

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Pour l'obtention du diplômes

MASTER ACADIMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES.
AUX LIMITES PAR DES MÉTHODES VARIATIONNELLES

Par :

GHEMIMA BACHIR

BELLHADI HOUSSIN

Soutenu le **21-06-2020** devant le jury

Président :	Dr. Boukef Samira	MCB	Univ. El Oued
Encadreur :	Dr. Touati brahim Mohammed Said	MCB	Univ. El Oued
Examineur :	Dr. Doudi Najet	MCB	Univ. El Oued

Année universitaire : **2020-2021**

REMERCIEMENT

*En préambule à ce mémoire nous remerciant **ALLAH** qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.*

*Nous tenons à remercier **Dr Touati brahim Said**, qui, en tant que Directeurs de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.*

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Nous n'oublions pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragées au cours de la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

A mes très chers parents

*pour tous les soins et le suivi dont ils font preuve depuis ma naissance et au long de mes
études pour leurs soutien et surtout leurs conseils et amour*

A mes très chères sœurs

A mes très chères frères

A ma grandé famille

A toutes mes amies

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le sujet de ce mémoire s'inscrit dans le domaine des mathématiques appliquées, il porte sur l'étude mathématiques, théorique et numérique de quelques problèmes variationnelle et issus de la mécanique des fluides.

Les équations différentielles permettent d'aborder d'un point de vu mathématiques des phénomènes observés, elles apparaissent souvent dans la modélisation de processus de phénomènes naturels en physique, chimie, biologie,...ect les méthodes variationnelles ont longue historique qui remonte à P. Fermat (1657) et C. Hygens (1960).

Le développement extraordinaire de l'analyse fonctionnelle, théorie de la mesure et de l'intégration qui a explosé en XXe siècle a permis de développer la théorie du calcul variationnel.

Les méthodes variationnelles sont des ensembles de méthodes de resolution numérique permettant de minimiser une fonctionnelle, l'intérêt de cette approche est de pouvoir disposer de concepts et de propriétés dans espaces de Hilbert et de Sobolev.

une formulation faible des EDP qui s'exprime en termes d'algèbre linéaire dans le cadre d'un espace de Hilbert est une formulation variationnelles.

L'étude de fluides est régi par des equations de convection-diffusion stationnaire, les inconnus étant la vitèsse et la pression du fluide.

Le mémoire est divisée en trois chapitres :

Le chapitre I, intitulé " outils d'analyse fonctionnelle" présente quelques outils nécessaires sur l'espace de Hilbert, espace de Sobolev et les opérateurs linéaires.

Le second chapitre porte essentiellement sur l'étude mathématique et théorique de problème variationnelle elliptique.

A la toisième chapitre, intitulé " Etude variatainnelles de problème en mécanique de fluids " est une étude théorique et numérique d'un problème pratique : équations de convection-diffusion, on prouve lexistence et l'unicité de solution, tout d'abord, et s'intrèsse au calcul numérique de solution.

NOTATIONS GÉNÉRALES

\mathcal{H}	Espace de Hilbert.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire.
$\ \cdot \ $	La norme.
$ \cdot $	La valeur absolue.
A	L'opérateur linéaire.
A^\perp	Orthogonal de A .
$\text{Im}(A)$	L'image de l'opérateur A .
$(\text{Im}(A))^\perp$	Orthogonal L'image de l'opérateur A .
$H^m(\Omega)$	Espace de sobolev.
∇	Le gradient.
Δ	Le laplacien.
Ω	Un ouvert dans \mathbb{R}^N .
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions réel indéfiniment différentiables et à support compact continu dans Ω .
$(A_n)_n$	Une suite d'opérateur linéaires bornés dans un espace de Hilbert.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω .
$C^k(\Omega)$	Espace des fonctions K fois continument dérivables dans Ω .
$a(\cdot, \cdot)$	Forme bilinéaire.
$L(\cdot, \cdot)$	Forme linéaire.
A_h	Matrice carrée.
U_h	Le vecteur inconnu.
A^{-1}	Inverse de matrice de A .
\vec{e}	La vecteur d'erreur.
$\text{div}(u)$	La divergence de u .

TABLE DES MATIÈRES

	ii
Notations générales	ii
1 QUELQUES OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE	1
1.1 Espace de Hilbert	2
1.1.1 Produit scalaire	2
1.2 Espace de sobolev	2
1.3 Espace de sobolev $W^{m,p}(I)$	3
1.3.1 Théorème d'injection	4
1.4 Formule de Green	4
1.5 Inégalité utiles et propriétés	4
1.6 Les opérateurs linéaires et bornés sur les espaces de Hilbert	6
1.6.1 Opérateurs linéaires bornés	6
1.7 Convergence sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$	7
1.8 Méthode des éléments finis	8
1.8.1 Méthode de Galerkin	8
1.8.2 Principes généraux sur la méthode des éléments finis	9
1.8.3 Éléments finis en dimension $N = 1$	9
1.8.3.1 Éléments finis P_1 en dimension 1	10
1.8.3.2 Éléments finis P_2 en dimension 1	11
1.8.4 Éléments finis en dimension $N \geq 2$	12
1.8.4.1 Éléments finis rectangulaires	13
1.9 Erreur d'approximation	16
1.9.1 Erreur d'approximation à priori	16
1.9.2 Estimation d'erreur a posteriori	17

2	VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES	18
2.1	Préliminaire	18
2.2	Approche variationnelle	19
2.2.1	Formulation variationnelle	19
2.3	Théorème de Lax Milgram	21
2.3.1	Cadre abstrait	21
2.4	Théorie de l'approximation variationnelle	25
2.5	La convergence	27
3	ETUDE VARIATIONNELLE DE PROBLÈMES EN MÉCANIQUE	28
3.1	Solution positive pour une équation différentielle sur un intervalle borné	29
3.1.1	Un problème monodimensionnel	29
3.1.2	Un problème bidimensionnel	34
3.2	Problème de convection-diffusion stationnaire	40
3.3	Étude théorique d'un problème de convection-diffusion stationnaire en 1D	42
3.3.1	Formulation variationnelle	42
3.3.2	Existence et unicité de la solution	43
3.4	Discrétisation par éléments finis d'un problème de convection- diffusion stationnaire en 1D	44
3.4.1	Algorithme	46
	Bibliographie	48

CHAPITRE 1

QUELQUES OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre, nous présentons quelques outils nécessaires d'analyse fonctionnelle et notations de base sur la théorie de l'approximation variationnelles pour résoudre les équations aux dérivées partielles.

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Produit scalaire

Définition 1.1.1

Soit \mathbb{X} un \mathbb{C} -espace vectoriel, s'il existe un nombre complexe $\phi = \langle \varphi, \psi \rangle$ pour tout couple des vecteurs φ et ψ dans \mathbb{X} qui vérifient les conditions suivantes :

1. $\forall \varphi \in \mathbb{X}, \langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ et $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$,
2. $\overline{\langle \varphi, \psi \rangle} = \langle \psi, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{X}$,
3. $\overline{\langle \varphi + \psi, \phi \rangle} = \overline{\langle \varphi, \phi \rangle} + \overline{\langle \psi, \phi \rangle}, \quad \forall \varphi, \psi$ et $\phi \in \mathbb{X}$,
4. $\overline{\langle \lambda \varphi, \psi \rangle} = \lambda \overline{\langle \varphi, \psi \rangle} \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{X}$, et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

alors, $\langle \varphi, \psi \rangle$ est dit produit scalaire de φ et ψ autrement dit que $(\mathbb{X}, \langle, \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.2

On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire et on pose

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$$

dans ce cas $(\mathbb{X}, \langle, \rangle)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.3

Un espace préhilbertien complet muni de la norme induite par le produit scalaire est dit espace de Hilbert.

Exemple 1.1.1.1

(1) L'espace

$$l^2(\mathbb{C}) = \left\{ \varphi = (\varphi_j)_j \quad \varphi_j \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j|^2 < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire $\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^k \varphi_i \overline{\psi_i}$ est un espace de Hilbert.

(2) Pour tout ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, l'espace $L^2(\Omega; \mathbb{C})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} f(\varphi) \overline{g(\varphi)} d\varphi$$

est un espace de Hilbert.

1.2 Espace de sobolev

Dans ce paragraphe, on va définir quelques espaces de Sobolev usuels que l'on notera par $H^m(\Omega)$ $m \in \mathbb{N}$ et Ω est un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.2.1

On appelle espace de sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ étant la dérivée partielle d'ordre 1 de v par rapport à x_i au sens des distributions.

On munit H^m du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

et on note

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H^1}}$$

la norme correspondante.

1.3 Espace de sobolev $W^{m,p}(I)$ **Définition 1.3.1 [7]**

Soit $m \geq 2$ et p un réel ($1 \leq p \leq \infty$). On définit $W^{m,p}(I)$ par récurrence :

$$W^{m,p}(I) = \{ u \in W^{m-1,p}(I); u' \in W^{m-1,p}(I) \}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

Une fonction u appartient à $W^{m,p}(I)$ si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m y appartiennent aussi.

Plus précisément $u \in W^{m,p}(I)$, si et seulement s'il existe m fonctions $g_1, \dots, g_m \in L^p(I)$ telles que

$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_j \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, \dots, m$$

où $D^j \varphi$ dénote la dérivée à l'ordre j de φ , On peut considérer $u' = g_1, (u')' = g_2 \dots$

jusqu'à l'ordre m , que l'on note aussi $Du, D^2u, \dots, D^m u$. On munit l'espace $W^{m,p}$ de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et H^m du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

1.3.1 Théorème d'injection

Il existe une constante C (dépendant seulement de $\text{mes}(I) \leq \infty$) telle que

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

autrement dit $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ avec injection continue pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

De plus, lorsque I est borné on a

1. l'injection $W^{1,p}(I) \subset C(I)$ est compacte pour $1 < p \leq \infty$ et
2. l'injection $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ est compacte pour $1 \leq p < \infty$.

[7]

1.4 Formule de Green

Théorème 1.4.1 [6]

Soit Ω un ouvert régulier de classe \mathcal{C}^1 .

Soit w une fonction de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$ alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) \chi_i(x) ds$$

où χ_i est la i -ème composante de la normale extérieure unitaire de Ω .

Formule d'intégration par partie

Soit Ω un ouvert régulier de classe \mathcal{C}^1 .

Soit u et v deux fonctions de $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$.

Corollaire (Formule d'intégration par partie)

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \chi_i(x) ds.$$

1.5 Inégalité utiles et propriétés

• **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{X}$, on a

$$|\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}. \quad (1.1)$$

Démonstration :

L'inégalité (1.1) est trivialement satisfaite si $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$. Nous supposons donc que $\langle \varphi, \psi \rangle \neq 0$.

Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \frac{\varphi}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}} - \frac{\langle \varphi, \psi \rangle \psi}{|\langle \varphi, \psi \rangle| \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}}, \frac{\varphi}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}} - \frac{\langle \varphi, \psi \rangle \psi}{|\langle \varphi, \psi \rangle| \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} \right\rangle \\ &\leq 1 - \frac{2|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} + 1 \end{aligned}$$

donc

$$0 \leq 1 - \frac{2|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} + 1 \Rightarrow \frac{2|\langle \varphi, \psi \rangle|}{\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}} \leq 2$$

$$\Rightarrow |\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$$

• **Inégalité de Holder :**

Soient $f \in L^p(\Omega)$ $g \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$fg \in L^1(\Omega), \quad \forall p, q > 0 \quad \text{et} \quad \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.2)$$

• **Théorème Fubini :**

Soit f une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ à valeurs dans \mathbb{C} . Alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

• **Inégalité de Poincaré [8] :**

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n que l'on suppose borné, connexe et de frontière suffisamment régulière.

Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.3)$$

pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration :

Il existe δ tel que $\Omega \subset]-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[\times \mathbb{R}^{n-1}$. On montre l'inégalité de Poincaré pour $\varphi \in D(\Omega)$. Par densité, ça marchera pour H_0^1 . On a

$$\varphi(x_1, x') = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x') dt.$$

Donc par Cauchy-Schwarz,

$$|\varphi(x_1, x')|^2 \leq \delta \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x')^2 dt.$$

On intègre sur Ω ie sur $]-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[\times \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\|\varphi\|_2^2 \leq \delta^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi^2}{\partial x_1} dx \leq \delta^2 \|\nabla \varphi\|_2^2.$$

Autre démonstration. Par l'absurde, on suppose que pour tout n , il existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\|u_n\|_2 > n \|\nabla u_n\|_2.$$

Posons $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_2}$. On a $\|\nabla v_n\| < \frac{1}{n}$.

On a donc $\|v_n\|_{H^1}^2 \leq 2$.

Comme Ω est borné et de C^1 , par Rellich, on a, à une extraction près,

$v_n \rightarrow v$ en norme L^2 .

Ainsi, $\|v\|_2 = 1$ et $\nabla v_n \rightarrow 0$ dans L^2 donc dans D' .

De plus, $v_n \rightarrow v$ dans L^2 donc dans D' donc $\nabla v_n \rightarrow \nabla v$ dans D' donc $\nabla v = 0$ et v est constante sur chaque composante connexe. On sait que $v_n \in H_0^1$, $v_n \rightarrow v$ et $\nabla v_n \rightarrow \nabla v$ donc $v_n \rightarrow v$ dans $H^1(\Omega)$. H_0^1 est un fermé de H^1 donc $v \in H_0^1$ et v est constante sur chaque composante connexe de Ω . Ainsi, $v = 0$ (nulle sur $\partial\Omega$). D'où la contradiction avec $\|v\|_2 = 1$.

