RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar El-oued
Faculté des sciences exactes Département de mathématiques

Domaine : Mathématiques-Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Titre de mémoire

ÉTUDE DE QUELQUES TYPES D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE ET LEURS APPLICATIONS

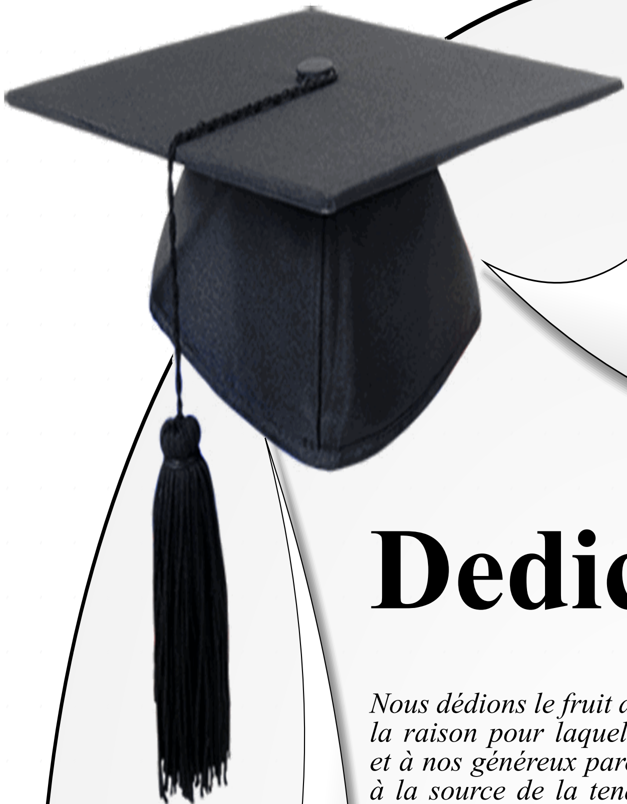
Proposé par :
- AYMENE KHELAIFA
- AMARA KADDOURI

Supervisé par :
- Prof. ABDELLATIF GHENDIR AOUN

Soutenu devant le jury composé de :

Dr. Said Ameur Meziane	Président	Univ. d'El-Oued
Dr. Abdellatif Ghendir Aoun	Superviseur	Univ. d'El-Oued
Dr. Guedda Lamine	Examinateur	Univ. d'El-Oued

Année académique : 2021/2022



Dedicace

Nous dédions le fruit de nos efforts à ceux qui étaient la raison pour laquelle nous étions dans ce monde et à nos généreux parents. à l'esprit de nos cœurs et à la source de la tendresse et de la tendresse avec les cœurs de neige les plus blancs, à ceux qui sont meilleurs pour nous élever, Que Dieu les bénisse pour nous rendre ici, et à ceux qui sont restés debout pour nous et se sont consacrés. Pour notre service et notre réconfort, qui ont fait dieu le ciel sous leurs pieds. Nos mères, que Dieu les sauve et les soutienne en matière de santé et de bien-être. aux lumières de nos cœurs et aux symboles de don et de dévouement, à ceux qui nous ont élevés sur des principes et des valeurs et qui nous ont enseigné le sens du défi, À ceux dont nous sommes fiers et dont nous sommes fiers dans la vie Nos pères, que Dieu les sauve et les soutienne pour leur santé et leur bien-être. À ceux qui nous plaisent d'un seul sang et représentent un seul corps, nos frères et sœurs. À tous nos professeurs qui nous ont enseigné du primaire au collège. À tous les amis et proches.

Remerciements et gratitude

"الحمد لله الذي كفاني وآواني، الحمد لله الذي أطعمني وسقاني، الحمد لله منّ عليّ وأفضل،
اللهم أنّي أسألك بعزّتك أن تنجّيني من النّار"
وعملا بقوله صل الله عليه وسلم "لا يشكر الله من لا يشكر الناس"

Nous remercions le Dr **ABDELLATIF GHENDIR AOUN** pour ses efforts. et de superviser ce travail, où il ne nous a pas épargné ses conseils et ses conseils, et je lui souhaite Santé, bien-être et succès continus dans sa carrière scientifique et pratique.

Nous remercions également le président du comité de discussion, le Dr **Said Ameur Meziane**, et l'examinateur, le Dr **Guedda Lamine**

Nous remercions et remercions également le responsable des mathématiques et tous ses associés.

Nous n'oublions pas non plus notre loyauté et notre gratitude envers nos chers parents, envers toutes nos familles et envers tous nos amis qui ont partagé avec nous. Dans ce travail de près et de loin, pour leur soutien et leur encouragement continus envers nous. Nous leur offrons à tous un grand merci et des éloges.

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^*$: L'ensemble des nombres réels différent de 0.

$\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexes.

$R\,[T]$: L'ensemble des polynomes.

W : La fonction Wronskienne.

$D = \dfrac{d}{dt}$: Fonction différentielle.

$y' = \dfrac{dy}{dt}$: Dérivée du premier ordre.

$y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$: Dérivée du second ordre.

$\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$: La dérivée θ du premier ordre par rapport à t.

$\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$: La dérivée θ du second ordre par rapport à t.

y_H : Solution homogène de l'équation différentielle.

$y_P,\ y_P^*$: Solution particulière de l'équation différentielle.

y : Solution générale de l'équation différentielle.

$i.e.$: c'est-à-dire.

Δ : delta distingué.

Introduction

Les équations différentielles, tant en majuscules qu'en miruscules, son considérées comme l'une des branches les plus importantes des mathématiques appliquées, et elles sont indispensables à toutes les sciences appliquées-physique, astronomie, chimie, biologie,... . L'équation différentielle exprime un système cinétique tel que le mouvement planétaire, la balistique, le transfert d'ondes, la diffusion de la chaleur et la croissance démographique. Là où l'équation différentielle régit le comportement des systèmes cinétiques, et grace à notre solution de l'équation différentielle, nous pouvons sentir le comportement de ce système et prédire son comportement dans le passé ou dans le futur. éqation différentielle ordinair à une fonction dans une variable-par exemple, l'équation cinématiquende *Newton*

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2}$$

il régit les trajectoires des planètes autour du soleil et prédit leur emplacement à tout moment, mais nous constatons que la trajectoire de Mercure-la plus proche du soleil-s'écarte de sa trajectoire supposée selon l'équation de *Newton*. *Einstein* apu corriger l'équation du mouvement de *Newton* en ajoutant le terme non linéaire $3mu^2$ (inspiré des équations de champ) pour devenir

