T}_0$ est moins fine que $\mathcal{T}$.

Il peut arriver que toutes les semi-distances d_i soient, en fait, des distances; l'espace est quand même appelé semi-métrique et non métrique, dès lors qu'il y a plus d'une distance dans la famille.

On dira qu'un espace topologique est semi-métrisable si sa topologie peut être définie par une famille de semi-distances.

Théorème 1.4. (voir [7] page 234) Pour qu'un espace topologique E soit semi-métrisable, il faut et il suffit qu'il ait la propriété suivante :

Quels que soient $a \in E$ et le voisinage ouvert Ω de a , il existe une fonction continue γ de E à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 en a et nulle dans $C_E \Omega$.

Démonstration. Pour plus des informations sur la démonstration, on peut voir [7] page 234. $\square$

Remarque 1.7. (voir [7] page 234) En fait, ce théorème ne donne pas un critère tellement pratique pour reconnaître qu'un espace est semi-métrisable. Quoi qu'il en soit, s'il est vrai que beaucoup d'espaces utiles en analyse ne sont pas métrisables, presque tous sont semi-métrisables; on démontre que tout espace compact ou localement compact est semi-métrisable.

Topologie associée à une famille de semi-normes

Définition 1.33. (voir [5] page 5) Une semi-norme p sur un K -espace vectoriel E est une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
2. $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$

pour tout $(x, y, \lambda) \in E^2 \times K$. En particulier $p(0) = 0$ mais il manque la propriété $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ pour que p soit une norme.

Il arrive fréquemment que l'on dispose d'une famille "séparante" $\{p_\alpha, \alpha \in A\}$ de semi-normes, c'est à dire telle que

$$(p_\alpha(x) = 0, \forall \alpha \in A) \Rightarrow x = 0.$$

La famille $\{p_\alpha, \alpha \in A\}$ permet alors de définir une topologie séparée (i.e. Hausdorff) sur E en considérant

- (i) D'abord les intersections nies d'ensembles $\{x \in E | p_\alpha(x) < \varepsilon\}$,
- (ii) puis les unions quelconques d'ensembles obtenus en (i).

Autrement dit, un ouvert pour cette topologie est un ensemble du type

$$\bigcup_{s \in I, \alpha \in B, \varepsilon \in J} \bigcap_{i=1}^s \{x \in E | p_{\alpha_i}(x) < \varepsilon_i\},$$

ou $I \subset \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in B \subset A^s$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in J \subset (\mathbb{R}_+^*)^s$.

Proposition 1.10. (voir [5] page 6) On obtient ainsi une topologie Hausdorff. Une suite de points $(x_j) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ pour cette topologie si et seulement si $p_\alpha(x_j - x) \rightarrow 0$ pour tout $\alpha \in E$.

Démonstration. pour plus de détails sur la démonstration, on peut voir [5] page 6. □

Exemple 1.6. (voir [5] page 6) Considérons à nouveau l'espace $E \doteq C^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles. On le munit cette fois de la topologie associée à la famille séparante de semi-normes

$$p_x(f) \doteq |f(x)|, x \in A = [0, 1].$$

1.5 La relation entre les uniformités et l'espace semi-métrique

La proposition suivante donne la relation entre les uniformités et l'espace semi-métrique. C'est un résultat fondamentale pour les espaces uniformes.

Proposition 1.11. (voir [2] page 50)

- (i) Soit $(X, \mathcal{U})$ est un espace uniforme (séparé). alors il existe une famille $\{p_i\}_{i \in I}$ de semi-distances sur X tel que les ensembles

$$B_{i,r} \doteq \{(x_1, x_2) \in X \times X : p_i(x_1, x_2) < r\}, \quad i \in I, r > 0, \quad (1.1)$$

forment une base de l'uniformité $\mathcal{U}$.

- (ii) Soit X est ensemble non vide et $\{p_i\}_{i \in I}$ une famille (séparée) de semi-distances sur X . Alors les ensembles donnés par 1.1 est une base d'une uniformité $\mathcal{U}$ (séparée) sur X .

Démonstration. pour plus de détails sur la démonstration, on peut voir [2] page 50. □

Une famille de semi-normes génère une uniformité et par conséquent une topologie uniforme correspondante. Plus précisément, on a la résultat suivante.

Corollaire 1.2. (voir [2] page 50) Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est un espace uniforme (séparé) si et seulement si sa topologie $\mathcal{T}$ peut être générée par une famille (séparée) de semi-distances.

Démonstration. Si $\{p_i\}_{i \in I}$ une famille de semi-distances sur X , alors les ensembles

$$N_{i,r} \doteq \{x' \in X : p_i(x', x) < r\}, \quad i \in I, r > 0, x \in X \quad (1.2)$$

sont une base de voisinages d'une topologie sur X qui coïncide avec la topologie uniforme générée par $\{p_i\}_{i \in I}$. Inversement, si $\mathcal{T}$ est une topologie sur X générée par l'uniformité $\mathcal{U}$ sur X , alors il existe une famille de semi-distances qui définissent une base de $\mathcal{U}$ via 1.1 et aussi une base de l'espace uniforme via 1.2. $\square$

1.6 Espace vectoriel topologique défini par une semi-métrique

Espace vectoriel topologique :

(voir [11] page 403) On appelle espace vectoriel topologique un ensemble E , muni d'une part d'une structure d'espace vectoriel sur le corps K des réels ou des complexes, d'autre part d'une topologie, telles que l'addition $(x, y) \longrightarrow x + y$ de $E \times E$ dans E et que la multiplication par les scalaires $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de $K \times E$ dans E soient continues, ou K est muni de sa topologie naturelle. On dit encore que la structure topologique et la structure vectorielle sont compatibles. Si x_n tend vers x , y_n vers y , et λ_n vers λ dans K , $x_n + y_n$ tend vers $x + y$, et $\lambda_n x_n$ vers λx .

Généralités sur les espaces vectoriels topologiques :

Nous avons vu la définition des espaces vectoriels topologiques . Il résulte évidemment de cette définition que, dans un tel espace E , une similitude $x \longrightarrow \lambda x + b$ est une application continue ; c'est un homéomorphisme si $\lambda \neq 0$, car elle est alors bijective et son application réciproque $x \longrightarrow \frac{x - b}{\lambda}$ est aussi continue.

Si F est un sous-espace vectoriel de E , il est évidemment un espace vectoriel topologique quand on le munit de la topologie induite.

Soit maintenant $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels. Rappelons que l'espace vectoriel produit est l'ensemble produit $E = \prod_{i \in I} E_i$ muni de la loi d'addition

$$((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \longrightarrow (x_i + y_i)_{i \in I} \text{ et de la loi de multiplication par les scalaires } (\lambda, (x_i)_{i \in I}) \longrightarrow (\lambda x_i)_{i \in I}.$$

Alors :

Théorème 1.5. (voir [7] page 217) Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels topologiques. Si on munit le produit $E = \prod_{i \in I} E_i$ de la structure vectorielle produit et de la topologie produit, c'est un espace vectoriel topologique.

Démonstration. pour plus de détails sur la démonstration, on peut voir [7] page 217. $\square$

Lemme 1.1. Ne pas confondre $U + V$ avec la réunion $U \cup V$; dans un espace vectoriel E , $A + B$ est l'ensemble des $\{x + y, x \in A, y \in B\}$.

Quant à λA , c'est l'ensemble des $\lambda x, x \in A$. Bien noter que, dans ces conditions, $A + A$ contient $2A$ mais est en général différent. Enfin $A - B$ est l'ensemble des $x - y, x \in A, y \in B$, ce qui défend d'utiliser cette notation pour désigner $A \cap C_E B$.

Propriétés des voisinages de 0 dans un espace vectoriel topologique

Définition 1.34. 1. Une partie A d'un espace vectoriel E est dite *équilibrée*, si, quels que soient $\lambda \in K$ avec $|\lambda| \leq 1$, et $x \in A$, on a $\lambda x \in A$; ou encore si, pour tout $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \leq 1$, on a $\lambda A \subset A$.

