N° d'ordre :
N° de série :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العــالي والبحث العلمـي

جامعة الشهيد حمة لخضر بالــوادي

كلية العلوم والتكنولوجيا

مذكرة التخرج

ليسانس أكاديمي

مجال: الرياضيات و الاعلام الآلي

شعبة الرياضيات

التخصص: نمذجة رياضية و محاكاة عددية

الموضوع

التكاملات الثنائية والثلاثية وبعض تطبيقاتها

إعــداد الطالبات:

- خالدي زينب
- صحراوي جهاد
- عبيد سميرة

إشراف الأستاذ:

مدخل حمزة

السنة الجامعية:2014-2015م

شكر وعرفان

نشكر الله سبحانه وتعالى أولا ونحمده كثيرا على أن يسّر لنا أمرنا في القيام بهذا العمل, وإتمام المشوار الدراسي بنجاح وتوفيق منه وحده

نتقدم أولا إلى الذين وهبونا الحياة والأمل والنشأة والاطلاع على المعرفة والعلم- **الوالدين** -أطال الله في عمريهما

كما نتقدم بخالص شكرنا وعرفانا وتقديرنا إلى الأستاذ المشرف على هذه المذكرة

- **مدخل حمزة**- الذي ساعدنا كثيرا في إنجاز هذه المذكرة ولم يبخل علينا بالنصائح والإرشاد والتوجيه القيمة فجزاه الله عنا كل خير.

كما نتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير للأستاذ – **منصور عبد الوهاب**- جـــزاه الله خيرا على ما قدمه لنا.

كما لا ننسى الأخ الفاضل –**العايب بشير**– الذي ساعدنا كثيرا بدوره في إتمام هذه المذكرة على هذا الشكل وندعو الله أن يوفقه في دراسته

كما لا ننسى أن نتقدم إلى كافة أساتذة وموظفي جامعة حمه الأخضر بالوادي كلية العلوم والتكنولوجيا وبالأخص - **طلبة ثالثة رياضيات**-

ونشكر كل من ساعدنا من قريب أو من بعيد ولو بكلمة طيبة لإتمام هذا العمل

جهاد ** زينب ** سميرة

الفهرس

الفصل الثاني : التكاملات الثنائية والثلاثية وبعض الطرق لحسابها

الفصل الثالث : التطبيقات

مقدمة

المقدمة

يعتبر فرع التحليل من الفروع الهامة في الرياضيات الحديثة، والذي يقدم حلولا عملية لكثير من المسائل المطروحة في مختلف التخصصات التقنية.

ومن بين أهم الأدوات المستعملة في هذا التخصص مفهوم التكامل الذي يعد أهم فروع الرياضيات البحتة و التطبيقية، يلعب دورا رئيسيا في تطوير الرياضيات، ويساهم مساهمة فعاله في حل المسائل المطروحة على إنسان هذا العصر في ميادين شتى كالطب والفيزياء والكيمياء والهندسة....إلخ .

ننوي في هذه المذكرة تقديم بحث حول – **التكاملات الثنائية و الثلاثية** - وقد ارتئينا أن نقدم لمحة تاريخية عن التكاملات، ونظرا لكون هذا المفهوم قديم العهد وتطور عبر الزمن، ولأن الجانب التاريخي يخدم الجانب المعرفي، إلا أن الجانب التاريخي تغفله معظم كتب الرياضيات .

ويسعدنا أن نقدم هذه المذكرة لحل الصعوبات التي نواجهها في حساب التكاملات الثنائية و الثلاثية.

تحتوي هذه المذكرة على ثلاثة فصول

الفصل الأول: تطرقنا إلى مجموعة من التعاريف و المفاهيم الأساسية للتكاملات، كما تناولنا أيضا المبادئ الأولية للتكاملات المحدودة، وكما تطرقنا إلى تعريف المصفوفة اليعقوبية .

الفصل الثاني: فقد شمل بعض التعاريف و النظريات في حساب التكاملات الثنائية والثلاثية، وكذلك قدمنا تعريف مساحة السطح، ومن بين المفاهيم التي لا يخلو منها درس في التكاملات هي طريقة تغيير المتغير الذي يعتبر أداة فعّاله في تسهيل حساب التكامل.

الفصل الثالث: تعرضنا إلى دراسة تطبيقات التكاملات المضاعفة (الثنائية و الثلاثية) في الفيزياء وغيرها من المجالات كحساب المساحات و الحجوم وكذلك الكتل ومراكز العزوم...إلخ

الترميزات

الترميز	تسميتها
$\int_a^b$	التكامل المحدّد
$\sup pf$	حامل متراص لـ f
$IR^n \setminus X$	المجموعة IR^n باستثناء X
$\sum_{i=0}^{n}$	المجموع
C^1	قابل للاشتقاق والمشقة الأولى مستمرة
$\|\cdot\|$	النظيم
$L(IR^n, IR^p)$	تطبيقات الخطية والمستمرة
$o(h)$	مهمل أمام h
$\wedge$	الجداء الشعاعي
$\| \|$	القيمة المطلقة
$\lim_{n\to+\infty} f(x)$	النهاية الدالة f
$C([c,d])$	الدوال المستمرة
$divF$	التفرق أو التباعد
$\overrightarrow{Rot}\,V$	الدوران تابع شعاعي
$\overrightarrow{grad}\,\varphi$	التدرج تابع عددي
$\det J_\varphi(x)$	محدد المصفوفة اليعقوبية
$J_\varphi(x)$	المصفوفة اليعقوبية
$\prod_{i=0}^{n}$	الجداءات
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمركبة i
Γ	الدّالة قاما

نـــــبذة تـــاريخـــية

لاشك أن الكثير من العلوم الرياضية ظهرت بوادرها منذ عصور قديمة جدا، ومن بين فروع هذه العلوم التكامل، فهناك اعتقاد أن التكامل ظهر في زمن ازدهار الحضارة الإغريقية، وكان ذلك عندما حاول علماء لإغريق إيجاد بعض المساحات و الحجوم مثل مساحة الدائرة وحجم الأسطوانة، بطرق تشبه إلى حد كبير طرق التكامل المستخدمة في زماننا هذا.

أما التفاضل والتكامل لم ينمو قبل القرن السابع عشر، وقد ابتكر كلير وديكارت في بعض الحالات الخاصة للتكامل في هذا الوقت، والحقيقة أن العلماء في بداية القرن السابع عشر الميلادي كانت اهتماماتهم أكثر بالتكامل من التفاضل، وهذا راجع لعدم وضع التفاضل والتكامل في إطار واحد كعلم متكامل، أما بقية من بدأ في بناء التفاضل والتكامل كعلم واحد فهو بدون شك نيوتن وليبنز، ويعتبر ليبنز هو أول من وضع الرموز الخاصة بالتفاضل والتكامل .

وفي القرن الثامن عشر، إن التفاضل والتكامل لها عملية كبيرة في إستخدام في الميكانيك والفلك، وفي نفس هذا القرن قدم أويلر مفهوم التكامل الجزئي .

أما في القرن التاسع عشر فقد وضع للتفاضل والتكامل المفهوم الرياضي المجرد والمعتمد أساسا على مفهوم الدالة، ويرجع الفضل في ذلك للعالم كوشي .

يمكن ملاحظة أن التكامل ظهر قبل التفاضل، وهذا لأن الرياضيين انشغلوا منذ القدم بحساب المساحات والحجوم، ونحن نعرف أن التكامل ومن أهم فوائده حساب المساحات والحجوم

أيضا يمكن ملاحظة أن التفاضل والتكامل مثله مثل باقية العلوم الرياضية، بدأ بأفكار ومفاهيم بسيطة ثم بدأ ينموا حتي إستطاع عدد من العلماء وضعه في إطار صحيح ومقبول .

أما ما استعصى على العلماء حتي يبحثوا عن التفاضل والتكامل فمثل ما قلت أن التفاضل والتكامل أول ما ظهر لم يكن بشكله الحالي، بل كان عبارة عن مجموعة من القوانين والطرق تستخدم لحل بعض المشاكل الرياضية مثل: حساب المساحات و الحجوم، حتي أخذ شكله الحالي .

والمعادلات التفاضلية مثلا من التطبيقات المهمة في العلوم الكثيرة، ويستخدم التكامل في حلها وبدونه يستحيل حلها.

وبالنسبة للمساحات هل وجدت قبل أو بعد التكامل، فطبعا المساحات، أودعنا نقول بعض المساحات أوجدت قبل التكامل، بل كما قلت التكامل في بدايته كان أساسا عبارة عن قوانين لمساحات و حجوم.

أما عالم ريمان هو أول من أثبت أن التكامل(محدود) هو عبارة عن المساحة تحت المنحني على فترة التكامل وذلك عندما قسم المساحة لمستطيلات متناهية الصغر ثم بين أن التكامل ما هو إلا مجموع هذه المساحات .

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

في هذا الفصل سنتطرق إلى عدة مفاهيم أساسية حول ما يتعلق بالتكامل المحدود وخواصه والتوابع العددية وبعض طرق التكامل وقابلية المفاضلة.......إلخ.

1.1 تكامل ريمان

ليكن $I=[a,b]$ مجالا من IR ولتكن $f:I\to IR$ دالة محدودة.

1.1.1 تعريف [1]:

ليكن $I=[a,b]$ مجالا من IR، ولتكن $d_n=\{a=a_0<a_1<a_2<.....<a_n=b\}$ تقسيمة للمجال I، ولتكن $f:I\to IR$ دالة محدودة.

إذا كانت نهاية مجموع ريمان $R(f,d_n,c)=\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(a_{i+1}-a_i)$ موجودة ولا تتعلق باختيار متتالية التقسيمات $(d_n)_{n\in IN^*}$ واختيار جملة النقاط الممثلة بـ $c=(c_i)_{i=0,....n-1}$ فإننا نقول إن التابع f يقبل المكاملة على المجال I بمفهوم ريمان وتكامل ريمان لهذا التابع هو :

$$\lim_{n\to+\infty} R(f,d_n,c)=\int_a^b f(x)dx \qquad \textbf{(1.1)}$$

2.1 التكامل المحدّد

1.2.1 تعريف [3]:

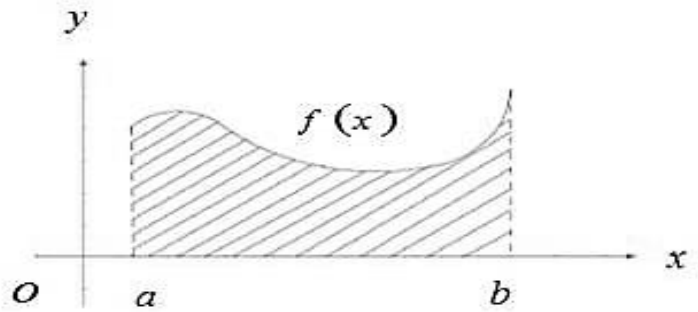
إذا كانت f دالة معّرفة على المجال $[a,b]$ حيث $a<b$ فإن التكامل المحدّد على هذا المجال هو:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max(\Delta_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

بشرط وجود النهاية

2.2.1 التفسير الهندسي للتكامل المحدّد [10] :

إذا كان $f\geq 0$ فإننا نعرف التكامل المحدّد $\int_a^b f(x)dx$ بأنه المساحة الواقعة تحت المنحني $y=f(x)$ وفوق المحور (OX) والمحدود بالمستقيمين المتوازيين $x=a$ و $x=b$ كما هو موضح فـــــــــي الشكل -(1.1) -



الشكل -1.1-

3.2.1 خواص التكامل المحدّد

إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على المجال $[a,b]$ وكانت $a \le x \le b$ فإن الخواص التالية محققة:

1) الخاصية الإنعكاسية $\int_a^a f(x)dx = 0$

2)الخاصية التناظرية $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3) الخاصية الجمعية $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

4) خاصية الضرب في الثوابت $\forall \lambda \in IR : \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

5) علاقة شال[1] $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6) إذا كانت $f(x) \ge 0$ فإن : $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

7) إذا كانت $f(x) \ge g(x)$ فإن: $\int_a^b f(x) \ge \int_a^b g(x)$

8) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

[1] ميشال فوريال شال: عالم رياضيات فرنسي ولد في الخامس عشر من نوفمبر عام 1793 وتوفي في الثامن عشر من ديسمبر عام 1880.درس في المدرسة المتعددة التقنيات في باريس.