• **Inégalité de Minkowski :**

Soient $(\mathbf{X}, \mathbb{X}, \mu)$ et $(\mathbf{Y}, \mathbb{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ -finis et \mathbf{F} une fonction mesurable positive alors, pour tout $p \in [1, +\infty]$

$$\left(\int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{Y}} F(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbf{Y}} \left(\int_{\mathbf{X}} F(x, y)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y) \right).$$

1.6 Les opérateurs linéaires et bornés sur les espaces de Hilbert

Définition 1.6.1

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert.

Une application $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est dite opérateur linéaire si A satisfait les deux conditions suivantes :

- i) **Additivité** : $A(\varphi + \psi) = A(\varphi) + A(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$.
- ii) **Homogénéité** : $A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{C}$.

1.6.1 Opérateurs linéaires bornés

Définitions 1.6.1.1

Un opérateur linéaire A sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est dit borné s'il existe $c > 0$ tel que :

$$\|A\varphi\| \leq c \|\varphi\| \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}.$$

Théorème 1.6.1.1 [4]

Pour tout opérateur linéaire et borné A , on a :

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|A\varphi\| : \|\varphi\| = 1\} \\ &= \sup\{\|A\varphi\| : \|\varphi\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle A\varphi, \psi \rangle| : \|\varphi\| = \|\psi\| = 1\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.6.1.2 [4]

pour tout opérateur linéaire A sur un espace de Hilbert \mathcal{H} les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) A est borné.
- (2) A est continu sur l'espace \mathcal{H} .
- (3) A est continu en φ_0 dans \mathcal{H} .

Démonstration :

(1) \Rightarrow (2) Soit A un opérateur borné, φ_n une suite converge vers φ_0 dans \mathcal{H} , comme

$$0 \leq \|A\varphi_n - A\varphi_0\| = \|A(\varphi_n - \varphi_0)\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi_n - \varphi_0\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

la continuité de A .

(3) \Rightarrow (1) Soit A continu en $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ supposons que A est non borné (i.e : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \varphi_n \neq 0$ vecteur dans \mathcal{H} $\|A\varphi_n\| > n \|\varphi_n\|$). On pose $\psi_n = \frac{\varphi_n}{n\|\varphi_n\|}$; $\|\psi_n\| = \frac{1}{n}$ Or $\psi_n \rightarrow 0$ alors $\psi_n + \varphi_0 \rightarrow \varphi_0$ mais

$$\|A(\psi_n + \varphi_0) - A(\varphi_0)\| = \|A\psi_n\| = \left\| A \frac{\varphi_n}{n\|\varphi_n\|} \right\| = \frac{1}{n\|\varphi_n\|} \|A\varphi_n\| > \frac{n\|\varphi_n\|}{n\|\varphi_n\|} = 1.$$

D'où

$$\|A(\psi_n + \varphi_0) - A(\varphi_0)\| > 1, \forall \psi_n$$

A n'est pas continu en φ_0 , d'où la contradiction donc A est borné.

Théorème 1.6.1.3 [4]

Soient A et B deux opérateurs linéaires et bornés sur un espace de hilbert \mathcal{H} , on a les propriétés suivantes :

(1) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

(2) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(3) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Exemple 1.6.1.1

L'opérateur A_φ est appelé opérateur de multiplication par φ , et on définit.
comme

$$A : (L^2[0, 1], \|\cdot\|_{L^2}) \rightarrow (L^2[0, 1], \|\cdot\|_{L^2}).$$

$$f(\varphi) \longrightarrow \varphi f(\varphi)$$

est borné car : on a $\|A_\varphi f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |A_\varphi f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, alors pour tout $\varphi \in [0, 1]$

$$\|A_\varphi f(\varphi)\|_{L^2}^2 = \|\varphi f(\varphi)\|_{L^2}^2$$

$$\leq \|f(\varphi)\|_{L^2}^2$$

$$\text{donc } \|A_\varphi f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

1.7 Convergence sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ **Définitions 1.7.0.1 [2]**

Soit $(A_n)_n$ une suite d'opérateur linéaires bornés dans un espace de Hilbert \mathcal{H}

1 • On dit que $(A_n)_n$ est convergente uniformément vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow 0$$

appelé aussi convergence en norme et on écrit $A_n \xrightarrow{u} A$.

2 • On dit que $(A_n)_n$ est convergente fortement vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$\forall \varphi \in \mathcal{H} : \|A_n \varphi - A \varphi\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow 0$$

et on écrit $A_n \xrightarrow{s} A$.

3 • On dit que $(A_n)_n$ est convergente faiblement vers $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} : \langle A_n \varphi, \psi \rangle \rightarrow \langle A \varphi, \psi \rangle \text{ quand } n \rightarrow 0$$

et on écrit $A_n \xrightarrow{w} A$.

1.8 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est à la base, nous allons en reprendre les concepts de base et en étendre largement les champs d'application. nous verrons en particulier comment proposer des méthodes numériques permettant de résoudre des problèmes aux limites en dimension supérieure et comment la méthode débouche naturellement sur des concepts mathématiques puissants qui permettent de résoudre les mêmes problèmes en dimension infinie.

Enfin, nous ferons le lien avec le point de vue variationnel qui permet également de mieux cerner les principes mathématiques fondamentaux sous-jacents.

1.8.1 Méthode de Galerkin

On se donne $H_N \subset H$ tel que $\dim H_N < +\infty$, et on cherche à résoudre le problème approché :

$$(P_N) \begin{cases} u^{(N)} \in H_N, \\ a(u^{(N)}, v) = L(v), \forall v \in H_N. \end{cases} \quad (1.4)$$

Théorème 1.8.1.1

Sous les hypothèses précédentes, si $H_N \subset H$ et $\dim H_N = N$, il existe un unique $u^{(N)} \in H_N$ solution de (1.4).

On va donner une autre méthode, constructive, de démonstration de l'existence et unicité de u_N qui permettra d'introduire la méthode de Galerkin.

Comme $\dim H_N = N$, il existe une base $(\phi_1 \dots \phi_N)$ de H_N .

Soit $v \in H_N$, on peut donc développer v sur la base :

$$v = \sum_{i=1}^N v_i \phi_i$$

et identifier v au vecteur $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$.

En écrivant que u satisfait (1.4) pour tout $v = \phi_i = 1, N$:

$$a(u, \phi_i) = L(\phi_i), \forall i = 1, \dots, N$$

et en développant u sur la base $(\phi_i)_{i=1, \dots, N}$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^N a(\phi_j, \phi_i) u_j = L(\phi_i), \forall i = 1, \dots, N.$$

On peut écrire cette dernière égalité sous forme d'un système linéaire : $AU = \mathcal{F}$,

$$A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \text{ et } \mathcal{F}_i = L(\phi_i), \text{ pour } i, j = 1, \dots, N.$$

La matrice A n'est pas en général symétrique.

1.8.2 Principes généraux sur la méthode des éléments finis

Le principe de la méthode des éléments finis est de construire une approximation interne espaces V_h des espaces fonctionnels habituels $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$, \dots , dont la définition est basé sur le concept géométrique d'un maillage du domaine Ω . Un maillage est un tessellation de l'espace par des volumes élémentaires très simples :

triangles, tétraèdres, parallélépipèdes, nous donnerons plus tard une définition précise d'un maillage dans le cadre de la méthode des éléments finis.

Dans ce contexte, le paramètre h de V_h correspond à la taille maximale de la ou les cellules qui composent le maillage.

En règle générale, une base de V_h sera composée fonctions dont le support est localisé en un ou peu d'éléments. Cela aura deux conséquences importantes : d'une part, dans la limite $h \rightarrow 0$, l'espace V_h sera de plus en plus grand et s'approchera peu à peu de tout l'espace V , et sur d'autre part, la matrice de rigidité A_h du système linéaire sera clairsemée, c'est-à-dire que la plupart de ses coefficients seront nuls (ce qui limitera le coût de la solution).

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus efficaces et les plus populaires pour résoudre numériquement les problèmes de valeur limite. C'est la base d'innombrables logiciels.

1.8.3 Éléments finis en dimension $N = 1$

Le principe de base de la méthode des éléments finis consiste à considérer un maillage du domaine $\Omega =]0, 1[$. En dimension 1 un maillage est simplement constitué d'une collection de points $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ (comme pour la méthode des différences finies) tels que

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Le maillage sera dit uniforme si les points x_j sont équidistants, c'est-à-dire que

$$x_j = jh \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{n+1}, 0 \leq j \leq n+1.$$

Les points x_j sont également appelés les *vertices* ou *noeuds* de la maille. Pour plus de simplicité, nous tenir compte, pour l'instant, du problème de modèle suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

qui, nous le savons, a une solution unique au H_0^1 si $f \in L_2(\Omega)$.

En tout qui suit, nous dénotent par p_k l'ensemble des polynômes, avec des coefficients réels, d'un réel variable avec un degré inférieur ou égal à k .

1.8.3.1 Éléments finis P_1 en dimension 1

La méthode des éléments finis P_1 repose sur l'espace discret des fonctions globalement continues et affines sur chaque maille

$$V_h = \left\{ v \in C([0, 1]) \text{ tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_1, \forall 0 \leq j \leq n \text{ et } v(0) = v(1) = 0 \right\} \quad (1.6)$$

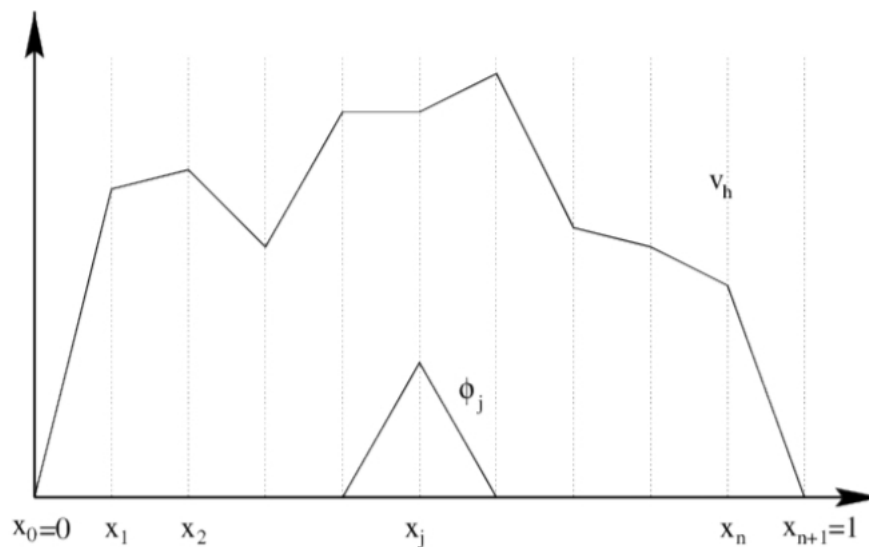


FIGURE 1.1 – Maillage de $\Omega =]0; 1[$ et fonction de base en éléments finis P_1 .

On peut représenter les fonctions de V_h , affines par morceaux, à l'aide de fonctions de base très simples appelées "fonctions chapeau" définies pour $j = 1, \dots, n$ par

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}], \\ \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}]. \end{cases} \quad (1.7)$$

Lorsque le maillage est uniforme, les fonctions de base se définissent à partir d'une unique fonction ϕ par

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x-x_j}{h}\right), \quad (1.8)$$

où

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Lemme 1.8.3.1 [1]

L'espace V_h défini par (1.6), est espace de $C^0([0,1])$ de dimension n , et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$

$$v_h = \sum_{j=1}^n v_h(x_j) \phi_j(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

Démonstration :

C'est immédiat en remarquant que $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i=j$ et 0 sinon (voir la Figure (1.1)).

1.8.3.2 Éléments finis P_2 en dimension 1

La méthode des éléments finis P_2 repose sur l'espace discret

$$V_h = \left\{ v \in C([0,1]) \text{ tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_2, \forall 0 \leq j \leq n \text{ et } v(0) = v(1) = 0 \right\}. \quad (1.9)$$

Les fonctions de V_h sont continues, paraboliques par morceaux et on peut les représenter à l'aide de fonctions de base très simples. Ci-dessous, nous donnons les formules dans le cas du maillage

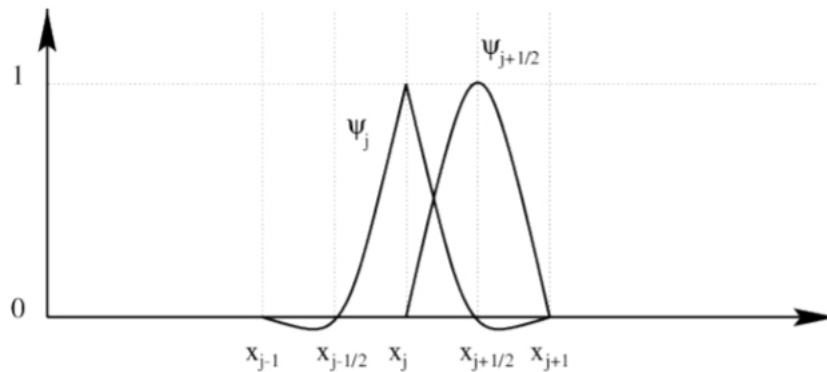


FIGURE 1.2 – Les fonctions de base des éléments finis P_2 .

uniforme et laissons le lecteur les généralités au cas du maillage quelconque.

Introduisons tout d'abord les points milieux des segments $[x_j, x_{j+1}]$ définis par $x_{j+\frac{1}{2}} = x_{j+\frac{h}{2}}$ pour $0 \leq j \leq n$.

