

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche**  
**Scientifique**



**UNIVERSITÉ D'EL-OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE**

**Mémoire de fin d'étude**

**LICENCE ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation  
numérique

Présenté par : BEN AMAR Soumaia

CHERRAHI Aicha

HABI Fadila

**Thème**

**Analyse multirésolution  
et applications**

Soutenu le ...juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. MILLOUDI Madjeda  
Mr. RHOUMA Abd Alhamid  
Mr. DAHDA Bachir

MC (B) Univ. El Oued Président  
MA (B) Univ. ElOued examinateur  
MA (B) Univ. ElOued Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

# *Remerciements*

*On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination. Ces trois années de formation nous ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase tout simple.*

Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent de longues heures de travail.

En premier lieu nous remercions Dieu, le tout puissant pour ses faveurs et ses grâces, de nous avoir donné le courage et la patience pour avoir à bien mener ce travail durant cette année.

De plus, nos remerciements s'adressent à notre encadreur "Dahda Bachir" pour nous avoir fait l'honneur de nous encadrer et guider durant cette année, aussi nous remercions les deux amis "Mouna Boughezala Hamd" et "Cherrahi Hayat" ainsi nous tenons à remercier tous les enseignants de l'Universitaire surtout les enseignants de l'institut des sciences exactes et de la technologie.

Enfin, un grand remerciement est adressé à l'ensemble de nos enseignants et enseignantes qui ont contribué à notre formation, depuis le cycle primaire jusqu'au cursus universitaire.

# *Notation*

$H$ : espace de Hilbert.

$B(.,.), \langle ., . \rangle$ : produit scalaire.

$Id_H$ : application identité.

$\mathcal{L}$ : espace des applications linéaires continues.

$\|\cdot\|$ : la norme.

$F^\perp$ : ensemble orthogonal.

$d(\cdot, \cdot)$ : distance.

$L^2(\mathbb{R})$ : espace de fonctions au carré intégrables sur  $\mathbb{R}$ .

$\varphi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j \cdot - k)$ : fonction d'échelle primales sur  $\mathbb{R}$ , mises à l'échelle  $j$  en norme  $L^2(\mathbb{R})$ .

$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot - k)$ : ondelettes primales sur  $\mathbb{R}$ , mises à l'échelle  $j$  en norme  $L^2(\mathbb{R})$ .

$m_0$ : fonction  $2\pi$ -périodique.

$\hat{\varphi}$ : la transformation de fourier de  $\varphi$ .

$U \otimes V$ : produit tensoriel de  $U$  et  $V$ .

$V_j$ : espace à l'échelle  $j$  des analyses multirésolutions primales.

$W_j$ : espace d'ondelettes à l'échelle  $j$ .

$Q_j$ : est l'opérateur de projection orthogonal sur  $W_j$ .

$V_j \oplus W_j$ : somme directe de deux espaces vectoriels.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction aux espaces de Hilbert</b>	<b>3</b>
1.1 Produit scalaire . . . . .	3
1.2 Espace de Hilbert . . . . .	4
1.3 Projection sur un convexe fermé . . . . .	5
1.3.1 Théorème de projection . . . . .	7
<b>2 Analyse multirésolution de <math>L^2(\mathbb{R})</math></b>	<b>10</b>
2.1 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	10
2.2 Fonction d'échelle . . . . .	12
2.3 Construction des ondelettes . . . . .	16
2.4 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	19
<b>3 Application des ondelettes à la compression d'images</b>	<b>22</b>
3.1 Méthode de la compression d'images . . . . .	22
3.2 Définition de l'image . . . . .	23
3.2.1 Représentation des images numériques . . . . .	23
<b>Conclusion générale</b>	<b>29</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>30</b>

# *Introduction générale*

Les évolutions récentes des technologies de l'information ont bouleversé le domaine des télécommunications. Ainsi, l'apparition des techniques numériques a favorisé une diversification des utilisations du multimédia ainsi que des fonctionnalités qui leur sont associées. Cela implique la manipulation de volumes de données sans cesse croissants. Il est donc indispensable de disposer d'outils performants pour la transmission et le stockage de ces énormes quantités d'information. Les progrès techniques de ces dernières années, qui ont permis une augmentation conséquente des débits des réseaux ainsi qu'une baisse du prix de revient de la mémoire, apportent une partie de la réponse à ce problème. Parallèlement, on peut également chercher à diminuer la taille des fichiers de description des données. C'est dans cette optique qu'ont été développées au cours des dernières décennies de nombreuses méthodes de compression de données déduites de la théorie de l'information et faisant appel à de nombreux domaines des mathématiques et de l'informatique. Parmi les données, les plus volumineuses, on compte les images et vidéos numériques qui ont de ce fait un besoin particulièrement important d'un traitement adapté à leurs spécificités. Les méthodes de compression de ce type de documents ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche.

Ce mémoire est classé sous trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous allons étudier l'espace de Hilbert et leur nécessaire propriétés à partir des quelques définitions comme la définition du produit scalaire. Puis on étudie la projection sur un convexe fermé et des résultats à travers la théorie de la projection.

Dans le deuxième chapitre, nous allons définir l'analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  et nous allons discuter quelques exemples pour les étudier et nous allons examiner la fonction d'échelle et l'ondelette et la façon de la construction et de savoir enfin l'analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et dans certaines théories importantes.