2. Une partie A de E est dite *absorbante* si, pour tout x de E , il existe $\alpha > 0$, tel que $|\lambda| \leq \alpha$ entraîne $\lambda x \in A$; autrement dit, si, pour tout x de E , les homothétiques de x de rapport assez petit sont dans A .

Par exemple un sous-espace vectoriel est équilibré; une boule (de centre origine) d'un espace vectoriel normé est absorbante et équilibrée. Comme une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est un homéomorphisme, l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble équilibré sont encore équilibrés (de $\lambda A \subset A$ pour $|\lambda| \leq 1$, on déduit $\lambda \dot{A} = (\lambda \dot{A}) \subset \dot{A}$; et $\lambda \bar{A} = \overline{(\lambda A)} \subset \bar{A}$).

Théorème 1.6. (voir [7] page 222) Soient E un espace vectoriel topologique et $\mathfrak{F}(a)$ l'ensemble des voisinages de $a \in E$. Alors,

1. $\mathfrak{F}(a) = a + \mathfrak{F}(0)$.
2. $V \in \mathfrak{F}(0)$ et $V_1 \supset V$ entraînent $V_1 \in \mathfrak{F}(0)$.
3. $V_1, V_2, \dots, V_n \in \mathfrak{F}(0)$ entraînent $\cap_{i=1}^n V_i \in \mathfrak{F}(0)$.
4. si $V \in \mathfrak{F}(0)$, il existe $W \in \mathfrak{F}(0)$ tel que $W + W \subset V$.
5. $\forall V \in \mathfrak{F}(0)$ et $\lambda \neq 0$, on a $\lambda V \in \mathfrak{F}(0)$.
6. $\forall V \in \mathfrak{F}(0)$, V est absorbant.
7. Il existe un système fondamental de voisinages de 0 équilibrés.

Démonstration. Pour plus de détails sur la démonstration, on peut voir [7] page 222. □

On démontre qu'inversement, si, dans un espace vectoriel E sur K , à tout point $a \in E$ est associé un ensemble $\mathfrak{F}(a)$ de parties de E de manière à vérifier les sept propriétés du théorème 1.1, il existe une topologie et une seule sur E , qui fait de E un espace vectoriel topologique admettant pour tout a de E , $\mathfrak{F}(a)$ comme ensemble de voisinages de a . (Voir, N. BOURBAKI, Esp. vect. top. ([10]), Chap. 1, parag. 1, n°3, prop. 5).

Donc ces sept propriétés sont des propriétés caractéristiques des ensembles de voisinages des points d'un espace vectoriel topologique.

Corollaire 1.3. (voir [7] page 223) Si une application linéaire u d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F est continue à l'origine, elle est continue partout.

Ceci étend partiellement le théorème 1.5 relatif aux espaces vectoriels normés; ce qui est relatif à la continuité uniforme ou au caractère lipschitzien ne peut pas être étendu actuellement.

Démonstration. Soit $a \in E$. Un voisinage de $u(a)$ dans F est de la forme $u(a) + W$, W voisinage de 0 dans F . En vertu de la continuité de u à l'origine, il existe U , voisinage de 0 dans E , tel que $u(U) \subset W$. Alors, d'après la linéarité de u , $u(a + U) \subset u(a) + W$, et comme $a + U$ est un voisinage de a dans E , cela prouve le corollaire. □

Corollaire 1.4. (voir [7] page 223) Si une application multilinéaire u d'un produit d'espaces vectoriels topologiques dans un espace vectoriel topologique est continue à l'origine, elle est continue partout.

Démonstration. Nous bornerons, pour alléger la démonstration, au cas d'une application bilinéaire u de $E \times F$ dans G . Soient $a \in E$, $b \in F$. Soit $u(a, b) + W$ un voisinage de $u(a, b)$ dans G ; W est un voisinage de 0 dans G . Soit W' un voisinage de 0 dans G , tel que $W' + W' \subset W$. Il existe U , voisinage de 0 dans E et V , voisinage de 0 dans F , tels que $u(U, V) \subset W'$, en vertu de la continuité de u à l'origine; soit V' un voisinage équilibré de 0 dans F tel que $V' + V' \subset V$. Écrivons alors, comme toujours,

$$u(x, y) - u(a, b) = u(x - a, y) + u(a, y - b).$$

Puisque U est absorbant, il existe $k > 0$ tel que $ka \in U$. Alors

$$u(a, y - b) = u\left(ka, \frac{1}{k}(y - b)\right);$$

on a $ka \in U$, de sorte qu'on aura sûrement $u(a, y - b) \in W'$ si $\frac{1}{k}(y - b) \in V'$, ou $y - b \in kV'$. Choisissons y de manière qu'il en soit ainsi; on a alors $y \in b + kV'$; comme V' est absorbant, il existe $k', 0 < k' \leq \frac{1}{k}$ tel que $k'b \in V'$ donc $b \in \frac{1}{k'}V'$ et

$$b + kV' \subset \frac{1}{k'}V' + kV' \subset \frac{1}{k'}V' + \frac{1}{k'}V' = \frac{1}{k'}(V' + V') = \frac{1}{k'}V.$$

Alors $u(a - x, y) \in u\left(x - a, \frac{V}{k'}\right) = u\left(\frac{x - a}{k'}, V\right)$. On aura alors sûrement $u(x - a, y) \in W'$ si $\frac{x - a}{k'} \in U$ ou $x - a \in k'U$. Alors on aura bien $u(x, y) - u(a, b) \in W' + W' \subset W$, ou $u(x, y) \in u(a, b) + W$, pour $x \in a + k'V$, $y \in b + kV'$, ce qui montre la continuité de u au point (a, b) . $\square$

Théorème 1.7. Dans un espace vectoriel topologique, l'origine admet un système fondamental de voisinages équilibrés ouverts, et un système fondamental de voisinages équilibrés fermés.

(voir [7] page 224)

Démonstration. Soit V un voisinage de 0. Nous pouvons trouver un voisinage équilibré W tel que $W + W \subset V$ (1.1). Alors W est un voisinage équilibré ouvert $\subset V$. Ensuite, $\overline{W}$ est un voisinage; si $x \in \overline{W}$, tout voisinage de x rencontre W , donc $(x + W) \cap W \neq \emptyset$; donc il existe $y \in W$ tel que $y \in x + W$, donc $x \in y - W = y + W \subset W + W \subset V$. un voisinage équilibré fermé $\subset V$. Par suite $\overline{W} \subset V$, $\overline{W}$ est un voisinage équilibré fermé $\subset V$. $\square$

Corollaire 1.5. (voir [7] page 225) Un espace vectoriel topologique séparé est régulier.

Corollaire 1.6. (voir [7] page 225) Dans un espace vectoriel topologique, E est séparé si et seulement si l'intersection des voisinages de 0 se réduit à 0, ou si et seulement si 0 est fermé.

Corollaire 1.7. (voir [7] page 225) Soient E un espace vectoriel topologique, et F un sous-espace vectoriel. Pour que l'espace vectoriel topologique quotient E/F soit séparé, il faut et il suffit que F soit fermé dans E .

En effet, E/F est séparé si et seulement si l'ensemble réduit à son origine est fermé, ce qui, en vertu de la définition des fermés de la topologie quotient, revient à dire que F est fermé dans E .

□

Remarque 1.8. (voir [7] page 225) Nous voyons à nouveau ici ce que nous avons déjà constaté (2, VII, 4) : le quotient d'un espace séparé n'est pas nécessairement séparé. Mais il peut aussi arriver que E ne soit pas séparé et que E/F le soit ; il suffit pour cela que F soit fermé dans E (exemple : $F = E, E/F = 0$).