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

Le dernier terme non linéaire exprime la perturbation qui déplace l'orbite de *Newton* de $6m^2\pi/h^2$ cela correspond à l'orbite de Mercure autour du soleil. Et ce changement de l'orbite de Mercure la plus proche du Soleil en raison champ gravitationnel du soleil tordant l'espace de temps à coté de lui fortement. Si des solutions analytiques ne son pas atteintes, des solutions approchées peuvent etre atteintes par des méthodes numériques d'équations différentielles. La connaissance des conditions initiales du système qui s'exprime par l'équation différentielle est très importante et en dépend pour extrapoler le comportement futur du système étudié. Plus nous connaissons les conditions initiales et les conditions finales d'un système avec précision, plus nous pouvons prédire et précisément son comportement dans le futur. Bien sur, il peut ne pas etre possible de fournir suffisamment les conditions initiales. A cet égard, le philosophe et mathématicien *Laplace* dit (si un etre devait connaitre les conditions initiales à partir desquelles l'univers est né, y compris la matière, le temps,le lieu, masse, vitesse, température et pression, et possédait une mentalité pour analyser ces paramètres et ces données, il aurait pu connaitre avec certitude le comportement futur de l'univers). Ici et sans conscience, c'est comme si *Laplace* se référait à **Dieu tout-Puissant**, qui possède bien sur ces capacités auxquelles *Laplace* a fait référence ci-dessus, et cela se manifeste clairement dans sa parole

⟨⟨ ألا يعلم من خلق وهو اللطيف الخبير " وقوله "هو أعلم بكم إذ أنشأكم من الأرض وإذ أنتم أجنة في بطون أمهاتكم ⟩⟩
De ce point de vue, **Dieu tout-Puissant** connait l'invisible des cieux et de la terre.

Ensuite, nous expliquerons comment le travail est structuré, et nous mentionnerons ce que nous avons considéré dans chaque chapitre. Ce mémoire est divisée en quatre chapitres.

En le Chapitre 1, nous avons inclus quelques outils et relations en algèbre linéaire, en analyse sémantique et quelques concepts généraux sur les équations différentielles linéaires.

Chapitre 2, notre étude s'est limitée aux équations différentielles linéaires du deuxième niveau avec des coefficients fixes qui prend leur forme générale $y''+ay'+by = h(t)$. Avec son équation homogène où $y'' + ay' + by = 0$. Nous avons appris à trouver une solution générale à l'équation homogène en extrayant son équation caractéristique $r^2+ar+b = 0$, et le résoudre, et puis les moyens de trouver une solution particuliére à l'équation hétérogène à travers la fonction de la deuxième membre à l'équation, puis de trouver la solution à l'équation hétérogène en collectant la solution générale de l'équation homogène et la solution particuliére i.e. $y = y_H + y_P$.

Chapitre 3, nous avons discuté des équations différentielles linéaires du deuxième ordre avec des coefficients variables qui prend leur forme générale $y'' + a(t)y' + b(t)y = h(t)$ avec $a(t),\ b(t),\ h(t)$ sans des fonctions réelles continues.
Son équation homogène est $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Nous avons étudié dans certaines équations spéciales et la façon de les résoudre :

- l'équation d'Euler de la forme $t^2y'' + aty' + by = h(t)$.
- L'équation de la forme de Lagrange $(\alpha t + \beta)^2y'' + a(\alpha t + \beta)y' + by = h(t)$.
- Et la façon dont les équations sont résolues par réduction d'ordre.

Chapitre 4, notre étude s'est limitée à certaines applications physiques des équations différentielles linéaires de second ordre, à la façon dont ces problèmes physiques sont formulés sous la forme d'équations linéaires de second ordre et aux moyens de résoudre ces problèmes.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Fonctions linéairement dépendant et indépendant

Définition 1.1.1. *Deux fonctions y_1, y_2 sont dite linéairement dépendantes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ s'il existe deux contantes c_1, c_2 pas tous les deux nuls, tel que pour tout $t \in I$,*

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0.$$

Définition 1.1.2. *Deux fonctions y_1, y_2 sont dite linéairement indépendantes sur I si elles ne sont pas linéairement dépendantes, c'est-à-dire les seules constantes c_1, c_2 que pour tout $t \in I$ vérifient l'équation*

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0$$

sont les constontes $c_1 = c_2 = 0$.

Remarque 1.1.1.

(1) Deux fonctions y_1, y_2 sont linéairement dépendantes s'il existe une constante c tel que $y_1 = cy_2$

(2) La fonction $y_1 = 0$ est linéairement dépendante à toute autre fonction y_2, car $y_1 = 0 = 0y_2$.

(3) Deux fonctions y_1, y_2 sont linéairement indépendantes sur l'intervalle I s'il n'existe pas de réel c tel que pour tout $t \in I$, $y_1(t) = cy_2(t)$.

(4) Les fonctions y_1, y_2 sont indépendantes cela signifie que linéairement indépendantes au sens des espace vectoriels.

Exemple 1.1.1. *Nous montrons que*

(1) $y_1 = \sin t, y_2 = 2\sin t$ sont linéairement dépendantes

(2) $y_1 = \sin t, y_2 = t\sin t$ sont linéairement indépendantes

En effet,

(1) $2y_1 - y_2 = 2\sin t - 2\sin t = 0$ ou en utilisant, $y_2 = 2y_1$.

(2) Trouver des constantes c_1, c_2 tel que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$c_1 \sin t + c_2 t \sin t = 0$$

évalue à $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{3\pi}{2}$ nous obtenons

$$c_1 + \frac{\pi}{2} c_2 = 0 \quad et \quad c_1 + \frac{3\pi}{2} c_2 = 0$$

ce qui implique $c_1 = c_2 = 0$.
Alors y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

1.2 La fonction Wronskienne

Nous introduisons maintenant une fonction qui fournit des informations importantes sur la dépendance linéaire de deux fonctions y_1, y_2.
Cette fonction W est appelé le Wronskienne en l'honneur du scientifique polonais Josef Wronski, qui a introduit cette fonction en 1821.

Définition 1.2.1. *Le wronskien des fonctions différentiables y_1, y_2 est la fonction*

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

Remarque 1.2.1. *Le wronskien de ces deux fonctions est définit à l'aide d'un déterminant*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

Théoréme 1.2.1. *Si y_1, y_2 sont linéairement dépendantes sur $I \subset \mathbb{R}$, alors $W(y_1, y_2) = 0$ dans I.*

Preuve. *Comme les fonctions y_1, y_2 sont linéairement dépendantes, il existe une constante non nulle c tel que $y_1 = c y_2$, donc*

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\ &= c y_2 y_2' - c y_2' y_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.2. *L'énoncé inverse du Théorème (1.2.1) précédente est fauxe. Si $W(y_1, y_2) = 0$ pour tout $t \in I$, cela n'implique pas que y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.*

Exemple 1.2.1. *Nous montrons que les fonctions*
$y_1(t) = t^2$ et $y_2(t) = |t|t$, pour $t \in \mathbb{R}$ sont linéairement dépendantes et leurs wronskien $W(y_1, y_2) = 0$.
D'abord, ces fonction sont linéairement indépendantes.
En effet, lorsque $t > 0$ on a $y_1 = y_2$ et lorsque $t < 0$ on a $y_1 = -y_2$.
Alors il n'est pas une constante c tel que $y_1(t) = c y_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Deuxièmement, nous avons dans le cas $t > 0$,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} t^2 & t^2 \\ 2t & 2t \end{vmatrix} = 0,$$

aussi dans le cas $t < 0$,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} t^2 & -t^2 \\ 2t & -2t \end{vmatrix} = 0,$$

en plus lorsque $t = 0$ *on a*

$$W(y_1(0), y_2(0)) = 0.$$

Donc $W(y_1, y_2) = 0$ *pour* $t \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.2.3. *Souvent dons la littérature on trouve la négation du Théorème* (1.2.1) *précédente qui équivaut au cette théorème, et on résume par le corollaire suivant.*

Corollaire 1.2.1. *Si le wronskien* $W(y_1(t_0), y_2(t_0)) \neq 0$ *à un point* $t_0 \in I$*, alors les fonctions* y_1, y_2 *sont linéairement indépendantes.*

1.3 Équation différentielle

Passons à la définition complète d'une équation différentielle et surtout d'une solution d'une équation différentielle [8].