Dans le dernier chapitre, nous appliquons notre étude du deuxième chapitre sur des images, que nous aborderons à travers définition d'image et sa représentation des images numériques.

# Chapitre 1

## Introduction aux espaces de Hilbert

Dans ce chapitre on introduit des notions utiles concernant l'espace de Hilbert.

### 1.1 Produit scalaire

Soit  $H$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

#### Définition 1.1.1

*On appelle produit scalaire sur  $H$  une forme bilinéaire symétrique définie positive telle que:*

$$B : H \times H \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(i) B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v), B(u, v + v') = B(u, v) + B(u, v').$$

$$(ii) B(u, v) = B(v, u).$$

$$(iii) B(u, u) \geq 0 \text{ et } B(u, u) = 0 \iff u = 0.$$

#### Définition 1.1.2

*L'application  $u \mapsto \|u\| = \sqrt{B(u, u)}$  est une norme appelée norme associée au produit scalaire  $B$  (on parle aussi de norme hilbertienne) et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz:*

$$|B(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \tag{1.1}$$

*et on a égalité que si  $u$  et  $v$  sont parallèles ( $u = v$  ou bien  $v = 0$ ).*

Rappelons aussi "l'inégalité du parallélogramme":

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad (1.2)$$

Rappelons aussi que le produit scalaire permet de définir en une forme linéaire continue  $v \rightarrow B(u, v)$  tel que pour  $u \in H$  donné, elle est donc continue.

## 1.2 Espace de Hilbert

### Définition 1.2.1

On dit que  $(H, B)$  est un espace de Hilbert si muni de la norme associée à la forme bilinéaire  $B$ ,  $H$  est complet. L'hypothèse de complétude est en fait très faible.

On peut toujours compléter un espace  $H$  muni d'un produit scalaire (il est alors dit préhilbertien). La norme "complétée" est toujours associée à un produit scalaire.

### Définition 1.2.2

On dit que deux espaces de Hilbert  $H_1, H_2$  sont isomorphes s'il existe une application linéaire inversible  $U : H_1 \rightarrow H_2$  telle que:  $B_2(U(u), U(v)) = B_1(u, v), \forall u, v \in H_1$ . L'opérateur  $U$  est dite unitaire.

On alors  $\|u\|_1 = \|U(u)\|_2 \quad \forall u \in H_1$ . L'application linéaire  $U$  est donc continue et  $\|U\|_{\mathcal{L}(H_2, H_1)} = 1$  et  $\|U^{-1}\|_{\mathcal{L}(H_2, H_1)} = 1$ . Lorsque  $H_1 = H_2$ , on dit que  $U$  est une isométrie.

### Exemple 1.2.1

Sur  $\mathbb{R}^d$ , le produit scalaire est noté  $(x, y)$  ou  $x.y$  et il est donné par:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i.$$

Les matrices unitaires vérifient  $U^t = U^{-1}$ .

### Exemple 1.2.2

Soit l'espace de suites de carré sommables

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ telle que } \sum_{i \in \mathbb{N}} (x_i)^2 < +\infty \right\}$$

Muni du produit scalaire

$$(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i y_i,$$

$\ell^2(\mathbb{R})$  est un espace de Hilbert.

Il joue un rôle important, il s'agit d'un espace isomorphe à tous les espaces de Hilbert séparables.

## 1.3 Projection sur un convexe fermé

### Définition 1.3.1

Ensemble  $C$  est dit convexe si pour tout  $u, v \in C$  et  $\theta \in [0, 1]$ , alors  $\theta u + (1 - \theta)v \in C$ .

Par exemple, les boules ou les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel normé sont convexes. Les intersection d'ensembles convexes sont convexes.

### Théorème 1.3.1

Soit  $C \subset H$  un convexe fermé non vide. Alors  $\forall f \in H$ , il existe un unique  $u \in C$  tel que:

$$\|f - u\| = \min_{v \in C} \|f - v\|. \quad (1.3)$$

De plus  $u$  est caractérisé par la propriété:

$$\begin{cases} u \in C, \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in C. \end{cases} \quad (1.4)$$

On note  $u = P_C(f)$  : projectoin de  $f$  sur  $C$ .

La projection est continue et même est lipschitzienne.

### Démonstration.

Par définition de l'infimum, on peut trouver une suite  $(v_n)$  de  $C$  telle que:

$$d(f, C) = \inf_{v \in C} \|f - v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\|.$$

Utilisant l'égalité  $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x, y)$ , on a

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= \|v_n - f\|^2 + \|f - v_m\|^2 - 2(f - v_n, f - v_m) \\ &= \|v_n - f\|^2 + \|f - v_n\|^2 - \frac{1}{2} \|2f - v_n - v_m\|^2 + \frac{1}{2} \|v_n - v_m\|^2, \end{aligned}$$

ainsi, puisque l'on a  $\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\| \geq d(f, C)$  grâce à l'hypothèse de convexité on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \|v_n - v_m\|^2 = \|v_n - f\|^2 + \|f - v_m\|^2 - 2 \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 \\ &\leq \|v_n - f\|^2 + \|f - v_m\|^2 - 2d(f, C)^2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ceci prouve que la suite  $(v_n)$  est une suite de Cauchy et elle converge donc vers  $u \in C$  (qui est fermé).

L'unicité est une conséquence de l'unicité de la limite d'une suite de Cauchy en choisissant  $v_{2n} = u$  et  $v_{2n+1} = \tilde{u}$  pour deux points de minimum éventuels  $u$  et  $\tilde{u}$ .