On définit aussi deux fonctions mères

$$\phi_j(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ (1-x)(1-2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases} \quad (1.10)$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} 1-4x^2 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

pour $0 \leq j \leq n+1$ on définit fonctions de base (voir Figure (1.2))

$$\psi_j(x) = \phi\left(\frac{x-x_j}{1}\right), 1 \leq j \leq n, \quad \text{et} \quad \psi_{j+\frac{1}{2}}(x) = \psi\left(\frac{x-x_{j+\frac{1}{2}}}{h}\right), 0 \leq j \leq n.$$

Lemme 1.8.3.2 [1]

L'espace V_h , défini par (1.9) est un sous-espace de $C^0(0,1)$ de dimension $2n+1$, et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ et aux milieux $(x_{j+\frac{1}{2}})_{0 \leq j \leq n}$

$$v_h = \sum_{j=1}^n v_h(x_j) \psi_j(x) + \sum_{j=0}^n v_h(x_{j+\frac{1}{2}}) \psi_{j+\frac{1}{2}}(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

1.8.4 Éléments finis en dimension $N \geq 2$

Nous nous plaçons maintenant dans $N \geq 2$ dimensions d'espace (en pratique $N = 2, 3$).

À simplifier l'exposition, certains résultats ne seront prouvés qu'en $N = 2$ dimensions, mais ils s'étendent à $N = 3$ dimensions (avec le coût, parfois, d'importants aspects techniques et complications pratiques).

Nous considérons le problème de Dirichlet modèle

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.11)$$

dont nous savons qu'il a une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$, si $f \in L^2(\Omega)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que le domaine Ω est un polyédrique (polygone si $N = 2$), c'est-à-dire Ω est une union finie de polyèdres de R^N .

Rappelons qu'un polyèdre est une intersection finie de demi-espaces de R^N et que les parties de sa limite qui appartiennent à un seul hyperplan sont appelées ses faces. La raison de cette hypothèse est qu'il n'est possible de mailler exactement de tels ensembles ouverts.

1.8.4.1 Éléments finis rectangulaires

Tout commence par la définition d'un maillage du domaine Ω par des triangles en dimension $N = 2$ et des tétraèdres en dimension $N = 3$. on regroupe les triangles et les tétraèdres dans la famille plus générale des N -simplexes. on appelle N -simplexe K de \mathbb{R}^N l'enveloppe convexe de $(N + 1)$ points $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ de \mathbb{R}^N , appelés sommets de K .

Bien sur un 2-simplexe est simplement un triangle et un 3-simplexe un tétraèdre (voir la Figure 1.4). On dit que le N -simplexe K est non dégénéré si les points $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ n'appartiennent pas à un même hyperplan de \mathbb{R}^N (le triangle ou le tétraèdre est non "plat"). Si on note $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq N}$ les coordonnées du vecteur a_j , la condition de non dégénérescence de K est que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

soit inversible (ce que l'on supposera toujours par la suite). Un N -simplexe a autant de faces que de sommets, qui sont elles-mêmes des $(N - 1)$ -simplexes.

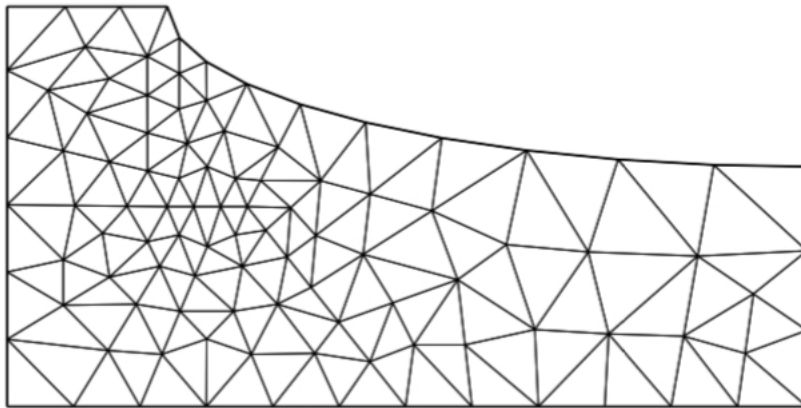


FIGURE 1.3 – Exemple de maillage triangulaire en dimension $N = 2$.

Définitions 1.8.4.1

Soit Ω un ouvert connexe polyédrique de \mathbb{R}^N . Un maillage triangulaire ou une triangulation de $\bar{\Omega}$ est un ensemble \mathcal{T}_h de N -simplexes (non dégénérés) $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui vérifient

1. $K_i \subset \bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^n K_i$
2. l'intersection $K_i \cap K_j$ de deux N -simplexes distincts est un m -simplexe, avec $0 \leq m \leq N - 1$, dont tous les sommets sont aussi des sommets de K_i et K_j . (En dimension $N = 2$, l'intersection de deux triangles est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit une arête commune

entière; en dimension $N = 3$, l'intersection de deux tétraèdres est soit vide, soit un sommet commun, soit une arête commune entière, soit une face commune entière).

Les sommets ou noeuds du maillage \mathcal{T}_h sont les sommets des N -simplexes K_i qui le composent.

Par convention, le paramètre h désigne le maximum des diamètres des N -simplexes K_i .

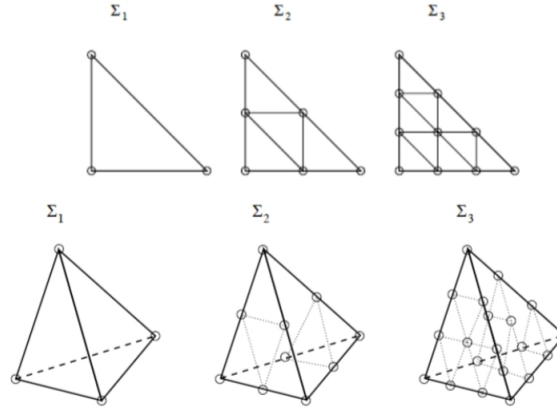


FIGURE 1.4 – Treillis d'ordre 1, 2, et 3 pour un triangle (en haut) et un tétraèdre (en bas). Les ronds représentent les points du treillis.

Dans un N -simplexe K il est commode d'utiliser des coordonnées barycentriques au lieu des coordonnées cartésiennes usuelles. Rappelons que, si K est un N -simplexe non dégénéré de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$, les coordonnées barycentriques $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ de $x \in \mathbb{R}^N$ sont définies par

$$\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{N+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N \quad (1.13)$$

qui admet bien une unique solution car la matrice A , définie par (1.12), est inversible.

Remarquons que les λ_j sont des fonctions affines de x . On vérifie alors que

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \lambda_j(x) \geq 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq N + 1 \right\}, \quad (1.14)$$

et que les $(N + 1)$ faces de K sont les intersections de K et des hyperplans $\lambda_j(x) = 0, 1 \leq j \leq N + 1$.

On peut alors définir un ensemble de points de K qui vont jouer un rôle particulier pour la suite : pour tout entier $k \geq 1$ on appelle treillis d'ordre k l'ensemble

$$\Sigma_k = \left\{ x \in K \text{ tel que } \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq N \right\}. \quad (1.15)$$

Pour $k = 1$ il s'agit de l'ensemble des sommets de K , et pour $k = 2$ des sommets et des points milieux des arêtes reliant deux sommets (voir la Figure (1.4)).

Dans le cas général, Σ_k est un ensemble fini de points $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$.

Nous définissons maintenant l'ensemble \mathbb{P}_k des polynômes à coefficients réels de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré

inférieur ou égal à k , c'est-à-dire que tout $p \in \mathbb{P}_k$ s'écrit sous la forme

$$p(x) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_N \\ i_1 + \dots + i_N \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N} \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N).$$

L'intérêt de la notion de treillis Σ_k d'un N -simplexe K est qu'il permet de caractériser tous les polynômes de \mathbb{P}_k (on dit que Σ_k est unisolvant pour \mathbb{P}_k).

Lemme 1.8.4.1 [1]

Soit K un N -simplexe. Pour un entier $k \geq 1$, soit Σ_k le treillis d'ordre k , défini par (1.15), dont les points sont notés $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$. Alors, tout polynôme de \mathbb{P}_k est déterminé de manière unique par ses valeurs aux points $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$. Autrement dit, il existe une base $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ de \mathbb{P}_k telle que

$$\psi_j(\sigma_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n_k.$$

Démonstration :

Le cardinal de Σ_k et la dimension de \mathbb{P}_k coïncident

$$\text{card}(\Sigma_k) = \dim(\mathbb{P}_k) = \frac{(N+k)!}{N!k!}$$

(le vérifier en guise d'exercice, au moins pour $k = 1, 2$). Comme l'application qui, à tout polynôme de \mathbb{P}_k , fait correspondre ses valeurs sur le treillis Σ_k est linéaire, il suffit de montrer qu'elle est injective pour montrer qu'elle est bijective. Soit donc un polynôme $p \in \mathbb{P}_k$ qui s'annule sur Σ_k . Montrons, par récurrence sur la dimension N , que p est identiquement nul sur \mathbb{R}^N . Pour $N = 1$, il est clair qu'un polynôme de degré k qui s'annule en $(k+1)$ points distincts est nul. Supposons le résultat vrai à l'ordre $N-1$. Comme x dépend linéairement des coordonnées barycentriques $(\lambda_j(x))_{1 \leq j \leq N+1}$, on peut définir un polynôme $q(\lambda) = p(x)$ de degré au plus k en la variable $\lambda \in \mathbb{R}^{N+1}$. Si l'on fixe une coordonnée λ_j dans l'ensemble $\{0, 1/k, \dots, (k-1)/k, 1\}$ et que l'on pose $\lambda = (\lambda', \lambda_j)$, on obtient un polynôme $q_j(\lambda') = q(\lambda)$ qui dépend de $N-1$ variables indépendantes (car on a la relation $\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1$) et qui est nul sur la section du treillis Σ_k correspondant à la valeur fixée de λ_j . Comme cette section est aussi le treillis d'ordre k d'un $(N-1)$ -simplexe dans l'hyperplan λ_j fixé, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et en déduire que $q_j = 0$. Autrement dit, le facteur $\lambda_j(\lambda_j - 1/k) \cdots (\lambda_j - (k-1)/k)(\lambda_j - 1)$ divise q , ce qui est une contradiction avec le fait que le degré de $q(\lambda)$ est inférieur ou égal à k , sauf si $q = 0$, ce qui est le résultat désiré.

Lemme 1.8.4.2 [1]

Soit K et K' deux N -simplexes ayant une face commune $\Gamma = \partial K \cap \partial K'$. Soit un entier $k \geq 1$. Alors, leurs treillis d'ordre k , Σ_k et Σ'_k coïncident sur cette face Γ . De plus, étant donné p_K et $p_{K'}$, deux polynômes de \mathbb{P}_k , la fonction v définie par

$$v(x) = \begin{cases} p_K(x) & \text{si } x \in K \\ p_{K'}(x) & \text{si } x \in K' \end{cases}$$

est continue sur $K \cup K'$, si et seulement si p_k et $p_{k'}$ ont des valeurs qui coïncident aux points du treillis sur la face commune Γ .

Démonstration :

Il est clair que la restriction à une face de K de son treillis d'ordre Σ_k est aussi un treillis d'ordre k dans l'hyperplan contenant cette face, qui ne dépend que des sommets de cette face. Par conséquent, les treillis Σ_k et Σ'_k coïncident sur leur face commune Γ .

Si les polynômes p_k et $p_{k'}$ coïncident aux points de $\Sigma_k \cap \Gamma$, alors par application du Lemme (1.8.4.1) ils sont égaux sur Γ , ce qui prouve la continuité de v .

Exemple 1.8.4.1

Soit K un N -simplexe de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$. Montrer que tout polynôme $p \in \mathbb{P}_1$ se met sous la forme

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} p(a_j) \lambda_j(x)$$

où les $(\lambda_j(x))_{1 \leq j \leq N+1}$ sont les coordonnées barycentriques de $x \in \mathbb{R}^N$.

Soit p un polynôme de degré un et K un N -simplexe de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$.

Comme $x = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) a_j$, et que l'application qui à x associe $p(x) - p(0)$ est linéaire, on a

$$p(x) - p(0) = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) (p(a_j) - p(0)).$$

Comme $\sum_j \lambda_j = 1$, on en déduit que

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j(x) p(a_j).$$

1.9 Erreur d'approximation

Pour un problème donné

u_h une solution calculée approximation de u solution exacte.

l'erreur d'approximation est donnée par :

$$\| u - u_h \| .$$

1.9.1 Erreur d'approximation à priori

En connaissant le comportement de l'erreur a priori, pour h une taille de maille et p un degré d'interpolation :

$$\| u - u_h \| \leq C(u) h^p$$

Remarque 1.9.1.1

Estimation d'erreur a priori $\|u - u_h\|_{L^2} \leq C_1 h^{p_i+1}$

$$\|u - u_h\|_1 \leq C_2 h^{p_i}$$

$$\|u - u_h\|_v \leq C_h \|u\|_{H^2}$$

ou' :

- C_1 et C_2 constantes indépendantes du maillage.
- h est le diamètre maximale des éléments.
- p_i est le degré maximal des fonctions d'interpolation.

1.9.2 Estimation d'erreur a posteriori

$$\|u - u_h\|_x \leq G(h, f_h, u_h) + k(h, f).$$

La quantilé $G(h, f_h, u_h)$ peut se calculer explicitement une fois la solution discrète u_h calculé

CHAPITRE 2

VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

2.1 Préliminaire

L'approximation par éléments finis de certaines équations aux dérivées partielles pose naturellement plusieurs questions. La première est celle de l'existence de solution à l'équation que l'on souhaite résoudre. En effet, si l'équation n'a pas de solution, que calcule-t-on numériquement .

