



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Le rôle des applications pseudo
contractives dans la théorie
du point fixe et applications.**

Présenté par: * Ikram Hammana
* Kaima Herier

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Abdelouahab Mansour	Prof.	Président	Univ. El Oued
Said Beloul	MCA	Rapporteur	Univ. El Oued
Mahdi Zaouche	MCA	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Remerciements

Nous aimons en premier lieu remercier mon dieu "**ALLAH**" qui nous a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Nous tenons à présenter toute ma gratitude et mes remerciements à notre encadreur de mémoire : **Dr. Saïd Beloul** Maître de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El-Oued, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements, sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nous adressons également nos remerciements à tous messieurs les membres de Jury pour le temps qu'ils ont consacré pour apprécier ce travail. Tous nos enseignants du département de mathématique et informatique, ont aussi le mérite d'être remerciés pour leurs précieux aides et engagements pour nous donner les bases des sciences mathématique.

Nous adressons aussi de remercier spécial au **Prof. Lamine Nisse** pour leur aide et leur sympathie.

Merci à nos camarades de la promotion 2018 de Mathématiques et nos amis sur tout : les deux étudiantes du DOCTORAT **Khaoula Zaïz** et **Heddi Kaddouri** pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Aussi, nous adressons nos sincères remerciements à **nos parents**, et à toute la famille.

Finalement, Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions de base	3
1.1 Les espaces métriques	3
1.1.1 Suites dans les espaces métriques	6
1.2 Espaces complets	8
1.3 Convexité	8
1.4 Espaces de Banach	9
1.4.1 Espaces uniformément convexes	10
1.4.2 Espaces réflexifs	11
1.5 Compacité	11
1.6 Coercivité	13
1.7 Application pseudo-contractrice	13
1.8 Quelques types des applications pseudo-contractrice	17
1.8.1 Application Φ -pseudocontractrice généralisé	17
1.8.2 Les relations entre des applications α -fortement pseudocontractrice et Φ -pseudocontractrice généralisé	18
1.9 Point fixe	19
2 Quelques théorèmes du point fixe	21
2.1 Théorème du point fixe dans un espace de Banach	21
2.2 Théorème du point fixe de type Krasnoselskii	30

3 Applications	33
3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	33
3.2 L'étude d'un problème intégrro-différentielle fractionnaire avec des conditions intégrales aux limites	38
3.2.1 L'existence de la solution de l'équation différentielle fractionnaire . .	39
Conclusion générale	51
Bibliographie	52

Introduction générale

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base qui montrent l'existence des solutions dans divers types d'équations. La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire car elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence et d'unicité dans nombreux problèmes non linéaires.

La première apparition de la théorie du point fixe était à la fin du 19ème siècle par le mathématicien polonais Banach intitulée, le principe de la contraction. Ce théorème est souvent mentionné comme le théorème du point fixe de Banach qui l'a énoncé en 1920 dans le cadre de la résolution des équations intégrales. Il est employé pour trouver des solutions approximatives et successives et l'existence d'une seule solution des équations notamment les équations différentielles. Ce théorème est appliqué dans l'espace métrique complet.

En 1930, Schauder a amélioré et généralisé le problème de l'existence et de l'unicité de Brower et insiste sur l'application continue sur un ensemble convexe et compact contrairement à Brower qui étudie seulement la compacité à cause de leur étude qui s'effectue sur la topologie.

Au cours de l'année 1955, Krasnoselskii a remarqué qu'il existe des difficultés pour l'intégrale dans certaines équations différentielles, pour cela il a mêlé entre le théorème de Banach et de Schauder, il est basé sur la décomposition de l'application étudiée en deux, l'une est une contraction et l'autre est continue et compacte. Ce théorème est très important pour trouver la solution de plusieurs équations intégrales ou différentielles. Depuis longtemps, le théorème de Krasnoselskii est resté un outil très efficace dans l'étude de beaucoup de problèmes : il apporte certaines améliorations, telles que la notion de la contraction large due à Burton. Ce dernier mathématicien a présenté un nouveau théorème apparu sous le

nom Krasnoselskii-Burton, qui remplace la condition de contraction de Krasnoselskii par une contraction large.

Récemment, plusieurs mathématiciens ont donné d'autres généralisations au théorème de Krasnoselskii où ils ont remplacé la condition de contraction large par des applications pseudo-contractive.

Dans ce mémoire, nous présenterons des définitions bien connues, et quelques théorèmes importants du point fixe pour certains types d'applications pseudo-contractive dans l'espace de Banach.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

***Premier chapitre :** Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions utilisées tout le long de ce mémoire, comme : les espaces métrique, les espaces complets, les espaces de Banach, les application contractantes, la compacité, théorème d'Ascoli Arzela certains types d'applications pseudo-contractive et le point fixe.*

***Deuxième chapitre :** Ce chapitre est consacré pour la présentation de théorème du point fixe de type pseudo-contractive pour nos applications au troisième chapitre.*

***Troisième chapitre :** Dans ce chapitre, on va appliquer le théorème de Krasnoselskii de type pseudo-contractive pour étudier l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielles fractionnaires au sens de Caputo.*

Chapitre 1

Notions de base

Dans ce chapitre, on présentera quelques définitions et théorèmes fondamentaux, concernant : les espaces métriques, les espaces complets, les espaces de Banach, les applications contractantes, la compacité, théorème d'Ascoli Arzéla et quelques types d'applications pseudo-contractives.

1.1 Les espaces métriques

Définition 1.1.1. Soit E un ensemble non vide. Une distance (ou métrique) sur E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tous x, y et z de E :

1. $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrique),
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Exemple 1.1.1. Soit $\delta(x, y) = \ln(1 + d(x, y))$, est une distance sur un ensemble non vide E de \mathbb{R} , si d est distance sur E on a :

1. $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + d(x, y)) = 0 \Leftrightarrow 1 + d(x, y) = 1 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\delta(x, y) = \ln(1 + d(x, y)) = \ln(1 + d(y, x)) = \delta(y, x)$.

3. comme d est une distance, alors

$$\begin{aligned}
d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\
\Leftrightarrow 1 + d(x, z) &\leq 1 + d(x, y) + d(y, z) \\
\Leftrightarrow 1 + d(x, z) &\leq 1 + d(x, y) + d(y, z) + d(x, y)d(y, z) \\
\Leftrightarrow 1 + d(x, z) &\leq (1 + d(x, y))(1 + d(y, z)) \\
\Leftrightarrow \ln(1 + d(x, z)) &\leq \ln(1 + d(x, y))(1 + d(y, z)) \\
\Leftrightarrow \ln(1 + d(x, z)) &\leq \ln(1 + d(x, y)) + \ln(1 + d(y, z)).
\end{aligned}$$

Donc $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$, par conséquent δ est une distance.

Exemple 1.1.2. Soit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = |\exp(-x) - \exp(-y)|$, d est distance sur \mathbb{R} , car pour tous x, y et $z \in \mathbb{R}$ on a :

1.

$$\begin{aligned}
d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow |\exp(-x) - \exp(-y)| = 0 \\
&\Leftrightarrow \exp(-x) - \exp(-y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exp(-x) = \exp(-y) \\
&\Leftrightarrow x = y
\end{aligned}$$

2. $d(x, y) = |\exp(-x) - \exp(-y)| = |\exp(-y) - \exp(-x)| = d(y, x)$

3.

$$\begin{aligned}
d(x, z) &= |\exp(-x) - \exp(-z)| \\
&= |\exp(-x) - \exp(-y) + \exp(-y) - \exp(-z)| \\
&\leq |\exp(-x) - \exp(-y)| + |\exp(-y) - \exp(-z)| \\
&= d(x, y) + d(y, z).
\end{aligned}$$

Définition 1.1.2. On dit que deux distances d_1, d_2 sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que :

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y), \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

Exemple 1.1.3. Soit $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie de p distances sur E_i , on pose

$$E = \prod_{i=1}^p E_i,$$

et on définit sur le produit cartésien $E \times E$ deux distances comme suit

$$D_1(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq p} d_i(x_i, y_i), \quad D_2(x, y) = \sum_{i=1}^p d_i(x_i, y_i),$$

pour tous $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de E .

On a

$$\sup_{1 \leq i \leq p} d_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^p d_i(x_i, y_i) \leq p \sup_{1 \leq i \leq p} d_i(x_i, y_i),$$

donc

$$D_1(x, y) \leq D_2(x, y) \leq pD_1(x, y).$$

Alors D_1 et D_2 sont équivalentes, pour $\alpha = 1$, $\beta = p$.

Définition 1.1.3. On appelle espace métrique tout ensemble non vide E muni d'une distance d . Cet espace sera noté par (E, d) .

Exemple 1.1.4. L'espace $C([0; 1], \mathbb{R})$ est métrique, lorsqu'il est muni d'une des distances suivantes :

1. $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$
2. $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 [f(t) - g(t)]^2 dt}.$
3. $d_\infty(f, g) = \max_{t \in [0; 1]} |f(t) - g(t)|.$

Définition 1.1.4. Une partie S d'un espace métrique (E, d) est dite bornée s'il existe une constante $L > 0$ telle que $|x| \leq L$ pour tout $x \in S$. Une fonction f est dite bornée si son image est une partie bornée de E .

1.1.1 Suites dans les espaces métriques

Définition 1.1.5. (La convergence) Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans E converge vers un point $l \in E$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_n, l) < \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq N_\varepsilon.$$

On écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ ou, $x_n \rightarrow l$.

Proposition 1.1.1. Toute suite convergente est bornée.

Preuve. Supposons que la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe alors, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| \leq \varepsilon,$$

alors, $\forall n \geq N_\varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} |U_n| &= |U_n - l + l| \\ &\leq 1 + |l|, \end{aligned}$$

on a donc, $|U_n| \leq 1 + |l|$.

Si on pose $M = \max(|U_0|, |U_1|, \dots, |U_{N_\varepsilon-1}|, 1 + |l|)$, il vient, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n| \leq M$.

Par conséquent, la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. □

Définition 1.1.6. (La continuité) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, f une application de E dans F , et a un point de E . On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E, d_E(x, a) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Si l'application f est continue en tout point a de E , on dit qu'elle est continue sur E ou tout simplement continue.

Proposition 1.1.2. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et f une application de E dans F . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en un point $a \in E$.
2. Pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge vers a , la suite $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Définition 1.1.7. (La continuité uniforme) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x, y \in E, d_E(x, y) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.1.1. Il est clair que la continuité uniforme sur E implique la continuité sur E . Par contre, la réciproque est fausse.