Pour prouver la caractérisation, considérons  $u \in C$ ,

par convexité on a:

$$\begin{aligned} \|f - v\|^2 &\geq \|f - u\|^2 && , && \forall v \in C \\ \iff \|f - ((1 - \theta)u + \theta v)\|^2 &\geq \|f - u\|^2 && , && \forall \theta \in ]0, 1], \forall v \in C \\ \iff \|f - u + \theta(u - v)\|^2 &\geq \|f - u\|^2 && , && \forall \theta \in ]0, 1], \forall v \in C \\ \iff -2\theta(f - u, v - u) + \theta^2 \|u - v\|^2 &\geq 0 && , && \forall \theta \in ]0, 1], \forall v \in C \\ \iff -2(f - u, v - u) + \theta \|u - v\|^2 &\geq 0 && , && \forall \theta \in ]0, 1], \forall v \in C \\ \iff -2(f - u, v - u) &\geq 0 && , && \forall \theta \in ]0, 1], \forall v \in C. \end{aligned}$$

■

### Proposition 1.3.1

Pour tout  $f, g \in H$  on a:

$$\|P_C(f) - P_C(g)\| \leq \|f - g\|. \quad (1.5)$$

#### Démonstration.

Posons  $u = P_C(f)$ ,  $v = P_C(g)$ .

On utilise la caractérisation (1.4), on obtient:

$$0 \leq (u - f, v - u) \text{ et } 0 \leq (v - g, u - v).$$

En additionnant, on trouve donc:

$$0 \leq (u - f - v + g, v - u) = -\|v - u\|^2 + (g - f, v - u),$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\|u - v\|^2 &\leq (g - f, v - u) \leq \|f - g\| \|u - v\|, \\ \|u - v\| &\leq \|f - g\|.\end{aligned}$$

et le résultat s'en déduit. ■

### Corollaire 1.3.1

Dans le cas où  $F$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ ,  $P_F$  est un opérateur linéaire et la projectoin  $u = P_F(f)$  est aussi caractérisée par:

$$\begin{cases} u \in F, \\ (f - u, v) = 0 \end{cases} \quad \forall v \in F. \quad (1.6)$$

### 1.3.1 Théorème de projection

#### Théorème 1.3.2

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $C$  une partie convexe fermée non vide de  $H$ ;  $\forall x \in H$ , il existe un et un seul point  $y_0$  de  $C$  en lequel la fonction  $y \rightarrow \|y - x\|$  atteint son minimum sur  $C$ . On a de plus:

$$\forall y \in C, \quad \operatorname{Re} \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0. \quad (1.7)$$

#### Corollaire 1.3.2

Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $F$  un sous-espace vectoriel fermé séparable de  $H$  et  $(e_n)_{n \geq 0}$  une base hilbertienne du sous-espace  $F$ . Pour tout vecteur  $x \in H$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  est donnée par:

$$P_F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k. \quad (1.8)$$

#### Démonstration.

Posons  $y = P_F(x)$ ; puisque le vecteur  $x - y$  est orthogonal à  $F$ , on a  $\langle x - y, e_j \rangle = 0$ ,  $\forall j \geq 0$ , donc:

$\langle x, e_j \rangle = \langle y, e_j \rangle$ , appliqué à  $F$  et à  $y$ ,

on a

$$P_F(x) = y = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle y, e_k \rangle e_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

■

### Définition 1.3.2

On dit que les parties  $A$  et  $B$  d'un espace de Hilbert  $H$  sont orthogonales si tout élément de  $A$  est orthogonal à tout élément de  $B$ . Soit  $A$  une partie de  $H$ , on appelle orthogonal de  $A$  l'ensemble  $A^\perp$  des éléments de  $H$  orthogonaux à  $A$ . Il est clair que  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ .

### Proposition 1.3.2

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $H$  on a :

$$P_F + P_{F^\perp} = Id_H$$

Il en résulte que  $F \oplus F^\perp = H$  et  $F^{\perp\perp} = F$ .

### Démonstration.

Commençons par une évidence: par définition, tout vecteur de  $F$  est orthogonal à  $F^\perp$ ; donc  $F \subset F^{\perp\perp}$ . Soit maintenant  $x \in H$  quelconque et écrivons  $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ ; d'après les propriétés de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel  $F$ , on a bien que  $x - P_F(x) \in F^\perp$ , et de plus la différence  $x - (x - P_F(x)) = P_F(x) \in F$  est orthogonale à  $F^\perp$ ; cela montre que  $x - P_F(x)$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $F^\perp$ , c'est à dire que  $P_{F^\perp} = Id_H - P_F$ . La relation  $Id_H = P_F + P_{F^\perp}$  implique évidemment que  $H$  est la somme de  $F$  et  $F^\perp$ .

On vérifie ensuite que la somme est directe: si  $x \in F \cap F^\perp$  alors  $\langle x, x \rangle = 0$  donc  $x = 0_H$ .

Pour finir, si on a un vecteur  $x \in F^{\perp\perp}$ , il est orthogonal à  $F^\perp$ , par définition, donc  $0_H$  est sa projection orthogonale sur  $F^\perp$  et la relation  $P_F(x) = (Id_H - P_{F^\perp})(x) = x$  montre que  $x \in F$ . ■

**Corollaire 1.3.3**

Soit  $H$  un espace de Hilbert on a:

(i) pour toute partie  $A$  de  $H$ , l'ensemble  $(A^\perp)^\perp$  est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de  $H$  contenant  $A$ ;

(ii) si  $Y$  est un sous-espace vectoriel de  $H$ , on a:  $(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}$ .