Néanmoins, même si le problème que l'on étudie possède une solution, ce n'est pas suffisant. Il faut également que cette solution varie continûment (dans un sens à préciser) en fonction des données.

En effet, en pratique, les données du problème ne sont connues qu'approximativement et on ne souhaite pas que la solution que l'on calcule numériquement soit trop éloignée de la solution exacte. Enfin, on souhaiterait pouvoir quantifier l'erreur commise par la méthode en fonction des éléments à notre disposition (typiquement le maillage, le second membre de l'équation, la donnée au bord, etc.).

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique qui correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. Nous allons montrer que les problèmes aux limites sont bien posés pour ces e.d.p. elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution unique, et dépendent continûment des données.

L'approche que nous allons suivre est appelée approche variationnelle. Elle généralise en dimension infinie . Disons tout de suite que l'intérêt de cette approche dépasse, et de loin, le cadre des e.d.p. elliptiques et même le cadre d'analyse mathématique pure auquel nous nous restreignons pour l'instant. En effet, elle sera cruciale pour comprendre la méthode numérique des éléments finis que nous avons vu. Par ailleurs, cette approche admet une interprétation physique ou mécanique très naturelle. Autant dire que le lecteur ne peut pas faire l'économie de la présentation qui suit de cette approche

variationnelle

Au cours de ce chapitre, nous utiliserons d'équation aux dérivées partielles de type elliptique que nous rappelons ci-dessous

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet. dans (2.1), Ω est un ouvert de l'espace \mathbb{R}^N , $\partial\Omega$ est son bord (ou frontière), f est un second membre (une donnée du problème), et u est l'inconnue.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $\bar{\Omega}$ sa fermeture. On note $C(\Omega)$ (respectivement, $C(\bar{\Omega})$) l'espace des fonctions continues dans Ω (respectivement, dans $\bar{\Omega}$). Soit un entier $k \geq 0$. On note $C^k(\Omega)$ (respectivement, $C^k(\bar{\Omega})$) l'espace des fonctions k fois continument dérivables dans Ω (respectivement, dans $\bar{\Omega}$)

2.2 Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle, nous commençons par donner quelques résultats essentiels à ce sujet.

2.2.1 Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert Ω est borné et régulier, et que le second membre f de (2.1) est continu sur $\bar{\Omega}$. Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivant

Théorème 2.2.1.1 [1]

Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$. Soit X l'espace défini par

$$X = \left\{ \phi \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Alors u est une solution du problème aux limites (2.1) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour toute fonction } v \in X. \quad (2.2)$$

L'égalité (2.2) est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites (2.1).

Remarque 2.2.1.1

Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (2.2) est qu'elle a un sens si la solution u est seulement une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$, contrairement à la formulation "classique" (2.1) qui requiert que u appartienne à $C^2(\bar{\Omega})$. On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre (2.2) que (2.1) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution. Dans la formulation variationnelle (2.2), la fonction

v est appelée fonction test. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (2.1) En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de "principe des travaux virtuels". En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité. Lorsqu'on prend $v = u$ dans (2.2), on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine Ω (le terme de gauche de (2.2)) et une énergie potentielle associée à f (le terme de droite de (2.2)).

Démonstration :

Si u est solution du problème aux limites (2.1), on multiplie l'équation par $v \in X$ et on utilise la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds.$$

Or $v = 0$ sur $\partial\Omega$ puisque $v \in X$, donc

$$\int_{\Omega} f(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx,$$

qui n'est rien d'autre que la formule (2.2).

Réciproquement, si $u \in X$ vérifie (2.2), en utilisant "à l'envers" la formule d'intégration par parties précédente on obtient

$$\int_{\Omega} (\Delta u(x) + f(x))v(x)dx = 0 \text{ pour toute fonction } v \in X.$$

Comme $(\Delta u + f)$ est une fonction continue, on conclut que $-\Delta u(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Par ailleurs, comme $u \in X$, on retrouve la condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire que u est solution du problème aux limites (2.1)

Lemme 2.2.1.1

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit $g(x)$ une fonction continue dans Ω . Si pour toute fonction ϕ de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω , on a

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx = 0$$

alors la fonction g est nulle dans Ω .

Démonstration :

Supposons qu'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $g(x_0) > 0$ (sinon on prend $-g$). Par continuité, il existe un petit voisinage ouvert $\omega \subset \Omega$ de x_0 tel que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \omega$. Soit alors une fonction test positive, non nulle, ϕ à support inclus dans ω . On a

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx = \int_{\omega} g(x)\phi(x)dx = 0$$

qui est une contradiction avec l'hypothèse sur g . Donc $g(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Remarque 2.2.1.2

En notation compacte on peut réécrire la formulation variationnelle (2.2) sous la forme :
trouver $u \in X$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in X$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx$$

où $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur X et $L(\cdot)$ est une forme linéaire sur X . C'est sous cette forme abstraite que nous résoudrons (avec quelques hypothèses) la formulation variationnelle dans la prochaine section.

L'idée principale de l'approche variationnelle est de montrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (2.2), ce qui entraînera le même résultat pour l'équation (2.1) à cause de la théorème (2.2.1.1). En effet, nous allons voir qu'il existe une théorie à la fois simple et puissante pour analyser les formulations variationnelles. Néanmoins cette théorie ne fonctionne que si l'espace dans lequel on cherche la solution et dans lequel on prend les fonctions tests (dans les notations précédentes, l'espace X) est un espace de Hilbert, ce qui n'est pas le cas pour $X = \{v \in C^1(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ muni du produit scalaire "naturel" pour ce problème. La principale difficulté dans l'application de l'approche variationnelle sera donc qu'il faudra utiliser un autre espace que X , à savoir l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ qui est bien un espace de Hilbert.

2.3 Théorème de Lax Milgram

2.3.1 Cadre abstrait

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert réel V . Rappelons qu'un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , muni d'un produit scalaire, noté $\langle x, y \rangle$, qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire, notée $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. (Un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est une suite convergente dont la limite appartient à cet espace.) Suivant la Remarque (2.2.1.2) nous considérons une formulation variationnelle du type

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in V. \quad (2.3)$$

Les hypothèses sur a et L sont

1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V , c'est-à-dire que $v \rightarrow L(v)$ est linéaire de V dans \mathbb{R} et il existe $C > 0$ tel que

$$|L(v)| \leq C\|v\| \text{ pour tout } v \in V.$$

2. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V , c'est-à-dire que $w \rightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $v \in V$, et $v \rightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $w \in V$;
3. $a(\cdot, \cdot)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|a(w, v)| \leq M\|w\|\|v\| \text{ pour tout } w, v \in V. \quad (2.4)$$

4. $a(\cdot, \cdot)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq \nu\|v\|^2 \text{ pour tout } v \in V. \quad (2.5)$$

Théorème 2.3.1.1 [Lax-Milgram] [1]

Soit V un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V , $a(\cdot, \cdot)$, une forme bilinéaire continue coercive sur V . Alors la formulation variationnelle (2.3) admet une unique solution. De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire L .

Démonstration :

Pour tout $w \in V$, l'application $v \rightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire continue sur V : par conséquent, le théorème de représentation de Riesz entraîne qu'il existe un élément de V , noté $A(w)$, tel que

$$a(w, v) = \langle A(w), v \rangle \text{ pour tout } v \in V .$$

Par ailleurs, la bilinéarité de $a(w, v)$ implique évidemment la linéarité de l'application $w \rightarrow A(w)$. De plus, en prenant $v = A(w)$, la continuité (2.4) de $a(w, v)$ montre que

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M\|w\|\|A(w)\|,$$

c'est-à-dire que $\|A(w)\| \leq M\|w\|$ et donc $w \rightarrow A(w)$ est continue. Une autre application du Théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe un élément de V , noté f , tel que $\|f\|_V = \|L\|_{V'}$ et

$$L(v) = \langle f, v \rangle \text{ pour tout } v \in V .$$

Finalement, le problème variationnel (2.3) est équivalent à : trouver $u \in V$ tel que

$$A(u) = f. \quad (2.6)$$

Pour démontrer le théorème il nous faut donc montrer que l'opérateur A est bijectif de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à L). La coercivité (2.5) de $a(w, v)$ montre que

$$\nu\|w\|^2 \leq a(w, w) = \langle A(w), w \rangle \leq \|A(w)\|\|w\|,$$

ce qui donne

$$\nu\|w\| \leq \|A(w)\| \text{ pour tout } w \in V , \quad (2.7)$$

c'est-à-dire que A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est-à-dire que $\text{Im}(A) = V$ (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que $\text{Im}(A)$ est fermé dans V et

que $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$. En effet, dans ce cas on voit que $V = \{0\}^\perp = (\text{Im}(A)^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(A)} = \text{Im}(A)$, ce qui prouve bien que A est surjectif.

Soit $A(w_n)$ une suite dans $\text{Im}(A)$ qui converge vers b dans V . En vertu de on a

$$v \|w_n - w_p\| \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc w_n est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V , c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A (2.7) on en déduit que $A w_n$ converge vers $A(w) = b$ c'est-à-dire que $b \in \text{Im}(A)$ est donc fermé. D'autre part, soit $v \in \text{Im}(A)^\perp$ la coercivité (2.5) de $a(w, v)$ implique que

$$v \|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle A(v), v \rangle = 0$$

c'est-à-dire que $v = 0$ et $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. Soit A^{-1} son inverse : l'inégalité (2.7) avec $w = A^{-1}(v)$ prouve que A^{-1} est continu, donc la solution u dépend continûment de f . \square

Remarque 2.3.1.1

Si l'espace de Hilbert V est de dimension finie (ce qui n'est cependant jamais le cas pour les applications que nous visons), la démonstration du Théorème (2.3.1.1) de Lax-Milgram se simplifie considérablement. En effet, en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues et l'injectivité (2.7) de A est équivalent à son inversibilité. On voit bien dans ce cas (comme dans le cas général) que l'hypothèse de coercivité de la forme bilinéaire $a(w, v)$ est essentielle puisque c'est elle qui donne l'injectivité de A . Remarquons pour finir que, si $V = \mathbb{R}^N$, une formulation variationnelle n'est que l'écriture, $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$ pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, d'un simple système linéaire $Au = f$.

Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier si la forme bilinéaire est symétrique. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle (2.3) réalise le minimum d'une énergie (très naturelle en physique ou en mécanique).

Proposition 2.3.1.1 [1]

On se place sous les hypothèses du Théorème (2.3.1.1) de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique $a(w, v) = a(v, w)$ pour tout $v, w \in V$. Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \tag{2.8}$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle (2.2). Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (2.3).

Démonstration :

Si u est solution de la formulation variationnelle (2.3), on développe (grâce à la symétrie de a)

$$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) + a(u,v) - L(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \geq J(u).$$

Comme $u+v$ est quelconque dans V , u minimise bien l'énergie J dans V . Réciproquement, soit $u \in V$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

Pour $v \in V$ on définit une fonction $j(t) = J(u+tv)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (il s'agit d'un polynôme du deuxième degré en t). Comme $t=0$ est un minimum de j , on en déduit que $j'(0) = 0$ qui, par un calcul simple, est exactement la formulation variationnelle (2.3).

Exemple 2.3.1.1

le problème de Dirichlet (2.1) sa formulation variationnelle (2.2) à condition de poser $v \in H_0^1(\Omega)$ muni de $\|v\| = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

il est évident que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ respectivement la forme linéaire $L(\cdot)$ est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ respectivement sur $H_0^1(\Omega)$, puisque nous avons

$$a(u,v) \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$a(u,v) \leq \|f\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

D'autre part puisque Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est $H_0^1(\Omega)$ elliptique on a en effet en vertu de l'inégalité de Poincaré

$$\forall v \in H_0^1(\Omega). a(v,v) \geq \frac{1}{1+C^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

D'après le théorème (2.3.1.1), il existe donc fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ et une seule telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),$$

De plus puisque la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique d'après la Proposition 2.2.1.1 cette fonction u minimise la fonctionnelle quadratique

$$j(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx$$

sur l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Exemple 2.3.1.2

le problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

$$v \in H^1(\Omega), \text{ muni de } \|v\| = \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv dx,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

il résulte immédiatement de théorème (2.3.1.1) qu'il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ et une seule telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

c'est-à-dire u solution de (2.3).

D'après la Proposition (2.3.1.1) cette fonction u est l'unique élément de $H^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle

$$j(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\partial(v)}{\partial(x_i)} \right| + |v| \right) dx - \int_{\Omega} f v dx$$

sur l'espace $H^1(\Omega)$.

2.4 Théorie de l'approximation variationnelle

On reprend le cadre abstrait précédent : soient V un espace de Hilbert réel ; une forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto a(u, v)$, continue et V -elliptique, et une forme linéaire L continue sur V . La méthode d'approximation (dite méthode de Galerkin) du problème (2.3) consiste à remplacer l'espace V par une famille de sous-espaces V_h de dimension finie, $h > 0$, et on résout le problème suivant : Trouver $u_h \in V_h$, solution de

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h. \quad (2.10)$$

Lemme 2.4.1

Si la forme bilinéaire a est V -elliptique, alors le problème (2.10) a une solution unique $u_h \in V_h$

Démonstration :

Comme V_h est un espace fermé pour la norme de V , on a clairement que la forme bilinéaire a restreinte à V_h c'est-à-dire $a|_{V_h}$ est continue et V_h -elliptique. De même, $L|_{V_h} \in V_h'$, puisque

$$|L(v)| \leq C \|v\|, \forall v \in V,$$

implique par restriction que

$$|L(v_h)| \leq C \|v_h\|, \forall v_h \in V_h$$

D'après le Lemme de Lax-Milgram, le problème (2.10) a une solution unique $u_h \in V_h$. La preuve du Lemme est terminée.