Exemple 1.1.5. $f(x) = x^2$ est continue sur \mathbb{R} mais ne pas uniformément continue.

Définition 1.1.8. (Suites de Cauchy) On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace métrique (E, d) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

et on écrit

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\longrightarrow 0 \\ n, m &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Exemple 1.1.6. On munit l'espace $C([0; 1], \mathbb{R})$ de la distance fondamentale d_1 et on considère la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_n(x) = \min\left(n, \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout n et m de \mathbb{N}^* , avec $n > m$, on a :

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n - m) dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - m\right) dx + \int_{\frac{1}{m^2}}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{m}{n^2}\right) + 2\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - m\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

on prend $N_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, on trouve que

$$n > m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Proposition 1.1.3. *Toute suite convergente d'un espace métrique (E, d) est de Cauchy.*

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite converge vers l , cela veut dire que

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\text{pour tout } n, m \geq N_\varepsilon \quad d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(l, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par conséquent, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. □

Remarque 1.1.2. *Il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas, par exemple la suite $\{1 - \frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace $] - 1; +1[$, mais cette suite est convergente dans \mathbb{R} vers 1 dont $1 \notin] - 1; +1[$.*

1.2 Espaces complets

Définition 1.2.1. *On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .*

Exemple 1.2.1. $(\mathbb{R}^N, | \cdot |)$, $(\mathbb{C}^N, | \cdot |)$ sont des espaces complets.

Exemple 1.2.2. $(\mathbb{Q}^N, | \cdot |)$ n'est pas complet, on prend par exemple la suite $(1 + \frac{1}{n})^n$ qui converge vers e mais $e \notin \mathbb{Q}^N$.

Remarque 1.2.1. *Si E est complet alors tout sous espace fermé de E est complet.*

1.3 Convexité

Définition 1.3.1. *Un sous-ensemble S de \mathbb{R} est dit convexe si pour tout $x, y \in S$ et pour tout $\lambda \in [0; 1]$, on a*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S.$$

Définition 1.3.2. (La fonction convexe) Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que f est convexe sur I , si pour tous x, y de I et tout $\lambda \in [0; 1]$ on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Exemple 1.3.1. La fonction $x \rightarrow |x|$ est convexe sur \mathbb{R} car si $\lambda \in [0; 1]$, alors

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1 - \lambda)y| = \lambda |x| + (1 - \lambda) |y|.$$

1.4 Espaces de Banach

Définition 1.4.1. Un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un espace normé si pour tous $x, y \in E$ il existe une fonction continue de E dans \mathbb{R}_+ vérifiant :

1. $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$, (séparation).
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), (homogénéité).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (inégalité triangulaire).

Exemple 1.4.1. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, si T est dans E , on pose $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors

$$\|T\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |t_{i,j}|,$$

définit une norme sur E .

Exemple 1.4.2. L'espace $C([0; 1], \mathbb{R})$ est normé, lorsqu'il est muni d'une des normes suivantes :

1. $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |f(t)|$. (La norme de la convergence uniforme)
2. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.
3. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f(t)]^2 dt}$.

Remarque 1.4.1. Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Définition 1.4.2. On dit que deux normes $\|x\|_1, \|x\|_2$ sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \text{ pour tout } x \in E.$$

Définition 1.4.3. Un espace de Banach est un espace normé complet pour la distance associée à sa norme.

Exemple 1.4.3. Soit $E = C([a; b], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues de $[a; b]$ dans \mathbb{R}^n . L'application

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto \|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|,$$

où $|\cdot|$ est la norme dans \mathbb{R}^n , définit une norme rendant $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Exemple 1.4.4. On note l'espace des suites multiples bornées par :

$$l^\infty(Z^N) = \{x : Z^N \rightarrow K / \sup_{k \in Z^N} |x(k)| < \infty\},$$

et pour tout $x \in l^\infty(Z^N)$, on pose

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in Z^N} |x(k)| < \infty.$$

Alors $l^\infty(Z^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

1.4.1 Espaces uniformément convexes

Définition 1.4.4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On dit que E est uniformément convexe si pour tous $\varepsilon \in]0; 2]$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour tous x et y dans B_E

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Exemple 1.4.5. Les espaces de Hilbert sont espaces uniformément convexes.

Lemme 1.4.1. [7] Un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est uniformément convexe si et seulement si $\|\cdot\|^2$ est uniformément convexe sur des ensembles convexes bornés, c'est-à-dire pour chaque $r > 0$ et $\varepsilon \in]0; 2r]$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|tx + (1-t)y\|^2 \leq t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - t(1-t)\delta,$$

pour tout $t \in]0; 1[$ et pour tous $x, y \in rB_E$ avec $\|x - y\|^2 \geq \varepsilon$.

1.4.2 Espaces réflexifs

Définition 1.4.5. *Un espace de Banach $(E, \| \cdot \|)$ est dit réflexif si l'injection canonique continue*

$$j(x)(f) := f(x), \text{ pour tout } x \in E,$$

est surjective.

Exemple 1.4.6. *Les espaces $(L^p, \| \cdot \|_p)$, pour $1 < p < \infty$ sont espaces réflexifs.*

Théorème 1.4.1. (Millman) [10] *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

1.5 Compacité

Définition 1.5.1. (Les espaces métriques compacts) *On dit que (E, d) est un espace métrique compact si toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E admet une suite extraite converge vers un point de E .*

Définition 1.5.2. (Les parties compactes) *Une partie S de E est dite compacte si le sous-espace métrique (S, d) est compact.*

Exemple 1.5.1. *Toute partie fermée et bornée de \mathbb{R}^n est compacte.*

Définition 1.5.3. (Les parties relativement compactes) *Une partie S d'un espace métrique (E, d) est dite relativement compacte si son adhérence est une partie compacte de E .*

Exemple 1.5.2. *Les parties relativement compactes de \mathbb{R}^n sont les parties bornées.*

Exemple 1.5.3. *Toute application de rang fini est compacte.*

Définition 1.5.4. (Ensemble équicontinu des fonctions) *Soit l'intervalle I de \mathbb{R} et soit f_n une suite de fonctions avec $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^P$.*

On dit que $\{f_n\}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $a_1, a_2 \in I$ et $|a_1 - a_2| < \delta$ alors, $|f_n(a_1) - f_n(a_2)| < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.5.1. (Ascoli-Arzelà) [1] Soit (E, d) un espace métrique compact, (F, d) un espace métrique. Alors une partie A de $C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $A(x) := \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact dans F pour tout $x \in E$, et
- A est équicontinu.

Exemple 1.5.4. Soit $g : [0; 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Considérons l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = \int_0^t g(s, u(s)) ds, \quad t \in [0; 1],$$

alors, l'opérateur de Hammerstein

$$G : C([0; 1]) \rightarrow C([0; 1])$$

$$u \rightarrow Gu,$$

tel que

$$Gu(t) = \int_0^t g(s, u(s)) ds,$$

est compact.

Preuve. Supposons l'ensemble $A = \{g \in C([0; 1]), \|g\| \leq M\}$. Comme g est continue et bornée, alors

$$\begin{aligned} |Gu(t)| &= \left| \int_0^t g(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |g(s, u(s))| ds \\ &\leq M \int_0^t ds = Mt \leq M, \quad \forall t \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Donc, G est borné.

Maintenant on va montrer que G est équicontinue,

pour $t_1, t_2 \in [0; 1]$ on a

$$\begin{aligned} |Gu(t_1) - Gu(t_2)| &= \left| \int_0^{t_1} g(s, u(s)) - \int_0^{t_2} g(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq M \int_{t_1}^{t_2} ds \\ &\leq M |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$ tel que, pour tous $t_1, t_2 \in [0; 1]$ et $|t_2 - t_1| \leq \delta$ alors

$$|Gu(t_1) - Gu(t_2)| \leq M\delta \leq \varepsilon,$$

d'où l'équicontinuité de G .

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, G est compact dans A . □

1.6 Coercivité

Définition 1.6.1. Une fonction f d'un sous-ensemble non vide S d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ dans \mathbb{R} est dite coercive si $f(z_n) \rightarrow \infty$ dans S telle que $\|z_n\| \rightarrow \infty$.

1.7 Application pseudo-contractive

Définition 1.7.1. (Application Lipschitzienne)[1] On dit qu'une fonction $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ est de Lipschitz (ou Lipschitzienne) de rapport $K > 0$ (ou K -Lipschitzienne), si elle satisfait :

$$d_F(f(x), f(y)) \leq Kd_E(x, y).$$

Exemple 1.7.1. Soit $E \subset \mathbb{R}_+$, on définit l'application f par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x},$$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \\ &= \left| \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= \left| \frac{x + xy - y - yx}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= \frac{|x - y|}{(1+y)(1+x)} \\ &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

C'est-à-dire f est lipschitzienne de rapport 1 sur \mathbb{R}_+ donc, elle l'est aussi sur \mathbb{R} .

Remarque 1.7.1. [8] Il est clair que, si f est lipschitzienne alors, f est uniformément continue mais le contraire n'est pas toujours vrai.

Exemple 1.7.2. L'application $x \rightarrow \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ , mais elle est non Lipschitzienne.

Définition 1.7.2. (*Application contractante*) [8] On dit qu'une application f est contractante si f est lipschitzienne de rapport K , avec $0 < K < 1$.

Exemple 1.7.3. Soit $E = [\frac{2}{3}; +\infty[$, muni de la distance usuelle. On définit l'application f de E dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2x + 6}{3x + 2}.$$

Pour tous $x, y \in E$ on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{2x + 6}{3x + 2} - \frac{2y + 6}{3y + 2} \right| \\ &= \left| \frac{14(y - x)}{(3x + 2)(3y + 2)} \right| \\ &\leq \frac{14}{16} |x - y| \\ &= \frac{7}{8} |x - y|. \end{aligned}$$

Donc, f est une contraction.

Remarque 1.7.2. [8] Toute application contractante est nécessairement lipschitzienne, continue et en particulier, uniformément continue.

Définition 1.7.3. (*Application contractive*) Soient (E, d) , (F, d') deux espace métrique et soit f est dite contractive si et seulement si :

$$\text{pour tous } x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) < d_E(x, y).$$

Exemple 1.7.4. Soit $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = \frac{x}{2}.$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} |x - y| \\ &< |x - y|. \end{aligned}$$

Donc, f est une application contractive.