Espace vectoriel topologique localement convexe séparé défini par les semi-normes

(voir [10] page II2 - II4) **Notation :** on note evtcls à espace vectoriel topologique localement convexe séparé

Définition 1.35. On appelle evtcls un espace vectoriel X muni d'une topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que

* $\mathcal{T}$ est compatible avec la structure d'e.v. :

a. $X \times X \longrightarrow X, (x, y) \longrightarrow x + y$ est continue.

b. $\mathbb{R} \times X \longrightarrow X, (\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ est continue.

* $\mathcal{T}$ est localement convexe, i.e. admet une base de voisinages convexes :

c. $\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{T}, x \in U$, il existe $V \in \mathcal{T}$ convexe (i.e. $\forall \alpha, \beta \in V : t\alpha + (1-t)\beta \in V$) tel que $x \in V \subset U$.

* $\mathcal{T}$ est séparée :

d. pour tout $(x, y) \in X^2$ tel que $x \neq y$, il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U, y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Il est également possible de définir la notion d'espace vectoriel topologique (ce sont ceux vérifiant les axiomes (a) et (b)). Dans la pratique les espaces rencontrés en analyse ont une structure beaucoup plus riche (au minimum celle devtcls).

Proposition 1.12 (Deuxième définition d'un evtcls). Soit X espace vectoriel et $\mathcal{T}$ une topologie sur X . Alors $(X, \mathcal{T})$ est un evtcls si, et seulement si, $\mathcal{T}$ admet base de voisinages les ensembles

$$\{x + tB; x \in X, t > 0, B \in \mathfrak{B}\}$$

où la " base de boules ouvertes centrées en l'origine " $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est telle que

e. tout $B \in \mathfrak{B}$ est convexe, équilibré ($-B = B$), absorbant ($\forall x \in X, \exists t > 0$, tel que $tx \in B$) ;

f. $\mathfrak{B}$ est séparant ($\forall x \in X, \exists B \in \mathfrak{B}, \exists t > 0$, tel que $tx \notin B$)

En d'autres termes, dans cette deuxième caractérisation on suppose que $\mathbb{R}_+^*$. $\mathfrak{B}$ est une base de voisinages de 0 et qu'une base de voisinages de X est obtenue par translation de celle-ci. Il est alors évident que

$$\text{pour tout } O \text{ ouvert de } X, x \in X, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, x + O \text{ et } \lambda O \text{ sont des ouverts.} \quad (1.3)$$

La notion de "base de boules ouvertes centrées en l'origine" n'est peut-être pas standard. Son intérêt est de pouvoir caractériser avec le moins d'ouverts possibles une topologie d'evtcls. Dans la suite on utilisera uniquement cette deuxième définition d'un evtcls. La preuve de la proposition 2.1 peut donc être omise en première lecture.

Démonstration. pour plus détailles sur la démonstration, on peut voir la référence précédente. $\square$

Remarque 1.9. *Pour tout $J \subset I$ ni, la boule $B_J(0,1)$ est un ensemble convexe, équilibré et absorbant et que $(B_J(0,1))_{J \text{ fini}, J \subset I}$ est séparant.*

Théorème 1.8. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace vectoriel muni d'une famille de semi-normes qui sépare les points. On lui associe $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ la topologie dont une base de voisinage est constituée des boules ouvertes déniées à partir de $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$. Alors $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ est un evtlcs.*

Démonstration. Il suffit de définir $\mathfrak{B} := \{B_{J,1}; J \subset I \text{ ni}\}$ et d'utiliser la remarque 1.9 et la Proposition 2.1. $\square$

La topologie canonique d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 1.9. *(voir [7] page 225) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors il existe une topologie et une seule qui fait de E un espace vectoriel topologique séparé; on l'appelle la topologie canonique de E . C'est la topologie la plus fine qui soit compatible avec la structure vectorielle.*

Démonstration. Pour plus détailles sur la démonstration, on peut voir la même référence précédente. $\square$

Chapitre 2

Le Point Fixe

Dans le deuxième chapitre, On rappelle le théorème de point fixe de Banach dans les espaces métriques. Puis, on généralise ce théorème dans un cadre particulier, sur un espace non métrique qui admet une structure uniforme. Enfin, on donne un exemple pour vérifier les hypothèses de notre résultat. Dans cette partie on utilise les références suivantes [4] et [17].

2.1 Théorème de Banach (type métrique)

Le point fixe :

Définition 2.1. (voir [14] page 36) Soit E un espace topologique et soit $T : E \rightarrow E$ une fonction. Un point $x \in E$ est un point fixe pour T si $T(x) = x$.

Théorème 2.1 (Principe de contraction de Banach, 1922). (voir [4] page 14) Soient $(E; d)$ un espace métrique complet et $T : E \rightarrow E$ une application contractante de constante de contraction k . Alors :

a T admet un unique point fixe $x_0 \in E$.

b Pour tout $x \in E$; $x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x)$ ou $T^0(x) = x$ et $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$.

c La vitesse de convergence peut être estimée par :

$$d(T^n(x); x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x; T(x)).$$

On va présenter deux démonstrations du théorème 2.1. La première est constructive, c'est la démonstration originale de Banach qui donne l'approximation du point fixe, la deuxième est non-constructive, et démontre seulement l'existence et l'unicité du point fixe. Elle repose sur le principe des ensembles emboîtés de Cantor.

Démonstration. Pour plus de détails sur la démonstration, on peut voir [4] page 14-16. $\square$

Corollaire 2.1. *Soit E un espace de Banach, $S \subset E$ est un sous-ensemble fermé et $T : E \rightarrow E$ est une fonction. On suppose que T est contraction, alors T admet un point fixe unique dans S .*

Remarque 2.1. (voir [4] page 13) *Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou encore théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en 1922, dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Notons que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduites par Liouville en 1837 et développée par la suite, par Picard en 1890. A cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier dans la branche des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach a connu différentes généralisations dans les espaces métriques, les espaces topologiques localement convexes et les espaces vectoriels topologiques uniformes.*

2.2 Généralisation du principe de contraction pour les structures non métriques

Dans cette partie on présente d'abord une généralisation dans un cadre relativement général (voir [17]). Ensuite, on propose une généralisation dans un cadre particulier mais néanmoins très utile dans les applications de l'analyse fonctionnelle. Fixons d'abord quelques définitions dans un cadre topologique non métrique (mais semi-métrique).

Soient E un espace vectoriel topologique, $X \subset E$, et A un ensemble d'indices tel que pour $S \subseteq A$ on définit une application $j : S \rightarrow A$, et $\mathbf{p} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille de semi-normes définies sur E .

Un opérateur T est dit contractive si $(T : X \rightarrow E)$ vérifie

$$p_\alpha(Tx - Ty) \leq K_\alpha \cdot p_{j(\alpha)}(x - y) \quad (0 < K_\alpha \leq 1)$$

pour tous $x, y \in X$ et $\alpha \in A$. et on note ∂X la bord de X .

Définition 2.2 (Espace j -bornée). (voir [17] page 9) *Soit E un espace de Hausdorff, et $j : A \rightarrow A$ une fonction de l'ensemble d'indices dans sa. On dit que E est j -borné si pour tous $x, y \in E$, $\alpha \in A$*

$$\sup\{p_{j^n(\alpha)}(x - y) : n = 0, 1, 2, \dots\} < \infty,$$

tel que $j^n(\alpha)$ sont les itérations de la fonction j .

Soit X est un sous-ensemble fermé de E . l'ensemble X est dit j -borné si

$$C_\alpha = \sup\{p_{j^n(\alpha)}(x - y) : n = 0, 1, 2, \dots\} < \infty; \quad x, y \in X, \quad \alpha \in A$$

Exemple 2.1. *D'après le corollaire 1.2 l'uniformité d'un espace vectoriel topologique localement convexe suffit pour que l'espace topologique en question rentre dans le cadre des espaces topologiques E d'écrire ci-dessus. Ainsi, tout sous-espace fermé K d'un espace vectoriel topologique associé a*

une famille de semi-normes est un espace vectoriel topologique uniforme, et par conséquent il fait partie de la classe des espaces E .