Définition 1.3.1.

- *Une équation différentielle d'ordre* n *est une équation de la forme*

$$F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{E}$$

où F *est une fonction de* $(n + 2)$ *variables.*

- *Une solution d'une telle équation sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *est une fonction* $y : I \to \mathbb{R}$ *qui est* n *fois dérivable et qui vérifie l'équation (E)*

1.4 Équation différentielle linéaire

Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme

$$a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdot\cdot\cdot + a_n(t)y^{(n)} = h(t)$$

où les a_i et h sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Le terme linéaire signifie grosso modo qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes $y, y', y'', ...$
Une équation différentielle linéaire est homogène, ou sans second membre, si la fonction h ci-dessus est la fonction nulle

$$a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdot\cdot\cdot + a_n(t)y^{(n)} = 0.$$

Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes

$$a_0y + a_1y' + \cdot\cdot\cdot + a_ny^{(n)} = h(t)$$

i.e les a_i sont des constantes réelles et h une fonction continue [8].

Exemple 1.4.1.

1. $y' + 5ty = e^t$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.*
2. $y' + 5ty = 0$ *est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.*
3. $2y'' - 3y' + 5y = 0$ *est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre.*
4. $y'^2 - y = t$ *ou* $y''y' - y = 0$ *ne sont pas des équations différentielles linéaires.*

1.5 L'équation différentielle du second ordre

L'équation différentielle du second ordre est écrit sous la forme générale comme suit

$$g(t, y, y', y'') = 0$$

et dans la forme normale comme suit

$$y'' = f(t, y, y') \tag{1.1}$$

Définition 1.5.1. *On dit que l'équation (1.1) est une équation linéaire si f est une fonction linéaire par rapport à y et y'.*
L'équation différentielles linéaire du second ordre est généralement écrite sous la forme

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = h(t) \tag{1.2}$$

L'équation (1.2) est dite homogène si $h(t) = 0$
i.e.

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{1.3}$$

1.5.1 L'équation homogène

C'est l'équation (1.3) comme ci-dessus avec a, b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Théoréme 1.5.1. *Si y_1, y_2 sont deux solutions de l'équation (1.3), alors $c_1y_1 + c_2y_2$ avec c_1, c_1 sont des constantes, est une solution de l'équation (1.3).*

Preuve. *Comme y_1, y_2 sont deux solutions de (1.3), on a*

$$y_1'' + a(t)y_1' + b(t)y_1 = 0$$

et

$$y_2'' + a(t)y_2' + b(t)y_2 = 0.$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned}(c_1y_1 + c_2y_2)'' + a(t)(c_1y_1 + c_2y_2)' + b(t)(c_1y_1 + c_2y_2) &= c_1(y_1'' + a(t)y_1' + b(t)y_1) + c_2(y_2'' + a(t)y_2' + b(t)y_2) \\ &= c_1(0) + c_2(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exemple 1.5.1. *On trouve l'équation différentielle satisfaite par la formule de fonctions*

$$y = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-4t}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Par dérivation,

$$y' = 4c_1 e^{4t} - 4c_2 e^{-4t}.$$

Dériver encore,

$$y'' = 16c_1 e^{4t} + 16c_2 e^{-4t}$$

i.e.

$$y'' = 16y.$$

Ce qui donne l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante

$$y'' - 16y = 0.$$

Exemple 1.5.2. *On trouve l'équation différentielle satisfaite par la formule de fonctions*

$$y = c_1 t + c_2 t^2, \quad (t \neq 0), c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Calculons la dériveé de la fonction y

$$y' = c_1 + 2c_2 t.$$

De là, il est simple d'obtenir c_1

$$c_1 = y' - 2c_2 t.$$

Utilisez cette expression pour c_1 dans l'expression de y

$$y = (y' - 2c_2 t)t + c_2 t^2$$

ce qui donne

$$c_2 = \frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2}.$$

L'équation requise peut être obtenue en calculant une dérivée dans l'expression de c_2

$$c_2' = \frac{y''}{t} - 2\frac{y'}{t^2} + 2\frac{y}{t^3} = 0$$

ce qui implique

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = 0.$$

Nous introduisons maintenant le deuxième résultat principal dans cette section.
Si nous connaissons deux solutions linéairement indépendantes à une équation différentielle homogène linéaire du second ordre, alors nous connaissons toutes les solutions possibles de cette équation. Toute autre solution est juste le combinaison linéaire des deux solutions précédentes. C'est plus nous pouvons rapprocher d'une formule générale pour les solutions aux équations différentielles homogènes linéaires du second ordre.

Définition 1.5.2.
(1) Les fonctions y_1 et y_2 sont des solutions fondamentales de l'équation homogène (1.3) ssi y_1 et y_2

sont linéairement indépendantes vérifiant l'équation (1.3).
(2) La solution générale de l'équation homogène (1.3)donné par $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

Théoréme 1.5.2. *Si y_1 et y_2 sont des solutions fondamentales de l'équation (1.3) avec des coefficionts continues, alors l'équation*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$$

dévient une solution générale de l'équation (1.3).

Preuve. *D'aprés le Théorème (1.5.1), la fonction*

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \tag{1.4}$$

est une solution de l'équation (1.3).
Pour prouver que c'est la solution générale, il suffit de prouver que toutes les solutions particulières en sont extraites, en donnant aux constantes certaines valeurs. Soit $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ des conditions initiales quelconques.
Montrons qu'il est possible de trouver des valeurs pour les constantes c_1, c_2 par lesquelles la fonction y dans (1.4) une solution de l'équation (1.3) qui vérifie les conditions initiales $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0'$, i.e. une solution particulière.
Nous avons le système suivant

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0 \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

tels que c_1, c_2 des constantes inconnues.
La déterminant de cette système est $W(t_0) \neq 0$ car y_1, y_2 sont linéairement indépendontes, donc cette système admet une solution unique noter par $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$ et en compensation dans l'expression (1.4) on obtient

$$y(t) = c_1^0y_1(t) + c_2^0y_2(t).$$

D'aprés le Théorème (1.5.1), cette fonction est une solution de l'équation (1.3).
De système précédente on déduire que $y(t_{0)} = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ donc la fonction

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

est la solution générale de l'équation (1.3).