Définition 1.7.4. (Application non expansive) [10] On dit qu'une application f est non expansive si f est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) \leq d_E(x, y).$$

Exemple 1.7.5. Soit $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^+$, on définit l'application f de F dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Pour tous x, y dans E on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| \\ &= \left| \frac{1(1+y) - 1(1+x)}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= \left| \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &= \frac{|x-y|}{(1+y)(1+x)} \\ &\leq |x-y|. \end{aligned}$$

C'est-à-dire f est non expansive.

Définition 1.7.5. (Application pseudo-contractive) [15] Soit E est un espace de Banach, S un sous-ensemble de E et f est une application de S dans E . On dit que f est pseudo-contractive, si pour tous $x, y \in S$ et $r > 0$, on a

$$\|x - y\| \leq \| (1+r)(x - y) - r(f(x) - f(y)) \|.$$

Proposition 1.7.1. [10] Toute application non expansive est pseudo-contractive.

Preuve. Soit f est une application de E dans S . On suppose que f est non expansive. On a, pour tous $x, y \in S$ et $r > 0$:

$$\| (1+r)(x-y) - r(f(x) - f(y)) \| \geq (1+r) \| x-y \| - r \| f(x) - f(y) \|,$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned} (1+r) \| x-y \| - r \| f(x) - f(y) \| &= \| x-y \| + r[\| x-y \| - \| f(x) - f(y) \|] \\ &\geq \| x-y \| + r[0] \\ &= \| x-y \| . \end{aligned}$$

Donc, f est pseudo-contractive. □

Remarque 1.7.3. De ce qui précède, on remarque que si f est non-expansive, alors f est pseudo-contractive, mais le contraire n'est pas vrai.

Exemple 1.7.6. [2] Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par :

$$f(x) = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [0; 1].$$

puisque f est strictement décroissante, donc f est pseudo-contractive. Remarquons que

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{1}{4^3}\right) - f\left(\frac{1}{2^3}\right) \right| &= \left| \left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right| \\ &= \frac{|(15)^{\frac{3}{2}} - (12)^{\frac{3}{2}}|}{64} \\ &> \frac{7}{64} = \left| \frac{1}{4^3} - \frac{1}{2^3} \right|. \end{aligned}$$

Donc, f n'est pas nonexpansive.

Remarque 1.7.4. (f est une contraction) \Rightarrow (f est non expansive) \Rightarrow (f est pseudo-contractive).

Définition 1.7.6. (Application accretive) [7] Soient E est un espace de Banach, S un sous-ensemble de E et f est une application de S dans E . On dit que f est accretive si pour tous $x, y \in S$ et $r > 0$, on a

$$\|x - y\| \leq \|x - y + r(f(x) - f(y))\|.$$

Exemple 1.7.7. [2] Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors f est accretive.

Proposition 1.7.2. [7] Soient E est un espace de Banach, S un sous-ensemble de E et f est une application de S dans E . f est pseudo-contractive si $I - f$ est accretive, où I désigne l'identité.

Preuve. Supposons que $I - f$ est accretive, alors on a $I - f$ accretive c'est-à-dire :
 $\forall x, y \in S$ et $r > 0$ on a

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \|x - y + r((I - f)(x) - (I - f)(y))\| \\ &\leq \|x - y + r(x - f(x) - y + f(y))\| \\ &\leq \|(1 + r)(x - y) - r(f(x) - f(y))\| \end{aligned}$$

Donc, f est pseudo-contractive. □

1.8 Quelques types des applications pseudo-contractives

Soient X est un espace vectoriel arbitraire réel normé, son dual X^* et C est un sous-ensemble non vide fermé et convexe de X . On dénote par J l'application de dualité normalisée

$J : X \rightarrow 2^{X^*}$ définie par

$$J(x) = \{x_1 \in X^* : \langle x, x_1 \rangle = \|x\|^2 = \|x_1\|^2\}, \quad \forall x \in X,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le crochet de dualité.

1.8.1 Application Φ -pseudocontractive généralisé

Définition 1.8.1. [16] L'application $f : C \rightarrow X$ est dite Φ -pseudocontractive s'il existe une fonction $\Phi : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ vérifiant

1. Φ strictement croissante,
2. $\Phi(0) = 0$.

telle que

$$\langle f(x) - f(y), j(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2 - \Phi(\|x - y\|). \quad (1.1)$$

Remarque 1.8.1. *L'application Φ -pseudocontractive généralisé est également appelé pseudo-contractif uniformément.*

Définition 1.8.2. (Fortement Pseudo-contractif) [16] *Soient X est un espace de Banach réel et $f : C \rightarrow X$. On dit que l'application f fortement pseudo-contractif s'il existe $k \in]0; 1[$ tel que pour tous $x, y \in C$, il existe $j(x - y) \in J(x - y)$ satisfait*

$$\langle f(x) - f(y), j(x - y) \rangle \leq (1 - k)\|x - y\|^2.$$

Définition 1.8.3. [16] *On dit que l'application $f : C \rightarrow X$ est α -fortement pseudo contractif s'il existe une fonction $\alpha : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ vérifiant :*

1. α strictement croissante,
2. $\alpha(0) = 0$.

tel que

$$\forall x, y \in C, \exists j(x - y) \in J(x - y)$$

$$\langle f(x) - f(y), j(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2 - \alpha(\|x - y\|)\|x - y\|.$$

1.8.2 Les relations entre des applications α -fortement pseudo-contractif et Φ -pseudocontractif généralisé

La classe des applications fortement pseudo-contractif est un sous-ensemble de classe des applications α -fortement pseudo contractif. On prend $\Phi(s) = s\alpha(s)$ avec

$$\alpha : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$$

- (i) α strictement croissante,
- (ii) $\alpha(0) = 0$.

Proposition 1.8.1. [16] *Soient C un sous-ensemble borné de X et l'application $f : C \rightarrow X$. f est Φ -pseudo contractif généralisé si f est α -fortement pseudo contractif.*

Preuve. Suppose que l'application $f : C \rightarrow X$ est Φ -pseudo contractif généralisé c'est à dire : il existe une fonction $\Phi : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ strictement croissante et $\Phi(0) = 0$ tel que

$$\langle f(x) - f(y), j(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2 - \Phi(\|x - y\|), \quad (1)$$

pour tout $x, y \in C$ et pour certain $j(x - y) \in J(x - y)$.

Puisque C est borné, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|x\| \leq M \text{ pour tout } x \in C.$$

Soit $\alpha(s) = \frac{1}{2M}\Phi(s)$, puis $\alpha : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ strictement croissante, $\alpha(0) = 0$ et $s\alpha(s) \leq \Phi(s)$, pour tout $s \in [0; 2M]$. Par (1) on a

$$\begin{aligned} \langle f(x) - f(y), j(x - y) \rangle &\leq \|x - y\|^2 - \Phi(\|x - y\|) \\ &\leq \|x - y\|^2 - \alpha(\|x - y\|)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle f(x) - f(y), j(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2 - \alpha(\|x - y\|)\|x - y\|,$$

pour tout $x, y \in C$ et pour certain $j(x - y) \in J(x - y)$. Alors, f est α -fortement pseudo contractive. \square

1.9 Point fixe

Définition 1.9.1. [1] On dit que ω est un point fixe d'une application f si :

$$f(\omega) = \omega.$$

Exemple 1.9.1. Soit f une application définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \Leftrightarrow x^2 &= x \\ \Leftrightarrow x^2 - x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Alors, f admet deux points fixes dans \mathbb{R} .

Exemple 1.9.2. Soit g une application définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$g(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

On a

$$g(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} - \arctan x = x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan x = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \arctan x.$$

Ce qui est impossible, car l'application \tan n'est pas définie à $\frac{\pi}{2}$.

Alors, g n'a pas de point fixe dans \mathbb{R} .

Définition 1.9.2. [12] On dit qu'un ensemble S d'un espace de Banach a la propriété de point fixe si toute application continue de S dans S admet un point fixe.

Lemme 1.9.1. Soient E et F deux espace métriques. Si E et F sont homéomorphes (ou que toute application de E dans F est bijective, continue et l'image réciproque continue), et si E a la propriété de point fixe, alors F admet a la propriété de point fixe.

Preuve. Soit $h : E \rightarrow F$ un homéomorphisme et $f : F \rightarrow F$ une application continue.

On définit l'application continue $g = h \circ f \circ h^{-1} : E \rightarrow E$, puisque E a la propriété de point fixe, il existe un point $x \in E$ tel que $g(x) = x$. Alors, on a

$$f(h(x)) = h(g(x)) = h(x),$$

Donc, $h(x)$ est un point fixe de f

□

Chapitre 2

Quelques théorèmes du point fixe

Dans ce chapitre, on va citer quelques théorèmes du point fixe pour certains types d'applications pseudo-contractives, plus précisément les applications fortement pseudo-contractives.

2.1 Théorème du point fixe dans un espace de Banach

Théorème 2.1.1. [14] Soit X un espace de Banach, G un sous-ensemble borné ouvert de X avec $0 \in G$, et soit $U : \bar{G} \rightarrow X$ une application pseudo-contractive satisfaisant :

(i) $U(x) \neq \lambda x$ si $x \in \partial G$ et $\lambda > 1$,

(ii) $(I - U)(\bar{G})$ est fermé, alors U admet un point fixe dans \bar{G} .

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin le théorème suivant :

Théorème 2.1.2. (*Petryshyn*)[7] Soit C un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de l'espace Banach X tel que $0 \in C$. Considérons $T : C \rightarrow C$ est une application Φ -condansente, s'il existe $r > 0$ tel que $Tx \neq \lambda x$ pour tout $\lambda > 0$ chaque fois $x \in C$, $\|x\| = r$, alors T a un point fixe dans C .

Preuve. On choisit $r \in]0; 1[$ de telle façon que l'application rU soit une contractante, et on définit les applications S et $T : G \rightarrow X$ telles que

$$S = (1 - r)I \text{ et } T = (I - rU).$$

On a T est injectif, $T(G)$ est ouvert, $\partial T(G) = T(\partial G)$ donc $T(\bar{G}) = \overline{T(G)}$.

Puisque rU satisfait (i) et (ii) sur G , par le théorème 2.1.2.

il existe $x \in \bar{G}$ telle que $x = rU(x)$.

Donc $0 = T(x) \in T(G)$ on obtient, $0 \in \text{int}(B)$ où $B = \overline{T(G)}$.