3.1 التوابع العددية المعرفة على مجموعات محدودة

1.3.1 تعريف:

لتكن X مجموعة محدودة من IR^n , وليكن f تابعا من X نحو IR ولتكن P منطقة مغلقة من IR^n حيث $X \subset P$ و f_p هو التابع المعرف على المجموعة P كمايلى :

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ 0 & x \in P - X \end{cases}$$

نقول إن f قابلة للمكاملة على X إذا كانت f_p قابلة للمكاملة على P عندئذ يكون التكامل f على X يساوي تكامل f_P على P ونكتب :

$$\int_X f(x)dx = \int_P f_P(x)dx$$

2.3.1 التوابع ذات حامل متراص

1.2.3.1 تعريف :

ليكن f تابعا عدديا من IR^n نحو IR نسمي حامل متراص f المجموعة $\sup pf = \overline{\{x \in IR^n \ : \ f(x) \neq 0\}}$ إذا كان $\sup pf$ متراصا عندئذ نقول أن f ذو حامل متراص.

حيث نرمز لحامل f بـ $\sup pf$.

نظرية 2.2.3.1 :

ليكن f تابعا عدديا $f : IR^n \to IR$ يكون حامل f متراصا إذا وفقط إذا وجدت مجموعة متراصة X محتواة في IR^n بحيث من أجل كل عنصر x من IR^n بإستثناء X يكون لدينا التابع معدوم أي أن:

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in IR^n \setminus X$$

4.1 بعض الطرق لحساب التكامل

1.4.1 التكامل بالتجزئة [1] :

إذا كان f و g تابعين من الصنف C^1 على المجال I، وكانت a و b نقطتين من I فإن التكامل يكون كالتالي :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \qquad \textbf{(1.2)}$$

حيث f و g توابع أصلية للدّوال f' و g' على الترتيب.

2.4.1 تغيير المتغير:

نظرية 1.2.4.1 :

ليكن f تابعا مستمرا على المجال J يشمل العددين a و b، وليكن u تابعا من الصنف C^1 على المجال I يشمل α و β بحيث يحقق $u(\alpha)=a$ و $u(\beta)=b$.

نفرض أنه من أجل كل $\alpha \le x \le \beta$ و $u(x)\in J$ عندئذ العلاقة التالية :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)dx \qquad \textbf{(1.3)}$$

البرهان أنظر المرجع [**3**]

مثال 1:

لحساب علاقة التكامل $\int_1^e x\ln x dx$.

نستعمل التكامل بالتجزئة، بوضع :

$$\begin{cases} f'(x)=x \\ g(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2} \\ g'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

حسب العلاقة (1.2) نجد أن:

$$\int_1^e x\ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e xdx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2+1}{4}$$

5.1 التوابع الحقيقية ذات عدة متغيرات

1.5.1 تعريف :

لتكن مجموعة من النقاط $D=\{x_i\}\ ,i=\overline{1\ ,n}$ في IR^n ، نسمي التطبيق الذي يرفق بعددا وحيدا Z لكل نقط في D بالتابع من D إلى IR .

نعبّر عن التطبيق $f:D\subset IR^n\to IR$ المعرف بـ: $f(x_1,x_2,....,x_n)=z$ على أنه صورة Z .

أمثلة :

1) $f(x,y)=\sqrt{xy}-2x+y$

2) $g(x,y,z)=\cos x+\sin y+2z$

6.1 المسافة والنظيم

1.6.1 تعريف المسافة:

نسمى مسافة على مجموعة غير خالية E كل تطبيق $d:E\times E\to IR_+$ ويتقيد بالشروط التالية:

1) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y..................(1)$

2) $\forall x,y\in E;d(x;y)=d(y,x)$

3) $\forall x,y,z\in E;d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

نسمي الزوج (E,d) فضاءا متريا.

ملاحظة

بالنسبة للعلاقة (1) نميز حالتين:

1) في حالة $x=y$ فإن: $d(x,x)=0$

2) في حالة $x\neq y$ فإن: $\forall x,y\in E\ \ 0\prec d(x,y)$

2.6.1 تعريف النظيم:

نسمي نظيم على E كل تطبيق $\delta:E\to[0,+\infty[$ يحقق الخواص التالية :

1) $\delta(x)=0\Leftrightarrow x=0$

2) $\forall x\in E;\forall\lambda\in IR:\delta(\lambda x)=|\lambda|\delta(x)$

3) $\forall x,y\in E:\delta(x+y)\le\delta(x)+\delta(y)$

نرمز $\delta(x)=\|x\|$ نسمي النظيم $\|x\|$.

ويسمى الزوج $(E,\|.\|)$ فضاء نظيميا.

7.1 النهاية والإستمرار

1.7.1 تعريف النهاية [1]:

لتكن $f: I \subset IR \to IR$ دّالة معرفة على مجال مفتوح I، ولتكن $a \in I$.

نقول عن f أنها تملك نهاية منتهية C عند النقطة a إذا تحقق: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$

أي أن: $\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0 : |x-a|<\alpha \Rightarrow |f(x)-C|<\varepsilon$

1.1.7.1 خاصية النهايات [5] :

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b_1$ وكانت $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b_2$ فإن:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=b_1+b_2 \qquad \textbf{(1.4)}$$

2.7.1 تعريف الإستمرارية [1]:

نقول عن التابع $f(x)$ أنه مستمر في نقطة $x=a$ إذا حقق الشروط التالية :

1) $a \in I$ حيث I مجال تعريف التابع

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجودة

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

8.1 قابلية المفاضلة

1.8.1 تعريف [2]:

نقول عن تطبيق $f: U \subset IR^n \to IR^p$ معرّف على المفتوح Uالغير خالي أنه يقبل المفاضلة عند النقطة $a \in U$، إذا وجد تطبيق خطي ومستمر $g_a \in L(IR^n, IR^p)$ يحقق العلاقة التالية :

$$f(a+h)-f(a)=g_a(h)+o(h) \qquad \textbf{(1.5)}$$

حيث $o(h)$ عنصر من IR^p يحقق: $\underset{h\to 0}{Lim}\dfrac{\|o(h)\|_{IR^n}}{\|h\|_{IR^n}}=0$

9.1 الجداء الشعاعي

1.9.1 تعريف [8] :

الجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{G},\vec{F}$ هو الشعاع $\vec{F}\wedge\vec{G}$ الذي طويلته تساوي مساحة متوازي الأضلاع المتشكل من هذين الشعاعين، ومنحناه مطابق للناظم لسطح متوازي الأضلاع واتجاهه معطى بقاعدة ثلاثية الأصابع لليد اليمنى و طويلته تعطى بالعلاقة التالية :

$$\left|\vec{F}\wedge\vec{G}\right| = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{G}\right|\sin\left(\vec{F},\vec{G}\right) \quad \textbf{(1.6)}$$

يمكن صياغة الجداء الشعاعي بواسطة مركبات الشعاعين التالية :

$$\vec{F}\wedge\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{k} \\ F_X & F_Y & F_Z \\ G_X & G_Y & G_Z \end{vmatrix}$$

10.1 بعض التوابع الشعاعية

1.10.1 تعريف التدرج [6]:

ليكن φ تابعا عدديا مستمرا في المنطقة D حيث $D \subseteq IR^3$ **.**

نعرف تدرج التابع العددي φ الذي يرمز له بـ : $\overrightarrow{grad}\,\varphi$ كمايلي:

$$\vec{\nabla}.\varphi = \overrightarrow{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

2.10.1 تعريف التفرق(التباعد) [6]:

نفرض إن المنطقة Q في ثلاثية أبعاد محدّدة بالسطح المغلق S و n ترمز إلى المستقيم المتعامد الخارجي على السطح S عند النقطة $(x,y,z)\in IR^3$، إذا كانت F دالة متجهة ومشتقاتها الجزئية مستمرة على المنطقة Q فإن العلاقة :

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma = \iiint_Q \vec{\nabla}.\vec{F}\,dv = \iiint_Q divF dv \qquad \textbf{(1.7)}$$

حيث أن $d\sigma$ ترمز إلى عنصر المساحة السطحية.

3.10.1 تعريف الدوران [6]:

ليكن V تابعا شعاعيا مستمرا على منطقة D $\left(D\subseteq IR^3\right)$

$$V(x,y,z) = V_1(x,y,z)\vec{i} + V_2(x,y,z)\vec{j} + V_3(x,y,z)\vec{k}$$

نعرّف دوران التابع الشعاعي V الذي يرمز له بـ $\overrightarrow{Rot}\,V$ كمايلي :

$$\overrightarrow{Rot}\,V=\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\wedge\left(V_1\,\vec{i}+V_2\,\vec{j}+V_3\,\vec{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ V_1 & V_2 & V_3\end{vmatrix}$$

إذن:

$$\overrightarrow{Rot}\,V=\left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

11.1 بعض أنواع الإحداثيات في IR^n

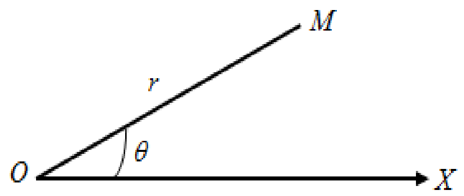
نقتصر الدراسة على $n\le 3$

1.11.1 الإحداثيات القطبية [11] :

هو نظام إحداثي يتم فيه تعيين نقطة M في المستوي بزوج مرتب (r,θ) وكل زوج (r,θ) يقابل نقطة وحيدة M.

تمثل r بعد M عن نقطة ثابتة (مختارة) O نسميها القطب θ فهي الزاوية الموجبة التي نحصل عليها من دوران محور ثابت(OX) نسميه المحور القطبي بالإتجاه الموجب الشكل -(1.2)-

لينطبق على OM بحيث $0\le\theta<2\pi$ ، $r\ge 0$.
ويتم قياس r بوحدة طول مناسبة d وقياس θ بوحدة زوايا α وهي غالبا ما تكون بالراديان .

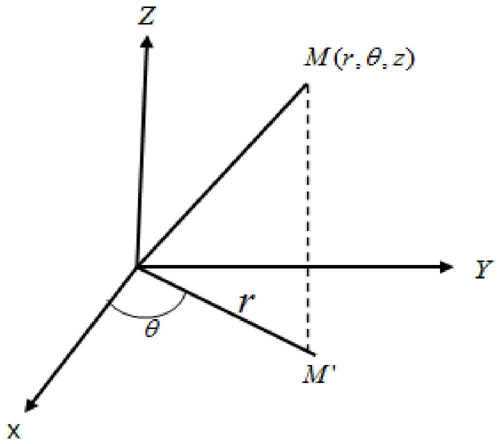


الشكل -2.1-

أما الإنتقال من الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية فتكون كالتالي:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

2.11.1 الإحداثيات الاسطوانية [11] :



الشكل -3.1-

إذا عينا M' مسقط النقطة M على المستوي (XOY) قطبيا فإن النقطة M تقابل الثلاثي المرتب (r,θ,z) الذي نسميه **الإحداثيات الاسطوانية** للنقطة M.