**Démonstration.**

Montrons le point (i). Soit  $F$  le plus petit sous-espace vectoriel fermé de  $H$  contenant  $A$ ; on sait que tout vecteur  $y$  orthogonal à  $A$  est aussi orthogonal à l'espace vectoriel  $Y$  engendré par  $A$  (par linéarité du produit scalaire), puis à l'adhérence  $F = \overline{Y}$  de ce sous-espace (par continuité du produit scalaire).

Inversement tout vecteur orthogonal à  $F$  est évidemment orthogonal à  $A$ . On a donc  $A^\perp = F^\perp$ , donc  $(A^\perp)^\perp = F^{\perp\perp} = F$ .

Le point (ii) découle de (i), puisque le plus petit sous-espace fermé de  $H$  contenant  $Y$  est l'adhérence  $\overline{Y}$ . ■

# Chapitre 2

## Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

Les ondelettes sont souvent construites à partir d'une analyse multirésolution.

Nous étudierons cette dernière puisque elle donne un cadre naturel pour comprendre les bases de  $L^2(\mathbb{R})$  qui forment des ondelettes. Les idées de l'analyse multirésolution ont été énoncées en 1986 par Mallat et Meyer.

### 2.1 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

#### Définition 2.1.1

*L'analyse multirésolution est une famille croissante de sous-espaces vectoriels fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  notée  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , qui ont les propriétés suivantes:*

(i)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  et  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

(ii)  $\forall f \in V_0$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $f(x - k) \in V_0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

(iii)  $\forall j \in \mathbb{Z}$ , on a  $f \in V_j$  si et seulement si  $D_2 f \in V_{j+1}$ ; où on a posé  $D_a f(x) = f(ax)$ .

(iv) Il existe une fonction  $\theta \in V_0$ , telle que la suite  $\{\theta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz de  $V_0$ .

Rappelons la définition de la base de Riesz.[1, 3, 4]

**Définition 2.1.2**

Une suite  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  d'éléments indépendants d'un espace de Hilbert  $H$ , constituent une base de Riesz de  $H$ , si les propriétés suivantes sont satisfaites:

(i) L'ensemble de combinaisons linéaires finies de  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est dense dans  $H$  i.e,

$$\left\{ \sum_{k \in K} \alpha_k e_k, \quad |K| < +\infty \text{ et } \alpha_k \in \mathbb{C} \right\} \quad (2.1)$$

est dense dans  $H$ .

(ii) Il existe deux constantes  $A$  et  $B$  avec  $B > A > 0$ , telle que:

pour toute suite finie  $\{\alpha_k\}_{k \in K}$ , on a;

$$A \left( \sum_{k \in K} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{k \in K} \alpha_k e_k \right\|_H \leq B \left( \sum_{k \in K} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

**Exemple 2.1.1**

La fonction  $\theta$  définie par:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par:

$$V_j = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} f|_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[} = P_k \\ \text{où } P_k \text{ est un polynôme de degré 1} \end{array} \right\}$$

**Exemple 2.1.2**

Splines de degré 1:

$$V_0 = \{ \text{fonctions constantes sur } \mathbb{R}, \text{ affines sur } [k, k+1], \forall k \in \mathbb{Z} \}.$$

Splines de degré  $n$ :

$$V_0 = \{ \text{fonction } C^{n-1} \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ polynômiales de degré } n \text{ sur } [k, k+1], \forall k \in \mathbb{Z} \}.$$

Shannon:

$$V_0 = \{ f \in L^2(\mathbb{R}), \bar{f} \text{ est dans } [1, 2] \}.$$

**Définition 2.1.3**

Une analyse multirésolution est dite  $r$ -régulière ( $r \in \mathbb{N}$ ), si l'on peut choisir la fonction  $\theta$  soit  $r$ -régulière i.e:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0; \forall 0 \leq k \leq r \forall x \in \mathbb{R} : \quad \left| \theta^{(k)}(x) \right| \leq C_m (1 + |x|)^{-m} \quad (2.3)$$

Dans toute la suite, on dite analyse multirésolution régulière si elle est  $0$ -régulière.

## 2.2 Fonction d'échelle

**Définition 2.2.1**

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution, on appelle fonction d'échelle de  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  toute fonction  $\varphi$  de  $V_0$  telle que  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ .

**Théorème 2.2.1**

Soit  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ , pour que  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base orthonormée de l'espace qu'elle engendre, il faut et il suffit que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2n\pi)|^2 = 1 \quad (2.4)$$

où  $\hat{\varphi}$  est la transformée de Fourier de  $\varphi$ .

**Théorème 2.2.2**

Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , il existe alors deux constantes  $c_1 \geq c_2 \geq 0$  telles que l'on ait, pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$  :

$$c_1 \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\xi + 2k\pi) \right|^2 \right)^{1/2} \leq c_2. \quad (2.5)$$

On définit ensuite  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  par:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\theta}(\xi) \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\xi + 2k\pi) \right|^2 \right)^{-1/2} \quad (2.6)$$

Alors  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ . voir [1, 3, 4]

**Exemple 2.2.1**

Fonction d'échelle de la base de Haar:

Soit  $g(x) = 1_{[0, 1[}(x)$ , la fonction caractéristique pour l'intervalle  $[0, 1[$ .