Comme U est pseudo-contractive pour chaque $x, y \in G$:

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \| (1+r)(x - y) - r(U(x) - U(y)) \|, \\ &\leq \| (x - rU(x)) - (y - rU(y)) \| + r \|x - y\|, \\ &\leq \| (I - rU)(x) - (I - rU)(y) \| + r \|x - y\|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$(1 - r) \|x - y\| \leq \|T(x) - T(y)\|,$$

ce que implique

$$\|S(x) - S(y)\| \leq \|T(x) - T(y)\|.$$

On définit $H : B \rightarrow X$ par $H(z) = ST^{-1}(z)$. Alors si $z_1, z_2 \in B$

$$\begin{aligned} \|H(z_1) - H(z_2)\| &= \|ST^{-1}(z_1) - ST^{-1}(z_2)\|, \\ &\leq \|TT^{-1}(z_1) - TT^{-1}(z_2)\|, \\ &= \|z_1 - z_2\|. \end{aligned}$$

donc H est non-expansive sur B .

Pour voir que $(I - H)(B)$ est fermé, supposons $z_n - H(z_n) \rightarrow y$, $z_n \in B$.

Alors

$$z_n - (1 - r)T^{-1}(z_n) \rightarrow y.$$

Donc

$$z_n/(1 - r) - T^{-1}(z_n) \rightarrow y/(1 - r).$$

On pose $z = \frac{y}{(1 - r)}$ et soit $x_n = T^{-1}(z_n)$, on a

$$x_n = T^{-1}(z_n) \Rightarrow T(x_n) = z_n \Rightarrow z_n = (x_n - rU(x_n)),$$

$$\begin{aligned}
(x_n - rU(x_n))/(1 - r) - x_n &= x_n - rU(x_n) - x_n + rU(x_n)/(1 - r), \\
&= r(x_n - U(x_n))/(1 - r), \\
&= (x_n - rU(x_n))/(1 - r) - x_n, \\
&= T(x_n)/(1 - r) - x_n \longrightarrow z.
\end{aligned}$$

Et ainsi

$$x_n - U(x_n) \longrightarrow (1 - r)z/r,$$

puisque $(I - U)(\bar{G})$ est fermé, il existe $x \in \bar{G}$ tel que

$$x - U(x) = (1 - r)z/r,$$

donc

$$(1 - r)z = r(x - U(x)) = x - rU(x) - (1 - r)x = T(x) - (1 - r)x.$$

On obtient $T(x)/(1 - r) - x = z$, on pose $w = T(x)$ on a

$$w/(1 - r) - T^{-1}(w) = z,$$

donc

$$w - (1 - r)T^{-1}(w) = (1 - r)z = y.$$

Ainsi $w - H(w) = y$, alors $(I - H)(B)$ est fermé .

Maintenant, on va montre que H vérifie (i) sur B .

Soit $x \in \partial B$ et on pose $H(x) = \lambda x$ pour $\lambda > 1$. Alors

$$T^{-1}(x) = \lambda x/(1 - r).$$

Puisque $T(\partial G) = \partial T(G)$ donc $\lambda x/(1 - r) \in \partial G$ on a

$$x = T(\lambda x/(1 - r)),$$

alors

$$x = \lambda x/(1 - r) - rU(\lambda x/(1 - r)),$$

C'est à dire

$$U(\lambda x/(1 - r)) = (\lambda + r - 1)x/r(1 - r).$$

Soit $\bar{x} = \lambda x / (1 - r)$, tel que $\bar{x} \in \partial G$ et $U(\bar{x}) = \mu \bar{x}$ où

$$\mu = (\lambda + r - 1) / \lambda r,$$

mais

$$\mu - 1 = (\lambda - 1)(1 - r) / \lambda r > 0,$$

cela contredit la condition (i) pour U sur ∂G .

H satisfait toutes les hypothèses de théorème 2.1.1. sur B , donc il existe $y \in B$ tel que $H(y) = y$.

On pose $x = T^{-1}$,

$$S(x) = ST^{-1} = H(y) = y = T(x),$$

donc

$$(1 - r)x = x - ru(x),$$

et on a $x = U(x)$. □

Dans la suite on va présenter un théorème de convergence d'un certain processus d'itération proposé dans [12], pour une application fortement pseudo-contractive.

Théorème 2.1.3. *Soit X un espace de Banach réflexif, et C un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de X . Soit $T : C \rightarrow C$ une application fortement pseudo-contractive, telle que :*

$$F(T) = \{x \in C : Tx = x\} \neq \emptyset,$$

et $f : C \rightarrow C$ est une contraction, soit (x_n) une suite de C telle que :

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S_n x_n \tag{2.1}$$

ou $S_n(x) = (1 - \delta_n)x + \delta_n T x$, définissons une suite z_n comme suite

$$z_t = t f(z_t) + (1 - t) S_n z_t,$$

si les suites dans \mathbb{R} $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\delta_n\}$ de $]0; 1[$ et $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n = 1$, tels que satisfaisant les conditions suivantes :

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty,$$

- (ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$,
 (iii) $|\delta_{n+1} - \delta_n| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Alors, la suite $\{x_n\}$ converge fortement vers un point fixe de T .

Pour démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.1.1. [12] Soit X un espace de Banach réflexif. Supposons que des assertions suivantes :

- (i) j est uniformément continu sur tout sous-ensemble borné de X ,
 (ii) $\langle x - y, j(x) - j(y) \rangle \leq \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C$,
 (iii) Pour tout sous-ensemble C de X , il existe c tel que
 $\langle x - y, j(x) - j(y) \rangle \leq c(\|x - y\|)$ pour tous $x, y \in C$, où c satisfait $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{c(t)}{t} = 0$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et C sous-ensemble borné, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|tx - (1 - t)y\|^2 \leq 2t\langle x, j(y) \rangle + 2t\varepsilon + (1 - 2t)\|y\|^2,$$

pour tous $x, y \in C$ et $t \in [0; \delta]$.

Lemme 2.1.2. [12] Soient $\{x_n\}$ et $\{z_n\}$ des suite bornées dans un espace de Banach X et soit $\{\tau_n\}$ une suite dans $[0; 1]$ avec $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \tau_n < 1$.

Considérons $x_{n+1} = \tau_n z_n + (1 - \tau_n)x_n$, pour tous les entiers $n \geq 0$ et

$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = 0.$$

Lemme 2.1.3. [12] Supposons que $\{a_n\}$ est une suite de nombres réels positifs telle que

$$a_{n+1} \leq (1 - b_n)a_n + c_n,$$

où b_n est une suite dans $]0; 1[$ et $\{c_n\}$ est une suite telle que

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty,$$

$$(ii) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} \leq 0 \text{ où } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Lemme 2.1.4. [12] Soit X un espace de Banach réflexif, C est un sous-ensemble convexe fermé non vide de X , $S : C \rightarrow C$ est une application non-expansive avec $F(S) \neq \emptyset$, et $f : C \rightarrow C$ est une contraction. Si $\{z_t\}$ est défini par

$$z_t = tf(z_t) + (1 - t)Sz_t,$$

alors $\{z_t\}$ converge fortement vers un point $z \in F(S)$, ce qui résout l'inégalité variationnelle

$$\langle (I - f)z, j(z - p) \rangle \geq 0, \quad \forall p \in F(S).$$

Preuve. du théorème 2.1.3. La preuve sera divisée en quatre étapes.

- **Première étape :** on va montrer que S_n est une application non-expansive.

En effet, pour tous $x, y \in C$, on prend $0 < \epsilon < k \|Tx - Ty - (x - y)\|$.

Par le lemme 2.1.1. on a :

$$\begin{aligned} \|S_n x - S_n y\|^2 &= \|(1 - \delta_n)x + \delta_n Tx - (1 - \delta_n)y - \delta_n Ty\|^2, \\ &= \|\delta_n(Tx - Ty) + (1 - \delta_n)(x - y)\|^2, \\ &\leq 2\delta_n \langle Tx - Ty, j(x - y) \rangle + 2\epsilon\delta_n + (1 - 2\delta_n) \|x - y\|^2, \\ &\leq (1 - 2\delta_n) \|x - y\|^2 + 2\delta_n (\|x - y\|^2 - k \|Tx - Ty - (x - y)\|^2), \\ &\quad + 2\epsilon\delta_n \\ &\leq \|x - y\|^2 - 2\delta_n k \|Tx - Ty - (x - y)\|^2 + 2\epsilon\delta_n, \\ &\leq \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

on remarque pour chaque $n \in N$, $S_n x = x$ si et seulement si $Tx = x$, donc

$F(S_n) = F(T)$. Par l'hypothèse $F(T) \neq \emptyset$, alors

$$F(S_n) \neq \emptyset.$$

- **Deuxième étape :** $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ et $\|x_n - S_n x_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Puisque C est un sous ensemble convexe fermé de non vide et borné X , alors $x_n, S_n x_n$ sont bornés. D'où $M = \sup \|x_n - Tx_n\|$.

A partir de première étape, puisque S_n est une application non-expansive, donc par (2.1) on a

$$\begin{aligned} \| S_n x_n - S_{n-1} x_{n-1} \| &= \| S_n x_n - S_n x_{n-1} + S_n x_{n-1} - S_{n-1} x_{n-1} \| \\ &\leq \| x_n - x_{n+1} \| + M \| \delta_n - \delta_{n-1} \|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Maintenant, on définit $z_n = \frac{x_{n+1} - \beta_n x_n}{1 - \beta_n}$, tel que

$$z_n = \frac{\alpha_n f(x_n) + \gamma_n S_n x_n}{1 - \beta_n},$$

par (2.1) et (2.2),

$$\begin{aligned} \| z_{n+1} - z_n \| - \| x_{n+1} - x_n \| &= \left\| \frac{\alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + \gamma_{n+1} S_{n+1} x_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_n f(x_n) + \gamma_n S_n x_n}{1 - \beta_n} \right\| - \| x_{n+1} - x_n \|, \\ &= \left\| \frac{\alpha_{n+1} (f(x_{n+1}) - S_n x_n) + \alpha_{n+1} S_n x_n + \gamma_{n+1} S_{n+1} x_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_n (f(x_n) - S_n x_n) + \alpha_n S_n x_n + \gamma_n S_n x_n}{1 - \beta_n} \right\| - \| x_{n+1} - x_n \|, \\ &= \left\| \frac{\alpha_{n+1} (f(x_{n+1}) - S_n x_n)}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n (f(x_n) - S_n x_n)}{1 - \beta_n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_{n+1} S_n x_n - \gamma_{n+1} S_{n+1} x_{n+1} - S_n x_n}{1 - \beta_{n+1}} \right\| - \| x_{n+1} - x_n \|, \\ &\leq \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \| f(x_{n+1}) - S_n x_n \| + \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \| f(x_n) - S_n x_n \| \\ &\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \| S_{n+1} x_{n+1} - S_n x_n \| - \| x_{n+1} - x_n \|, \\ &\leq \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \| f(x_{n+1}) - S_n x_n \| + \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \| f(x_n) - S_n x_n \| \\ &\quad + \| S_{n+1} x_{n+1} - S_n x_n \| - \| x_{n+1} - x_n \|, \\ &\leq \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \| f(x_{n+1}) - S_n x_n \| + \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \| f(x_n) - S_n x_n \| \\ &\quad + M \| \delta_{n+1} - \delta_n \|. \end{aligned}$$