Exemple 1.5.3. *Soit l'équation différentielle suivant*

$$y'' - y = 0.$$

On Peut s'assurer que les fonctions $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{-t}$ sont des solutions de cette équation.
D'autre part, leurs wronskien est

$$W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

donc y_1, y_2 sont linéairement indépendantes ou des solutions fondamentales de cette équation.

D'aprés le théorème précédent, la solution générale est

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Théoréme 1.5.3. *Si la fonction non nulle y_1 est une solution de l'équation homogène (1.3), alors la deuxième solution y_2 linéaire indépendante avec y_1 est donnée par*

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{y_1^2(t)} dt.$$

Preuve. *Posons*

$$y_2 = y_1 \phi$$

Pour commencer, calculons y_2' et y_2'' on obtient

$$y_2' = y_1' \phi + y_1 \phi'$$

et

$$y_2'' = y_1'' \phi + 2y_1' \phi' + y_1 \phi''.$$

Substituant ces dérivées dans l'équation (1.3),

$$\phi(y_1'' + a(t)y_1' + b(t)y_1) + y_1 \phi'' + (2y_1' + a(t)y_1)\phi' = 0.$$

Comme y_1 est une solution de l'équation (1.3), on a

$$y_1 \phi'' + (2y_1' + a(t)y_1)\phi' = 0.$$

posons ainsi $u = \phi'$ nous obtenons

$$u' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + a(t)\right) u = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre en u. Par intégation aprés l'écriture de la derniére sous la forme

$$\frac{u'}{u} = -2\frac{y_1'}{y_1} - a(t),$$

on obtient

$$\ln \mid u \mid = \ln \frac{1}{y_1^2} - \int a(t)dt + \alpha.$$

Ce qui implique

$$u(t) = \frac{k_1}{y_1^2(t)} e^{-\int a(t)dt}, \quad k_1 = \pm e^{\alpha} \in \mathbb{R}^*.$$

Comme $\phi' = u$, on intégre encore une fois par rapport à t pour obtenir

$$\phi(t) = k_1 \int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{y_1^2(t)} dt + k_2, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une seule solution ϕ, donc on choisit les constantes d'intégration $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$.

Nous obtenons donc

$$\phi(t) = \int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{y_1^2(t)} dt$$

et

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int a(t)dt}}{y_1^2(t)} dt.$$

Enfin, nous montrons que les fonctions y_1, y_2 sont linéairement indépendantes. On commence à calculer leurs wronskien,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y_1 & \phi y_1 \\ y_1' & (\phi' y_1 + \phi y_1') \end{vmatrix} \\ &= y_1'(\phi' y_1 + \phi y_1') - \phi y_1 y_1' \\ &= \phi' y_1^2. \end{aligned}$$

Comme $y_1 \neq 0$ et $\phi' = \dfrac{k_1}{y_1^2(t)} e^{-\int a(t)dt} \neq 0$ car $k_1 \in \mathbb{R}^*$ on a $W(y_1, y_2) \neq 0$ on déduit que y_1, y_2 sont linéairement indépendantes.

Exemple 1.5.4. *Trouver une deuxième solution y_2 linéaire indépendant à la solution $y_1 = t$ de l'équation différentielle*

$$t^2 y'' + 2ty' - 2y = 0.$$

On cherche une solution de la forme

$$y_2 = y_1 \phi = t\phi.$$

Cela implique que

$$y_2' = t\phi' + \phi \quad , \quad y_2'' = t\phi'' + 2\phi'.$$

Ensuit, comme

$$t^2 y_2'' + 2ty_2' - 2y_2 = 0.$$

On a

$$t^2(t\phi'' + 2\phi') + 2t(t\phi' + \phi) - 2t\phi = 0$$

ce qui donne

$$t^2\phi'' + 4t^2\phi' = 0$$

i.e.

$$\phi'' + \frac{4}{t}\phi' = 0.$$

Posons $u = \phi'$ nous obtenons

$$\frac{u'}{u} = -\frac{4}{t}$$

ce qui implique

$$u(t) = c_1 t^{-4}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

donc

$$\phi'(t) = c_1 t^{-4}$$

ensuite

$$\phi(t) = c_2 t^{-3} + c_3, \quad c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

De $y_2 = t\phi$ *on a* $y_2 = c_2 t^{-2} + c_3 t$.
Choisir $c_2 = 1$ *et* $c_3 = 0$ *nous obtenons*

$$y_2 = t^{-2}.$$

Enfin, les solutions fondamentale de notre équation différentielle sont donnés par

$$y_1(t) = t, \quad y_2(t) = \frac{1}{t^2}.$$

1.5.2 L'équation non homogène

Soit l'équation (1.2),i.e.

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = h(t)$$

telles que $a,\ b,\ h$ des fonctions continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.

Théoréme 1.5.4. *La solution générale de l'équation (1.2) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène (1.3).*

Preuve. *Supposons que* y_P *une solution particulière de l'équation (1.2) et*

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{1.5}$$

la solution générale de l'équation (1.3).
Montrons que la fonction $y = y_P + y_H$ *est la solution générale de l'équation (1.2).*
• *D'abord, montrons que* y *est une solution de l'équation (1.2).*
On calcule $y',\ y''$

$$y' = y'_P + y'_H, \quad y'' = y''_P + y''_H.$$

Remplac dans l'équation (1.2), on obtient

$$\begin{aligned}(y''_H + a(t)y'_H + b(t)y_H) + (y''_P + a(t)y'_P + b(t)y_P) &= 0 + h(t)\\ &= h(t),\end{aligned}$$

i.e. y *est une solution de l'équation (1.2).*
• *D'autre part, montrons que toute solution particulière est extraite de la solution* y *définie par l'expression (1.5).*
Soit y_P^* *une solution particulière quelconque de l'équation (1.2).*
Ensuite, on montre que la différence $y_P^* - y_P$ *est une solution de l'équation (1.3).*
Nous avons,

$$\begin{aligned}(y_P^* - y_P)'' + a(t)(y_P^* - y_P)' + b(t)(y_P^* - y_P) &= (y_P^{*''} + a(t)y_P^{*'} + b(t)y_P^*) - \big(y''_P + a(t)y'_P + b(t)y_P\big)\\ &= h(t) - h(t)\\ &= 0\end{aligned}$$

donc $(y_P^* - y_P)$ *est une solution de l'équation (1.3)* *i.e.*

$$y_P^* - y_P = c_1 y_1 + c_2 y_2 = y_H$$

ou

$$y_P^* = y_H + y_P.$$

Autrement dit, il est déduit de l'expression de la solution y dans la relation (1.5).

1.6 Quelques lois pour différents domaines

En raison de l'importance des équations différentielles linéaires du second ordre dans différents domaines, nous allons utiliser dans ces domaines.