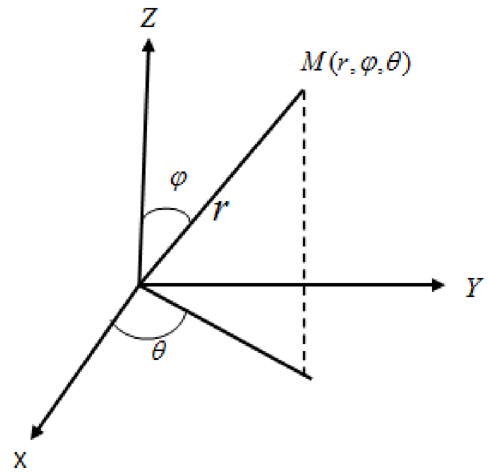
وبالعكس فإن كل ثلاثية (r,θ,z) تعين نقطة في الفضاء الثلاثي البعد.

أما الانتقال من الإحداثيات الإسطوانية إلى الديكارتية يكون كالتالي :

$$\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\sin\theta \\ Z = Z \end{cases}$$

3.11.1 الإحداثيات الكروية [11] :

يتم تعيين النقطة M فيه بثلاثي مرتب من الأعداد (r,φ,θ) التي نسميها الإحداثيات الكروية لها حيث r هو بعد M عن O، وترمز φ إلى الزاوية المقاسة من المحور (OZ) إلى المستقيم (OM)، وكما نرمز إلى θ على إنها الزاوية القطبية .



الشكل-4.1-

ولكي يكون التمثيل المعاكس $(r,\theta,\phi) \to M$ وحيدا (أي أن الثلاثي المرتب يقابل نقطة وحيدة) فلا بد أن يتحقق مايلي:

$$(\ r>0\ ,\ 0\le\theta<\pi\ ,\ 0\le\phi<2\pi\ )$$

أما الإنتقال من الإحداثيات الكروية إلى الإحداثيات الديكارتية يتم وفق العلاقات التالية :

$$\begin{cases} X = r\sin\theta\cos\phi \\ Y = r\sin\theta\cos\phi \\ Z = r\cos\theta \end{cases}$$

12.1 المصفوفة اليعقوبية

1.12.1 تعريف [12] :

ليكن U و V مفتوحين من IR^n وليكن $\varphi: U \to V$ تفاتشاكل .

نرمز بـ $J_\varphi(x)$ للمصفوفة اليعقوبية للتابع φ عند x.

$$J_\varphi : x \to \frac{D(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)}{D(x_1,x_2,...,x_n)}(x) = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j} \quad i=\overline{1,n} \wedge j=\overline{1,n}$$

إذا كان $f \ :V \to IR$ تابعا قابلا للمكاملة على V.

وكان التابع $g = f \circ \varphi \left|\det J_\varphi\right| : x \to f[\varphi(x)] \ \left|\det J_\varphi(x)\right|$

قابلا للمكاملة على U.

فإن:

$$\int_V f(y)dy = \int_U f[\varphi(x)] \ \left|\det J_\varphi\right| dx$$

الفصل الثاني

التكاملات الثنائية والثلاثية

وبعض الطرق لحسابها

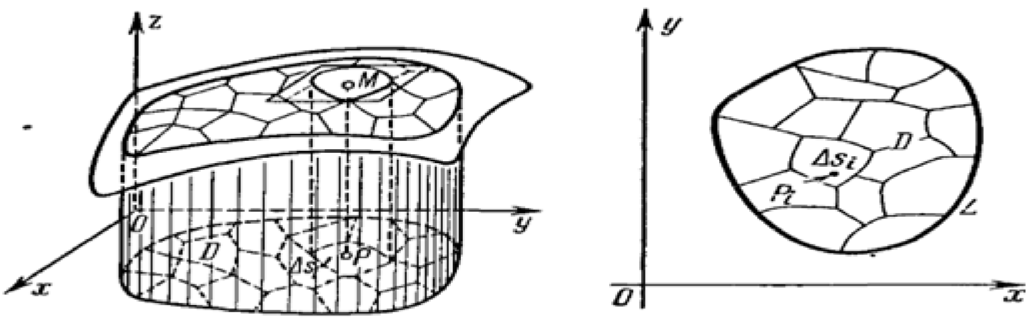
التكاملات المضاعفة من المواضيع المهمّة في الرياضيات البحتة والتطبيقية, وتشمل التكاملات الثنائية والثلاثية وبعض التعاريف والنظريات كالإحداثيات القطبية والمصفوفة اليعقوبية، ويتمركز هذا الفصل حول كيفية حساب التكاملات الثنائية والثلاثية وخواصهما.

1.2 التكاملات الثنائية

1.1.2 تعريف[13]:

لتكن D منطقة مغلقة من مستوى (XOY) محدود بمنحني L ، وليكن $Z = f(x, y)$ تابعا مستمرا معرفا على المنطقة المغلقة D .

لنقسم المنطقة D إلى n منطقة جزئية $D_1, D_2, ..., D_n$ ، مساحاتها $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ على الترتيب والتي تسمى كلا منها منطقة جزئية من D .



الشكل-1.2-

لنأخذ في كل منطقة جزئية ΔS_i ، $i \in \{1, ..., n\}$ نقطة P_i إذا كانت داخل ΔS_i أو على محيطها، فنحصل على مجموعة النقاط $P_1, P_2, ..., P_n$.
لنرمز لقيمة Z عند كل نقطة P_i بالرمز $f(P_i)$ ولنجمع المقادير $f(p_i)\Delta S_i$ ، $i \in \{1, ..., n\}$ فنجد أن:

$$V_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + ... + f(P_n)\Delta S_n \qquad \textbf{(2.1)}$$

أي أن :

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

إذا كانت $f \geq 0$ على D فإن كل حدّ $f(P_i)\Delta S_i$ يمكن إعتباره هندسيا كحجم أسطوانة قائمة قاعدتها ΔS_i وإرتفاعها $f(P_i)$ أنظر الشكل-(1.2)- إذن المجموع V_n يمثل مجموع حجوم الأسطوانات الجزئية.

نظرية 2.1.2[11]:

1- إذا كان $Z = f(x, y)$ تابعا مستمرا معرفا على منطقة مغلقة D فإن المتتالية $\{V_n\}_{n \in IN}$ المعرّفة في التعريف السابق تؤول إلى نهاية محدودة عندما تؤول ΔS_i إلى الصفر لما $n \to +\infty$ ، إن هذه النهاية

مستقلة عن الطريقة التي تجزأ بها المنطقة D إلى مناطق جزئية ΔS_i، والطريقة التي نختار بها النقاط P_i في ΔS_i، وتسمى نهاية المتتالية $\{V_n\}_{n\in IN}$ بالتكامل الثنائي للتابع $f(x,y)$ على المنطقة D.

ونرمز له بالرمز $\iint\limits_D f(x,y)ds$ أو $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ أي أن:

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \qquad \textbf{(2.2)}$$

حيث D تدعى بساحة التكامل.

2- إذا كان $f(x,y)\geq 0$ فإن التكامل الثنائي لـ$f(x,y)$ على ساحة D تسمى حجم المجسم Q المحدود بالسطح $Z=f(x,y)$ والمستوي (XOY) أي أن $(z=0)$ والسطح الأسطواني الذي مولداته توازي (OZ) ودليله محيط المنطقة D.

نظرية فوبيني [8]3.1.2:

لتكن f دّالة مستمرة على ساحة D حيث $D=[a;b]\times[c,d]$ فإن:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy \qquad \textbf{(2.3)}$$

البرهان:

نضع أن :

$$G(x)=\int_c^d\left(\int_a^x f(t,y)dt\right)dy \qquad (A)$$

$$H(x)=\int_a^x\left(\int_c^d f(t,y)dy\right)dt \qquad (B)$$

حيث أن التطبيق $t\mapsto \int_c^d f(t,y)dy$ مستمر، إذن H قابلة للإشتقاق ومشتقاتها هي $H'(x)=\int_a^b f(x,y)dy$.

ومن جهة أخرى, لدينا التابع $\psi(x,y)=\int_a^x f(x,y)dt$ دّالة مستمرة على D وتقبل إشتقاقات جزئية بالنسبة لـx والمشتقة $\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)=f(x,y)$ فهي مستمرة على D

مشتق التابع G تعطى بالعلاقة $G'(x)=\int_c^d \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)dy=\int_c^d f(x,y)dy$

أي أن $H'=G'$ فإننا نجد $H(a)=G(a)=0$ ومنه نستنتج أن $G(b)=H(b)$

إذن من (1) و(2) نستنتج المساواة :

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

نظرية فوبيني معمّمة 4.1.2[12] :

لتكن D مجموعة قابلة للقياس من IR^n , وليكن φ_1 و φ_2 تابعين عدديين معطيين مستمرين ومحدودين على المجموعة D .

يحققان : $\forall x\in D:\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$

ولتكن Δ مجموعة من IR^{n+1} معرفة كما يلي:

$$\Delta=\{(x_1,x_2,...,x_{n+1})\in IR^{n+1};\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)\le x_{n+1}\le\varphi_2(x_1,x_2,...,x_n)\wedge(x_1,x_2,...,x_n)\in D\}$$

عندئذٍ فإن كل تابع عددي f مستمر ومحدود على المجموعة Δ يقبل المكاملة ويكون:

$$\int_\Delta f(x_1,...,x_{n+1})\ dx_1...dx_{n+1}=\int_D F(x_1,...,x_n)\ dx_1...dx_n$$

مع

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=\int_{\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n)}^{\varphi_2(x_1,x_2,...,x_n)} f(x_1,x_2,.....,x_{n+1})dx_{n+1}$$

مثال1:

لحساب التكامل $\iint_D f(x,y)dxdy$ على المنطقة D المعرفة كما يلي:

$$D=\{\ (x,y)\in IR^2;0\le x\le 1\ ,x-1\le y\le 1-x\}$$

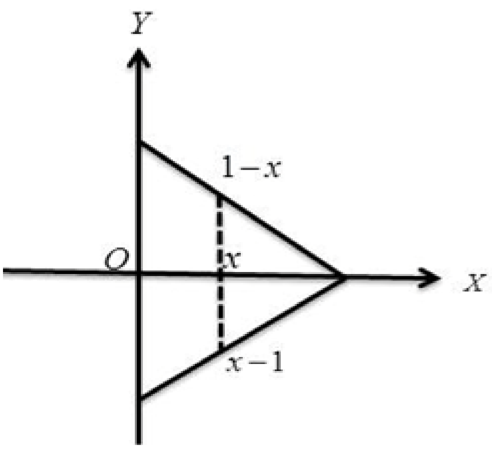
حسب نظرية فوبيني العلاقة (2.3) نجد:

$$\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^1\left[\int_{x-1}^{1-x}(x^2+y^2)dy\right]dx=\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{x-1}^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1\left(2x^2-2x^3+\frac{1}{3}(1-x)^3-\frac{1}{3}(x-1)^3\right)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{12}(1-x)^4-\frac{1}{12}(x-1)^4\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{6}$$