La solution u_h ainsi obtenue est appelée l'approximation de Galerkin de u . Maintenant, on va montrer que la résolution de (2.10) est équivalente à la résolution d'un système linéaire (fini). Ce qui est veut dire qu'il peut être résolu numériquement. Pour cela et pour $h > 0$ fixé, considérons $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ une base de V_h , N étant sa dimension. Ainsi $v_h \in V_h$ si et seulement si il existe $\{\beta_i\}_{i=1}^N$ tel que

$$v_h = \sum_{j=1}^N \beta_j \varphi_j.$$

En particulier $u_h \in V_h$, donc on peut écrire

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i.$$

Avec cette notation, le problème (2.10) est équivalent à

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^N a(\varphi_j, \varphi_k) \beta_k \alpha_j &= \sum_{k=1}^N L(\varphi_k) \beta_k, \forall \beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N \\ \iff \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_k) \alpha_j &= L(\varphi_k), 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Ce dernier système linéaire peut s'écrire

$$A_h U_h = L_h,$$

où A_h , dite de rigidité, est la matrice carrée tel que

$$A_h = (a(\varphi_j, \varphi_k))_{1 \leq k, j \leq N}$$

le vecteur donné L_h est la matrice colonne :

$$L_h = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_N) \end{pmatrix}$$

Finalement, U_h est le vecteur inconnu :

$$U_h = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$$

La matrice A_h étant inversible (la forme bilinéaire étant V_h - elliptique), donc le système linéaire admet une solution unique. Ce qui est implique que le problème (2.10) admet $u_h \in V_h$ comme solution unique.

2.5 La convergence

Une fois, l'existence de u_h établie, il nous faut comparer u et u_h .

le but étant de montrer que

$$u - u_h \rightarrow 0,$$

lorsque $h \rightarrow 0$. Pour cela on établit le théorème suivant connu sous le nom de Théorème de Céa.

Théorème 2.5.1 [1]

Soient $u \in V$ la solution du problème (2.2) et $u_h \in V_h$ la solution du problème (2.10).

Alors

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Démonstration :

Comme (2.2) est vraie pour tout $v \in V$, donc l'identité suivante reste vraie pour tout $v_h \in V_h$ i.e.,

$$a(u, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

Retranchant cette identité à (1.6), on obtient :

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h.$$

Ainsi, on peut écrire que

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h), \forall v_h \in V_h.$$

On sait que a est V -elliptique et continue donc

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h), \forall v_h \in V_h \\ &\leq M_a \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V, \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M_a}{\alpha} \|u - v_h\|_V, \forall v_h \in V_h \\ \iff \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \end{aligned}$$

Théorème 2.5.2 [1]

On suppose qu'il existe un sous espace V_0 dense dans V et une application tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_V = 0, \forall v \in V_0.$$

Alors, la méthode d'approximation variationnelle converge, c'est à dire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0.$$

où $u \in V$ la solution du problème (2.2) et $u_h \in V_h$ la solution du problème (2.10)

CHAPITRE 3

ETUDE VARIATIONNELLE DE PROBLÈMES EN MÉCANIQUE

Le chapitre porte sur l'étude de problème de convection-diffusion, nous démontrons l'existence et l'unicité de solution, et nous utilisons une variationnelle de la méthode d'élément finis pour approcher la vitesse et la pression du fluide dans Ω .

3.1 Solution positive pour une équation différentielle sur un intervalle borné

Avant d'être exposé au problème proposé, nous nous référons à l'étude de solutions positives à des problèmes d'élasticité sur un domaine borné. En utilise ici un schéma aux différences finies.

3.1.1 Un problème monodimensionnel

Dans cette section, nous considérons le fil tendu entre ses extrémités, ou la poutre, appuyée en ses extrémités, situées en 0 et 1. On suppose qu'il ou elle est soumis à une force extérieure transverse (telle que son poids, dans le cas du fil pesant). On note $f : x \mapsto f(x)$ la densité linéique des forces appliquées, et $u : x \mapsto u(x)$ le déplacement transversal induit, que l'on cherche à approcher numériquement. Nous avons admis que les équations de l'élasticité linéaire monodimensionnelles (1D) normalisées permettent de modéliser correctement le phénomène. Rappelons-en la forme :

$$-u''(x) = f(x) \text{ sur }]0, 1[, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (3.1)$$

Dans le cas particulier où $f \equiv 1$, la solution est égale à

$$u_0(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$$

Ce résultat élémentaire sera utile par la suite... On suppose que la solution u est de classe $C^4([0, 1])$ ou, ce qui est équivalent, que la donnée f est de classe $C^2([0, 1])$ Pour déterminer une méthode d'approximation de l'équation aux dérivées partielles (3.1) (ça n'est pas la seule !), on utilise la

Proposition 3.1.1.1 [3]

Soient $x \in]0, 1[$ et h tel que $[x-h, x+h] \subset [0, 1]$. Alors

$$\exists \theta \in]-1, 1[\text{ tel que } -u''(x) = \frac{-u(x-h) + 2u(x) - u(x+h)}{h^2} + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x+\theta h) \quad (3.2)$$

Démonstration :

On utilise la formule de Taylor-Mac Laurin.

$$\begin{aligned} \exists \theta^- \in]-1, 0[\text{ tel que } u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x+\theta^-h) \\ \exists \theta^+ \in]0, 1[\text{ tel que } u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x+\theta^+h) \end{aligned}$$

On somme les deux égalités, pour trouver

$$-u''(x) = \frac{-u(x-h) + 2u(x) - u(x+h)}{h^2} + \frac{h^2}{24} \left(u^{(4)}(x+\theta^-h) + u^{(4)}(x+\theta^+h) \right)$$

Pour arriver à l'expression annoncée, il faut se souvenir du théorème des valeurs intermédiaires. Il permet, puisque $u^{(4)}$ est continue, de remplacer les deux termes en $u^{(4)}$ par $2u^{(4)}(x+\theta h)$, mais avec un paramètre θ appartenant à $[\theta^-, \theta^+]$, donc à $]-1, 1[$ comme annoncé.

Remarque 3.1.1.1

Le premier terme de (3.2) est une bonne approximation de $-u''(x)$, sous réserve que h est petit.

En effet, comme on a la relation $-u^{(4)} = f''$, on sait que

$$\left| \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x + \theta h) \right| \leq \frac{C_{f,2}}{12} h^2, \text{ avec } C_{f,2} = \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$$

Ce résultat simple fournit une méthode de discrétisation et d'approximation de l'équation de départ (3.1); on parle souvent de schéma numérique de discrétisation. Le terme différences finies provient quant à lui de l'expression (3.2) on remplace une dérivée, qui est par définition la limite d'un taux de variation, par un taux de variation, dont le dénominateur conserve une valeur finie non nulle (ici h^2 pour une dérivée seconde). En pratique, comment procède-t-on? Pour commencer, on choisit $N \in \mathbb{N}$, et on fixe $h = \frac{1}{N+1}$. Remarquons tout de suite que pour avoir une "bonne" approximation de $u''(x)$, il convient que h soit petit. Ceci signifie que N est un paramètre de discrétisation qui aura vocation à devenir "grand", lors de la réalisation des expériences numériques.

Nous allons construire une méthode qui permet d'approcher la valeur de u aux points $x_i = ih$, pour $i \in \{0, 1, \dots, N+1\}$, par des nombres, notés $(u_i)_{0 \leq i \leq N+1}$. Puisque u est approchée en deux points consécutifs distants de h , on appelle h le pas de discrétisation.

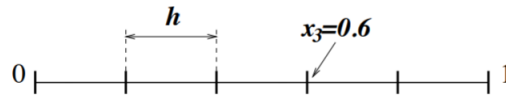


FIGURE 3.1 – Le segment découpé ($N = 4$, $h = 0.2$)

Remarque 3.1.1.2

Comme on sait que $u(0) = u(1) = 0$, on choisira toujours comme approxi-

$$\text{mation } u_0 = u_{N+1} = 0!$$

On définit $f_i = f(x_i)$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$, et on considère l'ensemble des équations

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f_i, 1 \leq i \leq N, \text{ avec } u_0 = u_{N+1} = 0. \quad (3.3)$$

Chaque équation faisant intervenir trois nombres parmi $(u_i)_i$, on parle de schéma à trois points.

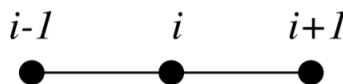


FIGURE 3.2 – Le schéma aux différences finies à trois points

NB. Noter la similitude entre (3.3) d'une part, et (3.2) et (3.1) en $x = x_i$, d'autre part. Si on appelle \vec{u} (resp. \vec{f}) le vecteur de \mathbb{R}^N de composantes $(u_i)_{1 \leq i \leq N}$ (resp. $(f_i)_{1 \leq i \leq N}$), on peut réécrire le

système (3.3) sous la forme vectorielle équivalente

$$\mathbb{A}_1 \vec{u} = \vec{f}, \text{ avec } \mathbb{A}_1 = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (3.4)$$

Par construction, la matrice \mathbb{A}_1 est

- tridiagonale, c'est-à-dire que tous les termes non nuls sont regroupés sur trois diagonales ;
- symétrique, puisque $(\mathbb{A}_1)_{i,j} = (\mathbb{A}_1)_{j,i}$, pour $1 \leq i, j \leq N$.

Il convient maintenant de vérifier qu'il existe une solution \vec{u} unique de (3.4) Qui plus est, est-il possible de calculer et majorer l'erreur commise ? C'est l'objet des résultats ci-dessous. Tout d'abord, nous allons vérifier que la matrice \mathbb{A}_1 est inversible. Outre l'obtention de l'existence et de l'unicité de \vec{u} , ceci nous permettra de construire une formule explicite, exprimant l'erreur commise en fonction des données du problème. Par ailleurs, pour exploiter cette formule, c'est-à-dire pour majorer l'erreur, nous allons étudier les caractéristiques de l'inverse \mathbb{A}_1^{-1} .

Définition 3.1.1

Un vecteur v de \mathbb{R}^N est dit positif lorsque $v_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq N$.

Une matrice A de $\mathbb{R}^{N \times N}$ est dite positive lorsque $A_{i,j} \geq 0, \forall 1 \leq i, j \leq N$.

Une matrice A de $\mathbb{R}^{N \times N}$ est dite monotone lorsqu'elle est inversible, d'inverse positive.

Avant de nous intéresser au cas particulier de la matrice issue du schéma à trois points, donnons une caractérisation simple des matrices monotones.

Proposition 3.1.1.2

Une matrice A de $\mathbb{R}^{N \times N}$ est monotone si, et seulement si, on a l'inclusion

$$\{v \in \mathbb{R}^N : Av \geq 0\} \subset \{v \in \mathbb{R}^N : v \geq 0\} \quad (3.5)$$

Démonstration :

Supposons que A est monotone.

Soit v tel que $Av \geq 0$, alors $v = A^{-1}(Av)$ et, pour $1 \leq i \leq N$,

$$v_i = \sum_j (A^{-1})_{i,j} (Av)_j \geq 0 \text{ puisque } (A^{-1})_{i,j} \text{ et } (Av)_j \text{ sont positifs par hypothèse.}$$

Ainsi $v \geq 0$, et l'inclusion (3.5) est vérifiée.

Réciproquement, si l'inclusion est satisfaite, montrons tout d'abord que A est inversible.

Soit donc v tel que $Av = 0$: on a $Av \geq 0$ et $A(-v) \geq 0$, ce qui implique $v \geq 0$ et $(-v) \geq 0$, id est $v = 0$, d'où l'inversibilité.

Sachant que A^{-1} existe, étudions sa positivité... On note $(e_i)_i$ la base orthonormale canonique de \mathbb{R}^N .

Alors les $f_i = A^{-1}e_i$, pour i variant de 1 à N , sont les vecteurs colonnes de A^{-1} . On a bien sur

$e_i = Af_i$, et l'inclusion (3.5) permet d'affirmer que f_i est positif, puisque e_i l'est.

En d'autres termes, tous les éléments de A^{-1} sont positifs. En conclusion, la matrice A est monotone.

Proposition 3.1.1.3

La matrice \mathbb{A}_1 correspondant à (3.4) est monotone.

Démonstration :

Pour prouver que \mathbb{A}_1 est monotone, on reprend la proposition (3.1.1.2) Soit v tel que $\mathbb{A}_1 v \geq 0$, et $v_k = \min_{1 \leq i \leq N} v_i$ (ou, de façon équivalente, $v_k \leq v_i, \forall i$). Le but est d'arriver à l'inégalité $v_k \geq 0$. On

a

$$\begin{cases} 2v_1 - v_2 \geq 0 \\ -v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} \geq 0, & 2 \leq i \leq N-1 \\ -v_{N-1} + 2v_N \geq 0 \end{cases}$$

Si $v_k = v_1$, on trouve

$$v_k \geq v_2 - v_k \geq 0.$$

De même si $v_k = v_N$. Si $k \in \{2, \dots, N-1\}$, on trouve cette fois

$$(v_k - v_{k-1}) + (v_k - v_{k+1}) \geq 0.$$

Or, $v_k \leq v_{k-1}$ et, de même, $v_k \leq v_{k+1}$. On a donc $(v_k - v_{k-1}) + (v_k - v_{k+1}) \leq 0$, ce qui donne

$$v_{k-1} = v_{k+1} = v_k!$$

Par récurrence, on arrive facilement à $v_1 = \dots = v_{k-1} = v_k = v_{k+1} = \dots = v_N$. Et la première (ou la dernière) équation donne à nouveau $v_k \geq 0$. NB. Dans le corps de la preuve, on a obtenu l'inclusion

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^N : v_i = \lambda, 1 \leq i \leq N, \lambda \in \mathbb{R}^+ \right\} \subset \left\{ v \in \mathbb{R}^N : \mathbb{A}_1 v \geq 0 \right\}$$

Exemple 3.1.1.1

Déduire de la proposition précédente un principe de positivité pour le problème (3.4), homologue discret du principe général (avec donnée nulle sur la frontière).