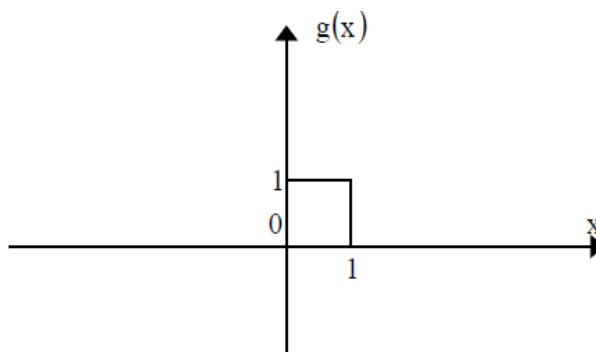


fig  $\varphi(x)$  : fonction d'échelle de Haar

**Proposition 2.2.1**

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution et  $\varphi$  une fonction d'échelle associée à  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .

Alors la suite  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_j$  où:

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k). \quad (2.7)$$

**Démonstration.**

Pour tout  $k, m \in \mathbb{Z}$ . On a

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,m} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^j \varphi(2^j x - k) \overline{\varphi(2^j x - m)} dx.$$

En faisant le changement de variable ( $y = 2^j x$ ), il vient:

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,m} \rangle = \langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,m} \rangle = \delta_{k,m},$$

d'où  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont éléments orthonormés de  $V_j$ .

D'autre part,  $\forall f \in V_j$ , la fonction  $D_{2^{-j}} f \in V_0$  et:

$$D_{2^{-j}} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(2^{-j} x) \overline{\varphi(x - k)} dx \right) \varphi(\cdot - k),$$

d'où

$$D_{2^j} D_{2^{-j}} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} = f,$$

donc  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  engendre  $V_j$ .

Par conséquent, la suite  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_j$ . ■

### Théorème 2.2.3

Soit  $\varphi$  fonction d'échelle associée à une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .

Alors, il existe une suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  telle que:

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k). \quad (2.8)$$

De plus, la suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  vérifie:

$$\sum h_n = \sqrt{2}.$$

### Proposition 2.2.2

D'après le théorème précédent, on déduit que la fonction  $\varphi$  vérifie:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1. \quad (2.9)$$

### Proposition 2.2.3

$$\hat{\varphi}(2k\pi) = \delta_{0,k} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

### Théorème 2.2.4

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  caractérisée par sa fonction d'échelle  $\varphi$ , alors:

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

où

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}. \quad (2.12)$$

**Théorème 2.2.5**

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors la fonction  $m_0$  vérifie:

$$\begin{aligned} m_0(0) &= 1 \\ |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 &= 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Démonstration.**

En utilisant (2.4), (2.11) et que  $m_0$  est  $2\pi$ -périodique, on obtient que pour presque tout  $\xi$ ,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{K \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{K \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi + k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi + 2p\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + 2p\pi)|^2 + \sum_{q \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi + (2q+1)\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + (2q+1)\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2p\pi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + \pi + 2q\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2. \text{ voir [4]} \end{aligned}$$

■

**Corollaire 2.2.1**

La fonction  $m_0$  est nulle aux points  $\{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Théorème 2.2.6**

Soit  $m_0$  une fonction de  $L^2_{2\pi\text{-pér}}(\mathbb{R})$  régulière, vérifie les propriétés suivantes:

- (i)  $|m_0(0)| = 1$ .
- (ii)  $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}$ .
- (iii)  $m_0(\xi) \neq 0$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Pour  $\hat{\varphi}$  définit comme suite:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j \geq 1} m_0(2^{-j}\xi), \quad (2.14)$$

alors  $\varphi$  est une fonction d'échelle d'une analyse multirésolution tel que  $V_j = \left\langle \{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \right\rangle$ .

## 2.3 Construction des ondelettes

### Définition 2.3.1

Une fonction  $\psi$  de  $L^2(\mathbb{R})$  est dite ondelette, si elle vérifie la relation suivante:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0. \quad (2.15)$$

### Définition 2.3.2

L'ondelette  $\psi$  a  $N$  moments nuls si et seulement si:

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx = 0, \quad \forall \ell = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.16)$$

### Exemple 2.3.1

Ondelette de Haar

$$\psi(x) \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

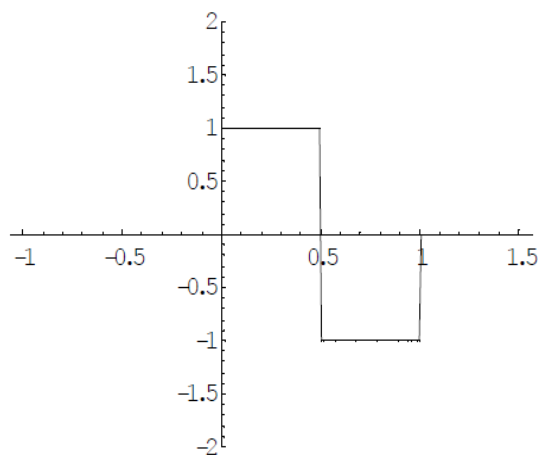


fig  $\psi(x)$  : ondelette de Haar

**Proposition 2.3.1**

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière.

On définit  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  par:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k (-1)^k h_{1-k} \varphi(2x - k), \quad (2.17)$$

où  $h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle$ , la famille  $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormée  $W_0$ ,

où  $W_0 = V_0^\perp$  dans  $V_1$ .