Par les hypothèses sur $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\| z_{n+1} - z_n \| - \| x_{n+1} - x_n \|) \leq 0,$$

en utilisant le lemme 2.1.2. on a

$$\|z_n - x_n\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) \|z_n - x_n\| = 0.$$

On a

$$x_n - S_n x_n = x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - S_n x_n = x_n - x_{n+1} + \alpha_n (f(x_n) - S_n x_n) + \beta_n (x_n - S_n x_n),$$

on obtient

$$\|x_n - S_n x_n\| \leq \frac{1}{1 - \beta_n} \|x_n - x_{n+1}\| + \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \|f(x_n) - S_n x_n\|,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n x_n - x_n\| = 0.$$

- **Troisième étape** : On va montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, j(x_n - z) \rangle \leq 0.$$

On observe qu'à partir du lemme 2.1.4. il existe des z_t satisfaisant

$$z_t = t f(z_t) + (1 - t) S_n z_t \text{ et } z_t \text{ converge vers un point fixe de } S_n (F(T) = F(S_n)).$$

Soit $z_t \rightarrow z \in F(T) = F(S_n)$, en utilisant l'égalité

$$z_t - x_n = (1 - t)(S_n z_t - x_n) + t(f(z_t) - x_n),$$

et l'inégalité

$$\langle S_n x - S_n y, j(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|z_t - x_n\|^2 &= (1 - t) \langle S_n z_t - x_n, j(z_t - x_n) \rangle + t \langle f(z_t) - x_n, j(z_t - x_n) \rangle, \\ &\leq (1 - t) (\langle S_n z_t - S_n x_n, j(z_t - x_n) \rangle + \langle S_n x_n - x_n, j(z_t - x_n) \rangle) \\ &\quad + t \langle f(z_t) - z_t, j(z_t - x_n) \rangle + t \|z_t - x_n\|^2, \\ &\leq \|z_t - x_n\|^2 + \|S_n x_n - x_n\| \|j(z_t - x_n)\| + t \langle f(z_t) - z_t, j(z_t - x_n) \rangle. \end{aligned}$$

et donc

$$\langle f(z_t) - z_t, j(x_n - z_t) \rangle \leq \frac{\|S_n x_n - x_n\|}{t} \|z_t - x_n\|. \quad (2.3)$$

Puisque $\{z_t\}$, $\{x_n\}$ et $\{S_n x_n\}$ sont bornés et $\|x_n - S_n x_n\| \rightarrow 0$, si $n \rightarrow \infty$ dans (2.3) on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z_t) - z_t, j(x_n - z_t) \rangle \leq 0. \quad (2.4)$$

Puisque $\{z_t\}$ converge fortement vers z , quand $t \rightarrow \infty$ et $\{z_t - x_n\}$ est borné, et étant donné que la application de dualité j est uniformément continue sur des sous-ensembles bornés de X , on obtient

$$\begin{aligned} |\langle f(z) - z, j(x_n - z) \rangle - \langle f(z_t) - z_t, j(x_n - z_t) \rangle| &= |\langle f(z) - z, j(x_n - z) - j(x_n - z_t) \rangle \\ &\quad + \langle (f(z) - z) - (f(z_t) - z_t), j(x_n - z_t) \rangle|, \\ &\leq |\langle f(z) - z, j(x_n - z) - j(x_n - z_t) \rangle| \\ &\quad + \|(f(z) - z) - (f(z_t) - z_t)\| \|x_n - z_t\|, \\ &\longrightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il exist $\sigma > 0$ tel que pour tout $t \in]0; \sigma[$, et $n \geq 0$, on a

$$\langle f(z) - z, j(x_n - z) \rangle < \langle f(z_t) - z_t, j(x_n - z_t) \rangle + \varepsilon,$$

par (2.4) on a

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, j(x_n - z) \rangle &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z_t) - z_t, j(x_n - z_t) \rangle + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, j(x_n - z) \rangle \leq 0.$$

- **Quatrième étape :** On va montre que $x_n \rightarrow z$. En effet, à partir de (2.1), on a

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z\|^2 &= \alpha_n \langle f(x_n) - z, j(x_{n+1} - z) \rangle + \beta_n \langle x_n - z, j(x_{n+1} - z) \rangle \\
&\quad + \gamma_n \langle S_n x_n - z, j(x_{n+1} - z) \rangle, \\
&\leq \alpha_n \langle f(x_n) - f(z), j(x_{n+1} - z) \rangle + \alpha_n \langle f(z) - z, j(x_{n+1} - z) \rangle \\
&\quad + \beta_n \|x_n - z\| \|x_{n+1} - z\| + \gamma_n \|x_n - z\| \|x_{n+1} - z\|, \\
&\leq (\alpha_n \alpha + \beta_n + \gamma_n) \|x_n - z\| \|x_{n+1} - z\| \\
&\quad + \alpha_n \langle f(z) - z, j(x_{n+1} - z) \rangle, \\
&\leq [1 - (1 - \alpha)\alpha_n] \left[\frac{1}{2} \|x_n - z\|^2 + \frac{1}{2} \|x_{n+1} - z\|^2 \right] \\
&\quad + \alpha_n \langle f(z) - z, j(x_{n+1} - z) \rangle, \\
&\leq \frac{1}{2} \|x_{n+1} - z\|^2 + \frac{1 - (1 - \alpha)\alpha_n}{2} \|x_n - z\|^2 \\
&\quad + \alpha_n \langle f(z) - z, j(x_{n+1} - z) \rangle.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq [1 - (1 - \alpha)\alpha_n] \|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n \langle f(z) - z, j(x_{n+1} - z) \rangle. \quad (2.5)$$

En utilisant le lemme 2.1.4. sur (2.5).

Par conséquent $\{x_n\}$ est convergente vers z .

□

2.2 Théorème du point fixe de type Krasnoselskii

Théorème 2.2.1. (Schauder) [1] Soit C un sous-ensemble non vide, convexe et compact d'un espace de Banach $(E, \| \cdot \|)$ et $T : C \rightarrow C$ une application continue.

Alors, T possède un point fixe.

Théorème 2.2.2. [6] Soit C un sous-ensemble borné, convexe fermé d'un espace de Banach X et soient $A, B : C \rightarrow X$ deux applications continues satisfaisant :

(i) A est compacte,

(ii) B est une application pseudo-contractive et $(I - B)^{-1} : \mathfrak{R}(I - B) \rightarrow C$ existe et uniformément continu, ($\mathfrak{R}(I - B)$ c'est-à-dire le rang de $(I - B)$).

(iii) $A(C) + B(C) \subseteq C$,

Alors il existe $x \in C$ tel que $A(x) + B(x) = x$.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de corollaire et de la proposition suivants :

Corollaire 2.2.1. [6] Soit C un sous-ensemble convexe fermé d'un espace X de Banach. Supposons que $F : C \rightarrow X$ est une application pseudo-contractive converge faible vers l'intérieur sur X , tel que

$$(I - F)^{-1} : \mathfrak{R}(I - F) \rightarrow C,$$

est uniformément continu . Alors F a un point fixe unique dans C .

Proposition 2.2.1. [5] Soient X, E deux espaces de Banach, et soit $A \subset X$ une partie non vide, Si $f \in C_B(A, E)$ et $g \in Q(E, X)$ (resp $f \in Q(A, E)$ et $g \in C(E, X)$), alors

$$g \circ f \in Q(A, X),$$

tel que

$Q(E, X)$: l'ensemble des applications compactes définies sur E à valeurs dans X ,
et

$$C_B(A, E) = \{ f \in C(A, E), \forall B \subset A \text{ borné} \Rightarrow f(B) \text{ borné} \}.$$

Preuve. Pour chaque $y \in C$ fixé, l'application $S_y : C \rightarrow C$ définie par :

$$S_y(x) = A(y) + B(x),$$

est continue. Où A est compacte et B est une application pseudo-contractive.

On a

$$(I - S_y)^{-1} : \mathfrak{R}(I - S_y) \rightarrow X,$$

par la condition (ii), l'application $(I - S_y)^{-1}$ existe, uniformément continue et injective (puisque $(I - S_y)$ bijective).

Si B est pseudo-contractive, alors

$$\|x - z\| \leq \| (1 + r)(x - z) - r(B(x) - B(z)) \|,$$

pour tout $r > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\|x - z\| &\leq \| (1+r)(x-z) - r(B(x) - B(z)) \|, \\
&\leq \| (1+r)(x-z) - r(B(x) - A(y) + A(y) - B(z)) \|, \\
&\leq \| (1+r)(x-z) - r((B(x) + A(y)) - (B(z) + A(y))) \|, \\
&= \| (1+r)(x-z) - r(S_y(x) - S_y(z)) \| .
\end{aligned}$$

Donc S_y est pseudo-contractive.

Maintenant, on va prouver que $A(C) \subset \mathfrak{R}(I - B)$.

En effet, soit $y \in C$, si B une application pseudo-contractive, par le corollaire 2.2.1. alors il existe $x_0 \in C$ tel que

$$S_y(x_0) = x_0,$$

alors

$$A(y) + B(x_0) = x_0 \Rightarrow A(y) = x_0 - B(x_0) = (I - B)(x_0),$$

on a

$$(I - B)^{-1} : \mathfrak{R}(I - B) \rightarrow X,$$

donc

$$A(y) \subset \mathfrak{R}(I - B).$$

On a

$$(I - B)^{-1} \circ A : C \longrightarrow C,$$

est bien définie et relativement compacte (par la proposition 2.2.1.).

On obtient qu'il existe $x \in C$ tel que

$$((I - B)^{-1} \circ A)(x) = x,$$

et par conséquent $A(x) = (I - B)(x)$,

Donc

$$A(x) + B(x) = x.$$

□

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, on étudiera un problème intégro-différentielle fractionnaire avec des conditions intégrales aux limites dans un espace de Banach et on va appliquer le théorème 2.2.2. qui a été étudié dans le deuxième chapitre pour prouver l'existence de la solution d'une équation intégro-différentielle fractionnaire.