Définition 1.6.1. *(loi du mouvement de Newton II)*

La loi du mouvement de Newton II stipule que si nous influons sur un objet avec une force son état de mouvement a changé, cette force est égale à la quantité de changement de mouvement par rapport au temps, et cette loi est exprimée comme suit :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

où
$\sum \vec{F}$: *somme des forces agissant sur le corps.*
$\vec{a}$: *L'accélération que ce corps va acquérir à la suite de l'influence de ces forces.*
m : *est la masse du corps.*

Définition 1.6.2. *(Loi de Kirchhoff)*

Le total forcé des équipes de tension autour d'un simple circuit fermé est égal à zéro, on sait que la différence de tension lors de la résistance, intense et secte soit $U_C = \dfrac{q}{C}, U_R = RI$ et $U_L = L\left(\dfrac{dI}{dt}\right)$ Dans l'ordre, où q La charge est sur condensateur.
La différence d'effort sera pendant un certain moment $E(t)$ et donc la loi Kirchhoff aura

$$U_R + U_L + U_C - E(t) = 0$$

Définition 1.6.3. *(La loi de Hooke [12])*

En 1676, Robert Hooke (physicien anglais) établie un lien entre la déformation d'un objet et la volonté de l'objet à revenir à son état naturelle (non déformé). Pour ce faire, l'objet déformé doit appliquer une force sur son environnement qui le contraint à épouser une forme non stable. Dans le cas du ressort idéal, élasticité et linéaire, Hooke réalise qu'un ressort étiré ou compressé applique une force proportionnelle à l'étirement ou à la compression du ressort. Cette force est alors appliquée sur les deux extrémités où le ressort est fixé. Lorsque le ressort possède sa longueur naturelle, il n'applique *aucune force. Pour un ressort idéal de masse négligeable, la force F_s appliquée par le ressort est égale à l'étirement ou à la compression Δl du ressort multiplié par la constante du ressort k (constante de Hooke)*

$$F_s = k\Delta l$$

où
F_s : *Force appliquée par le ressort* (N).
k : *Constante de rappel du ressort* (N/m).
Δl : *Mesure de l'étirement ou de la compression du ressort* (m).

Chapitre 2

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Introduction

Une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants est une équation du type [13]

$$y'' + ay' + by = h(t) \tag{2.1}$$

où les coefficients a et b sont des constantes réelles, $t \mapsto h(t)$ est une fonction donnée continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
L'équation

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.2}$$

est appelée l'équation homogène associée à (2.1)

Définition 2.0.1. *(Solution générale)*
Si y_1, y_2 sont deux solutions indépondante de l'équation homogéne (2.2), on appelle solution générale de l'équation (2.2) toutes solutions écrite sous la forme $y_H = c_1y_1 + c_2y_2, \quad c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$

2.1 Recherche d'une solution générale à l'équation homogéne

On cherche une solution de (2.2) sous la forme $y(t) = e^{rt}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (r^2 + ar + b)e^{rt} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad r^2 + ar + b = 0. \end{aligned}$$

Définition 2.1.1. *L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée **équation caractéristique** associée à (2.2).*
Soit $\Delta = a^2 - 4b$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (2.2).

Théoréme 2.1.1.

(1) *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et la solution générale de l'équation (2.2) peut être écrite sous la forme*

$$y_H(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et la solution générale de l'équation (2.2) peut être écrite sous la forme*

$$y_H(t) = (c_1 + c_2 t)e^{r_0 t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(3) *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et la solution générale de l'équation (2.2) peut être écrite sous la forme*

$$y_H(t) = e^{\alpha t}\Big(c_1 cos(\beta t) + c_2 sin(\beta t)\Big), \quad c_1,\, c_1 \in \mathbb{R}$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$y_H = c_1 e^{\alpha t} cos(\beta t + c_2) \quad ou \quad y_H = c_1 e^{\alpha t} sin(\beta t + c_2) \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$$

Preuve.

(1) Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1, r_2. On obtient ainsi deux solutions $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = e^{r_2 t}$ qui sont linéairement indépendantes car $r_1 \neq r_2$. La solution générale de (2.2) s'écrit

$$y_H(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une racine réelle double r_0. On obtient ainsi une solution $y_1 = e^{r_0 t}$. On vérifie que $y_2 = te^{r_0 t}$ est aussi une solution

$$\begin{aligned} y_2'' + ay_2 + by_2 &= (2r_0 + r_0^2 t)e^{r_0 t} + (a + ar_0 t)e^{r_0 t} + bte^{r_0 t} \\ &= (2r_0 + a)e^{r_0 t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car

$$2r_0 + a = P'(r_0) = 0$$

où

$$P(r) = r^2 + ar + b.$$

Ces deux solutions sont linéairement indépendantes. La solution générale de (2.2) s'écrit

$$y_H(t) = (c_1 + c_2 t)e^{r_0 t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(3) Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. On obtient deux solutions complexes

$$Y_1 = e^{r_1 t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t},\ Y_2 = e^{r_2 t} = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t}$$

Comme les parties réelles et imaginaires sont des solutions réelles, on obtient deux solutions réelles $y_1 = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$*,* $y_2 = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$*, qui sont linéairement indépendantes. La solution générale de* (2.2) *s'écrit*

$$y_H(t) = e^{\alpha t}\left(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)\right), c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

Exemple 2.1.1.

(1) Cherchons une solution de l'équation

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

on a $r_1 = -3$*,* $r_2 = -1$*. Alors la solution générale est*

$$y = c_1e^{-3t} + c_2e^{-t}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) Cherchons une solution de l'équation

$$y'' + 4y' + 9y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 4r + 9 = 0$$

on a $r_1 = -2 - i\sqrt{5}$*,* $r_2 = -2 + i\sqrt{5}$*. Alors la solution générale est*

$$y = e^{-2t}\left(c_1\cos(\sqrt{5}t) + c_2\sin(\sqrt{5}t)\right), \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

(3) Cherchons une solution de l'équation

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

on a $r_1 = -3$ *une racine double. Alors la solution générale est*

$$y = \left(c_1t + c_2\right)e^{-3t}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.2 Recherche d'une solution particulière pour un second membre spécifique

Une solution spéciale à l'équation non homogéne peut être déduite (2.1) en connaissant la forme du second côte $h(t)$ pour cette équation, nous avons en générale quatre cas pour elle.

Cas 1: Si $h(t) = p(t)$ est un polynôme de degré n.

On suppose que h est une fonction polynomiale. Alors (2.1) possède une solution particulière de la forme

$$y_P = \begin{cases} q(t), & \text{si} \quad b \neq 0 \\ tq(t), & \text{si} \quad b = 0 \quad \text{et} \quad a \neq 0 \\ t^2 q(t), & \text{si} \quad b = 0 \quad \text{et} \quad a = 0 \end{cases}$$

où $q(t)$ est une fonction polynomiale de même degré que $p(t)$.