Cas général (voir [17])

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et complet, dont la topologie est générée par la famille de semi-normes $\mathbf{p} = \{p_\alpha : \alpha \in A\}$, tel que A est un ensemble d'indices. Soient $X \subset E$ un sous-espace de E et $T : X \longrightarrow E$ une fonction non linéaire. ou T n'est pas défini de X dans lui-même.

Théorème 2.2. *Soit X un ensemble j -borné et soit $T : X \rightarrow E$ est une fonction contractive tel que :*

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} K_\alpha \cdot K_{j(\alpha)} \dots K_{j^n(\alpha)} < \infty$ pour tout $\alpha \in A$;
- (b) *Quelque soit $x \in \partial X$, $Tx \in X$. Alors T admet un unique point fixe dans X .*

Démonstration. Ce théorème est démontré dans l'article [17] avec quelques légères erreurs d'indexation de la suite définie dans la preuve, dont on a tenu compte dans la démonstration de notre résultat du théorème dans le paragraphe suivant. A cet effet on doit signaler aussi l'article [6]. $\square$

2.3 Extension du principe de contraction au cas non métrique

Cas particulier

Soit $E = C(\mathbb{R})$, dont la topologie est générée par la famille de semi-normes $\mathbf{p} = \{p_\alpha(f) = \sup\{e^{-\lambda t} |f(t)| : t \in \alpha\}, \quad \alpha \in A\}$ ou A est l'ensemble de tous les compacts dans $\mathbb{R}$. Soient $X \subset E$ un sous-espace de E et $T : X \longrightarrow E$ une fonction non linéaire. ou T n'est pas nécessairement défini de X dans lui-même.

Introduisons une notion de contraction comme suit :

Définition 2.3. *On dit que l'application T est contractante s'il existe un sous-ensemble H de $\mathbb{R}$ qui contient 0, tel que $\forall h \in H$ on a*

$$\begin{cases} p_\alpha(Tx - Ty) \leq K_\alpha \cdot \frac{[h]}{h} \cdot p_{j(\alpha+h)}(x - y) & \text{si } h > 1, \\ p_\alpha(Tx - Ty) \leq K_\alpha \cdot h \cdot p_{j(\alpha+h)}(x - y) & \text{si } 0 < h \leq 1, \\ p_\alpha(Tx - Ty) \leq K_\alpha \cdot p_{j(\alpha)}(x - y) & \text{si } h = 0, \\ p_\alpha(Tx - Ty) \leq K_\alpha \cdot \frac{h}{[h]} \cdot p_{j(\alpha+h)}(x - y) & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

Où j est une application définie sur un sous-ensemble $S \subseteq A$ telle que $\forall h \in S, j + h \in S$ et

$$\begin{aligned} j & : S \longrightarrow S \\ k & \longrightarrow j(k) \end{aligned}$$

tel que

$$\forall h, \quad j(k + h) = j(k) + j(\{h\})$$

$$c_\alpha(h) = \sup\{p_{(j^n(\alpha) + \sum_{s=1}^n j^s(h))}(x-y), n = 1, 2, 3, \dots\} < \infty$$

Pour tout $h \in H \setminus \{0\}$, on note

$$M_h = \min \left\{ \frac{[h]}{h}, \frac{h}{[h]}, |h| \right\}$$

tel que $0 < M_h < 1$.

et

$$h_\alpha \doteq \inf \{h \in \mathbb{R}^* : p_\alpha(Tx - Ty) \leq K_\alpha \cdot M_h \cdot p_{j(\alpha+h)}(x-y)\}$$

Théorème 2.3. *Soit X un ensemble j -borné et soit $T : X \rightarrow E$ est une fonction contractante tel que :*

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} K_\alpha \cdot K_{j(\alpha)} \dots K_{j^n(\alpha)} < \infty$ pour tout $\alpha \in A$;

(b) *Quelque soit $x \in \partial X$, $Tx \in X$. Alors T admet un unique point fixe dans X .*

Proposition 2.1 (voir [?] page 564). *Si $x \in S$ et $y \notin S$ alors $\exists z \in \partial S$ tel que $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$, $\lambda \in [0, 1]$.*

Démonstration. Soit $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$, $\lambda \in [0, 1]$ alors

$$\begin{aligned} p(x-y) &= p(x + \lambda x - \lambda y - x) \\ &= p(x - x + \lambda x - \lambda y) \\ &= p(\lambda(x-y)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} p(z-y) &= p(x - \lambda x + \lambda y - y) \\ &= p((1-\lambda)x - (1-\lambda)y) \\ &= p((1-\lambda)(x-y)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

D'après (2.1) et (2.2) on a

$$p(x-y) - p(z-y) = \lambda p(x-y) + (1-\lambda)p(x-y) = p(x-y)$$

□

Démonstration de théorème. Soit $x_0 \in X$. On construit deux suites $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$ comme suit. On définit $x'_1 = Tx_0$. Si $x'_1 \in X$, on pose $x_1 = x'_1$. Sinon, d'après la proposition précédente 2.1 on choisit $x_1 \in \partial X$, tel que

$$p_\alpha(x_0 - x_1) + p_\alpha(x_1 - x'_1) = p_\alpha(x_0 - x'_1)$$

pour tout $\alpha \in A$. On pose $x'_2 = Tx_1$. Si $x'_2 \in X$, on pose $x_2 = x'_2$. Sinon, d'après la proposition précédente 2.1 on choisit $x_2 \in \partial X$, tel que

$$p_\alpha(x_1 - x_2) + p_\alpha(x_2 - x'_2) = p_\alpha(x_1 - x'_2)$$

pour tout $\alpha \in A$. De cette manière on obtient deux suites $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$ qui vérifient

- (i) $x'_{n+1} = Tx_n$;
- (ii) $x_n = x'_n$ si $x'_n \in X$;
- (iii) $x_n \in \partial X$, et $p_\alpha(x_n - x_{n+1}) + p_\alpha(x_{n+1} - x'_{n+1}) = p_\alpha(x_n - x'_{n+1})$ pour tout $\alpha \in A$.

Soit $P = \{x_i \in (x_n)_{n=1}^\infty : x_i = x'_i\}$ et $Q = \{x_i \in (x_n)_{n=1}^\infty : x_i \neq x'_i\}$. $x_n \in Q$ implique $x_{n-1} \in P$ et $x_{n+1} \in P$ (d'après la condition (b) du théorème).

On doit estimer $p_\alpha(x_n - x_{n+1})$ pour tout $\alpha \in A$. Soit $\alpha \in A$ fixé. Alors les cas possibles sont les suivants.

Cas 1. $x_n, x_{n+1} \in P$. Alors, par la condition de contraction de T on a

$$p_\alpha(x_n - x_{n+1}) = p_\alpha(Tx_{n-1} - Tx_n) \leq k_\alpha \cdot M_{h_\alpha} \cdot p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{n-1} - x_n)$$

Cas 2. $x_n \in P, x_{n+1} \in Q$. Alors

$$\begin{aligned} p_\alpha(x_n - x_{n+1}) &\leq p_\alpha(x_n - x_{n+1}) + p_\alpha(x_{n+1} - x'_{n+1}) \\ &= p_\alpha(x_n - x'_{n+1}) \\ &= p_\alpha(Tx_{n-1} - Tx_n) \\ &\leq k_\alpha \cdot M_{h_\alpha} \cdot p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

Cas 3. $x_n \in Q, x_{n+1} \in P$. Comme $x_n \in Q$ est combinaison linéaire convexe de x_{n-1} et x'_n , alors

$$p_\alpha(x_n - x_{n+1}) \leq 2 \cdot \max\{p_\alpha(x_{n-1} - x_{n+1}); p_\alpha(x'_n - x_{n+1})\}$$

pour tout $\alpha \in A$.