**Théorème 2.3.1**

Etant donnée une analyse multirésolution régulière. Alors, il existe une ondelette

$\psi \in L^2(\mathbb{R})$  telle que: si l'on introduit les fonctions  $\psi_{j,k}$  définies par:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

la famille  $\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Par conséquent,  $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ , il existe une unique décomposition:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (2.18)$$

où  $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ .

**Théorème 2.3.2**

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution. On a les propriétés suivantes:

(i)  $\forall j \in \mathbb{Z}$ , il existe un sous-espace de  $V_{j+1}$  notée  $W_j$ , tel que:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

(ii)  $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j}$ .

(iii)  $\forall j \in \mathbb{Z}$ , on a  $f \in W_j$  si et seulement si  $D_2 f \in W_{j+1}$ .

(iv)  $\forall f \in W_0$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $f(\cdot - k) \in W_0$ .

**Théorème 2.3.3**

Soit  $\psi$  une ondelette à  $N$  moments nuls telle que  $\text{supp} \psi \subset I$ ,  $I$  est un intervalle.

Alors  $\forall f \in C^N(\mathbb{R})$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que:

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-j(N+\frac{1}{2})}, \quad d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.19)$$

**Démonstration.**

Pour montrer cette majoration il nous suffit d'appliquer la formule de Taylor à la fonction  $f$  autour du centre de l'ondelette  $\psi_{j,k}$ .

Si on a posé  $x_0 = \frac{k}{2^j}$ , on trouve que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}\left(\frac{k}{2^j}\right) \left(x - \frac{k}{2^j}\right)^\ell + \frac{1}{N!} f^{(N)}(y_0) \left(x - \frac{k}{2^j}\right)^N \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\ell! 2^{j\ell}} f^{(\ell)}\left(\frac{k}{2^j}\right) (2^j x - k)^\ell + \frac{1}{N! 2^{jN}} f^{(N)}(y_0) (2^j x - k)^N. \end{aligned}$$

Quand on a fait le produit scalaire de  $f$  avec  $\psi_{j,k}$ , la somme de termes polynômiaux disparaît, et il ne reste que

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \frac{1}{N! 2^{jN}} \int_{\mathbb{R}} f^{(N)}(y_0) (2^j x - k)^N 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) dx$$

En faisant le changement de variable ( $y = 2^j x - k$ ) on obtient:

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \frac{1}{N! 2^{j(N+\frac{1}{2})}} \int_I f^{(N)}(y_1) y^N \psi(y) dy.$$

Si on a posé:  $I = [-k, k]$   $k > 0$ , alors:

$$\begin{aligned} \left| \int_I f^{(N)}(y_1) y^N \psi(y) dy \right| &\leq \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)| \int_I |y|^N |\psi(y)| dy \\ &\leq \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)| \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} k^N \sqrt{2k}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-j(N+\frac{1}{2})},$$

où  $C = \frac{k^N \sqrt{2k}}{N!} \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)|$ . ■

**Exemple 2.3.2**

**-Ondelette de Daubechies :**

Elles ont été construites de telle sorte qu'elles aient le support le plus petit pour un nombre de moments nuls  $N$ . La fonction d'échelle  $\varphi$  possède un support de taille  $2N$  on notées  $D_{2N}$ , en d'autre terme:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx &= 0, \forall \ell = 0, \dots, N-1. & (2.20) \\ \text{supp}\varphi &\subset [0, 2N-1] \\ \text{supp}\psi &\subset [-N+1, N]. \end{aligned}$$

## 2.4 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$

**Définition 2.4.1**

Une analyse multirésolution  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est une suite de sous-espaces fermés  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  tels que:

- (i)  $V_j \subset V_{j+1}, \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ,
- (ii)  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .
- (iii)  $f(x) \in V_j$  si et seulement si  $f(2x) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$ .
- (iv)  $f(x) \in V_0$  si et seulement si  $f(x-k) \in V_0 \forall k \in \mathbb{Z}^n$ .
- (v) Il existe une fonction  $\theta \in V_0$ , telle que la suite  $\{\theta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  est une base de Riesz de  $V_0$ .

**Définition 2.4.2**

Une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est  $r$ -régulière ( $r \in \mathbb{N}$ ) si la fonction  $\theta$  de la définition ci-dessus satisfait:

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0, \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ et } |\alpha| \leq r \\ |\partial^\alpha \theta(x)| \leq C_m (1 + |x|)^{-m}, \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.21)$$

**Théorème 2.4.1**

Etant donnée une analyse multirésolution régulière  $(V_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  caractérisée par sa fonction d'échelle  $\varphi$ .

On définit une suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de manière suivante:

$$\forall j \in \mathbb{Z}$$

$$V_j = V_j^1 \otimes V_j^1 \otimes V_j^1 \dots \otimes V_j^1 \quad (n \text{ fois}) \quad (2.22)$$

Alors,  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution régulière de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  caractérisée par sa fonction d'échelle  $\phi$ , telle que:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n). \quad (2.23)$$

**Théorème 2.4.2**

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  telle que sa fonction d'échelle  $\phi$  donnée par la relation (2.23). Alors,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ , la suite de fonction  $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  où:

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{n\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.24)$$

est une base orthonormée de  $V_j$ .

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , si l'on note  $W_j$  le complémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ , on a en terme ensembliste:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j,$$

ce qui peut se traduire sur les opérateurs par la relation:

$$P_{j+1} = P_j + Q_j,$$

où  $Q_j$  est l'opérateur de projection orthogonale de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  sur  $W_j$ .