Comme \mathbb{A}_1 est monotone, elle est en particulier inversible : c'est cette propriété que nous allons utiliser maintenant, pour déterminer l'erreur commise. Soit \vec{e} le vecteur de \mathbb{R}^N dont les composantes sont égales à $e_i = u_i - u(x_i)$, pour i variant de 1 à N . Comme pour \vec{u} , on adopte la convention $e_0 = e_{N+1} = 0$ (justifiée par le fait que $u(0) = u(1) = 0$, et $u_0 = u_{N+1} = 0!$). Sachant que u (resp. \vec{u}) est solution de l'équation (3.1) (resp. (3.4)), on a alors, d'après (3.3), pour i compris entre 1 et N :

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_1 \vec{e})_i &= \frac{-e_{i-1} + 2e_i - e_{i+1}}{h^2} = (\mathbb{A}_1 \vec{u})_i - \frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}))}{h^2} \\ &= f(x_i) - \frac{-u(x_i - h) + 2u(x_i) - u(x_i + h))}{h^2} = f(x_i) + u''(x_i) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i + \theta_i h) \\ &= \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i + \theta_i h) = \frac{h^2}{12} f''(x_i + \theta_i h), \text{ avec } \theta_i \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

Dans l'esprit de la remarque (3.1.1.1), on introduit le vecteur $\vec{\varepsilon}$ de \mathbb{R}^N , dont les composantes sont égales à $\varepsilon_i = (\mathbb{A}_1 \vec{\varepsilon})_i = \frac{h^2}{12} f''(x_i + \theta_i h)$, pour i variant de 1 à N , et dont la norme est telle que $\|\vec{\varepsilon}\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} C_{f,2}$ par construction. On en déduit alors l'expression de l'erreur commise

$$\vec{e} = \mathbb{A}_1^{-1} \vec{\varepsilon} \quad (3.6)$$

Pour poursuivre, utilisons le fait que tous les éléments de \mathbb{A}_1^{-1} sont positifs. En reprenant l'expression de l'erreur (3.6), on peut alors écrire

$$|e_i| = \left| \sum_j (\mathbb{A}_1^{-1})_{i,j} \varepsilon_j \right| \leq \sum_j (\mathbb{A}_1^{-1})_{i,j} |\varepsilon_j| \leq \sum_j (\mathbb{A}_1^{-1})_{i,j} \|\vec{\varepsilon}\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} C_{f,2} \sum_j (\mathbb{A}_1^{-1})_{i,j} \quad (3.7)$$

Pour finalement arriver à une majoration de l'erreur commise, il suffit de majorer $\sum_j (\mathbb{A}_1^{-1})_{i,j}$ dans (3.7), pour $1 \leq i \leq N$.

Proposition 3.1.1.4

La somme des éléments de chaque ligne de \mathbb{A}_1^{-1} est inférieure ou égale à $1/8$.

Démonstration :

On remarque que $\sum_j (\mathbb{A}_1^{-1})_{i,j} = \sum_j (\mathbb{A}_1^{-1})_{i,j} \delta_j$, sous réserve que $\delta_j = 1$, pour tout j . A quoi correspond le vecteur $\vec{\delta}$ ainsi construit ? On pose $\vec{u}_0 = \mathbb{A}_1^{-1} \vec{\delta}$, soit $\mathbb{A}_1 \vec{u}_0 = \vec{\delta}$. $\vec{\delta}$ joue le rôle d'un second membre de (3.5). Il correspond de fait à $f \equiv 1$, ce qui nous renvoie à la solution u_0 de (3.2). Or, dans ce cas très particulier,

$$-u_0''(x) = \frac{-u_0(x-h) + 2u_0(x) - u_0(x+h)}{h^2}, \forall x \in]0, 1[, \forall h \text{ t. q. } [x-h, x+h] \subset [0, 1]$$

Ainsi, \vec{u}_0 tel que $(u_0)_i = u_0(x_i)$ vérifie

$$\mathbb{A}_1 \vec{u}_0 = \vec{\delta}, \text{ soit } \vec{u}_0 = \mathbb{A}_1^{-1} \vec{\delta}, \text{ ou } \sum_j (\mathbb{A}_1^{-1})_{i,j} = u_0(x_i), 1 \leq i \leq N$$

Et $\sup_{x \in [0,1]} u_0(x) = u_0(1/2) = 1/8$, ce qui permet de conclure. On a donc démontré le

Théorème 3.1.1.1 [3]

Lorsque la solution u est de classe $\mathcal{C}^4([0, 1])$, l'erreur est telle que

$$\|\vec{e}\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|. \quad (3.8)$$

En conclusion, l'erreur "ponctuelle" tend uniformément vers 0 comme h^2 . NB. Lorsque h décroît, N croît en proportion inverse. Bref, l'erreur maximale décroît selon le carré de h , alors que le nombre d'inconnues croît en $1/h \dots$

Ceci étant, cette estimation dépend de la régularité de u (ou, ce qui revient au même dans le cas 1D, de celle de f).

Théorème 3.1.1.2 [3]

Lorsque la solution u est de classe $\mathcal{C}^2([0, 1])$, l'erreur est telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|\vec{e}\|_\infty = 0 \quad (3.9)$$

Définition 3.1.2

Une matrice A de $\mathbb{R}^{N \times N}$ est dite définie-positif lorsque $(v, Av) > 0, \forall v \in \mathbb{R}^N$. Notons tout de suite le résultat général ci-dessous.

Proposition 3.1.1.5

Toute matrice définie-positif A de $\mathbb{R}^{N \times N}$ est inversible.

Démonstration :

En effet, $Av = 0 \implies (v, Av) = 0 \implies v = 0$.

Proposition 3.1.1.6

La matrice \mathbb{A}_1 de (2.5) est symétrique définie-positif.

Démonstration :

Nous avons déjà remarqué que la matrice \mathbb{A}_1 est symétrique. Il reste à vérifier qu'elle est définie-positif. On applique la définition, en formant le produit scalaire $h^2(v, \mathbb{A}_1 v)$, pour un vecteur v de \mathbb{R}^N quelconque :

$$\begin{aligned} h^2(v, \mathbb{A}_1 v) &= h^2 \sum_{i=1}^N v_i (\mathbb{A}_1 v)_i = v_1 (2v_1 - v_2) + \sum_{i=2}^{N-1} v_i (-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}) + v_N (-v_{N-1} + v_N) \\ &= 2 \sum_{i=1}^N v_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N-1} v_i v_{i+1} = v_1^2 + v_N^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (v_i^2 - 2v_i v_{i+1} + v_{i+1}^2) \\ &= v_1^2 + v_N^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (v_i - v_{i+1})^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $(v, \mathbb{A}_1 v) \geq 0$. De plus, $(v, \mathbb{A}_1 v) = 0$ entraîne que $v_1 = v_N = 0$, et $v_i = v_{i+1}$, pour $i = 1, \dots, N-1$.

On en déduit par récurrence que $v_i = 0$, pour $i = 2, \dots, N-1$, et donc $v = 0$.

3.1.2 Un problème bidimensionnel

Dans cette section, on va proposer une méthode de calcul des (petits) déplacements de la membrane élastique, soumise à des forces verticales. Dans \mathbb{R}^2 , on considère une membrane carrée, $D =]0, 1[\times]0, 1[$, soumise à une force verticale, de densité surfacique $f(x, y)$, et fixée en sa frontière ∂D . On note $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$ le déplacement transversal induit par l'application de la force, dont on rappelle qu'il est solution du problème bidimensionnel (2D) normalisé

$$-\Delta u = f \text{ sur } D, \quad u = 0 \text{ sur } \partial D \quad (3.10)$$

Pour discrétiser le problème à l'aide de la méthode des différences finies, on s'inspire très fortement de la méthode employée pour le problème 1D (3.1). En effet, on remarque qu'en 1D on a les égalités $-u'' = -\frac{d^2}{dx^2} u = -\Delta_1 u$, id est (3.1) est un Laplacien 1D à résoudre ! Si la solution u est de classe $C^4([0, 1]^2)$, on peut écrire l'équivalent de la proposition (3.1.1.1). NB. Malheureusement, et contrairement au cas 1D, on n'a plus l'équivalence entre u de classe $C^4([0, 1]^2)$ et f de classe $C^2([0, 1]^2) \dots$

Proposition 3.1.2.1

Soient $(x, y) \in]0, 1[^2$ et (h_1, h_2) tels que

$[x - h_1, x + h_1] \in [0, 1]$, et $[y - h_2, y + h_2] \in [0, 1]$. Alors $\exists (\theta_1, \theta_2) \in]-1, 1[^2$ tels que

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-u(x - h_1, y) + 2u(x, y) - u(x + h_1, y)}{h_1^2} + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x + \theta_1 h_1, y)$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-u(x, y - h_2) + 2u(x, y) - u(x, y + h_2)}{h_2^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y + \theta_2 h_2).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} -\Delta_2 u(x, y) &= \frac{-u(x - h_1, y) + 2u(x, y) - u(x + h_1, y)}{h_1^2} + \frac{-u(x, y - h_2) + 2u(x, y) - u(x, y + h_2)}{h_2^2} \\ &\quad + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x + \theta_1 h_1, y) + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y + \theta_2 h_2). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Remarque 3.1.2.1 [3]

Les deux premiers termes de (3.11) sont une bonne approximation de $-\Delta_2 u(x, y)$ sous réserve que h_1 et h_2 soient petits. Le reste est en effet borné par

$$\frac{1}{12} (h_1^2 + h_2^2) C_{u,4}, \text{ avec } C_{u,4} = \max \left(\sup_{(x,y) \in [0,1]^2} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) \right|, \sup_{(x,y) \in [0,1]^2} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) \right| \right)$$

Dans la suite, on va considérer un pas de discrétisation identique¹ selon la direction des x , et celle des y , c'est-à-dire $h = h_1 = h_2$. Chacun des intervalles $[0, 1]$ est découpé en $n + 1$ intervalles égaux de longueur $h = 1/(n + 1)$. Puis on calcule les nombres $(u_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n+1}$, qui sont les valeurs approchées de la solution u aux points d'abscisse $x_i = ih$ et d'ordonnée $y_j = jh$. On note $(f_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ les valeurs $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$, pour i et j variant de 1 à n .

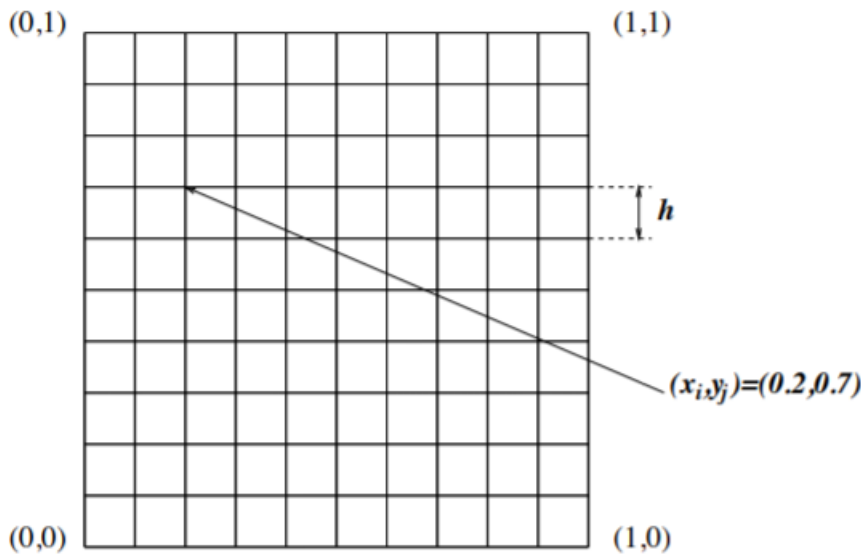


FIGURE 3.3 – et les points de discrétisation ($n = 9, h = 0.1$)

Le Laplacien 2D est approché par une combinaison linéaire de valeurs $u_{i,j}$, selon le schéma ‘à cinq points

$$-\Delta_2 u(x_i, y_j) \approx \frac{-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}}{h^2}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

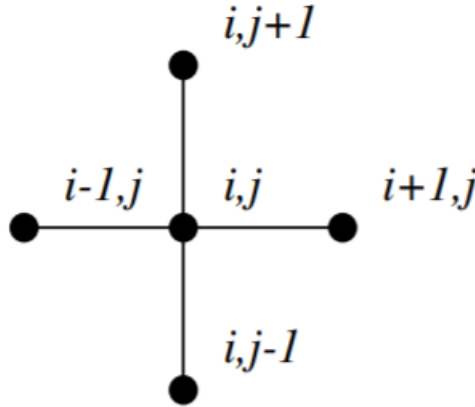


FIGURE 3.4 – Le schéma aux différences finies à cinq points

Le problème (3.10) est donc approché de la manière suivante :

on remplace la recherche de la fonction u , par la recherche des n^2 valeurs $u_{i,j} \in \mathbb{R}$ qui vérifient les relations

$$\frac{-u_{i,j-1} - u_{i-1,j} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.12)$$

Les valeurs de u sur la frontière ∂D , ici $u(0, \cdot)$ et $u(1, \cdot)$, ainsi que $u(\cdot, 0)$ et $u(\cdot, 1)$, sont connues (et égales à zéro). Il en est donc de même pour $u_{0,j}$, $u_{n+1,j}$, $u_{i,0}$ et $u_{i,n+1}$, pour i et j variant de 1 à n . Il reste donc au total $N = n^2$ valeurs à calculer.