الشكل -2.2-

5.1.2 خواص التكامل الثنائي

ليكن f و g تابعين مستمرين وقابلين للمكاملة الثنائية على منطقة D , وليكن D_1 , D_2 تقسيمات لـ D

حيث أن D , D_1 , D_3 مناطق مغلقة من IR

1) $$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$$

2) ليكن $\alpha \in IR$ فإن:
$$\iint_D \alpha f(x,y)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy$$

3) إذا كان $D = D_1 \cup D_2$ مع $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ فإن:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

4) ليكن $D = [a,b]\times[c,d]$ و $f \in C([a,b])$ و $g \in C([c,d])$

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

5) إذا كانت $f(x,y) \geq 0$ فإن:
$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$$

6) إذا كان $f(x,y) \leq g(x,y)$ فإن:
$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$$

7) ليكن $D_1 \subset D_2$ و $f : D_2 \to IR$

إذا كانت $f(x,y) \geq 0$ فإن:
$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy \leq \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

8) $$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy$$

9) خطية التكامل:

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy \qquad \forall(\alpha,\beta)\in IR^2$$

البرهان:

1) $$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(p_i)+g(p_i)]\Delta S_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\ \Delta S_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(p_i)\ \Delta S_i$$

$$= \iint_D f(x,y)ds + \iint_D g(x,y)ds$$

(2 $$\iint_D \alpha \ f(x,y)dx\ dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha \ f(p_i)\Delta S_i = \lim_{n\to\infty}\alpha\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\ \Delta S_i = \alpha\iint_D f(x,y)dx\ dy$$

3) بما أن: $$\sum_D f(P_i)\Delta S_i = \sum_{D_1} f(P_i)\Delta S_i + \sum_{D_2} f(P_i)\Delta S_i$$

حيث أن المجموع الأول يمسح جميع أجزاء المنطقة الجزئية D_1 بينما المجموع الثاني يمسح جميع المنطقة الجزئية D_2.

حسب خاصية النهاية (1.4) فإن العلاقة التالية:

$$\lim_{\Delta S_i\to 0}\ \sum_D f(p_i)\Delta S_i = \lim_{\Delta S_i\to 0}\ \sum_{D_1} f(p_i)\Delta S_i + \lim_{\Delta S_i\to 0}\ \sum_{D_2} f(p_i)\Delta S_i$$

أي أن: $$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

(4 $$\iint_D f(x)g(y)dxdy \ = \int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)dy\right)dx$$

$$= \int_a^b f(x)\left(\int_c^d g(y)dy\right)dx$$

$$= \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

ملاحظة 1:

1) تبقى الخاصية الثالثة صحيحة مهما كان عدد المناطق الجزئية التي نحصل عليها بتقسيم D.
2) إذا كانت $D_1 \cap D_2 \neq \phi$ بالنسبة للخاصية الثالثة فإن:

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy - \iint_{D_1\cap D_2} f(x,y)dxdy$$

3) يمكن برهان خطية التكامل بالإعتماد على الخاصيتين 1و2 .

6.1.2 حساب التكامل الثنائي

1.6.1.2 تعريف المنطقة المنتظمة [13]:

ليكن C منحنيا مغلقا في المستوي (XOY)، وليكن $z = f(x,y)$ تابعا مستمرا معرفا على المنطقة المغلقة D والمحدود بالمنحنى C.

المنطقة D تسمى منطقة منتظمة إذا وفقط إذا كان كل مستقيم يوازي أحد المحورين ويمر داخل المنطقة D لا يقطع محيط D في أكثر من نقطتين .

ملاحظة2:

يمكن تجزئة أي منطقة غير منتظمة إلى مناطق منتظمة.

نظرية 2.6.1. 2 [7] :

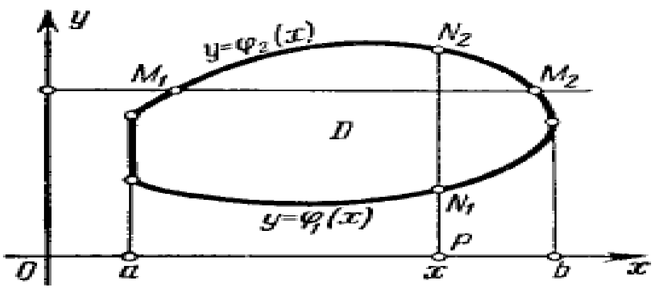
لتكن D منطقة محدودة بالمنحنيين $y=\varphi_1(x)$ ، $y=\varphi_2(x)$ وبالمستقيمين $x=a$ و $x=b$

وليكن $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ ووحيدي القيمة على المجال $[a,b]$ وليكن φ_1 ، φ_2 مستمرين على المجال $[a,b]$.

أنظر الشكل-(3.2)- حيث M_1 و M_2 نقاط تقاطع φ_1 و φ_2 على الترتيب مع المستقيمين $x=b$ و $x=a$.

وبالمثل كما تكون محدود بالمنحنيين $x=g_1(y)$ ، $x=g_2(y)$ والمستقيمين $y=c$ و $y=d$ وليكن $g_1(x)\le g_2(x)$ وأن g_1, g_2 مستمرين على المجال $[a,b]$ ووحيدي القيمة .

حيث أن N_1 و N_2 نقاط تقاطع g_1 و g_2 على الترتيب مع المستقيمين $y=c$ و $y=d$.



الشكل-3.2-

وليكن $f(x,y)$ تابعا مستمرا على المنطقة المنتظمة D ومنه لدينا:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \qquad (*)$$

$$=\int_c^d\left[\int_{g_{1(y)}}^{g_{2(y)}} f(x,y)dx\right]dy \qquad (**)$$

تسمى المساواة (*) بحساب التكامل الثنائي بالإسقاط على محور (OX).

و تسمى المساواة (**) بحساب التكامل الثنائي بالإسقاط على محور (OY).

ملاحظة 3:

إن حساب التكامل الثنائي يختلف من حيث الصعوبة , ويعتمد ذلك على حسن إختيار المسقط المناسب.

مثال2:

لحساب تكامل التابع $f : D \to IR$ المعرف بـ $f(x,y) = x^3y^2$

حيث D معرفة كمايلي : $D = \{(x,y) \in IR^2, 0 < x < 1, 0 < y < x\}$

بالإسقاط على (OX) نجد أن :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1\left(\int_0^x x^3y^2dy\right)dx = \int_0^1 x^3\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^6dx = \left[\frac{x^7}{21}\right]_0^1 = \frac{1}{21}$$

ونتحصل على نفس النتيجة وذلك بالإسقاط على (OY)

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1\left(\int_y^1 x^3y^2dx\right)dy = \int_0^1 y^2\left[\frac{x^4}{4}\right]_y^1 dy = \frac{1}{4}\int_0^1 (y^2 - y^6)dy = \left[\frac{y^3}{12} - \frac{y^7}{28}\right]_0^1 = \frac{1}{21}$$

7.1.2 تغييرالمتغير في التكامل الثنائي

لتكن D منطقة من المستوى (XOY) المحدودة بالمنحني L ونفرض أن الإحداثيتين x و y دالتين في المتغيرين الجديدين u و v على الترتيب.

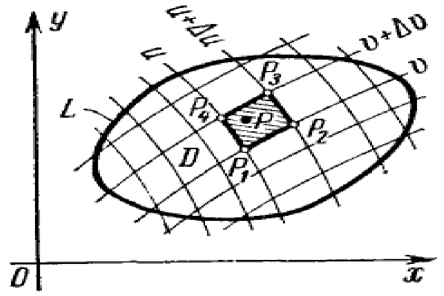
$$\begin{cases} x = \varphi(x,y) \\ y = w(x,y) \end{cases} \qquad \textbf{(2.4)}$$

حيث أن الدّالتين $\varphi(u,v)$ و $\omega(u,v)$ أحاديتا القيمة ومستمرتان ولهما مشتقات مستمرة في منطقة ما D' , عندئذ العلاقة (2.4) يناظر كل زوج من قيم u و v زوج وحيد من y, x على الترتيب.

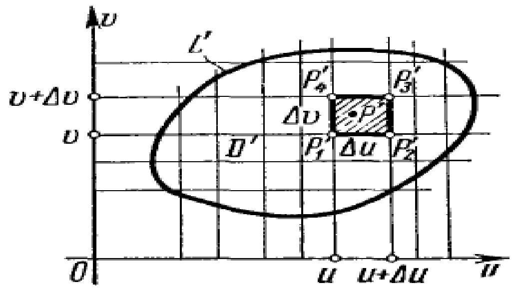
نفترض أنه يوجد الدّالتين φ, ω تتميزان بالخاصية الآتية:

إذا أعطينا كلا من x و y قيمة محدودة من المنطقة D فإننا نعّين من العلاقة (2.4) قيمتين محدودتين للمتغيرين v و u.

نأخذ مجموعة متعامدة للإحداثيات (UOV) الموضحة في الشكل-(5.2)- وعلى أساس ما سبق ينتج أن كل نقطة $p(x,y)$ في المستوي (XOY) الشكل -(4.2)- تناظرها تناظرًا أحادى القيمة نقطة $p'(u,v)$ في المستوي (UOV) ذات الإحداثيتين v و u اللذين يتحدّدان بالعلاقة (2.4) والعددان v و u يسمّيان بالإحداثيتين للنقطة p.



الشكل-4.2-



الشكل-5.2-

لنحسب المحدد المسمي باليعقوبي :

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dx}{dv} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(2.5)}$$

فنكتب:
$$dxdy = |J|dudv$$

أي أن:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v), w(u,v)) \left| \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} \right| dudv \qquad \textbf{(2.6)}$$

حيث D' هي صورة D بالتغيّير المأخوذ من الشكلين- (4.2)- و-(5.2)- ويجب أن يكون هناك تقابلا بين D و D'.

أي أن عنصر المنطقة يكون:
$$ds = \left| \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du} \right|$$

1.7.1.2 حساب التكامل الثنائي باستعمال الإحداثيات القطبية

لحساب قيمة التكامل $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ نقوم بتغيير المتغير نضع $x = r\cos\theta$ و

و $y = r\sin\theta$ أي أن: $dx = \cos\theta dr$ ، $dy = \sin\theta dr$

بالتعويض في العلاقة(2.5)نجد أن:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta \qquad \textbf{(2.7)}$$

حيث D هي منطقة المنتظمة في المستوي (XOY) و D' هي المنطقة المنتظمة في مستوي الإحداثيات القطبية.