3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans cette section nous présentons quelques définitions sur la fonction Gamma, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et fonction de Green.

Soit $0 \leq q \leq 1$ un réel donné. On note par $C([a; b], X)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur l'intervalle $[a; b]$ et muni de la topologie de la convergence uniforme. Pour $[a; b] = [0; 1]$ on pose

$$C = C([0; 1], X),$$

et on désigne la norme d'un élément ϕ de C par

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(t)| : 0 \leq t \leq 1\}.$$

où $|\cdot|$ est une norme dans X .

Définition 3.1.1. On appelle fonction Gamma une fonction définie par

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} r^{z-1} e^{-r} dr \quad (\Re(z) > 0),$$

où

$$r^{z-1} = e^{(z-1)\log(r)}.$$

La fonction gamma possède les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ ($\Re(z) > 0$),
2. $\Gamma(n) = (n - 1)!$ ($\forall n \in \mathbb{N}$ avec $0! = 1$).

On détermine quelque valeur de la fonction gamma :

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} x^{1-1} e^{-x} dx, \\ &= [-e^{-x}]_0^{+\infty}, \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) - (-e^0), \\ &= 0 - (-1) = 1. \end{aligned}$$

Définition 3.1.2. [9] Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, sa dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre q est définie par

$${}^c D^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - q)} \int_0^t (t - s)^{n-q-1} f^{(n)}(s) ds, \quad n - 1 < q < n, \quad n = [q] + 1, \quad (3.1)$$

où $[q]$ désigne la partie entière du nombre réel q .

Exemples :

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$${}^c D^q C = 0.$$

2. La dérivée au sens de Caputo de f : Soit $f(t) = (t - a)^k$ et soit q non entier et $0 \leq n - 1 < q < n$ avec $k > n - 1$ alors, on a :

$$f^n(\tau) = \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k - n + 1)} (t - \tau)^{k-n},$$

d'où

$${}^c D^q(t-a)^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-q)\Gamma(k-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-q-1}(\tau-a)^{k-n}.$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on a :

$$\begin{aligned} {}^c D^q(t-a)^k &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-q)\Gamma(k-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-q-1}(\tau-a)^{k-n}, \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-q)\Gamma(k-n+1)} (t-a)^{k-q} \int_0^1 (1-s)^{n-q-1}(s)^{k-s} ds, \\ &= \frac{\Gamma(k+1)\beta(n-q, k-n+1)}{\Gamma(n-q)\Gamma(k-n+1)} (t-a)^{k-q}, \\ &= \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-q)\Gamma(k-n+1)}{\Gamma(n-q)\Gamma(k-n+1)\Gamma(k-q+1)}, \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-q+1)} (t-a)^{k-q}. \end{aligned}$$

Définition 3.1.3. [9] *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre q est définie par*

$$I^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-q}} ds, \quad q > 0, \quad (3.2)$$

sachant que l'intégrale existe.

Lemme 3.1.1. [9] *Pour $q > 0$, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire ${}^c D^q x(t) = 0$ est donnée par*

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}, \quad (3.3)$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ($n = [q] + 1$).

Définition 3.1.4. (*Fonction de Green*)

Soit le problème :

$$\begin{cases} L(y) = P_0(t)y^n + P_1(t)y^{n-1} + \dots + P_n(t)y = 0, \\ V_k(y) = \alpha y(a) + \alpha_1 y'(a) + \dots + \alpha_{n-1} y^{n-1}(a) + \beta y(a) + \beta_1 y'(a) + \dots \\ \dots + \beta_{n-1} y^{n-1}(a) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

telle que :

$L(y)$ est une équation différentielle d'ordre n ($P_0(x) \neq 0$) avec des conditions aux limites : $V_k(y) = 0$, où les fonctions P_0, P_1, \dots, P_n sont continues sur $[a; b]$ et les V_k en fonction de $y(a), y'(a), \dots, y^{n-1}(a)$ étant linéairement indépendant.

Supposons le problème (3.4) admet la seule solution triviale $y(t) = 0$.

Donc, on appelle fonction de Green du problème (3.4) la fonction $G(t, s)$ construit pour tout s ($a < s < b$) tel que :

- $G(t, s)$ est continue et possède des dérivées par rapport t jusqu'à l'ordre $(n - 2)$ sur $]a; b[$.
- Sa $(n - 1)$ ème dérivée par rapport x présente au point $t = s$ une discontinuité de première espèce le saut ayant la valeur $\frac{1}{P_0(s)}$ c'est-à-dire ;

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} G(s_+, s) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} G(s, s_-) = \frac{1}{P_0(s)}.$$

- Dans chacun des intervalles $[a; s[$, $]s; b]$ la fonction $G(t, s)$ considérée comme fonction de t est une solution de $L(G)=0$.
- $G(t, s)$ vérifie des conditions aux limites $V_k(G) = 0$ ($k = 0, \dots, n$).

Exemple 3.1.1. Soit le problème :

$$\begin{cases} \frac{d^3 y}{dx^3} = 0, \\ y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

Construisons la fonction de Green associée à ce problème. On sait que la solution générale est donnée par :

$$y(x) = ax^2 + bx + c,$$

on a $y(0) = 0$, donc $a = b = c = 0$.

La fonction de Green définie par :

$$G(x, \varepsilon) = \begin{cases} a_1(\varepsilon)x^2 + b_1(\varepsilon)x + c_1(\varepsilon), & 0 \leq x \leq \varepsilon; \\ a_2(\varepsilon)x^2 + b_2(\varepsilon)x + c_2(\varepsilon), & \varepsilon \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(1) la continuité de G au point $x = \varepsilon$:

$$(a_2(\varepsilon) - a_1(\varepsilon))\varepsilon^2 + (b_2(\varepsilon) - b_1(\varepsilon))\varepsilon + (c_2(\varepsilon) - c_1(\varepsilon)).$$

(2) discontinue au point $x = \varepsilon$ (de G_x^n) :

$$2(a_2(\varepsilon) - a_1(\varepsilon)) = 1 \Rightarrow a_2(\varepsilon) = 1/2 + a_1(\varepsilon).$$

D'après la quatrième propriété :

$$\begin{cases} G(0, \varepsilon) = 0 \Rightarrow c_1(\varepsilon) = 0. \\ G(1, \varepsilon) = 0 \Rightarrow a_2(\varepsilon) + b_2(\varepsilon) + c_2(\varepsilon) = 0. \\ G'(0, \varepsilon) = 0 \Rightarrow b_1(\varepsilon) = 0. \\ G'(1, \varepsilon) = 0 \Rightarrow 2a_1(\varepsilon) + b_2(\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} (1/2)\varepsilon^2 + b_2(\varepsilon)\varepsilon + c_2(\varepsilon) = 0. \\ b_2(\varepsilon) = -2a_2(\varepsilon). \\ -a_2(\varepsilon) + c_2(\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Le système } \begin{cases} -2a_2(\varepsilon)\varepsilon + c_2(\varepsilon) = (-1/2)\varepsilon^2 \\ -a_2(\varepsilon) + c_2(\varepsilon) = 0 \end{cases} \quad \text{nous donne}$$

$$c_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon - 2} \quad \text{et} \quad b_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon - 1},$$

Calculons $a_1(\varepsilon)$ et $a_2(\varepsilon)$:

$$a_2(\varepsilon)(-2\varepsilon + 1) = (-1/2)\varepsilon^2 \Rightarrow a_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon - 2},$$

$$a_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon - 2} - \frac{1}{2} = \frac{\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1}{4\varepsilon - 2},$$

par conséquent :

$$G(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{(\varepsilon - 1)^2}{4\varepsilon - 2} x^2, & 0 \leq x \leq \varepsilon; \\ \frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon + 2} x^2 - \frac{2\varepsilon^2}{4\varepsilon - 2} x + \frac{\varepsilon}{4\varepsilon - 2}, & \varepsilon \leq x \leq 1. \end{cases}$$

3.2 L'étude d'un problème intégral-différentielle fractionnaire avec des conditions intégrales aux limites

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = f(t, x(t), (\chi x)(t)), & 0 < t < 1, \quad 1 < q \leq 2; \\ \alpha x(0) + \beta x'(0) = \int_0^1 q_1(x(s)) ds, \quad \alpha x(1) + \beta x'(1) = \int_0^1 q_2(x(s)) ds, \end{cases} \quad (3.5)$$

où ${}^c D$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, et $f : [0; 1] \times X \times X \rightarrow X$, et $\gamma : [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow [0; +\infty[$

$$(\chi x)(t) = \int_0^1 \gamma(t, s)x(s) ds, \quad (3.6)$$

$q_1, q_2 : X \rightarrow X$ et $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ sont des nombres réels.

Remarque 3.2.1. par le lemme 3.1.1, nous concluons que l'on a

$$I^q {}^c D^q x(t) = x(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}, \quad (3.7)$$

pour $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ($n = [q] + 1$).

3.2.1 L'existence de la solution de l'équation différentielle fractionnaire

Dans cette section on va prouver l'existence de la solution du problème (3.5) en utilisant le théorème 2.2.2.