De la définition de l'analyse multirésolution on a:

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j}.$$

**Théorème 2.4.3**

On définit de même  $W_j$  comme le complémentaire orthogonale de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ .

$W_0$  a alors une base orthonormée de la forme:

$$\psi_\varepsilon(x - k), \quad 1 \leq \varepsilon \leq 2^n - 1, \quad k \in \mathbb{Z}^n. \quad (2.25)$$

**Théorème 2.4.4**

Soit  $\varphi$  une fonction d'échelle d'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $\psi$  l'ondelette associée. On construit trois ondelettes dans  $W_0^2 \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ , pour  $x = (x_1, x_2)$ :

$$\psi^1(x) = \varphi(x_1) \psi(x_2), \quad (2.26)$$

$$\psi^2(x) = \psi(x_1) \varphi(x_2), \quad (2.27)$$

$$\psi^3(x) = \psi(x_1) \psi(x_2). \quad (2.28)$$

pour  $1 \leq k \leq 3$ ,  $x = (x_1, x_2)$  et  $n = (n_1, n_2)$ , on pose:

$$\psi_{j,n}^k(x) = \frac{1}{2^j} \psi^k\left(\frac{x_1 - 2^j n_1}{2^j}, \frac{x_2 - 2^j n_2}{2^j}\right), \quad (2.29)$$

alors la famille d'ondelettes  $\{\psi_{j,n}^1, \psi_{j,n}^2, \psi_{j,n}^3\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^2$  est une base orthonormée de  $W_j^2$  et  $\{\psi_{j,n}^1, \psi_{j,n}^2, \psi_{j,n}^3\}$

$(j, n) \in \mathbb{Z}^3$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . voir [3]

# Chapitre 3

## Application des ondelettes à la compression d'images

La transmission et le stockage d'un très grand nombre d'images numériques impliquent la manipulation de flux d'information extrêmement volumineux si on les conserve sous leur forme originale. Afin d'améliorer la gestion de ces flux, des techniques de compression de données ont été adaptées au domaine spécifique de l'image numérique.

Dans le présent chapitre on introduit le thème de la compression d'images fixes de manière très générale.

### 3.1 Méthode de la compression d'images

L'un des points centraux de la compression de données réside dans l'exploitation des redondances statistiques du signal considéré. L'image ne déroge pas à ce principe. En effet, si l'on modélise les données de luminance composant l'image comme une série statistique bivariée (les deux dimensions correspondent à l'axe horizontal et à l'axe vertical), il apparaît qu'il existe pour les images naturelles une forte structuration des données. Le signal composant l'image n'est pas assimilable à un bruit blanc composé de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. En particulier il existe une forte corrélation spatiale entre pixels proches de l'image. L'information est essentiellement contenue dans les zones de "rupture" statistique (contours, détails non répétitifs). La corrélation entre pixels

est particulièrement élevée dans les zones lisses de l'image, mais elle est également significative dans le cas des textures. En effet ce sont ces caractéristiques structurelles qui nous permettent de discerner les différents types de textures (l'oeil humain reconnaît immédiatement du bois, du tissu, de la pierre, ...) et qui les distinguent d'un bruit blanc (visuellement un bruit blanc serait très proche de la "neige" observée sur un téléviseur). La première étape d'une méthode de compression d'images consiste donc à choisir un espace adéquat de représentation de l'image qui tienne compte des structures propres aux images naturelles. On cherche à décomposer l'image en éléments simples qui constituent des résumés d'énergie maximale pour un petit nombre de paramètres. Le but est d'obtenir d'une part une description de la tendance générale la plus proche possible de l'image originale pour un nombre de paramètres fixés et d'autre part une bonne localisation des pics d'énergie locaux les plus importants visuellement afin de transmettre un nombre réduit de coefficients pertinents. Ces modes de représentation sont eux-mêmes divers : on peut effectuer une transformation orthogonale de l'image (DCT, ondelettes...). Il s'agit alors d'un simple changement de base destiné à isoler des composantes de forte énergie. On peut également projeter l'image dans un espace adapté. On cherche dans ce cas un espace qui soit le plus fidèle possible aux images classiques c'est à dire qui optimise l'approximation.

## 3.2 Définition de l'image

L'image est une représentation d'une personne ou d'un objet par la peinture, la sculpture, le dessin, la photographie, le film, etc. C'est aussi un ensemble structuré d'informations qui après affichage sur l'écran, ont une signification pour l'oeil humain.

### 3.2.1 Représentation des images numériques

Une image numérique est une matrice de pixels repérés par leur coordonnées  $(x, y)$ .

S'il s'agit d'une image couleur, un pixel est codé par 3 composantes  $(r, g, b)$  (chacune comprise au sens large entre 0 et 255), représentant respectivement les "doses" de rouge, vert et bleu qui caractérisent la couleur du pixel. S'il s'agit d'une image en niveau de gris, il

est codé par 1 composante comprise au sens large entre 0 et 255, représentant la luminosité du pixel.



Image originale (*a*)



Image (*a*) approximée par l'ondelette de Haar: 50% de coefficients  $d_{j,k}$  sont nuls.



Image originale (*b*)



Image (*b*) approximée par l'ondelette de Daubechies: 65% de coefficients  $d_{j,k}$  sont nuls.