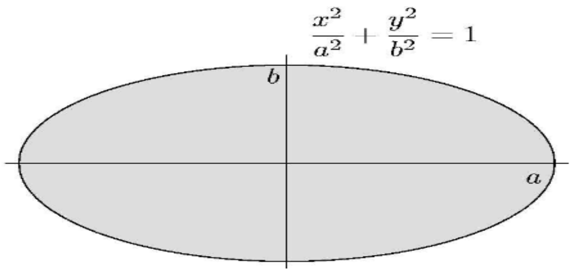
أمثلة:

1) لحساب التكامل التالي $\iint\limits_D dxdy$ على المنطقة D المعرفة كما يلي:

$$D=\left\{(x,y)\in IR^2, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$$

حيث أن $a,b\in IR^*$

بتغيير المتغير التالي نضع أن: $x=ar\cos\theta$ و $y=br\sin\theta$



الشكل-6.2-

بتطبيق العلاقة (2.5) لإيجاد المحدد اليعقوبي نجد أن :

$$\begin{vmatrix} a\cos\theta & ar\sin\theta \\ b\sin\theta & -b\sin\theta \end{vmatrix}=abr$$

بتطبيق العلاقة (2.6) أي :

$$\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D'} abrdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 abrdrd\theta=\pi ab$$

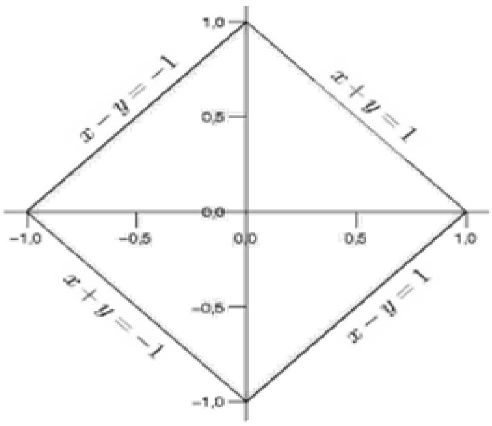
2) لنحسب التكامل الثنائي للدالة $f(x,y)=e^{x+y}$ المعرفة على المنطقة D حيث:

$$D=\{(x,y)\in IR^2, |x-y|\le 1\ , |x+y|\le 1\}$$

$$\iint\limits_D e^{x+y}dxdy=\int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{1+x} e^{x+y}dxdy+\int_{0}^{1}\int_{-1+x}^{1-x} e^{x+y}dxdy$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(e^{2x+1}-e^{-1}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(e-e^{2x+1}\right)dx$$

$$=e-e^{-1}$$

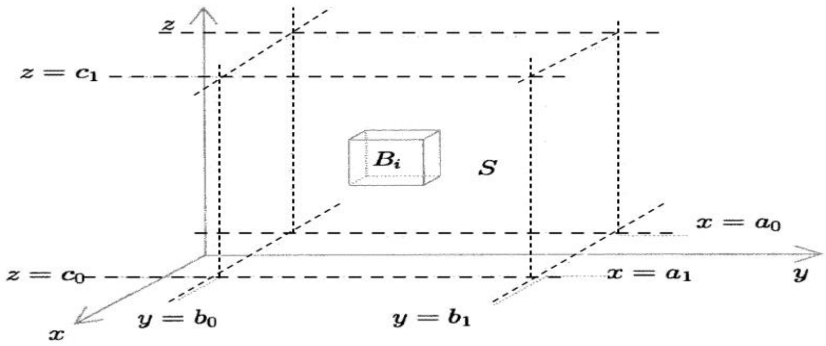


الشكل -7.2-

2.2 التكاملات الثلاثية

1.2.2 تعريف[3]:

التكامل الثلاثي يوازي تعريف التكامل الثنائي فإذا إعتبرنا متوازي السطوح المحدد بالمستويات الستة $c_0 \le z \le c_1, a_0 \le x \le a_1, b_0 \le y \le b_1$ أنظر الشكل-(5.2)-



الشكل-5.2-

إذا كانت الدّالة $f(x, y, z)$ معرفة في المنطقة المغلقة S ، فإنها بصورة مشابه في التكامل الثنائي تقسيم المنطقة المجسّمة S إلى متوازيات السطوح بمستويات متوازية للمستويات الإحداثية (x, y, z).

إذا كانت $B_1, B_2, ..., B_n$ تمثل متوازيات السطوح في S ، ونرمز لحجم متوازي السطوح B_i بـ $V(B_i)$ وبإختيار النقطة $p_i(x_i, y_i, z_i)$ من B_i فإن $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) V(B_i)$ يكون قيمة تقريبية للتكامل الثلاثي.

إذا كانت المنطقة S متوازي السطوح فإن التكامل الثلاثي التالي:

$$\iiint_S f(x, y, z) dxdydz = \int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} \int_{c_0}^{c_1} f(x, y, z) dzdydx \qquad \textbf{(2.7)}$$

2.2.2 خواص التكامل الثلاثي

ليكن f_2, f_1, f توابع مستمرة و قابلة للمكاملة على S من IR^3 .

(1 $$\iiint_S [f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)] dS = \iiint_S f_1(x,y,z) dS + \iiint_S f_2(x,y,z) dS$$

2)ليكن $\alpha \in IR$ $$\iiint_S \alpha f(x,y,z) dS = \alpha \iiint_S f(x,y,z) dS$$

3)إذا كانت المنطقة S مجزأة إلى منطقتين S_2, S_1 بحيث $S_1 \cap S_2 = \phi$ فإن:

$$\iiint_S f(x,y,z) dS = \iiint_{S_1} f(x,y,z) dS + \iiint_{S_2} f(x,y,z) dS$$

4) إذا كان $f(x,y,z) \geq 0$ فإن: $\iiint_S f(x,y,z)dS \geq 0$

5)إذا كان: $0 \leq f_1(x,y,z) \leq f_2(x,y,z)$ فإن:

$$\iiint_S f_1(x,y,z)dS \leq \iiint_S f_2(x,yz)dS$$

6) ليكن $S_1 \subset S_2$ و $f: S_2 \to IR$

إذا كانت $f \geq 0$ فإن: $\iiint_{S_1} f(x,y,z)dS \leq \iiint_{S_2} f(x,y,z)dS$

7) $$\left|\iiint_S f(x,y,z)dS\right| \leq \iiint_S |f(x,y,z)|dS$$

ملاحظة4 :

1- بالنسبة إلى الخاصية 3 إذا قسّمت المنطقة S إلى عدد محدود من المناطق بمستويات موازية للمستويات الإحداثية فهي تبقى صحيحة.

2- بالنسبة للخاصية 3 إذا كان $S_1 \cap S_2 \neq \phi$ فإن تصبح العلاقة كالتالي:

$$\iiint_S f(x,y,z)dS = \iiint_{S_1} f(x,y,z)dS + \iiint_{S_2} f(x,y,z)dS - \iiint_{S_1 \cap S_2} f(x,y,z)dS$$

يعتمد برهان الخواص 1 ،2 و3 على نفس البرهان بالنسبة إلى التكاملات الثنائية.

3.2.2 حساب التكاملات الثلاثية

1.3.2.2 تعريف المنطقة المنتظمة في[6] S :

لتكن المنطقة S محدودة بالسطح V يملك المميزات التالية:

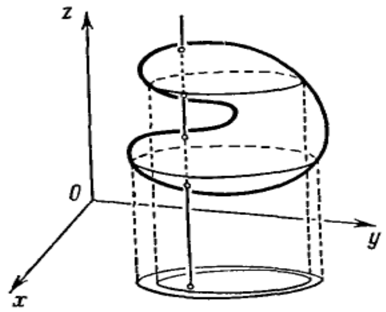
1) كل مستقيم مواز للمحور (OZ) والمار بإحدى النقاط الداخلية للمنطقة S يقطع السطح V في نقطتين فقط.

2) المسقط S على المستوي (XOY) منطقة منتظمة على ساحة D.

3) أي جزء من المنطقة S يقطعه أي مستوي موازلـ (XOY)، (YOZ)، (XOZ) يملك نفس الخاصيتين 1و2.

إن هذه المنطقة S تدعى **بالمنطقة منتظمة**.

إن التكامل الثلاثي على منطقة منتظمة S يحسب بطرق بسيطة يعتمد على حسن إختيار المسقط المناسب كما في الحالات التالية:



الشكل-6.2-

1) الإسقاط على المحور (XOY)

الإسقاط على المحور (OX)

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right] dx$$

الإسقاط على المحور (OY)

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dx \right] dy$$

2) الإسقاط على المحور (XOZ)

الإسقاط على المحور (OX)

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left[\int_{\varphi_1(x,z)}^{\varphi_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right] dz \right] dx$$

الإسقاط على المحور (OZ)

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \left[\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \left[\int_{\varphi_1(x,z)}^{\varphi_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right] dx \right] dz$$

3) الإسقاط على المحور (YOZ)

الإسقاط على المحور (OY)

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} \left[\int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right] dz \right] dy$$

الإسقاط على المحور (OZ)

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d \left[\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \left[\int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right] dy \right] dz$$

نتيجة:

نلاحظ أن تساوي نتائج التكاملات على مستوى المحاور (OX) , (OY), (OZ)

4.2.2 تغيير المتغير في التكامل الثلاثي

تعتبر الإحداثيات الإسطوانية و الكروية من الحالات الخاصة من طرق تغيير المتغير في التكامل الثلاثي فهي طريقة مشابهة لطريقة تغيير المتغيرفي التكامل الثنائي.

لتكن $F(x,y,z)$ دالة معرفة بـ $F(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w)) = H(u,v,w)$

لتكن المنطقة D في الفضاء (UVW) حولت أحاديا إلى المنطقة S في الفضاء (XYZ) لمعادلات قابلة للتفاضل على الصورة التالية : $x = g(u,v,w)$, $y = h(u,v,w)$, $z = k(u,v,w)$

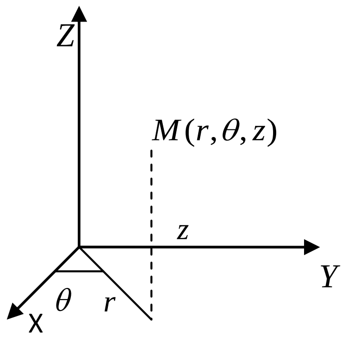
أي دالة معرفة على S في الفضاء (UVW) إذا كانت مشتقات الدوال g, h, k من الرتبة الأولى ومستمرة فإن تكامل الدالة $F(x,y,z)$ على S يعرف كمايلي:

$$\iiint_S F(x,y,z)dxdydz = \iiint_S H(u,v,w)|J|dudvdw \quad \textbf{(2.8)}$$

حيث أن $J(u,v,w)$ يعرف كمايلي:

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad \textbf{(2.9)}$$

1.4.2.2 حساب التكامل الثلاثي باستعمال الإحداثيات الإسطوانية



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

فإن:

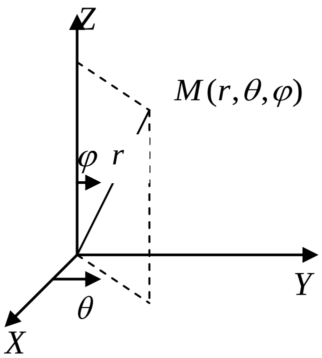
$$dxdydz = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} drd\theta dz$$

أي أن

$$dxdydz = rdrd\theta dz$$

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \iiint_T f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz \quad \textbf{(2.10)}$$

2.4.2.2 التكامل الثلاثي باستعمال الإحداثيات الكروية



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$dxdydz = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} drd\theta d\varphi$$

أي أن: $dxdydz = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

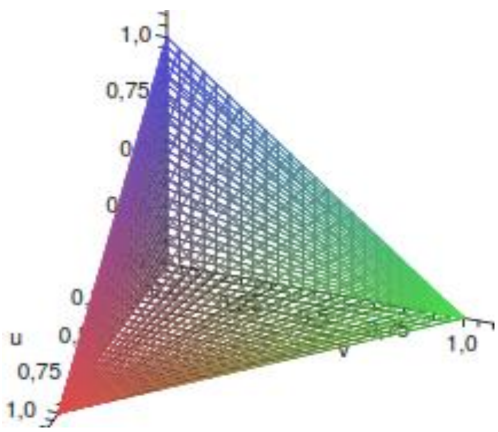
وبالتالي:

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \iiint_T f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta \qquad \textbf{(2.11)}$$

مثال3:

لحساب التكامل الثنائي التالي $\iiint_D (1+x)dxdydz$ على المنطقة D حيث

$$x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$$



$$\iiint_D (1+x)dxdydz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(1-x)dzdydx$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}(1-x)(1-x-y)dydx$$

$$= \int_0^1(1+x)\left[y - xy - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1(x^3 - x^2 - x + 1)dx$$

$$= \frac{5}{24}$$

5.2 مساحة السطح

1.5.2 تعريف مساحة سطح[6]:

نسمي مساحة سطح S العدد الموجب $A(S)$ المعرف بـ:

$$A(S) = \iint_\Delta \left\| \vec{\partial_1} g(u,v) \wedge \vec{\partial_2} g(u,v) \right\| du\ dv$$

حيث g تمثيل وسيطي من الصنف C^1 و $\|\ .\ \|$ هو النظيم الإقليدي في IR^3.