En effet On a

$$\begin{aligned} P_\alpha(x_n - x_{n+1}) &\leq P_\alpha(x_n - x_{n-1}) + P_\alpha(x_{n-1} - x_{n+1}) \\ P_\alpha(x_n - x_{n+1}) &\leq P_\alpha(x_n - x'_n) + P_\alpha(x'_n - x_{n+1}) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} 2P_\alpha(x_n - x_{n+1}) &\leq P_\alpha(x_{n-1} - x'_n) + P_\alpha(x_{n-1} - x_{n+1}) + P_\alpha(x_{n+1} - x'_n) \\ &\leq P_\alpha(x_{n-1} - x_{n+1})P_\alpha(x'_n - x_{n+1}) + P_\alpha(x_{n-1} - x_{n+1}) + P_\alpha(x'_n - x_{n+1}) \end{aligned}$$

donc

$$2P_\alpha(x_n - x_{n+1}) \leq 2P_\alpha(x_{n-1} - x_{n+1}) + 2P_\alpha(x'_n - x_{n+1})$$

$$P_\alpha(x_n - x_{n+1}) \leq 2Max(P_\alpha(x_{n-1} - x_{n+1}), P_\alpha(x'_n - x_{n+1}))$$

Donc

Si $p_\alpha(x_{n-1} - x_{n+1}) \leq p_\alpha(x'_n - x_{n+1})$ on a

$$\begin{aligned} p_\alpha(x_n - x_{n+1}) &\leq 2 \cdot p_\alpha(x'_n - x_{n+1}) \\ &= 2 \cdot p_\alpha(Tx_{n-1} - Tx_n) \\ &\leq 2 \cdot k_\alpha \cdot M_{h_\alpha} \cdot p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

Si $p_\alpha(x'_n - x_{n+1}) \leq p_\alpha(x_{n-1} - x_{n+1})$ on a

$$\begin{aligned} p_\alpha(x_n - x_{n+1}) &\leq 2 \cdot p_\alpha(x_{n-1} - x_{n+1}) \\ &= 2 \cdot p_\alpha(Tx_{n-2} - Tx_n) \\ &\leq 2 \cdot k_\alpha \cdot M_{h_\alpha} \cdot p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{n-2} - x_n) \end{aligned}$$

Alors, pour tout nombre naturel $n \geq 2$ on obtient

$$p_\alpha(x_n - x_{n+1}) \leq 2 \cdot k_\alpha \cdot M_{h_\alpha} \cdot p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{n-1} - x_n)$$

où

$$p_\alpha(x_n - x_{n+1}) \leq 2.k_\alpha.M_{h_\alpha}.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{n-2} - x_n)$$

Comme

$$\begin{aligned} p_\alpha(x_{n-2} - x_n) &\leq p_\alpha(x_{n-2} - x_{n-1}) + p_\alpha(x_{n-1} - x_n) \\ &\leq 2 \max\{p_\alpha(x_{n-2} - x_{n-1}), p_\alpha(x_{n-1} - x_n)\}, \end{aligned}$$

On a

$$p_\alpha(x_n - x_{n+1}) \leq 2^2.k_\alpha.M_{h_\alpha} \cdot \max\{p_\alpha(x_{n-2} - x_{n-1}), p_\alpha(x_{n-1} - x_n)\}$$

pour tout $n \geq 2$ et pour tout $\alpha \in A$.

Par la suite, on montrera que

$$p_\alpha(x_{2s} - x_{2s+1}) \leq 2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s-1} \cdot k_\alpha.k_{j(\alpha)} \dots k_{j^{s-1}(\alpha)}.c_\alpha(h_\alpha) \quad (2.3)$$

et

$$p_\alpha(x_{2s+1} - x_{2s+2}) \leq 2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s-1} \cdot k_\alpha.k_{j(\alpha)} \dots k_{j^{s-1}(\alpha)}.c_\alpha(h_\alpha) \quad (2.4)$$

pour tout nombre naturel s et pour tout $\alpha \in A$.

On a

$$p_\alpha(x_2 - x_3) \leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_1 - x_2) \leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.c_\alpha(h_\alpha)$$

où

$$p_\alpha(x_2 - x_3) \leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_0 - x_2) \leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.c_\alpha(h_\alpha),$$

i.e. $p_\alpha(x_2 - x_3) \leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.c_\alpha(h_\alpha)$ pour tout $\alpha \in A$, et aussi

$$p_\alpha(x_3 - x_4) \leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_2 - x_3) \leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.c_\alpha(h_\alpha)$$

où

$$p_\alpha(x_3 - x_4) \leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_1 - x_3) \leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.c_\alpha(h_\alpha),$$

i.e. $p_\alpha(x_3 - x_4) \leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.c_\alpha(h_\alpha)$ pour tout $\alpha \in A$.

Supposons que pour un nombre naturel $s \geq 2$ les inégalités (2.3) et (2.4) soient vraies. En vue de $c_{j(\alpha)}(h_\alpha) \leq c_\alpha(h_\alpha)$ on obtient que

$$\begin{aligned} p_\alpha(x_{2s+2} - x_{2s+3}) &\leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{2s+1} - x_{2s+2}) \\ &\leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_{j(\alpha)}.k_{j^2(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}.c_{j(\alpha)}(h_\alpha) \\ &\leq 2^{2(s+1)} \cdot (M_{h_\alpha})^{2(s+1)-1} \cdot k_\alpha.k_{j(\alpha)} \dots k_{j^{s+1}(\alpha)-1(\alpha)}.c_\alpha(h_\alpha) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} p_\alpha(x_{2s+2} - x_{2s+3}) &\leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{2s} - x_{2s+2}) \\ &\leq 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{2s} - x_{2s+1}) \\ &\quad + 2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{2s+1} - x_{2s+2}) \\ &\leq 2^2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_{j(\alpha)}.k_{j^2(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}.c_{j(\alpha)}(h_\alpha) \\ &\leq 2^{2(s+1)} \cdot (M_{h_\alpha})^{2(s+1)-1} \cdot k_\alpha.k_{j(\alpha)} \dots k_{j^{s+1}(\alpha)-1(\alpha)}.c_\alpha(h_\alpha) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} p_\alpha(x_{2s+3} - x_{2s+4}) &\leq 2.k_\alpha.M_{h_\alpha}.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{2s+1} - x_{2s+3}) \\ &\leq 2.k_\alpha.M_{h_\alpha}.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{2s+1} - x_{2s+2}) + 2.k_\alpha.M_{h_\alpha}.p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{2s+2} - x_{2s+3}) \\ &\leq 2.2.M_{h_\alpha}.k_\alpha.2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_{j(\alpha)}.k_{j^2(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}.c_{j(\alpha)}(h_\alpha) \\ &\leq 2^{2(s+1)} \cdot (M_{h_\alpha})^{2(s+1)-1} \cdot k_\alpha.k_{j(\alpha)} \dots k_{j^{s+1}(\alpha)-1(\alpha)}.c_\alpha \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
p_\alpha(x_{2s+3} - x_{2s+4}) &\leq 2 \cdot k_\alpha \cdot M_{h_\alpha} \cdot p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{2s+2} - x_{2s+3}) \\
&\leq 2 \cdot M_{h_\alpha} \cdot k_\alpha \cdot 2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_{j(\alpha)} \cdot k_{j^2(\alpha)} \dots k_{j^{s+1}(\alpha)} \cdot c_{j(\alpha)}(h_\alpha) \\
&\leq 2^{2(s+1)} \cdot (M_{h_\alpha})^{2(s+1)-1} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^{s+1}(\alpha)} \cdot c_\alpha
\end{aligned}$$

Ensuite, on montre que la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ est de Cauchy. A cause de (2.3) et (2.4) on a

$$p_\alpha(x_{2s} - x_{2s+1}) + p_\alpha(x_{2s+1} - x_{2s+2}) \leq 2^{2s-1} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s-1} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^{s-1}(\alpha)} \cdot c_\alpha(h_\alpha), \quad \alpha \in A.$$

La série $\sum_{s=0}^\infty 2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}$ est convergente.

En effet, on a $|2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}| \leq 2^{2s} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}$ et la série $\sum_{s=0}^\infty 2^{2s} k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}$ est convergente.