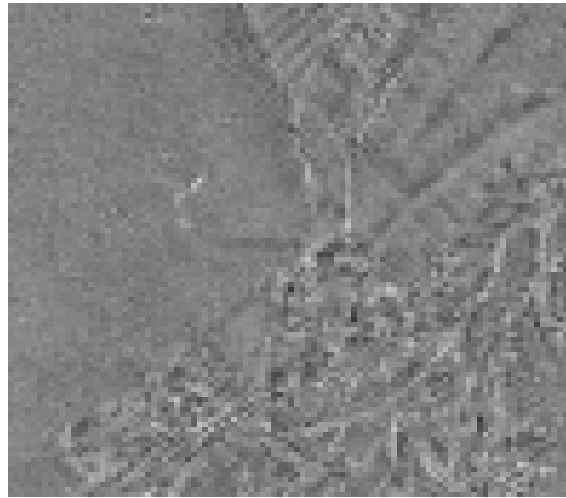


Image (b) approximée par l'ondelette de Daubechies: 90% de coefficients  $d_{j,k}$  sont nuls.

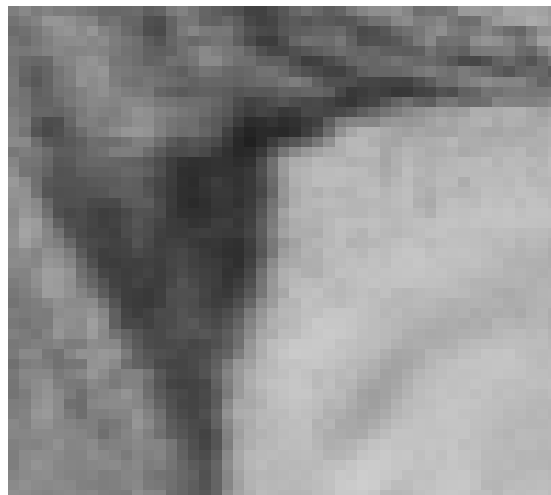


Image originale (c)

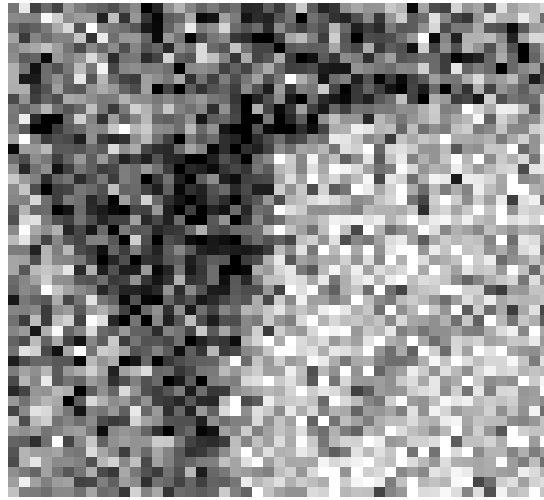


Image (c) approximée par l'ondelette de Haar: 80% de coefficients  $d_{j,k}$  sont nuls.



Image originale ( $d$ )



Image (*d*) approximée par l'ondelette de Daubechies: 93% de coefficients  $d_{j,k}$  sont nuls.



Image (*d*) approximée par l'ondelette de Daubechies: 87% de coefficients  $d_{j,k}$  sont nuls.

# conclusion générale

La représentation des images fixes est un des éléments essentiels des applications multimédias, comme dans la plupart des systèmes de communication.

La manipulation des images pose cependant des problèmes beaucoup plus complexes que celle du texte. En effet, l'image est un objet à deux dimensions, censé représenter un espace à trois dimensions, ce qui a deux conséquences majeures puisque le volume des données à traiter est beaucoup plus important et la structure de ces données est nettement plus complexe.

Il en résulte que la manipulation, le stockage et la représentation de ces données se heurtent à certaines limitations.

Grâce au traitement d'image par ondelettes, on peut gagner en vitesse lors de la transmission de l'information, et en capacité de stock.

# Bibliographie

- [1] A. Cohen. Ondelettes et Traitement Numérique du Signal. Masson,1992.
- [2] Benoît Perthame, Topologie et Analyse Defférentielle,November 10, 2007.
- [3] I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets.SIAM, 1992.
- [4] S. Mallat. A theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation. IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intelligence, 11(7): 674–693, july 1989.
- [5] Y. Meyer. Les ondelettes, Algorithmes et Applications. Armand Colin, 1992.

# Résumé

*cette travail étudie l'analyse multirésolution en utilisant les propriétés des espaces hilbertien et déduire les relations mathématiques utiles dans le domaine de la compression d'images numériques a'travers l'étude des ondelettes.*

## Mots clés :

*Espace de Hilbert, Analyse multirésolution, Ondelette, Approximation linéaire, Compression d' images.*

## المخلص

*هذا العمل يتناول التحليل متعدد المستويات باستخدام خصائص عامة للفضاء الهلبرتي و استنتاج علاقات رياضية هامة في مجال ضغط الصور الرقمية عن طريق دراسة الموجات.*

## الكلمات المفتاحية :

*الفضاء الهلبرتي، تحليل متعدد المستويات، الموجة، تقريبات خطية، ضغط الصور.*

# Abstract

*This work deals with multiresolution analysis use properties general space Hilberty. Drive mathematical relationships are important in the field of digital image.*

## Keys words :

*Hilbert spaces, Multiresolution analysis, Wavelet, Lineaire approximation, Image compression.*