Exemple 2.2.1.
Cherchons une solution de l'équation

$$y'' - y' - 2y = 2t^2.$$

L'équation caractéristique de la forme

$$r^2 - r - 2 = 0$$

admet les racines $r_1 = -1$ *et* $r_2 = 2$. *La solution générale de l'équation homogène associée est donc*

$$y_H = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous forme d'un polynôme du second degré

$$y_P = \alpha t^2 + \beta t + \gamma.$$

on a

$$y_P' = 2\alpha t + \beta, \quad y_P'' = 2\alpha.$$

En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$-2\alpha t^2 - 2(\alpha + \beta)t + 2\alpha - \beta - 2\gamma = 2t^2$$

D'où

$$\alpha = -1,\ \beta = 1,\ \gamma = -\frac{3}{2}.$$

Une solution particulière est donc

$$y_P = -t^2 + t - \frac{3}{2}$$

D'où la solution générale est

$$y = y_H + y_P$$

$$y = -t^2 + t - \frac{3}{2} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cas 2: Si $h(t) = Ke^{\alpha t}$.
On suppose que h est de la forme $h : t \mapsto Ke^{rt}$, où $K \in \mathbb{R}$ et où $r \in \mathbb{C}$ avec $r^2 + ar + b \neq 0$ Alors (2.1)

possède une solution particulière de la forme

$$y_P = \begin{cases} ce^{rt}, & \text{si} \quad r \quad \text{n'est pas solution de l'équation caractéristique} \\ cte^{rt}, & \text{si} \quad r \quad \text{est solution simple de l'équation caractéristique} \\ ct^2e^{rt}, & \text{si} \quad r \quad \text{est solution double de l'équation caractéristique} \end{cases}$$

Exemple 2.2.2. *Cherchons une solution de l'équation*

$$y'' - y' - 2y = e^{3t}.$$

La solution générale de l'équation homogéne associée est

$$y_H = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme 3 *n'est pas racine du polynôme caractéristique* $r^2 - r - 2$, *cherchons une solution particuliére sous la forme*

$$y_P = \alpha e^{3t}.$$

On a

$$y_P' = 3\alpha e^{3t},\ y_P'' = 9\alpha e^{3t}.$$

En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$(9\alpha - 3\alpha - 2\alpha)e^{3t} = e^{3t},$$

d'où $\alpha = \frac{1}{4}$.
Une solution particuliére est alors

$$y_P = \frac{1}{4}e^{3t}.$$

D'où la solution générale est

$$y = \frac{1}{4}e^{3t} + c_1e^{-t} + c_2e^{2t}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2.3. *Cherchons une solution de l'équation*

$$y'' - y' - 2y = e^{2t}.$$

La solution générale de l'équation homogéne associée est

$$y_H = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme 2 *n'est pas racine du polynôme caractéristique* $r^2 - r - 2$, *cherchons une solution particuliére sous la forme*

$$y_P = \alpha te^{2t}.$$

On a

$$y_P' = (2\alpha t + \alpha)e^{2t},\ y_P'' = (4\alpha t + 4\alpha)e^{2t}.$$

En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$(4\alpha t + 4\alpha - 2\alpha t - \alpha - 2\alpha t)e^{2t} = e^{2t},$$

d'où $\alpha = \frac{1}{3}$.
Une solution particuliére est alors

$$y_P = \frac{1}{3}te^{2t}.$$

D'où la solution générale est

$$y = \frac{1}{3}te^{2t} + c_1e^{-t} + c_2e^{2t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>Cas 3:</u> Si $h(t) = p(t)e^{rt}$.
On suppose que h est de la forme $h : t \mapsto p(t)e^{rt}$ où $p \in \mathbb{R}[T]$ est une fonction polynomial et où $r \in \mathbb{C}$. Alors (2.1) possède une solution particulière de la forme

$$y_P = \begin{cases} q(t)e^{rt}, & \text{si} \quad r \quad \text{n'est pas solution de l'équation caractéristique} \\ tq(t)e^{rt}, & \text{si} \quad r \quad \text{est solution simple de l'équation caractéristique} \\ t^2q(t)e^{rt}, & \text{si} \quad r \quad \text{est solution double de l'équation caractéristique} \end{cases}$$

où q est une fonction polynomialede de même degré que p.

Exemple 2.2.4.
Cherchons une solution de l'équation

$$y'' - y' - 2y = 2t^2.$$

L'équation caractéristique de la forme

$$r^2 - r - 2 = 0$$

admet les racines $r_1 = -1$ *et* $r_2 = 2$. *La solution générale de l'équation homogène associée est donc*

$$y_H = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

cherchons une solution particuliére sous la forme

$$y_P = (\alpha t + \beta)e^t.$$

On a

$$y_P' = (\alpha t + \alpha + \beta),\; y_P'' = (\alpha t + 2\alpha + \beta)e^t.$$

En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$\alpha = -\frac{1}{2},\; \beta = -\frac{1}{4}.$$

Une solution particulière est donc

$$y_P = (-\frac{1}{2}t - \frac{1}{4})e^t.$$

D'où la solution générale est

$$y = y_H + y_P$$

$$y = -\frac{1}{4}(2t+1)e^t + c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>Cas 4:</u> Si $h(t) = e^{\alpha t}\Big(p_1(t)\cos(\beta t) + p_2(t)\sin(\beta t)\Big)$.

On suppose que h est de la forme $h : t \mapsto e^{\alpha t}\Big(p_1(t)\cos(\beta t) + p_2(t)\sin(\beta t)\Big)$ où $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et $p_1,\ p_2 \in \mathbb{R}[T]$. Alors (2.1) possède une solution particulière de la forme

$$y_P = \begin{cases} e^{\alpha t}\Big(q_1(t)\cos(\beta t) + q_2(t)\sin(\beta t)\Big), & \text{si } \alpha + i\beta \text{ n'est pas solution de l'équation caractéristique} \\ te^{\alpha t}\Big(q_1(t)\cos(\beta t) + q_2(t)\sin(\beta t)\Big), & \text{si } \alpha + i\beta \text{ est solution de l'équation caractéristique} \end{cases}$$

avec $q_1,\ q_2$ sont des polynomes de même degré de $p_1,\ p_2$ respectivement.