Lemme 3.2.1. *Pour toutes $\zeta, \eta_1, \eta_2 \in C([0; 1])$ la solution unique du problème avec des conditions intégrales aux limites :*

$$\begin{cases} {}^c D^q x(t) = \zeta(t), & 0 \leq t \leq 1, \quad 1 < q \leq 2; \\ \alpha x(0) + \beta x'(0) = \int_0^1 \eta_1(s) ds, & \alpha x(1) + \beta x'(1) = \int_0^1 \eta_2(s) ds, \end{cases} \quad (3.8)$$

est donnée par

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) \zeta(s) ds + \frac{1}{\alpha^2} \left[(\alpha(1-t) + \beta) \int_0^1 \eta_1(s) ds + (\beta + \alpha t) \int_0^1 \eta_2(s) ds \right]. \quad (3.9)$$

Où $G(t, s)$ est la fonction de Green donnée par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha\Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2\Gamma(q-1)} & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Preuve. Il existe $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, tels que

$$x(t) = b_1 + b_2 t.$$

Sait que $I^{qc} D^q x(t) = x(t)$, donc en utilisant (3.7), on obtient :

$$I^{qc} D^q x(t) = x(t) + b_1 + b_2 t.$$

On pose

$${}^c D^q x(t) = \zeta(t),$$

alors

$$I^q \zeta(t) = x(t) + b_1 + b_2 t.$$

Donc

$$x(t) = I^q \zeta(t) - b_1 - b_2 t,$$

par définition

$$x(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \zeta(s) ds - b_1 - b_2 t, \quad (3.11)$$

donc

$$x'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \zeta(s) ds - b_2. \quad (3.12)$$

Maintenant, passons aux conditions aux limites pour trouver b_1 et b_2 ,

$$\begin{cases} \alpha x(0) + \beta x'(0) = \int_0^1 \eta_1(s) ds, \\ \alpha x(1) + \beta x'(1) = \int_0^1 \eta_2(s) ds, \end{cases} \quad (3.13)$$

on a

$$\begin{cases} x(0) = -b_1. \\ x'(0) = -b_2. \\ x(1) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \zeta(s) ds - b_1 - b_2. \\ x'(1) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \zeta(s) ds - b_2. \end{cases}$$

alors

$$(3.13) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha b_1 - \beta b_2 = \int_0^1 \eta_1(s) ds, \\ \alpha \int_0^t \frac{(1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \zeta(s) ds + \beta \int_0^t \frac{(1-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} \zeta(s) ds - \alpha b_1 - \beta b_2 - \alpha b_2 = \int_0^1 \eta_2(s) ds. \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\alpha^2} \left[\beta \int_0^1 \eta_2(s) ds - (\beta + \alpha) \int_0^1 \eta_1(s) ds \right] - \frac{\beta}{\alpha \Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} \zeta(s) ds \\ &\quad - \frac{\beta^2}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \int_0^1 (1-s)^{q-2} \zeta(s) ds, \\ b_2 &= \frac{1}{\alpha} \left[\int_0^1 \eta_1(s) ds - \int_0^1 \eta_2(s) ds \right] + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{1-q} \zeta(s) ds \\ &\quad + \frac{\beta}{\alpha \Gamma(q-1)} \int_0^1 (1-s)^{q-2} \zeta(s) ds. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution unique de (3.5) est

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^1 \left[\frac{\alpha(t-s)^{q-1} + (\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right] \zeta(s) ds \\ &\quad + \int_0^1 \left[\frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right] \zeta(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2} \left[(\alpha(1-t) + \beta) \int_0^1 \eta_1(s) ds + (\beta + \alpha t) \int_0^1 \eta_2(s) ds \right] \\ &= \int_0^1 G(t, s) \zeta(s) ds + \frac{1}{\alpha^2} \left[(\alpha(1-t) + \beta) \int_0^1 \eta_1(s) ds + (\beta + \alpha t) \int_0^1 \eta_2(s) ds \right]. \end{aligned}$$

où $G(t, s)$ est donnée par (3.10). □

Maintenant, supposons que $f : [0; 1] \times X \times X \rightarrow X$ est une application continue, bornée sur un sous-ensemble relativement compact de X et $\gamma : [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow [0; +\infty[$ est continu avec $\gamma_0 = \max \{ \gamma(t, s) : \text{tel que } (t, s) \in [0; 1] \times [0; 1] \}$ et $q_1, q_2 : X \rightarrow X$ sont des fonctions

continues. De plus, il existe des constantes positives $L_1, L_2, L_3, L_4, M_2, M_3$, tel que

$$(A_1) \quad \|f(t, x(t), (\chi x)(t)) - f(t, y(t), (\chi y)(t))\| \leq L_1 \|x - y\| + L_2 \|\chi x - \chi y\|,$$

pour tous $t \in [0; 1]$ et $x, y \in X$,

$$(A_2) \quad \|q_1(x) - q_1(y)\| \leq L_3 \|x - y\|, \quad \|q_2(x) - q_2(y)\| \leq L_4 \|x - y\| \quad \text{avec} \quad \|q_1(x)\| \leq M_2, \\ \|q_2(x)\| \leq M_3, \quad \text{pour tous } x, y \in X,$$

$$(A_3) \quad \text{il existe } \mu \in L^1([0; 1], \mathbb{R}) \text{ telle que } \|f(t, x(t), (\chi x)(t))\| \leq \mu(t), \\ \text{pour tout } (t, x, \chi x) \in [0; 1] \times X \times X,$$

$$(A_4) \quad (L_1 + \gamma_0 L_2) \left[\frac{\beta + 2\alpha}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right] + \frac{\beta + \alpha}{\alpha^2} (L_3 + L_4) < 1, \quad \text{avec}$$

$$L_1 + \gamma_0 L_2 \leq \frac{1}{2} \left[\frac{\beta + 2\alpha}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right]^{-1}.$$

Théorème 3.2.1. [9] *Sous les conditions (A₁) – (A₄), le problème aux limites (3.5) admet au moins une solution sur [0; 1].*

Preuve. On va appliquer le théorème 2.2.2. pour montrer que le problème (3.5) a une solution sur [0; 1]. Soit

$$\left[M_1 \left(\frac{\beta + 2\alpha}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (M_2 + M_3) \right] \leq r, \quad (3.14)$$

et considérons $B_r = \{x \in C : \|x\| \leq r\}$ un sous-ensemble non vide fermé et convexe de l'espace de Banach X .

Définissons des applications A et B dans B_r comme suit

$$\begin{aligned}
(Ax)(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s), (\chi x)(s)) ds, \\
(Bx)(t) &= \int_0^1 \left[\frac{(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} + \frac{\beta(\beta - \alpha t)(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right] f(s, x(s), (\chi x)(s)) ds, \\
&\quad + \frac{1}{\alpha^2} \left[(\alpha(1-t) + \beta) \int_0^1 q_1(x(s)) ds + (\beta + \alpha t) \int_0^1 q_2(x(s)) ds \right].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$Ax + By \in B_r$:

Pour $x, y \in B_r$, on trouve que

$$\|Ax + By\| \leq \left[\frac{2\alpha + \beta}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right] \|\mu\|_{L^1} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (M_2 + M_3) \leq r. \tag{3.16}$$

Alors, $Ax + By \in B_r$.

B pseudo-contractive :

On va montrer que B est une application pseudo-contractive :

$$\begin{aligned}
\|(Bx)(t) - (By)(t)\| &\leq \int_0^1 |\beta - \alpha t| \left[\frac{(1-s)^{q-1}}{\alpha \Gamma(q)} + \frac{\beta(1-s)^{q-2}}{\alpha^2 \Gamma(q-1)} \right] \\
&\quad \times \|f(s, x(s), (\chi x)(s)) - f(s, y(s), (\chi y)(s))\| ds \\
&\quad + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} \left[\int_0^1 \|q_1(x(s)) - q_1(y(s))\| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \|q_2(x(s)) - q_2(y(s))\| ds \right] \\
&\quad (L_1 + \gamma_0 L_2) \|x - y\|_C \left[|\beta + \alpha t| \left(\frac{1}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (L_3 + L_4) \|x - y\|_C.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|(Bx)(t) - (By)(t)\| &\leq \left\{ (L_1 + \gamma_0 L_2) \left[\frac{2\alpha + \beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (L_3 + L_4) \right\} \|x - y\|_C \\
&\leq M \|x - y\|_C,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où

$$M = (L_1 + \gamma_0 L_2) \left[\frac{2\alpha + \beta}{\alpha\Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2\Gamma(q)} \right] + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2} (L_3 + L_4),$$

qui ne dépend que des paramètres impliqués dans le problème. Comme $M < 1$, alors B est une contraction donc B est une application pseudo-contractive.

A est compacte :

Pour montrer que A est compacte, on va utiliser le théorème d'Ascoli-Arzelà c'est-à-dire on va démontrer que l'ensemble B_r est uniformément borné et équicontinue.

La continuité Montrons que A est continue :

f est continu. On considère une suite de fonctions $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[0; 1]$, tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ au sens de } C([0; 1], X),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0; 1]} |x_n(t) - x(t)| = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \\
&\quad \times \| [f(s, x_n(s), (\chi x_n)(s)) - f(s, x(s), (\chi x)(s))] \| ds, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \\
&\quad \times \| f(s, x_n(s), (\chi x_n)(s)) - f(s, x(s), (\chi x)(s)) \| ds,
\end{aligned}$$

par les hypothèses $(A_1) - (A_3)$ on a

$$\begin{aligned}
\|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [L_1 \|x_n(s) - x(s)\| \\
&\quad + L_2 \|(\chi x_n)(s) - (\chi x)(s)\|] ds, \\
&\leq \int_0^t (t-s)^{q-1} [L_1 \|x_n(s) - x(s)\| \\
&\quad + \gamma_0 L_2 \|x_n(s) - x(s)\|] ds, \\
&\leq \frac{(L_1 + \gamma_0 L_2)}{\Gamma(q)} \|x_n - x\| \int_0^t (t-s)^{q-1} ds, \\
&\leq \frac{(L_1 + \gamma_0 L_2)}{\Gamma(q+1)} t^q \|x_n - x\|.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0;1]} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| &\leq \sup_{t \in [0;1]} \left[\frac{(L_1 + \gamma_0 L_2)}{\Gamma(q+1)} t^q \|x_n(t) - x(t)\| \right], \\
&\leq \frac{(L_1 + \gamma_0 L_2)}{\Gamma(q+1)} \left(\sup_{t \in [0;1]} t^q \right) \sup_{t \in [0;1]} \|x_n - x\|, \\
&= \frac{(L_1 + \gamma_0 L_2)}{\Gamma(q+1)} \sup_{t \in [0;1]} \|x_n - x\|,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sup_{t \in [0;1]} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \leq \frac{(L_1 + \gamma_0 L_2)}{\Gamma(q+1)} \sup_{t \in [0;1]} \|x_n - x\|.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [0;1]} \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(L_1 + \gamma_0 L_2)}{\Gamma(q+1)} \sup_{t \in [0;1]} \|x_n - x\| \right), \\ &= \frac{(L_1 + \gamma_0 L_2)}{\Gamma(q+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [0;1]} \|x_n - x\| \right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, A est continu.

Uniformément borné : Montrons que A est uniformément borné :

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s), (\chi x)(s)) ds \right\|, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \|f(s, x(s), (\chi x)(s))\| ds, \\ &\leq \frac{\|\mu_{L_1}\|}{\Gamma(q+1)}. \end{aligned}$$

Alors, A est uniformément bornée.

Équicontinue : Montrons que $\{Ax, x \in B_r\}$ est équicontinue.

Soit $t_1, t_2 \in [0;1]$ avec $t_1 < t_2$ et $x \in B_r$.