إذا كان التمثيل الوسيطي معطى بواسطة الإحداثيات الكارتيزية

$$g : \Delta \to IR^3$$

$$(x, y) \to x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$$

حيث $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ ينتج $\frac{\partial g}{\partial x} = \vec{i} + p\vec{k}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \vec{j} + q\vec{k}$

ومنه: $$\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \wedge \frac{\partial g}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

إذن: $$A(S) = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy$$

ملاحظات:

1) قيمة التكامل A لا تتعلق بإختيار التمثيل الوسيطي للسطح.

2) إذا كان S_1 سطح ناتج عن إزاحة السطح S فيكون لدينا $A(S) = A(S_1)$

3) الشعاع $\vec{\partial_1}\, g(u,v) \wedge \vec{\partial_2}\, g(u,v)$ ناظما على السطح S عند النقطة (u,v).

4) يسمى المقدار $\left\| \vec{\partial_1}\, g(u,v) \wedge \vec{\partial_2}\, g(u,v) \right\|$ بالمساحة العنصرية.

2.5.2 نظرية ستوكس [6]:

إذا كان S سطحا ذو وجهين محيطه المنحنى المغلق D, F تابع نقطة شعاعي مستمر وله مشتقات جزئية مستمرة على كل من D ، S فإن جولان الشعاع F على المنحنى المغلق D يساوي تدفق تداوره من خلال السطح S أي أن :

$$\iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) d\sigma = \int_D \vec{F} dS \qquad \textbf{(2.12)}$$

حيث أن: $$\vec{Rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

البرهان [6]

الفصل الثالث

تطبيقات

نتطرق في هذا الفصل إلى أهمية التكاملات الثنائية والثلاثية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي وحساب الحجوم والموشور القائم وغيرها.

1.3 تطبيقات التكامـــــلات الثنائية

1.1.3 حساب مساحة منطقة مستوية

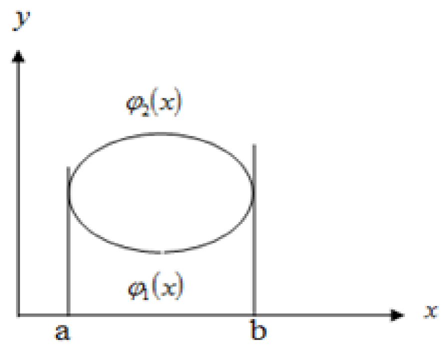
1.1.1.3 تعريف [9]:

إذا كانت $f(x,y)=1$ على المنطقة D فإن المساحة تعطى كما يلي :

$$S=\iint_D dxdy \qquad (3.1)$$

حيث S تمثل مساحة المنطقة المغلقة D.

إذا كانت D منطقة منتظمة فإن المساحة تعطى بالعلاقة التالية :



الشكل -1.3-

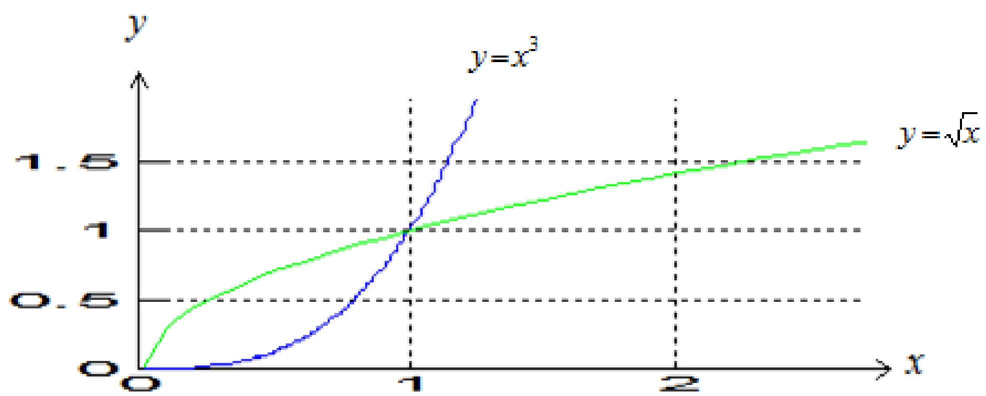
$$S=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dydx=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx$$

مثال 1:

لنحسب المساحة المحصورة بين المنحنيين $y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$

المنحنيين يتقاطعان في النقطتين (0, 0) و (1,1) أنظر الشكل-(2.3)-

إذن:
$$S=\int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}}dydx=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^4\right)_0^1=\frac{5}{12}$$



الشكل-2.3-

2.1.3 حساب مساحة سطح كيفي

1.2.1.3 تعريف [5]:

لتكن E منطقة من السطح $z = f(x,y)$ مسقطها على (XOY) هي المنطقة المنتظمة D

إن مساحة E تعطى بـ:

$$S = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \qquad \textbf{(3.2)}$$

مثال2 :

لنحسب مساحة الكرة S: $x^2+y^2+z^2=R^2$

لنحسب مساحة النصف العلوي للكرة الموافق لـ $z \geq 0$

لدينا: $z^2 = R^2 - x^2 - y^2$ ومنه :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{cases}$$

إن منطقة التكامل D معرفة بالشرط $x^2+y^2 \leq R^2$

أو منه بالتعويض في العلاقة (3.2) نجد مساحة الكرة S

$$S = 2\int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dy\right]dx$$

بالتحويل إلى الإحداثيات القطبية نجد:

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,rdrd\theta \\ &= 2R\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^R d\theta \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

3.1.3 حساب الحجوم

1.3.1.3 تعريف [4]:

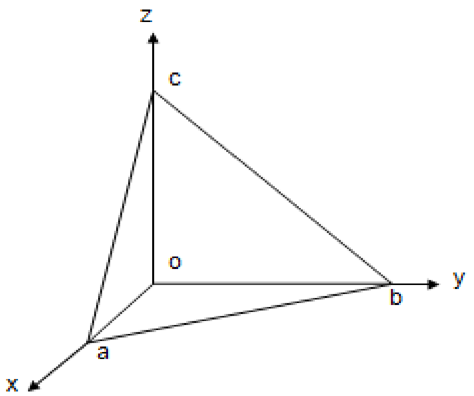
يعرف الحجم V لمجسم محدود بالسطح $z = f(x,y)$ حيث $z \geq 0$ والمستوي $z=0$ والسطح الأسطواني الذي دليله محيط المنطقة D ومولدته توازي (OZ) بـ:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad \textbf{(3.3)}$$

مثال3 :

لنحسب حجم رباعي الوجوه V المحدود بالمستويات $V=\{\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, x=0, y=0, z=0\ \}$

حيث a,b,c اعداد موجبة تماما، أنظر الشكل–(3.2)-



الشكل -3.2-

$$V=\int_0^a\int_0^b zdydx=\int_0^a\int_0^b c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dydx$$
$$=\int_0^a c\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)y-\frac{1}{2b}y^2\right]_0^b dx$$
$$=\frac{1}{2}bc\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx=\frac{abc}{6}$$

4.1.3 حســـــــاب الكتلة

1.4.1.3 تعريف [9]:

لنعتبر صفيحة متغيرة الكثافة، ولنفترض أن الصفيحة تشمل المنطقة D من المستوي (XOY) وكثافتها عند النقطة (x,y) ضمن المنطقة D تعطي بـ: $f(x,y)$ حيث f دّالة مستمرة على D فإن كتلة الصفيحة تعطي بـ:

$$m=\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \textbf{(3.4)}$$

فيزيائيا، يمكن اعتبار أشكال أخرى من الكثافة فإذا كانت شحنة كهربائيا موزعة على منطقة D وكثافة الشحنة تعطي بـ$\sigma(x;y)$ عند كل نقطة $(x;y)$ إذا الشحنة الكلية Q تعطي بـ:

$$Q=\iint_D \sigma(x,y)dxdy \qquad \textbf{(3.5)}$$

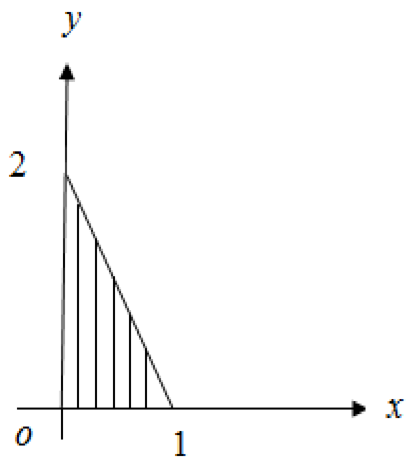
مثال4 :

لإيجاد كتلة صفيحة مثلثية رؤوسها (0,0)، (0,2) ، (1,0) إذا كانت دالة كثافتها $f(x,y)=1+3x+y$

تكون معادلة المستقيم التآلفي أي الوتر كما يلي : $y=2-2x$

أنظر الشكل –(3.3)- ومنه كتلة الصفيحة :

$$m=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^{2-2x}(1+3x+y)dydx$$
$$=\int_0^1\left[y+3xy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2-2x}dx$$
$$=\int_0^1\left[(2-2x)+3x(2-2x)+\frac{1}{2}(2-2x)^2\right]dx$$
$$=\int_0^1\left[(2-2x)+(6x-6x^2)+\frac{1}{2}(4-8x+4x^2)\right]dx$$
$$=\int_0^1(4-4x^2)dx=4\int_0^1(1-x^2)dx$$
$$=4\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{8}{3}$$



الشكل-3.3-

5.1.3 مركز الكتلـــة

1.5.1.3 تعريف [9]:

إذا كانت الدّالة تمثل الكثافة، فإن مركز الكتلة (x,y) للصفيحة الممثلة بالمنطقة R يعطي بالعلاقتين:

على المحور (OX) تعطى بـ :
$$M_x=\iint_R yf(x,y)dxdy$$
على المحور (OY) تعطى بـ :
$$M_y=\iint_R xf(x,y)dxdy$$

6.1.3 عزم القصـــــور الذاتـــي

1.6.1.3 تعريف [9]:

يعطي عزم القصور الذاتي لصفيحة على المنطقة D حول

المحور (OX)

$$I_X=\iint_D y^2 f(x,y)dxdy \qquad (3.6)$$

المحور (OY)

$$I_Y=\iint_D x^2 f(x;y)dxdy \qquad (3.7)$$

حالـــة خاصـــــة:

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)f(x,y)dxdy$$

مثال5 :

لنحسب عزم العطالة لصفيحة مادية مستوية D محدودة بـ $x=0, y=0, y^2=1-x$ وذلك حول المحور (OY)،علما بأن الكثافة السطحية $f(x,y)$ تعطى بـ: $f(x,y)=y$

بالتعويض في العلاقة (3.7) نجد أن:

$$I_y=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x}}x^2ydy\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\left[x^2y^2\right]_0^{\sqrt{1-x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx=\frac{1}{24}$$