Exemple 2.2.5.
Cherchons une solution de l'équation

$$y'' - y' - 2y = \sin(2t).$$

L'équation caractéristique de la forme

$$r^2 - r - 2 = 0$$

admet les racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. La solution générale de l'équation homogène associée est donc

$$y_H = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

cherchons une solution particuliére sous la forme

$$y_P = \alpha cos(2t) + \beta sin(2t).$$

On a

$$y_P' = -2\alpha sin(2t) + 2\beta cos(2t), \quad y_P'' = -4\alpha cos(2t) - 4\beta sin(2t).$$

En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$-2(3\alpha + \beta)\cos(2t) + (2\alpha - 6\beta)\sin(2t) = \sin(2t),$$

donc

$$3\alpha + \beta = 0 \quad et \quad 2\alpha - 6\beta = 1,$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{20}, \quad \beta = \frac{-3}{20}.$$

Alors la solution générale est

$$y = \frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{3}{20}\sin(2t) + c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}, \quad c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2.6. *Cherchons une solution de l'équation*

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2t}\cos(t).$$

L'équation caractéristique de la forme

$$r^2 - r - 2 = 0$$

admet les racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. La solution générale de l'équation homogène associée est donc

$$y_H = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

cherchons une solution particuliére sous la forme

$$y_P(t) = e^{2t}\Big(q_1\cos(t) + q_2\sin(t)\Big)$$

On dérive et on remplace, et on trouve

$$q_1 = \frac{3}{10}, \quad q_2 = \frac{3}{5}.$$

Une solution particulière est alors

$$y_P = e^{2t}\left(\tfrac{3}{10}\cos(t) + \tfrac{3}{5}\sin(t)\right)$$

D'où la solution générale est

$$y = e^{2t}\left(\tfrac{3}{10}\cos(t) + \tfrac{3}{5}\sin(t)\right) + c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

2.3 Solution particulière par la méthode de variation des constantes

Proposition 2.3.1. *Si la solution générale de l'équation homogène (2.2)est écrire sous la forme*

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Alors on peut écrire une solution particulière de l'équation (2.1) sous la forme

$$y_P = y_1 \int \frac{-h(t)y_2}{W}dt + y_2 \int \frac{h(t)y_1}{W}dt.$$

Preuve. *Soit $y_H = c_1y_1 + c_2y_2$, $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ est une solution générale de l'équation homogène (2.2). Le principe de cette méthode est de considerer les constantes de la solution particulère de l'équation homogène (2.2) sous la forme $y_P = c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2$ telles que $c_1,\ c_2$ deux fonctions inconues de la variable t sont vérifiées*

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0.$$

Calculons y_P', y_P''

$$\begin{aligned} y_P' &= c_1'(t)y_1 + c_1(t)y_1' + c_2'(t)y_2 + c_2(t)y_2' \\ &= c_1(t)y_1' + c_2(t)y_2' \\ y_P'' &= c_1'(t)y_1' + c_1(t)y_1'' + c_2'(t)y_2' + c_2(t)y_2''. \end{aligned}$$

Par compensation dans l'équation (2.1)*, on obtient*

$$c_1(t)(y_1'' + a(t)y_1' + b(t)y_1) + c_2(t)(y_2'' + a(t)y_2' + b(t)y_2) + c_1'(t)y_1' + c_2'(t)y_2' = h(t),$$

i.e.

$$c_1'(t)y_1' + c_2'(t)y_2' = h(t),$$

car y_1, y_2 *sont des solutions de l'équation homogène* (2.2)*.*
On déduire que les fonctions $c_1'(t)$, $c_2'(t)$ *sont vérifiées le système suivant*

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1 + c_2'(t)y_2 = 0 \\ c_1'(t)y_1' + c_2'(t)y_2' = h(t). \end{cases}$$

Son déterminant est $W = y_1y_2' - y_1'y_2$ *et comme* y_1, y_2 *sont linéairement indépendantes,* $W \neq 0$*, ce qui implique que cette systéme admet une seule solution* $(c_1'(t), c_2'(t))$ *donné par :*

$$c_1'(t) = \frac{-h(t)y_2}{W}, \quad c_2'(t) = \frac{h(t)y_1}{W}$$

donc

$$c_1(t) = \int \frac{-h(t)y_2}{W}dt, \quad c_2(t) = \int \frac{h(t)y_1}{W}dt,$$

la solution particulière de l'équation (2.1) *écrit sous la forme*

$$y_P = y_1 \int \frac{-h(t)y_2}{W}dt + y_2 \int \frac{h(t)y_1}{W}dt.$$

On conclut que la solution générale de l'équation non homogène (2.1) *donné par*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_1 \int \frac{-h(t)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}dt + y_2 \int \frac{h(t)y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}dt, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.3.1. *Considérons l'équation* $y'' - 4y = te^t$*. En cherchant des solutions pour l'équation homogéne* $y'' - 4y = 0$ *sous la forme* $y(t) = e^{rt}$, $r \in \mathbb{R}$*, on trouve que* $y_1(t) = e^{2t}$ *et* $y_2(t) = e^{-2t}$ *sont deux solutions particuliéres indépendantes. D'où la solution générale de l'équation homogéne est de la forme* $y_H(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*. On va donc chercher la solution générale de l'équation non homogéne sous la forme* $y(t) = e^{2t}c_1(t) + c_2e^{-2t}$*. Les dérivées* c_1' *et* c_2' *doivent vérifier le systéme*

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0, \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = h(t), \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} e^{2t}c_1' + c_2'e^{-2t} = 0 \\ 2c_1'e^{2t} - 2c_2'e^{-2t} = te^t \end{cases}$$

On en déduit que $c_1' = \frac{t}{4}e^{-t}$, $c_2' = \frac{t}{4}e^{3t}$ *et donc*

$$c_1(t) = \frac{-1}{4}(t+1)e^{t}, \quad c_2(t) = \frac{1}{36}(3t-1)e^{3t}.$$

D'où la solution générale de l'équation non homogène est

$$y(t) = \frac{-1}{4}(t+1)e^{3t} + \frac{1}{36}(3t-1)e^{t} + c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Résume. *Comme nous l'avons vu dans le cas général des équations linéaires du second ordre, une solution particulière de l'équation* $y'' + ay' + by = h(t)$ *peut être obtenue par la méthode de variation des constantes (voir Proposition (2.3.1)).*

$$y = y_1 \int \frac{-h(t)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}dt + y_2 \int \frac{h(t)y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}dt + c_1y_1 + c_2y_2, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

où y_1 *et* y_2 *sont 2 solutions particulières indépendantes de l'équation homogéne*

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Proposition 2.3.2. *Si* r_1 *et* r_2 *sont deux racines distinctes du polynôme caractéristique* $r^2 + ar + b$, *alors* $y_1 = e^{r_1t}$, $y_2 = e^{r_2t}$. *Dans ce cas on peut écrire la solution générale de l'équation avec second membre sous la formule suivant*

$$y = e^{r_1t}\int \left(e^{(r_2-r_1)t}\left(\int e^{-r_2t}h(t)dt\right)\right)dt. \tag{2.4}$$

Preuve. *On utilise l'intégration par parties pour calculer l'intégrale*

$$I = \int e^{(r_2-r_1)t}\left(\int e^{-r_2t}h(t)dt\right)dt.$$

Posons,

$$u = \int e^{-r_2t}h(t)dt + \lambda_1 \quad \Longrightarrow \quad u' = e^{-r_2t}h(t)$$

$$v' = e^{(r_2-r_1)t} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{1}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)t}$$

alors

$$I = \frac{1}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)t}\int e^{-r_2t}h(t)dt + \frac{1}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)t}\lambda_1 - \frac{1}{r_2-r_1}\int e^{-r_1t}h(t)dt + \lambda_2.$$

Remplacer dant l'équation (2.4)

$$y = \frac{1}{r_2-r_1}e^{r_2t}\int e^{-r_2t}h(t)dt + \frac{1}{r_2-r_1}e^{r_2t}\lambda_1 - \frac{1}{r_2-r_1}e^{r_1t}\int e^{-r_1t}h(t)dt + e^{r_1t}\lambda_2$$

$$y = \frac{1}{r_2-r_1}\left(e^{r_2t}\int e^{-r_2t}h(t)dt - e^{r_1t}\int e^{-r_1t}h(t)dt\right) + c_1y_1 + c_2y_2. \tag{R1}$$

avec $c_1 = \lambda_2$ *et* $c_2 = \dfrac{\lambda_1}{r_2-r_1}$.