On les regroupe n par n , ainsi que les $(f_{i,j})_{i,j}$, en opérant l'identification $u_{\cdot,j} = (u_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$.

Le bloc $u_{\cdot,j}$ appartient à \mathbb{R}^n , avec

$$u_{\cdot,j} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{n,j} \end{pmatrix}$$

Il en est de même pour $f_{\cdot,j} \in \mathbb{R}^n$. Ensuite, on pose

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_{\cdot,1} \\ \vdots \\ u_{\cdot,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_{\cdot,1} \\ \vdots \\ f_{\cdot,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

Ainsi, on a numéroté les inconnues ligne par ligne, dans le sens croissant, pour les indices i (au sein d'une ligne) et j (numéro de ligne). Les inconnues $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont solutions du système linéaire formé des N relations (3.12). Ce système linéaire peut être écrit sous la forme

$$\mathbb{A}_2 \vec{u} = \vec{f}, \quad (3.13)$$

avec \mathbb{A}_2 une matrice de $\mathbb{R}^{N \times N}$. Si l'on s'intéresse à sa structure interne, on vérifie facilement que l'on peut écrire

$$\mathbb{A}_2 = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \mathbb{B}_1 & T & & & \\ T & \mathbb{B}_1 & T & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & T & \mathbb{B}_1 & T \\ & & & T & \mathbb{B}_1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Ci-dessus, les blocs autres que \mathbb{B}_1 et T sont nuls et, par ailleurs, $T = -I_n$, avec I_n la matrice identité d'ordre n , et $\mathbb{B}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice tridiagonale définie par

$$\mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2I_n + h^2 \mathbb{A}_1.$$

La matrice \mathbb{A}_2 est donc pentadiagonale par points (i. e. avec tous les éléments non nuls regroupés sur cinq diagonales), et tridiagonale par blocs, lorsque la numérotation est celle indiquée cidessus : ligne par ligne (j croissant), et i croissant au sein d'une ligne.

Récapitulons. Si on note avec un seul indice les composantes de \vec{u} , c'est-à-dire $(u_I)_{1 \leq I \leq N}$, on a les correspondances :

$$\text{composante } I \equiv i, j \iff I = i + (j - 1)n \text{ ou } \begin{cases} i = (I - 1) \bmod n + 1 \\ j = \lfloor (I - 1)/n \rfloor + 1 \end{cases}. \quad (3.15)$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés de la matrice \mathbb{A}_2 . Nous allons d'abord établir qu'elle est monotone, puis qu'elle est symétrique définie-positive, comme \mathbb{A}_1 .

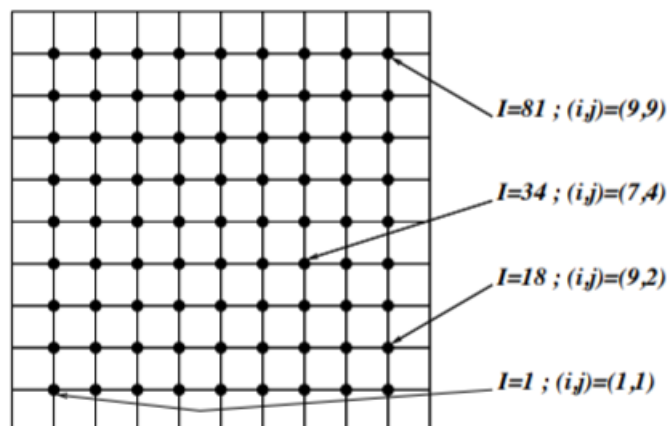


FIGURE 3.5 – Les deux numérotations : $I \in (1, \dots, 81)$ et $i, j \in (1, \dots, 9)$

Nous allons maintenant étudier les propriétés de la matrice A_2 . Nous allons d'abord établir qu'elle est monotone, puis qu'elle est symétrique définie-positive, comme A_2

Théorème 3.1.2.1

La matrice \mathbb{A}_2 des systèmes linéaires (3.13) et (3.14) est monotone.

Démonstration :

Soit donc $v \in \mathbb{R}^N$ tel que $\mathbb{A}_2 v \geq 0$. Composante par composante (avec le double indexage i, j), ceci signifie

$$4v_{1,1} - v_{2,1} - v_{1,2} \geq 0 \quad (3.16)$$

$$4v_{n,1} - v_{n-1,1} - v_{n,2} \geq 0 \quad (3.17)$$

$$4v_{1,n} - v_{1,n-1} - v_{2,n} \geq 0 \quad (3.18)$$

$$4v_{n,n} - v_{n,n-1} - v_{n-1,n} \geq 0 \quad (3.19)$$

$$4v_{i,1} - v_{i-1,1} - v_{i+1,1} - v_{i,2} \geq 0 \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad (3.20)$$

$$4v_{1,j} - v_{1,j-1} - v_{2,j} - v_{1,j+1} \geq 0 \quad 2 \leq j \leq n-1 \quad (3.21)$$

$$4v_{n,j} - v_{n,j-1} - v_{n-1,j} - v_{n,j+1} \geq 0 \quad 2 \leq j \leq n-1 \quad (3.22)$$

$$4v_{i,n} - v_{i,n-1} - v_{i-1,n} - v_{i+1,n} \geq 0 \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad (3.23)$$

$$4v_{i,j} - v_{i,j-1} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} - v_{i,j+1} \geq 0 \quad 2 \leq i, j \leq n-1. \quad (3.24)$$

Ci-dessus, on a isolé des lignes de la matrice \mathbb{A}_2 correspondant respectivement

1. En (3.16) - (3.19) aux coins de la grille, d'indices (i, j) parmi $\{(1, 1), (n, 1), (1, n), (n, n)\}$.
2. En (3.20) - (3.23) au bord de la grille, coins exclus, d'indices (i, j) avec $i \in \{1, n\}$ ou (exclusif) $j \in \{1, n\}$.
3. En (3.24) aux points internes de la grille, d'indices (i, j) avec $i, j \in \{2, \dots, n-1\}$. Soit maintenant $v_{\min} = \min_{i,j} v_{i,j}$. On veut prouver que $v_{\min} \geq 0$

pour pouvoir conclure grâce à la proposition (3.1.1.2). Comme la grille comprend des points aux coins, sur le bord (coins exclus) et intérieurs, on traite les trois cas correspondants.

1. Si v_{\min} correspond à un coin (par exemple $v_{\min} = v_{1,1}$), (3.16) fournit l'inégalité

$$2v_{\min} \geq (v_{2,1} - v_{\min}) + (v_{1,2} - v_{\min}) \geq 0$$

2. Si v_{\min} correspond à un point du bord différent d'un coin (par exemple $v_{\min} = v_{i,1}$, $i \in \{2, \dots, n-1\}$ donné), (3.20) fournit l'inégalité

$$v_{\min} \geq (v_{i-1,1} - v_{\min}) + (v_{i+1,1} - v_{\min}) + (v_{i,2} - v_{\min}) \geq 0$$

3. Si v_{\min} correspond à un point intérieur, (3.24) fournit l'inégalité

$$(v_{\min} - v_{i,j-1}) + (v_{\min} - v_{i-1,j}) + (v_{\min} - v_{i+1,j}) + (v_{\min} - v_{i,j+1}) \geq 0$$

Pour conclure dans le cas 3., il faut se ramener aux cas 1. ou 2. Or, d'après la définition de v_{\min} , chacun des quatre termes entre parenthèses est négatif ou nul. Il sont donc tous nuls, c'est-à-dire

$$v_{\min} = v_{i,j-1} = v_{i-1,j} = v_{i+1,j} = v_{i,j+1}$$

Comme dans le cas 1D (cf. la preuve de la proposition (3.1.1.3)), on peut raisonner par récurrence (sur i et sur j), pour trouver finalement que $v_{i,j} = v_{\min}$ en tous les points, coins exceptés. Mais ceci est suffisant pour conclure, car les points du bord (hors coins) sont compris, et le cas 2. s'applique.

Pour établir le caractère défini-positif de \mathbb{A}_2 , nous allons reprendre l'écriture par blocs $n \times n$ de celle-ci (3.24).

Proposition 3.1.2.2

La matrice \mathbb{A}_2 du système linéaire (3.13) est symétrique définie-positive.

Démonstration :

Pour commencer, la matrice \mathbb{A}_2 est symétrique par construction. On forme, pour $v \in \mathbb{R}^N$, $h^2(v, \mathbb{A}_2 v)$:

$$h^2(v, \mathbb{A}_2 v) = \left(\begin{pmatrix} \mathbb{B}_1 & -I_n & & & \\ -I_n & \mathbb{B}_1 & -I_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -I_n & \mathbb{B}_1 & -I_n \\ & & & & -I_n & \mathbb{B}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\cdot,1} \\ \vdots \\ v_{\cdot,n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{\cdot,1} \\ \vdots \\ v_{\cdot,n} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbb{B}_1 v_{\cdot,1} - v_{\cdot,2}, v_{\cdot,1})_n + \sum_{2 \leq j \leq n-1} (-v_{\cdot,j-1} + \mathbb{B}_1 v_{\cdot,j} - v_{\cdot,j+1}, v_{\cdot,j})_n + (-v_{\cdot,n-1} + \mathbb{B}_1 v_{\cdot,n}, v_{\cdot,n})_n \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} (\mathbb{B}_1 v_{\cdot,j}, v_{\cdot,j})_n - 2 \sum_{1 \leq j \leq n-1} (v_{\cdot,j}, v_{\cdot,j+1})_n \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} (2 \|v_{\cdot,j}\|_n^2 + h^2(\mathbb{A}_1 v_{\cdot,j}, v_{\cdot,j})_n) - 2 \sum_{1 \leq j \leq n-1} (v_{\cdot,j}, v_{\cdot,j+1})_n \\ &= \|v_{\cdot,1}\|_n^2 + \|v_{\cdot,n}\|_n^2 + h^2 \sum_{1 \leq j \leq n} (\mathbb{A}_1 v_{\cdot,j}, v_{\cdot,j})_n + \sum_{1 \leq j \leq n-1} \|v_{\cdot,j} - v_{\cdot,j+1}\|_n^2 \end{aligned}$$

Ci-dessus, on a noté $(\cdot, \cdot)_n$ le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n , et $\|\cdot\|_n$ la norme associée. Comme \mathbb{A}_1 est définie-positive, on en déduit immédiatement que $h^2(v, \mathbb{A}_2 v)$ est positif ou nul, puisque c'est une somme de termes positifs. Si on suppose que $h^2(v, \mathbb{A}_2 v) = 0$, on trouve $\sum_{1 \leq j \leq n} (\mathbb{A}_1 v_{\cdot,j}, v_{\cdot,j})_n = 0$, ce qui implique $v_{\cdot,j} = 0$ pour $1 \leq j \leq n$, soit finalement $v = 0$.

Théorème 3.1.2.2 [3]

Lorsque la solution u est de classe $C^4([0, 1]^2)$, l'erreur est telle que

$$\|\vec{e}\|_\infty \leq Ch^2(C_{u,4} + hC_{u,3}), \text{ avec } C_{u,3} = \max \left(\sup_{(x,y) \in [0,1]^2} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) \right|, \sup_{(x,y) \in [0,1]^2} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, y) \right| \right),$$

3.2 Problème de convection-diffusion stationnaire

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que le problème $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k\Delta u(x, t) + \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x, t) = 0$, $t \in]0, T[$.

est en état d'équilibre $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, tel que le champ de vitesse \vec{v} décrit un écoulement incompressible (c'est-à-dire qu'il a une divergence nulle $\text{div } \vec{v} = 0$). On voudrait alors trouver la solution u du problème de convection-diffusion stationnaire suivant : [5]

$$\begin{cases} -k\Delta u + \vec{v} \cdot \nabla u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.25)$$

où $f \in L^2(\Omega)$, et

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix}$$

avec $v_i(x) \geq 0$ et borné $\forall x \in \Omega$, et de plus : $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $v_{i_0}(x) \geq \beta > 0, \forall x \in \Omega$ où β est une constante positive. $k > 0$ est le coefficient de diffusivité,

On pose $V = H_0^1(\Omega)$. Supposons que la solution $u \in H^2(\Omega)$, alors en multipliant l'équation de problème (3.25) par une "fonction test" $w \in V = H_0^1(\Omega)$, et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} -k \int_{\Omega} \Delta u(x) w(x) dx + \int_{\Omega} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) w(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) w(x) dx, \\ \iff -k \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} w(x) dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n v_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) w(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) w(x) dx, \end{aligned}$$

D'après la formule de Green (1.4.1) cette égalité devient

$$k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} w d\sigma + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} w(x) dx = \int_{\Omega} f(x) w(x) dx.$$

Comme $w \in H_0^1(\Omega)$, alors :

$$k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} w(x) dx = \int_{\Omega} f(x) w(x) dx, \forall w \in V.$$

Donc le problème (3.25) devient sous forme variationnelle : Trouver $u \in V$ solution de

$$a(u, w) = L(w), \forall w \in V \quad (3.26)$$

Où

$$a(u, w) = k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} w(x) dx,$$

et

$$L(w) = \int_{\Omega} f(x) w(x) dx.$$

On montre que le problème (3.26) admet une solution unique. D'après le théorème (2.3.1.1) Lax-Milgram, il suffit de montrer que a est continue sur $V \times V$, V -elliptique et que L est continue sur V .