2.3 تطبيقات التكاملات الثلاثية

1.2.3 حســــــاب الكتلة

1.1.2.3 تعريف [9]:

إذا كانت الدالة f تمثل الكثافة على وحدة الحجم فإن:

$$M(S)=\iiint_S f(x,y,z)dxdydz \qquad \textbf{(3.8)}$$

2.2.3 حســـاب الحجوم

1.2.2.3 تعريف [4]:

إذا كانت $f(x,y,z)=1$ فإن الجحم على المنطقة S يعطى بالعلاقة التالية :

$$V(S)=\iiint_S dxdydz \qquad \textbf{(3.9)}$$

3.2.3 عزم المجــــسم

1.3.2.3 تعريف [9]:

عزم المجسم S بالنسبة للمستويات $(XY),(XZ),(YZ)$ يعرف كمايلي:

بالنسبة للمحور (XY)

$$M_{xy}=\iiint_S zf(x,y,z)dxdydz \qquad \textbf{(3.10)}$$

بالنسبه للمحور (XZ)

$$M_{xz}=\iiint_S yf(x,y,z)dxdydz \qquad \textbf{(3.11)}$$

بالنسبة للمحور (YZ)

$$M_{yz}=\iiint_S xf(x,y,z)dxdydz \qquad \textbf{(3.12)}$$

4.2.3 مركز الكتـــلة

1.4.2.3 تعريف [9]:

مركز الكتلة هو نقطة ولتكن P والتي تعرف إحداثياتها كما يلي:

$$\begin{cases} x = \dfrac{M_{yz}}{M} \\ y = \dfrac{M_{xz}}{M} \\ z = \dfrac{M_{xy}}{M} \end{cases} \qquad \textbf{(3.13)}$$

مثال6 :

لتعيين مركز ثقل نصف الكرة $x^2+y^2+z^2=1$ حيث $(z\geq 0)$ ذات الكثافة الثابتة $f(x,y,z)=\lambda$

نظرا لتجانس نصف الكرة وتناظرها فإن مركز ثقلها يقع على المحور (OZ) أي أن كل من المركبات x,y معدومة ، وبالتالي فإننا نقوم بحساب المركبة z .

أولا لنحسب الكتلة وذلك بالتعويض في (3.8) نجد أن: $M=\iiint\limits_S \lambda dxdydz$

بإستخدام الإحداثيات الكروية نجد أن:

$$M = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r^2 \sin\varphi dr\right]d\varphi\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\sin\varphi\right]_0^1 d\varphi\right]d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\right]d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}[\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

لنحسب عزم المجسم بالنسبة للمحور (XY)

بالتعويض في العلاقة (3.10) نجد : $M_{xy}=\iiint\limits_S \lambda z dxdydz$

وبإستخدام الإحداثيات الكروية نجد:

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r^3\cos\varphi\sin\varphi dr\right]d\varphi\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}r^4\cos\varphi\sin\varphi\right]_0^1 d\varphi\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\varphi d\varphi\right]d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{\pi}{4}$$

ومنه المركبة z تعطى حسب العلاقة (3.13) بـ : $z=\frac{\pi}{4}\times\frac{3}{2\pi}=\frac{3}{8}$

5.2.3 عزم القصـــــور الذاتــــــي

1.5.2.3 تعريف [9]:

عزم القصور الذاتي للمحاور OX,OY,OZ على المنطقة S يعرف بـ:

بالنسبة لـلمحور (OX)

$$I_x = \iiint_S \left(y^2+z^2\right) f(x,y,z) dxdydz \qquad \textbf{(3.14)}$$

بالنسبة لـلمحور (OY)

$$I_y = \iiint_S \left(x^2+z^2\right) f(x,y,z) dxdydz \qquad \textbf{(3.15)}$$

بالنسبة لـلمحور (OZ)

$$I_z = \iiint_S \left(x^2+y^2\right) f(x,y,z) dxdydz \qquad \textbf{(3.16)}$$

حيث $f(x,y,z)$ تمثل كثافة المجسم S.

مثال7 :

لحساب عزم القصور الذاتي لأسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها $2h$ ونصف قطرها Rوذلك بالنسبة لقطر المقطع الوسطي لها مع العلم أن الكثافة ثابتة وتساوي λ أي أن: $f(x,y,z)=\lambda$.

لنختار مجموعة المحاور الإحداثية كما يلي :

(OZ)محور الأسطوانة موجه من الأسفل إلى الأعلى، Oمركز تناظرها.

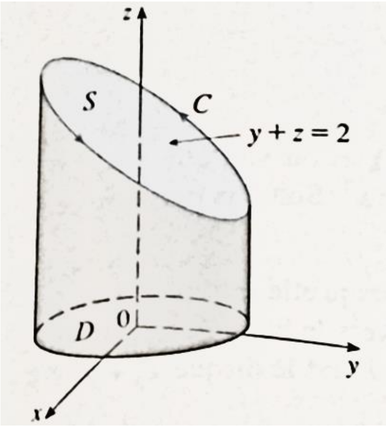
فالمسألة تعود لحساب عزم القصور الذاتي حول المحور (OX).

بالتعويض في العلاقة (3.14) وبالانتقال إلى الإحداثيات الأسطوانية نجد أن:

$$\begin{aligned}
I_x = \iiint_S \left(y^2+z^2\right)\lambda dxdydz &= \lambda \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left[\int_{-h}^{h} r\left(z^2+r^2\sin^2\theta\right)dz\right]dr\right]d\theta \\
&= \lambda \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R 2\left[\frac{r}{3}h^3+hr^3\sin^2\theta\right]dr\right]d\theta \\
&= \lambda \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left[\frac{r}{3}z^3+zr^3\sin^2\theta\right]_{-h}^{h}dr\right]d\theta \\
&= 2\lambda \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{6}h^3+\frac{r^4}{4}h\sin^2\theta\right]_0^R d\theta \\
&= \lambda \int_0^{2\pi}\left[\frac{R^2}{3}h^3+\frac{R^4}{2}h\sin^2\theta\right]d\theta \\
&= \lambda R^2 h\left[\frac{h^2}{3}\theta+\frac{R^2}{4}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= \lambda R^2 h\pi\left(\frac{2}{3}h^2+\frac{1}{2}R^2\right)
\end{aligned}$$

3.3 بعض التطبيقات الأخرى

1.3.3 تطبيق عن نظرية ستوكس



الشكل -3.4-

لنحسب $\int_C \vec{F}d\vec{r}$ حيث C هو منحنى تقاطع المستوى المحدود بـ $y+z=2$ ومساحة الأسطوانة S ذات المعادلة $x^2+y^2=1$

يمثل C هو المنحنى الموجه بطريقة اتجاه عكس عقارب الساعة الموضح بالشكل -(3.4)- C يمثل قطع ناقصي.

بتطبيق نظرية ستوكس ولنحسب أولا

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1+2y)\vec{k}$$

يوجد الكثير من المساحات حيث C محدودة

ولكن الاختيار الأكثر دقة هو المنطقة الناقصية S في المستوي $y+z=2$ والمحدودة بـ C بتوجيه S إلى الأعلى حيث C موجه إيجابيا بالنسبة إلى S

نطبق إسقاط S على المستوي (XY) الذي هو D، والمتمثل في الأسطوانة $x^2+y^2\le 1$ وأن $z=g(x;y)=2-y$ بتطبيق العلاقة (2.12) نجد :

$$\int_C \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_S rot\,\vec{F}\,ds = \iint_D (1+2y)dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{2r^3}{3}\sin\theta\right)_0^1 d\theta$$

$$= \int_à^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$

2.3.3 بعض التطبيقات على حساب الحجوم

1.2.3.3 حساب حجم المجسم الناقص (Ellipsoïde) في IR^n :

نرمز للمجسم الناقص بـالرمز Δ المعرف كما يلي:

$$\Delta = \left\{(x_1,...,x_n)\in IR^n \,/\, \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{a_i^2}\le 1, a_i>0, i=\overline{1,...,n}\right\}$$

و نرمز لحجم Δ بـالرمز $V(\Delta)$ المعرف بـ:

$$V(\Delta) = \iiint_\Delta dx_1...dx_n \qquad (3.17)$$

لحساب $V(\Delta)$ نجري تبديل المتغير التالي :

$$(u_1,...,u_n)\mapsto \Phi(u_1,...,u_n)=(x_1,...,x_n)$$

حيث Φالتطبيق المعرف كما يلي : $\Phi : B_n(1)\to \Delta$

$$B_n(1)=\left\{(u_1,...,u_n)\in IR^n \quad :\sum_{i=1}^{n}u_i^2\leq 1\right\}$$

حيث: $i=\overline{1,...,n} \qquad x_i = a_i u_i$

المصفوفة اليعقوبية لـ Φ هي: $J_\Phi(u_1,...,u_n)=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right).I_n$

و منه: $\det\ J_\Phi(u_1,...,u_n)=\prod_{i=1}^{n}a_i$

إذن: $V(\Delta)=\prod_{i=1}^{n}a_i\int\limits_{B_n(1)}du_1\ldots du_n$

بما أن $B_n(1)$ كرة الوحدة في IR^n فإن: $\int\limits_{B_n(1)}du_1\ldots du_n=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

ومنه $V(\Delta)=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)$

ملاحظة:

المجسم الناقص Δ في IR^3 معرف بـ :

$$\Delta=\left\{(x,y,z)\in IR^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1, a>0, b>0, c>0\right\}$$

و حجمه يساوي $V(\Delta)=\dfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}abc=\dfrac{4}{3}\pi abc$

2.2.3.3 حساب حجم الهرم في IR^n:

نعتبر الهرم المعرف بـ:

$$\Delta_n=\{(x_1,\ldots,x_n)\in IR^n : x_1+\cdots+x_n\leq 1, x_i\geq 0 \quad i=1,\cdots,n\}$$

بتطبيق نظرية فوبيني (Fubini) فنجد أن :

$$V(\Delta_n)=\int_{\Delta_n} dx_1....dx_n = \int_0^1 dx_n \int_{D(x_n)} dx_1...dx_{n-1} \qquad \textbf{(3.18)}$$

من أجل كل x_n من المجال $[0,1]$ يكون $D(x_n)$ متراص من IR^{n-1} المعرف بـ :

$$D(x_n)=\{(x_1,\dots,x_{n-1})\in IR^n : x_1+\cdots+x_{n-1}\leq 1-x_n, x_i \geq 0 \;\; i=1,\dots,n\}$$

نجري تبديل المتغير التالي: $(t_1,\dots,t_{n-1})\mapsto \varphi(t_1,\dots,t_{n-1})=(x_1,\dots,x_{n-1})$

حيث $$\varphi:\Delta_{n-1}\to D(x_{n-1})$$

وأن: $$\Delta_{n-1}=\{(t_1,....,t_{n-1})\in IR^{n-1} : t_1+.....+t_{n-1}\leq 1,\; t_i\geq 0 \;\; i=1,...., \;\; n-1\}$$