Alors, la série $\sum_{s=0}^\infty 2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}$ est absolument converge. Par conséquent, elle est convergente.

Donc $\sum_{s=N-1}^\infty 2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}$ tend vers 0.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ à partir d'un certain $N > 1$ on a

$$4 \cdot c_\alpha(h_\alpha) \cdot \sum_{s=N-1}^\infty 2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)} < \varepsilon.$$

Soit $n \geq 2N$ et soit $r \geq 1$. Alors il existe un nombre entier M suffisamment grand tel que

$$\begin{aligned}
p_\alpha(x_n, x_{n+r}) &\leq p_\alpha(x_n, x_{n+1}) + p_\alpha(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + p_\alpha(x_{n+r-1}, x_{n+r}) \\
&\leq \sum_{s=N}^M [p_\alpha(x_{2s}, x_{2s+1}) + p_\alpha(x_{2s+1}, x_{2s+2})] \\
&\leq \sum_{s=N}^\infty 2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s-1} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^{s-1}(\alpha)} \cdot c_\alpha(h_\alpha) \\
&= 4 \cdot c_\alpha(h_\alpha) \cdot (M_{h_\alpha}) \cdot \sum_{s=N}^\infty 2^{2(s-1)} \cdot (M_{h_\alpha})^{2(s-1)} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^{s-1}(\alpha)} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy. Ainsi, E étant complet, la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge vers un point $x_* \in X$. Il existe une sous-suite $\{x_{n_s}\}_{s=1}^\infty$ de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tel que $\{x_{n_s}\}_{s=1}^\infty \subset P$, et $x_{n_s+1} = Tx_{n_s}$ pour tout nombre naturel s . Alors pour tout $\alpha \in A$ on a

$$\begin{aligned}
p_\alpha(x_* - Tx_*) &\leq p_\alpha(x_* - x_{n_s}) + p_\alpha(x_{n_s} - Tx_*) \\
&= p_\alpha(x_* - x_{n_s}) + p_\alpha(Tx_{n_s-1} - Tx_*) \\
&\leq p_\alpha(x_* - x_{n_s}) + k_\alpha \cdot p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x_{n_s-1} - x_*) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $P_\alpha(x_* - Tx_*) = 0$ pour tout $\alpha \in A$, i.e., x_* est nécessairement un point fixe de T .

Soit $x, y \in X$ tel que $x = Tx$ et $y = Ty$. Alors pour tout $\alpha \in A$ les inégalités suivantes sont vraies

$$\begin{aligned}
p_\alpha(x - y) &= p_\alpha(Tx - Ty) \leq M_{h_\alpha} k_\alpha \cdot p_{j(\alpha+h_\alpha)}(x - y) = M_{h_\alpha} \cdot k_\alpha \cdot p_{j(\alpha+h_\alpha)}(Tx - Ty) \\
&\leq (M_{h_\alpha})^2 \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \cdot p_{j^2(\alpha)+j^2(h_\alpha)+j(h_\alpha)}(x - y) \leq \dots \leq (M_{h_\alpha})^n \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^n(\alpha)} \cdot c_\alpha(h_\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $P_\alpha(x - y) = 0$ pour tout $\alpha \in A$, i.e. Le point fixe de T est unique. $\square$

Dans l'exemple suivant, on montre et on vérifie, que la condition sur l'application j , imposée dans le théorème précédent est réalisable.

Exemple 2.2. Soit A l'ensemble de tous les compacts dans $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble des applications

$$\begin{aligned} U_i &: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad i = 1, \dots, m \text{ (m entier naturel } > 1) \\ t &\longrightarrow \delta_i t, \end{aligned}$$

tel que $0 < \delta_i = cte < 1$.

On pose

$$j(M) = \cup_{i=1}^m U_i(M), \quad \text{où } U_i(M) := \{U_i(x); x \in M\}$$

Alors, pour tout $h > 1$ on a

$$\begin{aligned} j(M+h) &= \cup_{i=1}^m U_i(M+h), \\ &= \cup_{i=1}^m (U_i(M) + U_i(h)), \\ &= \cup_{i=1}^m U_i(M) + \cup_{i=1}^m U_i(h), \\ &= j(M) + j(\{h\}). \end{aligned}$$

Remarque 2.2. 1. Si on suppose dans la théorème (2.3) précédent que $\{(M_h)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée (c'est-à-dire $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |(M_h)^n| \leq C$), alors on peut démontrer de la même manière que le résultat du théorème reste vrai.

En effet, on a

$$|2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}| \leq C \cdot 2^{2s} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}.$$

comme la série $\sum_{s=0}^{\infty} 2^{2s} k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}$ est convergente.

Alors, la série $\sum_{s=0}^{\infty} 2^{2s} \cdot (M_{h_\alpha})^{2s} \cdot k_\alpha \cdot k_{j(\alpha)} \dots k_{j^s(\alpha)}$ est absolument convergente. Par conséquent, elle est convergente.

2. Si l'ensemble H est réduit au singleton $\{0\}$, alors le résultat du théorème (2.3) coïncide avec celui du théorème (2.2).

Application

(voir [17] page 13) On sait que les équations différentielles et fonctionnelles dont la partie droite dépend des valeurs extrêmes de la quantité contrôlée apparaissent dans de nombreux processus technologiques.

Certains problèmes à valeurs initiales associés à de telles équations peuvent être formulés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F\left(\max_{0 \leq t \leq a} x(t), \min_{0 \leq t \leq a} x(t), x(U_1(t)), \dots, x(U_m(t))\right), & t > 0 \\ x(t) &= \varphi(t), & t \leq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ci-dessous, on montre que la partie droite de (3.1) fournit un exemple de fonction T de type nonself mapping, qui admet un point fixe.

Supposons que les conditions (M) soient valides :

- (M1) Les fonctions $U_i(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, m)$ sont continues et définies comme suit $U_i(t) = \delta_i t, \delta_i > 0$, qui satisfait les inégalités $h > 0, U_i(t+h) < t$. La fonction initiale $\varphi(t) : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. On note b la valeur initiale de $\varphi(t)$, tel que $\varphi(0) = b$;
- (M2) La fonction $F(\xi, \eta, \zeta_1, \dots, \zeta_m) : [0, \bar{A}] \times [0, \bar{A}] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et satisfait l'inégalité

$$|F(\xi, \eta, \zeta_1, \dots, \zeta_m) - F(\xi, \eta, \bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_m)| \leq L(|\zeta_1 - \bar{\zeta}_1| + \dots + |\zeta_m - \bar{\zeta}_m|)$$

pour tout $(\zeta_1, \dots, \zeta_m, \bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_m) \in \mathbb{R}^{2m}$ ou $\bar{A} > 0, L > 0$ et $b \in (0, \bar{A})$;

(M2.1) Il existe une constante $a > 0$ telle que

$$b - F(b, b, \dots, b).a = 0 \quad \text{ou} \quad b - F(b, b, \dots, b).a = \bar{A}$$

et

$$-\frac{b}{a} \leq F(0, \eta, \zeta_1, \dots, \zeta_m) \leq \frac{\bar{A} - b}{a}$$

pour tout $\eta \in [0, \bar{A}]$ et $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$;

(M2.2) Pour tout $\xi \in [0, \bar{A}]$ et $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$ l'inégalité suivante est satisfaite

$$-\frac{b}{a} \leq F(\xi, \bar{A}, \zeta_1, \dots, \zeta_m) \leq \frac{\bar{A} - b}{a};$$

(M2.3) Il existe une constante $c \in (b, \bar{A})$ telle que

$$F(b, c, \zeta_1, \dots, \zeta_m) < -\frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad F(b, c, \zeta_1, \dots, \zeta_m) > \frac{\bar{A} - b}{a}$$

Pour tout $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$.