- La continuité de la forme a : Soient $u, w \in V = H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &= \left| k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} w(x) dx \right| \\ &\leq k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |v_i(x)| \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right| |w(x)| dx \\ &\leq k \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} |a(u, w)| &\leq k \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + c(\Omega) \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq k \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c(\Omega) \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

Donc

$$|a(u, w)| \leq (k + c(\Omega)) \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, on peut écrire :

$$\forall u, w \in V = H_0^1(\Omega) \quad |a(u, w)| \leq M_a \|u\|_V \cdot \|w\|_V$$

où : $M_a = k + c(\Omega)$ est la constante de continuité de a .

V - ellipticité de la forme a : soit $w \in V = H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(w, w) &= k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_i(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} w(x) dx \\ &\geq k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} w(x) dx \\ &\geq k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial w^2}{\partial x_i} dx \\ &\geq k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (w^2) dx \end{aligned}$$

Or on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (w^2) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} (w^2 \eta) dx$$

où

$$\begin{aligned} \eta &= (1, \dots, 1)^T \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} (w^2) dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div} (w^2 \eta) dx = \int_{\partial \Omega} w^2 \eta \cdot \vec{n} d\sigma(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\partial \Omega} w^2 n_i d\sigma(x) \end{aligned}$$

avec

$$\vec{n} = (n_1, \dots, n_n)^T \text{ est le vecteur normal.}$$

mais $w \in H_0^1(\Omega)$, donc

$$w|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow w^2|_{\partial\Omega} = 0$$

On en conclut alors que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(w^2) dx = 0$$

On obtient alors :

$$a(w, w) \geq k \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx$$

Donc, on peut écrire

$$a(w, w) \geq k \|w\|_V^2$$

D'où la forme bilinéaire a est V - elliptique. - la continuité de la forme $L : \forall w \in V = H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |L(w)| &\leq \int_{\Omega} |f(x)w(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x)||w(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré (1.5), on a

$$|L(w)| \leq c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_V, \forall w \in V$$

D'où la continuité de la forme L sur V , avec $C_L = c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}$ est la constante de continuité de la forme L . D'après le théorème (2.3.1.1), le problème variationnel (3.26) a une solution unique $u \in V = H_0^1(\Omega)$

3.3 Étude théorique d'un problème de convection-diffusion stationnaire en 1D

Soit $f : x \in [0, 1] \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ une fonction continue donnée, et soit $\varepsilon > 0$ fixé. Nous cherchons une fonction $u \in [0, 1] \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + u'(x) = f(x) \text{ dans }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Si on considère le cas simple où $f = f_0 = \text{constante}$, alors dans ce cas le problème devient :

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + u'(x) = f_0 \text{ dans }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

3.3.1 Formulation variationnelle

Maintenant on va déterminer la formulation variationnelle du problème (3.28) : On pose alors $V = H_0^1(]0, 1[)$. Supposons que la solution u de (3.28) soit suffisamment régulière. Disons $u \in H^2(]0, 1[)$. En

multipliant ensuite l'équation dans (3.28) par une "fonction test" $v \in V$ et en intégrant sur l'intervalle $[0, 1]$, on obtient :

$$-\varepsilon \int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx = f_0 \int_0^1 v(x)dx.$$

En intégrant par parties le premier terme, on obtient :

$$\varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v(x)dx = f_0 \int_0^1 v(x)dx.$$

Comme on a la fonction $v \in H_0^1(]0, 1[)$ (v satisfait $v(0) = v(1) = 0$), cette dernière identité implique que

$$\varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx = f_0 \int_0^1 v(x)dx, \forall v \in V.$$

C'est la formulation faible (variationnelle) du problème de convection-diffusion stationnaire en 1D (3.28).

3.3.2 Existence et unicité de la solution

Un va montrer que le problème variationnel

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V. \quad (3.29)$$

admet une solution unique, où

$$a(u, v) = \varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx,$$

et

$$L(v) = f_0 \int_0^1 v(x)dx.$$

Grâce au théorème (2.3.1.1) de Lax-Milgram, on va montrer que le problème (3.29) admet une solution unique $v \in H_0^1(]0, 1[)$. Vérifions-en les hypothèses : La bilinéarité de a et la linéarité de L découlent de la linéarité de l'intégrale. Reste à prouver : - La continuité de a : Soient $v, w \in V = H_0^1(]0, 1[)$, on a

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &= \left| \varepsilon \int_0^1 v'(x)w'(x)dx + \int_0^1 v'(x)w(x)dx \right| \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |v'(x)| |w'(x)| dx + \int_0^1 |v'(x)| |w(x)| dx \\ &\leq \varepsilon \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)} + \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré (1.3), on obtient :

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &\leq \varepsilon \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)} + c(0, 1) \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq (\varepsilon + c(0, 1)) \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Par suite, on peut écrire :

$$\forall v, w \in V, |a(v, w)| \leq M_a \|v\|_V \cdot \|w\|_V$$

où

$$M_a = \varepsilon + c(0, 1)$$

est la constante de continuité de la forme bilinéaire a , et

$$\|v\|_V = \|v'\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 (v'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où la continuité de a .

- V - ellipticité de a : soit $v \in V = H_0^1(]0, 1[)$, on a :

$$a(v, v) = \varepsilon \int_0^1 (v'(x))^2 dx + \int_0^1 v'(x)v(x)dx,$$

Mais, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 v'(x)v(x)dx &= [v^2(x)]_0^1 - \int_0^1 v'(x)v(x)dx \\ &= - \int_0^1 v'(x)v(x)dx, \text{ car } v(0) = v(1) = 0, \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 v'(x)v(x)dx &= - \int_0^1 v'(x)v(x)dx \\ &\implies 2 \int_0^1 v'(x)v(x)dx = 0 \\ &\implies \int_0^1 v'(x)v(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Par suite

$$a(v, v) = \varepsilon \int_0^1 (v'(x))^2 dx = \varepsilon \|v'\|_{L^2(0,1)}^2,$$

Donc

$$\forall v \in V, a(v, v) \geq \varepsilon \|v\|_V^2$$

où ε est la constante de V - ellipticité de a .

- La continuité de L : soit $v \in V = H_0^1(]0, 1[)$,

$$|L(v)| = \left| f_0 \int_0^1 v(x)dx \right| \leq |f_0| \int_0^1 |v(x)|dx,$$

Alors, d'après l'inégalité de Hölder (1.2), on a

$$|L(v)| \leq |f_0| \|1\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v\|_{L^2(0,1)},$$

Par l'inégalité de Poincaré (1.3), on obtient

$$|L(v)| \leq |f_0| c(0, 1) \|v\|_V, \forall v \in V = H_0^1(]0, 1[).$$

Ce qui montre que L est bien continue, avec $C_L = |f_0| c(0, 1)$ est la constante de continuité de L . Par le théorème (2.3.1.1), on en déduit l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.29).

3.4 Discrétisation par éléments finis d'un problème de convection-diffusion stationnaire en 1D

On reprend le problème (3.28) dont la formulation variationnelle est donnée par :

$$\varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx = f_0 \int_0^1 v(x)dx, \forall v \in V. \quad (3.30)$$

et on applique la méthode des éléments finis : On approche la solution u du problème (3.28) par une méthode d'éléments finis.

Soit a_1, \dots, a_N N points situés à l'intérieur de l'intervalle $[0, 1]$ de longueur uniforme h ($h = \frac{1}{N+1}$) tel que

$$a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_N < 1 = a_{N+1}.$$

Soit V_h un sous espace de $V = H_0^1(]0, 1[)$ de dimension finie. On pourra construire V_h comme un espace de fonctions continues telles que leurs restrictions aux intervalles de subdivision de $[0, 1]$ est une fonction polynômiale de degré ≤ 1 c'est-à-dire par (1.8.3.1) :

$$V_h = \left\{ v \in C([0, 1]) \text{ tel que } v|_{[lh, (l+1)h]} \in P_1, \forall l = 0, \dots, N, v(0) = v(1) = 0 \right\},$$

avec

$$\dim V_h = N.$$

On considère maintenant les N fonctions de base de V_h : φ_i ($1 \leq i \leq N$) telles que

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j}, 1 \leq i, j \leq N.$$

avec $a_j = jh$: les noeuds intérieurs à $]0, 1[$. Une telle fonction s'écrit certainement sous la forme par le (1.7) et (1.8)

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-a_i}{h} & \text{si } a_{i-1} \leq x \leq a_i, \\ 1 - \frac{x-a_i}{h} & \text{si } a_i \leq x \leq a_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \notin [a_{i-1}, a_{i+1}]. \end{cases}$$

Une approximation standard de (3.28) par éléments finis de degré 1 consiste à chercher $u_h \in V_h$ tel que

$$\varepsilon \int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_0^1 u_h'(x) v_h(x) dx = f_0 \int_0^1 v_h(x) dx, \forall v_h \in V_h. \quad (3.31)$$

On peut alors écrire u_h comme combinaison linéaire des fonctions de base $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, c'est-à-dire par du Lemme (1.8.3.1)

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x), \forall x \in [0, 1], \quad (3.32)$$

Où

$$u_i = u_h(a_i), i = 1, \dots, N,$$

est la valeur de u_h au noeud a_i ($i = 1, \dots, N$). Ensuite, on choisit $v_h = \varphi_j$, $j = 1, \dots, N$. Le problème (3.31) est donc équivalent à chercher u_1, \dots, u_N tel que

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 \left(\varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + \varphi_i'(x) \varphi_j(x) \right) dx = f_0 \int_0^1 \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.33)$$

Ici encore, on obtient un système linéaire de N équations à N inconnues

$$AU = F, \quad (3.34)$$

où A est la matrice carré d'ordre $N \times N$, de coefficients

$$A_{j,i} = \int_0^1 \left(\varepsilon \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) + \varphi'_i(x) \varphi_j(x) \right) dx, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

et F le vecteur de composantes

$$F_j = f_0 \int_0^1 \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N,$$

Finalement, $U = (u_1 \cdots u_N)$ est le vecteur inconnu.

3.4.1 Algorithme

- Etape 0 : entrées $\varphi_i, i = 1, \dots, N, a_i = ih$ et f_0 .
- Etape 1 : sorties :

$$A_{j,i} = \int_0^1 \left(\varepsilon \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) + \varphi'_i(x) \varphi_j(x) \right) dx, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

$$F_j = f_0 \int_0^1 \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

- Etape 2 : résolution du système linéaire sous forme matricielle (système tridiagonal), avec

$$A_{j,i} = \begin{cases} \frac{-\varepsilon}{h} + \frac{1}{2} & \text{si } j < i, \\ \frac{2\varepsilon}{h} & \text{si } j = i, \\ \frac{-\varepsilon}{h} - \frac{1}{2} & \text{si } j > i. \end{cases}$$

et

$$F_j = f_0 h.$$

CONCLUSION

Ce travail consiste à étudier quelques problèmes aux limites posés sur les intervalles bornés par des méthodes variationnelles.

Ainsi, on présente toutes les démonstrations en les détaillant pour l'équation de convection-diffusion, et la solution numérique est obtenue avec l'algorithme donné.

Cela nous amène à rappeler certaines notions fondamentales utilisées (les espaces de Sobolev, la théorie des injections, méthode des éléments finis,...).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLAIRE - F ALOUGES, Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, École Polytechnique, année 2015-2016
- [2] S.K Berberian, Introduction to Hilbert space. New York, 1971.
- [3] Pa Ciarlet, Rappels de calcul scientifique, A1-1 2008-2009 .
- [4] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear operator, I, II and III, Interscience, New York, 1958, 1963 and 1971 .
- [5] P.A. Raviart, Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides, Collection des E*R, EDF, n40, Edition EYROLLES, 1981.
- [6] P.A. Raviart, J.M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Dunod, 2004
- [7] Rochat , les espaces de Sobolev , ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE. 16 décembre 2009
- [8] Pi Théo, ENS Ker Lann, Équations aux dérivées partielles elliptiques

Résumé

Le but de cette mémoire est d'examiner les équations partielles aux limites de formulation variationnelle en basant la méthode des éléments finis pour obtenir une solution numérique à problème thermique. À la fin de l'étude, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution à l'équation de la convection-diffusion, et nous avons également obtenu la solution approximative en utilisant la méthode des éléments finis se terminant par la dimension $n = 1$.

Mots clés : Méthode variationnelle, méthode de Galerkin, méthode d'éléments finis, estimations de l'erreur, équation de convection-diffusion stationnaire

Abstract

The purpose of this memory is to examine the boundary issues of the partial equations of Variational Formulation by basing the method finite elements to obtain a numerical solution to the problem of the mechanic. At the end of the study, we proved the existence and unicity of the solution to the convection-diffusion equation, and we also obtained the approximate solution using the method of elements ending in dimension $n=1$.

Key words : Variational method, Galerkin method, finite element method, error estimates, stationary convection-scattering equation.

المخلص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة المسائل الحدية للمعادلات الجزئية بطرق مختلفة بشكل عام على طريقة العناصر المنتهية للحصول على الحل العددي لمشكلة الحمل الحراري . قننا في آخر المذكرة بإثبات وجود و وحدانية الحل لمسألة الحمل الحراري وكذلك حصلنا على الحل التقريبي لها باستخدام طريقة العناصر المنتهية . في البعد $n=1$ كلمات مفتاحية: طريقة الاختلاف، طريقة غاليركين، طريقة العنصر المحدود، تقديرات الخطأ، معادلة ثابتة تشتت الحمل الحراري.