حيث $$x_i=(1-x_n)t_i \quad \forall i\in\{1,....,n-1\}$$

نجد: $$J_\varphi(u_1,\dots,u_n)=(1-x_n)^{n-1}I_{n-1}$$

إذن : $$\int_{D(x_{n-1})} dx_1\cdots dx_{n-1} = \int_{\Delta_{n-1}} (1-x_n)^{n-1}dt_1\cdots dt_{n-1}$$

$$\iint_{\Delta_n} dx_1......dx_n = \left(\int_0^1 (1-x_n)^{n-1}dx_n\right)\left(\int_{\Delta_{n-1}} dt_1.......dt_{n-1}\right)$$

$$V(\Delta_n)=\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} a_i,\; \forall i=1,...,n$$

$$V(\Delta_n)=\frac{1}{n}V(\Delta_{n-1}) \;;\forall n\in IN^*$$

فنتحصل على حجم الهرم $$V(\Delta_n)=\frac{1}{n!}$$

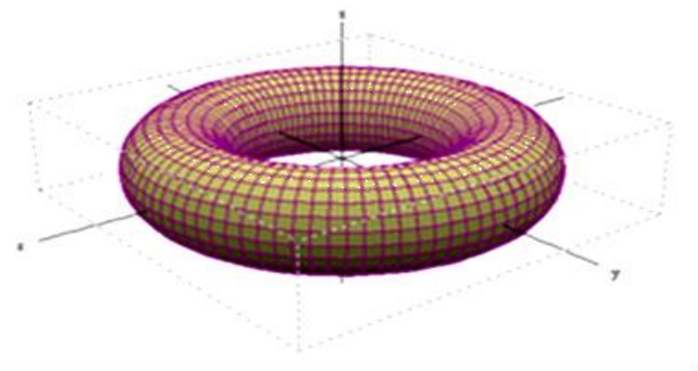
3.2.3.3 حساب حجم الطارة :

تعريف سطح طارة:

سطح الطارة معرف بالمعادلات الوسيطية التالية :

$$\begin{cases} x=(a+b\cos\theta)\cos\varphi \\ y=(a+b\cos\theta)\sin\varphi \\ z=b\sin\theta \end{cases}$$

حيث $$0\leq\theta\leq 2\pi \;,\; 0\leq\varphi\leq 2\pi \;,\; 0<b<a$$



نعرف التطبيق Ψ كما يلي:

$$\Psi:[0,b]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\Delta$$

$$(r,\varphi,\theta)\mapsto\Psi(r,\varphi,\theta)=(x,y,z)$$

حيث :
$$\begin{cases} x=(a+r\cos\theta)\cos\varphi \\ y=(a+r\cos\theta)\sin\varphi \\ z=r\sin\theta \end{cases}$$

ومنه
$$V(\Delta)=\iiint_{\Delta} dxdydz=\iiint_{[0,b]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]}\left|\det J_{\varphi}(r,\varphi,\theta)\right|\,drd\varphi\,d\theta$$

حيث
$$\det J_{\varphi}(r,\varphi,\theta)=r(a+r\cos\theta)$$

$$\begin{aligned} V(\Delta)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{b} r(a+r\cos\theta)drd\varphi d\theta \\ &=2\pi\int_0^b\left[\int_0^{2\pi} r(a+r\cos\theta)d\theta\right]dr \\ &=2\pi\int_0^b 2\pi ar dr \\ &=2\pi^2ab^2 \end{aligned}$$

3.3.3 بعض التطبيقات على حساب المساحات

1.3.3.3 حساب مساحة الغلاف الكروي في IR^3 :

- التمثيل الوسيطي والمعادلات الوسيطية لجزء من الغلاف الكروي:

نعرف التطبيق Φ كما يلي
$$\Phi:[\varphi_1,\varphi_2]\times[\theta_1,\theta_2]\to IR^3$$
$$(\varphi,\theta)\mapsto(x,y,z)$$

حيث :
$$\begin{cases} x=R\sin\theta\cos\varphi \\ y=R\sin\theta\sin\varphi \\ z=R\cos\theta \end{cases}$$

مع
$$\theta\in[\theta_1,\theta_2]\ ,\ \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$$

نحسب في IR^3 مساحة (S) جزء من السطح الكروي لكرة ذات نصف قطر R، نجزئها إلى خطي طول $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ و إلى خطي عرض $\theta_1\le\theta\le\theta_2$.

نضع
$$\Delta=[\varphi_1,\varphi_2]\times[\theta_1,\theta_2]$$

لدينا
$$A(S)=\iint_{\Delta}\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\varphi,\theta)\wedge\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\varphi,\theta)\right\|\, d\varphi\ d\theta$$

حيث
$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\varphi,\theta)\wedge\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\varphi,\theta)\right\|=R^2\sin\theta$$

و منه
$$\begin{aligned}A(S)&=\iint_{\Delta}R^2\sin\theta\ d\varphi\ d\theta\\&=R^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\ d\theta\ d\varphi\\&=R^2(\varphi_2-\varphi_1)(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\end{aligned}$$

ولحساب مساحة كل الغلاف الكروي و ليكن (S') يكفي أخذ $(\varphi_1=0\wedge\varphi_2=2\pi)$ و $(\theta_1=0\wedge\theta_2=\pi)$

فنجد
$$A(S')=R^2(2\pi-0)(\cos 0-\cos\pi)=4\pi R^2$$

2.3.3.3 حساب مساحة الطارة :

سطح الطارة ناتج عن دوران دائرة حول المحور (Oz) نصف قطرها b موجودة في المستوي $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oz})$ حيث $0<b<a$ و $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oz}\right)=\varphi\wedge\overrightarrow{Or}\ \in\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy}\right)$

المعادلات الوسيطية للطارة
$$\begin{cases}x=(a+b\cos\theta)\cos\varphi\\y=(a+b\cos\theta)\sin\varphi\\z=b\sin\theta\end{cases}$$

مع
$$0<b<a\wedge 0\le\varphi\le 2\pi\wedge 0\le\theta\le 2\pi$$

نعرف التطبيق Φ كما يلي
$$\begin{aligned}\Phi:[0,2\pi]\times[0,2\pi]&\to S\\(\varphi,\theta)&\mapsto\Phi(\varphi,\theta)=(x,y,z)\end{aligned}$$

نرمز لسطح الطارة بـالرمز S حيث: $S=\Phi([0,2\pi]^2)$
ونرمز لمساحة الطارة بـالرمز $A(S)$.

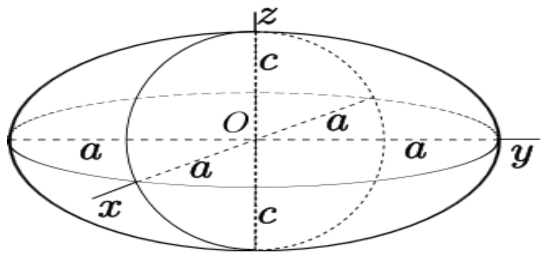
3.3.3.3 حساب مساحة المجسم الناقص في IR^3 :

نرمز بسطح المجسم الناقص بـ S حيث S معرف كما يلي :
$$S=\left\{(x,y,z)\in IR^3:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,a>0,b>0,c>0\right\}$$

نرمز لمساحة السطح S بـ$A(S)$

المعادلات الوسيطية لـ S $\quad \Phi : [0,2\pi]\times[0,2\pi] \to S$

$(\varphi,\theta) \mapsto \Phi(\varphi,\theta) = (x,y,z)$



حيث :

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\theta \end{cases}$$

لدينا $\quad S = \Phi\left([0,2\pi]^2 \right)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\theta \\ b\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\varphi \\ b\cos\theta\sin\varphi \\ -c\sin\theta \end{pmatrix}$$

فيكون:

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\varphi,\theta) \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\varphi,\theta) \right\| = \sqrt{c^2\sin^4\theta(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) + a^2b^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}$$

أي أن :

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{c^2\sin^4\theta\left(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi\right) + a^2b^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}\, d\varphi\, d\theta$$

حالـــــــة خاصـــــــة :

يمكن حساب المساحة من أجل $a=b$ و $a>c$ فإننا نجد:

$$A(S) = 2\pi\left(a^2 + ab\frac{arcthe}{e} \right)$$

يسمى e بالتباعد المركزي (excentricité) .

قائمة المراجع

المراجع

المراجع باللغة العربية:

[1]د- أبو بكر خالدسعد لله ،التحليل الرياضي والجبر،شارع أولاد سيدي الشيخ –الحراش-الجزائر،2008/2007.

[2]د-أبو بكر خالدسعد لله ،التوابع القابلة للمفاضلة ،الفصل 10 قسم الرياضيات المدرسة العليا للأساتذة ،القبة.

[3]د-أحمد عبد العالي هب الريح ،د- رمضان محمد جهيمة ،التفاضل والتكامل الجزء الأول دار الكتاب الجديد المتحدة .

[4] د-أحمد عبد العالي هب الريح ،د- رمضان محمد جهيمة ،التفاضل والتكامل الجزء الثاني دار الكتاب الجديد المتحدة.

[5]د-أنور توفيق اللحام ،مبادئ حساب التفاضل والهندسة التحليلية الجزء الثاني،ديوان المطبوعات الجامعية.

[6]د-إلهام الحمصي ،الرياضيات التحليل الشعاعي والتوابع العقدية الجزء الثالث ،ديوان المطبوعات الجامعية.

[7] بن عيسى لخضر، سعود محمود،التحليل الرياضي الجزء الثاني ،ديوان المطبوعات الجامعية.

[8]شنتي بن سلوى، مسعود حناشي ،دروس وتمارين في التحليل الرياضي ،ديوان المطبوعات الجامعية.

[9]عبد الرقيب ،محاضرات في التكامل المتقدم ،جامعة عدن ، كلية التربية ردفان 2010.

[10]فرنك أيرز حساب التفاضل والتكامل ، طبعة 6 عربية 2001 .

[11]وليد عبد الحق ،الرياضيات للمهندسين التحليل الرياضي ،ديوان المطبوعات الجامعية.

المراجع باللغة الأجنبية:

[12] Lelong-Ferrand ,cours de mathématiques,tom 4,Dunud 1974

[13] N.Piskounov, Calcul differentiel et integral Tome II Mir.Moscou ,1977

الملخص

في هذه المذكرة قمنا بإعطاء فكرة عامة حول التكاملات الثنائية والثلاثية وكيفية حسابهما وخواصهما وبعض التطبيقات عنهما، حيث تكمن أهمية التكامل في العديد من المجالات كالفيزياء والكيمياء والطب والهندسة.

التكاملات الثنائية والثلاثية لها أهمية كبيرة في حساب المساحات والحجوم كنظرية ستوكس و المجسمات وكيفية حساب السطوح وغيرها .

الكلمات المفتاحية:

التكاملات المحدودة- المنطقة المنتظمة - نظرية فوبيني - نظرية ستوكس – المجسمات الناقصية- السطوح - الحجوم والعزوم.

Résumé

Dans ce travail, nous donnons une idée générale sur les intégrales double et triple que la façon des quelques applications et ses propriétés de calculs ,cette intégration très importance dans des domaines nombreux, y compris de la physique, de la chimie et la médecine et de la science géométrie.

en fin, cette intégrale double et triple très plus importance des quelques calcule de surfaces et volume La théorie de Stokes et la façon de calculer les surfaces.

Mots- clés

intégrales borne- région régulière-théorie de fubini- théorème de Stokes-corps elliptique- surfaces- volume et fressure.

Abstract

In this memory, we had presented a general idea about bilateral and trilateral integrals and how it can be calculated, it characteristics and some of their applications. The Importance of the integration appears in several aspects such as : physics, chemistry, medicine and geometry .

The bilateral and trilateral integrals have a great Importance in surface and volume calculating such as the Stocks theory, shapes and how it can be calculated.

Key words

Integrals limited- Regular region-Fubini theory- Stokes theory- Maquettes elliptic- Surfaces- Sizes and plucks .