(M3) Il existe un sous-ensemble D de $[0, a]$ tel que pour tous $\xi, \eta \in [0, \bar{A}]$, $(\Upsilon_1(t), \dots, \Upsilon_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ et $t \in D$ l'inégalité suivante est vérifiée

$$0 \leq F(\xi, \eta, \Upsilon_1(t), \dots, \Upsilon_m(t)) \leq \frac{\bar{A} - b}{a};$$

Soit $E = C(\mathbb{R})$ muni de la famille de semi-normes $\alpha = \{p_M(f)\}_M$, tel que $p_M(f) = \sup\{e^{-\lambda t}|f(t)| : t \in M\}$. l'ensemble A contenant tout les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$. La fonction j peut être définie tel que dans l'exemple précédent (voir. chapitre 2 . Exemple 2.2).

On définit l'ensemble X de la manière suivante

$$X = \{f \in C(\mathbb{R}) : 0 \leq f(t) \leq \bar{A} \text{ et } \alpha_1 \frac{[h]}{h} f(U_i(t+h)) \leq f(U_i(t)) \leq \alpha_2 \frac{[h]}{h} f(U_i(t+h)), h > 0, t \in [0, a]\},$$

$$a = \text{const.}, \bar{A} = \text{const.}, \alpha_1; \alpha_2 = \text{const. tel que } \alpha_2 \geq \alpha_1$$

où les constantes sont sous les conditions (M).

On peut montrer que X est fermé, convexe et complet. ∂X La frontière de X est composée des fonctions qui satisfont au moins les deux conditions suivantes

$$\min\{f(t); t \in [0, a]\} = 0; \quad \max\{f(t); t \in [0, a]\} = \bar{A}.$$

En effet, pour toute fonction f il existe deux fonctions $f_1 \in X$ et $f_2 \in C_E X$ tel que

$p_M(f - f_1) < \varepsilon, p_M(f - f_2) < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) pour tout compact arbitraire $M \subset \mathbb{R}$. L'intérieur de X est composé des fonctions qui satisfont les inégalités $0 < f(t) < \bar{A}, t \in [0, a]$. En effet pour tout nombre suffisamment petit $\varepsilon > 0$ on a

$$0 < f_i(t) - \varepsilon.e^{\lambda \cdot \bar{A}} < f(t) < f_i(t) + \varepsilon.e^{\lambda \cdot \bar{A}} \quad \text{pour } i = 1, 2; \text{ et } t \in [0, a]$$

Théorème 3.1. *Si les conditions (M) sont remplies, alors le problème à valeur initiale (3.1) admet une solution continue f .*

Démonstration. On définit l'opérateur $T : X \longrightarrow E$ par la formulation suivante :

$$(Tf)(t) = \begin{cases} b + \int_0^t F(\max_{\tau \in [0, a]} f(\tau), \min_{\tau \in [0, a]} f(\tau), f(U_1(\tau)), \dots, f(U_m(\tau))) d\tau, & t \geq 0; \\ \varphi(t), & t \leq 0. \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que $(Tf)(t)$ est continue, c'est-à-dire, T défini dans X sur E .

On montre que si $f \in \partial X$ alors $Tf \in X$. En effet, si $\min\{f(t), t \in [0, a]\} = 0$. D'après la condition (M2.1) on a

$$\begin{aligned} (Tf)(t) &= b + \int_0^t F(\max_{\tau \in [0, a]} f(\tau), 0, f(U_1(\tau)), \dots, f(U_m(\tau))) d\tau \\ &\geq b - \frac{b}{a}t \geq b - \frac{b}{a}a = 0 \quad \text{for } t \in [0, a]. \end{aligned}$$

et de la même manière par la condition (M2.2), si $\max\{f(t), t \in [0, a]\} = \bar{A}$ on a

$$\begin{aligned}(Tf)(t) &= b + \int_0^t F(\bar{A}, \min_{\tau \in [0, a]} f(\tau), f(U_1(\tau)), \dots, f(U_m(\tau))) d\tau \\ &\leq b + \frac{\bar{A} - b}{a} t \leq b - \frac{\bar{A} - b}{a} . a = \bar{A} \quad \text{for } t \in [0, a].\end{aligned}$$

Donc, on obtient $0 \leq (Tf)(t) \leq \bar{A}$ pour tout $t \in [0, a]$.

D'après la condition (M3), pour tout $t \in [0, a]$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{U_i(t)} F(\bar{A}, \min_{\tau \in [0, a]} f(\tau), f(U_1(\tau)), \dots, f(U_m(\tau))) d\tau &\leq \int_0^{U_i(t+h)} F(\bar{A}, \min_{\tau \in [0, a]} f(\tau), f(U_1(\tau)), \dots, f(U_m(\tau))) d\tau \\ (Tf)(U_i(t)) &\leq (Tf)(U_i(t+h));\end{aligned}$$

Alors, il existe deux constantes $\alpha_1 = \text{const.} \leq 0$ et $\alpha_2 = \text{const.} \geq \frac{h}{[h]}$ qui telles que

$$\alpha_1 \frac{[h]}{h} f(U_i(t+h)) \leq f(U_i(t)) \leq \alpha_2 \frac{[h]}{h} f(U_i(t+h))$$

La condition (M2.3) assure que la fonction $T : X \longrightarrow E$ est de type nonself mapping.

En effet, il existe une fonction dans X , par exemple

$$f_0(t) = \begin{cases} b + \frac{[(c-b)t]}{a}, & t \in [0, a] \\ \text{continue}, & t \notin [0, a]. \end{cases}$$

on observe que : $\min\{f_0(t), t \in [0, a]\} = b$ et $\max\{f_0(t), t \in [0, a]\} = c$.

Alors

$$\begin{aligned}(Tf_0)(t) &= b + \int_0^t F(c, b, f_0(U_1(\tau)), \dots, f_0(U_m(\tau))) d\tau \\ &\leq b - \frac{b}{a} t \leq b - \frac{b}{a} . 0 = b \quad \text{for } t \in [0, a], \\ (Tf_0)(t) &= b + \int_0^t F(c, b, f_0(U_1(\tau)), \dots, f_0(U_m(\tau))) d\tau \\ &\geq b + \frac{\bar{A} - b}{a} t \geq b - \frac{\bar{A} - b}{a} . 0 = b \quad \text{for } t \in [0, a],\end{aligned}$$

son image Tf n'appartient pas à X .

Montrons maintenant que T est une contraction. Soient $f, g \in X$. Alors pour un compact arbitraire $M \subset \mathbb{R}$ et pour tout $t \in M$ on a

$$\begin{aligned}|(Tf)(t) - (Tg)(t)| &\leq \int_0^t L \sum_{i=1}^m |f(U_i(\tau)) - g(U_i(\tau))| d\tau \\ &\leq L.(\alpha_2 - \alpha_1). \frac{[h]}{h} \int_0^t \sum_{i=1}^m |f(U_i(\tau+h)) - g(U_i(\tau+h))| d\tau \\ &\leq L.(\alpha_2 - \alpha_1). \frac{[h]}{h} \int_0^t e^{\lambda\tau} . \sum_{i=1}^m e^{-\lambda\tau + \lambda U_i(\tau+h)} . e^{-\lambda U_i(\tau+h)} \\ &\quad . |f(U_i(t+h)) - g(U_i(t+h))| d\tau \\ &\leq L.(\alpha_2 - \alpha_1). \frac{[h]}{h} \int_0^t e^{\lambda\tau} . \sum_{i=1}^m e^{-\lambda U_i(t+h)} |f(U_i(t+h)) - g(U_i(t+h))| d\tau \\ &\leq L. \frac{[h]}{h} \int_0^t e^{\lambda\tau} . \sum_{i=1}^m p_{U_i(M+h)}(f - g) d\tau \\ &\leq L.(\alpha_2 - \alpha_1). \frac{[h]}{h} . p_{j(M+h)}(f - g) . \int_0^t e^{\lambda\tau} d\tau \\ &\leq L.(\alpha_2 - \alpha_1). \frac{[h]}{h} . p_{j(M+h)}(f - g) . \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda}.\end{aligned}$$

ou

$$e^{-\lambda t} |(Tf)(t) - (Tg)(t)| \leq \frac{L \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)}{\lambda} \cdot \frac{[h]}{h} \cdot p_{j(M+h)}(f - g).$$

En prenant le Sup sur M , on obtient le résultat précédent. Maintenant, on peut choisir $\lambda > 0$ suffisamment grand, pour satisfaire la condition (a) dans la théorème 2.3.