Par (A_1) , on défini

$$f_{max} = \sup_{(t,x,\chi x) \in \Omega} \|f(s, x(s), (\chi x)(s))\| \text{ tel que } \Omega = [0;1] \times B_r \times B_r,$$

Donc, pour tout $(t, x, \chi x) \in \Omega$, on obtient :

$$\begin{aligned} |(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}] f(s, x(s), (\chi x)(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right|, \\ &\leq \frac{f_{max}}{\Gamma(q+1)} |2(t_2 - t_1)^q + t_1^q - t_2^q|. \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| \leq \frac{f_{max}}{\Gamma(q+1)} |2(t_2 - t_1)^q + t_1^q - t_2^q|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, un nombre arbitrairement choisi.

$$\exists \delta_1(\varepsilon) > 0 \text{ telle que } |t_1 - t_2| < \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow \frac{f_{max}}{\Gamma(q+1)} (t_1^q - t_2^q) < \frac{\varepsilon}{2},$$

de même

$$\exists \delta_2(\varepsilon) > 0 \text{ telle que } |t_1 - t_2| < \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow \frac{2f_{max}}{\Gamma(q+1)} (t_2 - t_1)^q < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite, si on prend

$$\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)),$$

on a

$$|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| < \varepsilon.$$

On obtient que la famille $\{Ax, x \in B_r\}$ est équicontinue.

Donc, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, A est compacte sur B_r .

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 2.2.2. sont satisfaites. Donc, le problème (3.5) admet au moins une solution sur $[0; 1]$. □

Exemple 3.2.1. *Considérons le problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c D^q x(t) = \frac{1}{(t+7)^2} \frac{|x|}{1+|x|} + \int_0^t \frac{e^{-(s-t)}}{49} x(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad 1 < q \leq 2, \\ x(0) + x'(0) = \int_0^1 \frac{|x(s)|}{5+|x(s)|} ds, \quad x(1) + x'(1) = \int_0^1 \frac{|x(s)|}{7+|x(s)|} ds. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

On a,

$$f(t, x) = \left(\frac{1}{(t+7)^2} \right) \left(\frac{|x|}{1+|x|} \right),$$

$$\gamma(t, s) = \frac{e^{-(s-t)}}{49}, \quad q_1(x) = \frac{|x|}{5+|x|}, \quad q_2(x) = \frac{|x|}{7+|x|}, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1.$$

Soit

$$f(t, x, \chi x) = \left(\frac{1}{(t+7)^2} \right) \left(\frac{|x|}{1+|x|} \right) + \int_0^t \frac{e^{-(s-t)}}{49} x(s) ds, \quad (t, x) \in [0; 1] \times [0; +\infty[,$$

et

$$\begin{aligned} (\chi x)(t) &= \int_0^t \frac{e^{-(s-t)}}{49} x(s) ds, \\ &= \int_0^t \gamma(t, s) x(s) ds. \end{aligned}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ et $t, s \in [0; 1]$.

On a

$$\begin{aligned} \|f(t, x, \chi x) - f(t, x, \chi y)\| &= \left\| \left(\frac{1}{(t+7)^2} \right) \left(\frac{x}{1+x} \right) + \int_0^t \frac{e^{-(s-t)}}{49} x(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{(t+7)^2} \right) \left(\frac{y}{1+y} \right) + \int_0^t \frac{e^{-(s-t)}}{49} y(s) ds \right\|, \\ &= \left\| \frac{1}{(t+7)^2} \left(\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right) + \frac{1}{49} ((\chi x)(t) - (\chi y)(t)) \right\|, \\ &\leq \frac{1}{(t+7)^2} \left\| \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \right\| + \frac{1}{49} \|\chi x(t) - \chi y(t)\|, \\ &\leq \frac{1}{49} [\|x-y\| + \|\chi x(t) - \chi y(t)\|] \quad \text{car } t \in [0; 1]. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\|\gamma(t, s)x(s) - \gamma(t, s)y(s)\| &= \left| \frac{e^{-(s-t)}}{49}x(s) - \frac{e^{-(s-t)}}{49}y(s) \right|, \\ &= \left\| \frac{e^{-(s-t)}}{49}(x(s) - y(s)) \right\|, \\ &\leq \frac{e^{-(s-t)}}{49} \|x(s) - y(s)\|, \\ &\leq \|x - y\| \text{ car } t \text{ et } s \in [0; 1].\end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned}\|q_1(x) - q_1(y)\| &= \left\| \frac{x}{5+x} - \frac{y}{5+y} \right\|, \\ &= \left\| \frac{5x - 5y}{(5+x)(5+y)} \right\|, \\ &\leq \frac{1}{5} \|x - y\|.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\|q_2(x) - q_2(y)\| &= \left\| \frac{x}{7+x} - \frac{y}{7+y} \right\|, \\ &= \left\| \frac{7x - 7y}{(7+x)(7+y)} \right\|, \\ &\leq \frac{1}{7} \|x - y\|.\end{aligned}$$

Donc, (A₁) et (A₂) sont satisfaites avec

$$L_1 = \frac{1}{49}, \quad L_2 = 1, \quad \gamma_0 = \frac{e-1}{49}, \quad L_3 = \frac{1}{5}, \quad L_4 = \frac{1}{7}.$$

Alors,

$$(L_1 + \gamma_0 L_2) \left[\frac{\beta + 2\alpha}{\alpha \Gamma(q+1)} + \frac{\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha^2 \Gamma(q)} \right] + \frac{\beta + \alpha}{\alpha^2} (L_3 + L_4) < 1,$$

$$\iff \frac{e}{49} \left(\frac{3}{\Gamma(q+1)} + \frac{2}{\Gamma(q)} \right) < \frac{11}{35} < 1.$$

Le problème (3.19) admet au moins une solution sur $[0,1]$.

Conclusion générale

Les application pseudo-contractive jouent un rôle important dans l'analyse non linéaire, notamment pour la théorie de point fixe. Ce type de contractivité est plus générale que les applications non expansives. Récemment, plusieurs auteurs ont utilisé certains type comme les application pseudo-contractive généralisés et α -pseudo contractive dans l'étude des équations différentielles ou intégrales.

Notre but principal dans ce mémoire est appliqué le théorème de *Krasnoselskii* de type pseudo-contractive pour prouver l'existence et l'unicité d'une équation différentielle fractionnaire au sens de Caputo dans l'espace de Banach, pour cela nous avons rappelé définitions de base, puis nous avons présenté certaines propriétés importantes concernant notre travail et présenté quelques théorèmes de certaines applications pseudo-contractive en mettant l'accent sur la plus importante qui est celle de *Krasnoselskii* de type pseudo-contractive.

Bibliographie

- [1] F. Abbas, *Étude de Quelques Théorèmes du point fixe et leurs applications*, Mémoire de Master Académique en Mathématiques, Univ. Saïda, 2015.
- [2] R. P. Agarwal, Donal O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type mappings with applications*, Vol. 6, Springer, 2009.
- [3] A. Beddar, I. Sahnoune, *Quelques Théorèmes de point fixe et certains de leur algorithmes*, Mémoire de Master (LMD) en Mathématiques, Univ. Bejaia, 2017.
- [4] F. E. Browder, *Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 875–882.
- [5] M. Cuesta, *Analyse Fonctionnelle Non Linéaire et applications en équations différentielles*, Master 2 Maths Pures. Semestre 4, 2010.
- [6] J. Garcia-Falset, O. Muñoz-Pérez, *Fixed point theory for 1-set contractive and pseudocontractive mappings*, Applied Mathematics and Computation 219 (2013), 6843-6855.
- [7] I. Hezla, S. Benine, *Théorèmes de point fixe de type krasnoselskii et applications*, Mémoire de Master (LMD) en Mathématiques, Univ. El-Oued, 2016.
- [8] Jong Soo Jung, *Convergence of Iterative Algorithms for Continuous Pseudocontractive Mappings*, University of Nis, Serbia, Vol. 7, 2016, 1767-1777.
- [9] Juan J. Nieto, B. Ahmad, *Existence Results for Nonlinear Boundary Value Problems of Fractional Integrodifferential Equations with Integral Boundary Conditions*, Hindawi Publishing Corporation , 23 January 2009, 1-11.
- [10] H. Kaddouri, K. Tamma, *Contribution des applications non expansives en la théorie du point fixe et applications*, Mémoire master académique, Univ. El-Oued, 2017.

- [11] A. Lalmi, *Existence et unicité de solution d'une équation différentielle fractionnaire du type voltéra avec retard*, The University of New South Wales, 2010.
- [12] F.Qinwei, W.Xiaoyin *An explicit iterative algorithm for k -strictly pseudo-contractive mappings in Banach spaces*, Journal of nonlinear science and application, Vol. 9, 2016, 5021-5028.
- [13] D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, Combridge Tracts in Mathematic.
- [14] Juan A. Gatica and W. A. Kirk, *Fixed point theorems for lipschitzian pseudo-contractive mappings*, The American Mathematical Society, Vol. 36, No. 1, 1972.
- [15] W. A. Kirk, R. Schoneberg, *Some results pseudo-contractive mappings*, Journal of Mathematic, Vol. 71, No. 1, 1977.
- [16] Chang He Xiang, *Fixed point theorem for generalized Φ -pseudocontractive mappings*, Nonlinear Analysis.Vol. 70, 2009, 2277-2279.

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté un aperçu sur les applications pseudo-contractives, leurs propriétés et rôle à établir certains point fixe dans des espaces de Banach, afin d'appliquer les résultats obtenus pour prouver l'existence e de la solution d'un problème aux limites d' équation intégral-différentielle fractionnaire au sens de Caputo.

Mots clés : point fixe, applications pseudo-contractive, équation intégral-différentielle fractionnaire au sens de Caputo.

Abstract

In this work, we have presented a overview on pseudo-contractive mappings, their properties and role to establish some fixed point in Banach spaces, in order to applied these results in the study of the existence of solution for a boundary valued problem of fractional integrodifferential equation in the sense of Caputo.

Keywords : fixed point, pseudo-contractive mappings, a fractional integrodifferential equation in the sense of Caputo.

المخلص

في هذا العمل، قدمنا نظرة عامة حول التطبيقات الشبه مقلصة، خصائصها ودورها في ايجاد نقطة صامدة في فضاءات بناخ، وهذا من اجل تطبيق هاته النتائج لاثبات وجود الحل لمسألة قيم جدية لمعادلة تفاتكاملية كسرية بمفهوم كابيتو.

كلمات مفتاحية : النقطة الصامدة، التطبيقات الشبه مقلصة، المعادلات التفاضلية الكسرية بمفهوم كابيتو.