La déviation satisfait les inégalités $U_i(t+h) \leq t, i = (1, 2, \dots, m)$. Ce que signifie que U_i possède la propriété suivante :

Proposition 3.1. *Pour tout compact $M \subset \mathbb{R}$ il existe un compact $N \subset \mathbb{R}$ tel que $j^n(M) + \sum_{s=1}^n j^s(h) \subseteq N, n = (1, 2, 3, \dots)$. Ce qui implique que l'ensemble X est j -borné.*

Démonstration. Par récurrence, on démontre que $(p_n) : j^n(t) + \sum_{s=1}^n j^s(h) \leq t$.

Pour $n = 1$:

on a :

$$U_i(t+h) \leq t$$

Alors,

$$U_i(t) + U_i(h) \leq t$$

Donc, $j(M+h) = j(M) + j(h) \leq t$ est vraie.

On suppose que (p_n) est vraie, et on montre que (p_{n+1}) est vraie.

$$(p_{n+1}) : j^{n+1}(t) + \sum_{s=1}^{n+1} j^s(h) \leq t$$

On a

$$j^{n+1}(t) + \sum_{s=1}^{n+1} j^s(h) = j(j^n(t) + \sum_{s=1}^n j^s(h) + h) \leq j^n(t) + \sum_{s=1}^n j^s(h) \leq t$$

vraie.

Par conséquent, on obtient la propriété. $\square$

Donc, on est assurés que toutes les conditions du théorème 2.3 sont remplies. Alors, il existe une solution continue unique de (3.1) sur X . Par conséquent, la théorème est prouvé. $\square$

Remarque 3.1. *Pour le cas non autonome correspondant à la forme (3.1) on peut le considérer de la même manière en utilisant une norme généralisée définie par $\|f\|_M = \sup\{e^{-\theta(t)} \cdot |f(t)| : t \in M\}$, ou $\theta(t)$ est une fonction qui admet quelques propriétés appropriées.*

Conclusion

Nous avons consacré le travail de ce mémoire à l'extension du principe de contraction de Banach sur des espaces n'admettant aucune distance, en particulier ceux aux structures uniformes induit par une famille de semi-normes. Ce type de résultats est important et très utile en analyse fonctionnelle, surtout dans le traitement des problèmes de l'existence et de l'unicité des solutions pour des équations intégrales ou différentielles. Ce qui est en réalité, le cas de la plupart des problèmes définis dans des espaces topologiques non métriques.

Bibliographie

- [1] A.Cumenge, *Topologie(résumé de cours 2007-2008)*, université Paul Sabatier, pp 5.
- [2] A.Hamel, *Variational Principles on Metric and Uniform Spaces (Habilitationsschrift)*, 24-10-2005, pp 48-50.
- [3] C.Berge, *Espaces topologiques(fonctions multivoques)*,1965 , éditeur N° 4936, l'Imprimerie Nouvelle, France, Orléans 12-1965.O.P.I.A.C.L. 31.0427 . N° 5253 ,pp 11-13.
- [4] D. Houssem- Eddin et H. Sofiane, *Sur la théorie du point fixe dans les espaces métriques et applications*, Thèse de Master, université Abderrahmane Mira - Bejaia, juin 2015, pp 13-15.
- [5] F.Nier et D.Iftimie, *Introduction à la Topologie*, Thèse de Licence, université de Rennes 1, pp 1- 11.
- [6] K.Nisse et L.Nisse, *An Iterative Method for Solving a Class of Fractional Functional Differential Equations with " Maxima"*, Mathematics, 2018, 6(1), doi : 10.3390/math6010002.
- [7] L. Schnartz, *ANALYSE (Topologie générale et analyse fonctionnelle)*,1980, éditeur N° 5900, DUNDO, Hermann, France, 28600 Luisant, pp 39-40 et 233-235 .
- [8] M.Mechad, *Cours d'algèbre (Maths 1, LMD Sciences et Techniques)*, pp 29.
- [9] M. Samiha, *Extention non linéaire des fonctionnels lipschitziens et ses applications dans les espaces des Banach*, juin 2017, université Mohamed Boudiaf de M'sila, pp 9-10.
- [10] N.Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques (Chapitres 1 à 5)*, 1981, imprimerie Jouve, éditeur 120,siringer, France, N° 8262, pp II.2 - II.4 .
- [11] N. El Hage Hassan, *Topologie générale et espace normés* ,2011, éditeur N° 54692 ,DUNDO, Belgique, 56725- (I) - (1) - OSB 80⁰ - AUT-RAN, pp 1- 6.
- [12] P. Bemard, *Topologie générale (Partie 1 sur 3 du cours de topologie et calcul différentiel)*, octobre 2013, pp 1- 8.
- [13] P. Milan, *Généralité sur les fonctions*, 26 novembre 2010, pp 2.
- [14] P V Subrahmanyam, *Some Aspects of Fixed Point Theory 1*, Resonance , May 2000, pp 36.
- [15] R. Zekri, *Cours de Topologie. Master 1 . Année 2010/2011*, 9 septembre 2010, pp 5-15.
- [16] S. Bhowmik, *INTRODUCTION TO UNIFORM SPACES*, Tripura University, Suryamaninagar, Tripura-799022, India, pp 2 - 13.
- [17] Ts. Tsachev and V.G.Angelov, *FIXED POINTS OF NONSELF-MAPPINGS AND APPLICATIONS*, 9-16-1993, Great Britain, pp 9-15.

- [18] V. G. Angelov et Sofia, *FIXED POINT THEOREM IN UNIFORM SPACES AND APPLICATIONS*, June 1, 1983, pp 19-20.
- [19] V. M. SEHGAL AND S. P. SINGH, ON A FIXED POINT THEOREM OF KRASNOSELSKII FOR LOCALLY CONVEX SPACES, PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol 62, No. 2, 1976

ملخص

في هذه المذكرة، نمدد بعض التعاريف المعرفة عادة في التحليل الدالي في الفضاءات المترية إلى الفضاءات الطوبولوجية غير المترية. ولأجل ذلك نقدم بعض الخواص المرتبطة بالفضاءات الطوبولوجية غير المترية، التي تثري البنى الطوبولوجية لها، لكي تصبح مشابهة للفضاءات المترية. في الواقع، هي الفضاءات المترية الطوبولوجية ذات البنى المنتظمة و بالأخص تلك المزودة بعائلة من أشباه النضيمات. على سبيل المثال، نأخذ تعميم نتائج نظريات النقطة الصامدة في الفضاءات المترية، وخاصة مبدأ التلصص لبناخ.

Résumé

Dans ce mémoire, on généralise quelques notions et définitions de l'analyse fonctionnelle connues couramment sur les espaces métriques aux espaces topologiques non métriques. Pour cela, on introduit une certaine notion associée aux espaces topologiques non métrisables, qui enrichit les structures topologiques de ces derniers, afin de les rendre assez proches à celles des espaces métriques. Il s'agit en fait des espaces vectoriels topologiques à structures uniformes, et particulièrement celles associées à une famille de semi-normes. Comme applications, on considérera la généralisation de l'un des résultats sur l'existence de point fixe de type métrique le plus connu : le principe de contraction de Banach.

Abstract

In this work, we expand some definitions of functional analysis usually defined on metric spaces to nonmetric topological spaces, To do so, we introduce some nations associated with non-metrizable spaces, which extended the topological structures of these spaces, for make them fairly close to those of the metric spaces. it concerns some topological vector spaces of uniform structure; particularly those generated by a family of seminorms. As application, we consider the generalisation of the well known principle of contraction of Banach, on the existence of a metric type of fixed point.