D'autre part, on peut écrire la formule (2.3) sous la forme

$$y = -e^{r_1 t}\int \frac{e^{r_2 t}h(t)}{(r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t}}dt + e^{r_2 t}\int \frac{e^{r_1 t}h(t)}{(r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t}}dt + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = \frac{1}{r_2 - r_1}\left(-e^{r_1 t}\int e^{-r_1 t}h(t)dt + e^{r_2 t}\int e^{-r_2 t}h(t)dt\right) + c_1 y_1 + c_2 y_2. \tag{R2}$$

De (R1) et (R2) on obtient le résultat.

Exemple 2.3.2. *Cherchons une solution de l'équation*

$$y'' - y' - 2y = e^{-t}.$$

L'équation caractéristique de la forme

$$r^2 - r - 2 = 0$$

admet les racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. La solution générale et donc

$$\begin{aligned} y = e^{-t}\int \left(e^{(2+1)t}\left(\int e^{-2t}e^{-t}dt\right)\right)dt &= e^{-t}\int \left(e^{3t}\left(\int e^{-3t}dt\right)\right)dt \\ &= e^{-t}\int \left(e^{3t}\left(-\frac{1}{3}e^{-3t} + c_1 dt\right)\right)dt \\ &= e^{-t}\left(\frac{1}{3}c_1 e^{3t} - \frac{1}{3}t + c_2\right) \\ &= \frac{1}{3}c_1 e^{2t} + \left(c_2 - \frac{1}{3}t\right)e^{-t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients variables

3.1 L'équation différentielle d'Euler

3.1.1 L'équation homogène

C'est l'équation [14]

$$t^2y'' + aty' + by = 0 \tag{3.1}$$

avec $t \neq 0$ et $a,\ b \in \mathbb{R}$.
On cherche des solutions particulières sous la forme $y = t^r$.
On a

$$y' = rt^{r-1} \quad \text{et} \quad y'' = r(r-1)t^{r-2},$$

en reportant, on obtient

$$t^r\left(r^2 + (a-1)r + b\right) = 0$$

et de $t \neq 0$ alors

$$r^2 + (a-1)r + b = 0,$$

c'est l'équation caractéristique de l'équation (3.1), en la résolvant on obtient la solution générale de l'équation (3.1) selon la théorie suivante [3].

Théoréme 3.1.1. *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$t^2y'' + aty' + by = 0,$$

$t \neq 0$ *avec* $a,\ b$ *deux constantes réelles.*
Son équation caractéristique est

$$r^2 + (a-1)r + b = 0.$$

Si r_1, r_2 représetent les solution de cette équation alors
(1) Si r_1, r_2 deux racines réelles différentes, la solution générale de l'équation (3.1) *est*

$$y = c_1|t|^{r_1} + c_2|t|^{r_2}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) Si $r_1 = r_2$ (le cas d'une racine réelle double), la solution générale de l'équation (3.1) *est*

$$y = (c_1 + c_2 \ln|t|)\,|t|^{r_1}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(3) Si r_1, r_2 deux racines complexes conjuguées tel que $r_1 = \alpha + i\beta$, la solution générale de l'équation (3.1) *est*

$$y = |t|^{\alpha}\left(c_1 \cos(\beta \ln|t|) + c_2 \sin(\beta \ln|t|)\right), \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Preuve. -*Imposer d'abord $t > 0$*
on calcule le discriminant de l'équation caractéristique $\Delta = (a-1)^2 - 4b$.
(1) Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1, r_2, $r_1 \neq r_2$ alors $y_1 = t^{r_1}$ et $y_2 = t^{r_2}$ sont deux solution particulières indépondantes donc

$$y = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

est la solution générale de l'équation (3.1).
(2) Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double $r_1 = r_2$, alors

$$y_1 = t^{r_1}$$

est une solution particulière de l'équation (3.1) *et la deuxième solution dévient sous la forme*

$$y_2 = y_1 \phi$$

telle que ϕ est une fonction à déterminer. Nous avons,

$$y_2' = y_1'\phi + \phi' y_1$$

et

$$y_2'' = y_1''\phi + 2y_1'\phi' + y_1\phi''.$$

Comme y_2 est une solution de l'équation (3.1) *on a*

$$t^2 y_2'' + aty_2' + by_2 = 0.$$

Donc

$$t^2\left(y_1''\phi + 2y_1'\phi' + y_1\phi''\right) + at\left(y_1'\phi + \phi' y_1\right) + by_1\phi = 0$$

ce qui donne

$$t^2 y_1 \phi'' + (2t^2 y_1' + aty_1)\phi' + (t^2 y_1'' + aty_1' + by_1)\phi = 0$$

et on obtient

$$\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a}{t}\right)\phi' + \phi'' = 0.$$

D'autre part, nous avons $r_1 = \frac{-(a-1)}{2} = \frac{-a+1}{2}$ *donc*

$$y_1 = t^{\frac{-a+1}{2}} \quad et \quad y_1' = \frac{-a+1}{2} t^{\frac{-a-1}{2}}$$

ensuite

$$2\frac{y_1'}{y_1} = (-a+1)t^{-1} = \frac{-a+1}{t}$$

et de

$$\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a}{t}\right)\phi' + \phi'' = 0$$

on a donc

$$\frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{1}{t}.$$

Posons $u = \phi'$, *on obtient*

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{t}$$

et par intégration

$$u = k_1\frac{1}{t}, \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

ce qui implique

$$\phi = k_1 \ln t + k_2, \quad k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

ensuite

$$y_2 = y_1(k_1 \ln t + k_2).$$

Le solution générale de (3.1) *écrire sous la forme*

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

(y_1 *et* y_2 *sont deux solutions particulières independantes).*
Alors

$$y = (\alpha + \beta k_2 + \beta k_1 \ln t)y_1$$

i.e.

$$y = (c_1 + c_2 \ln t)t^{r_1}$$

avec $c_1 = \alpha + \beta k_2 \in \mathbb{R}$, $c_2 = \beta k_1 \in \mathbb{R}$.
(3) Si $\Delta < 0$, *l'équation caractéristique admet deux racine complexes conjuguées* $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ *et la solution générale de l'équation* (3.1) *donnée par*

$$y = t^{\alpha}\left(c_1 \cos(\beta \ln t) + c_2 \sin(\beta \ln t)\right), \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

-Maintenant, considérons t<0.
Dans ce cas, on pose $x = -t > 0$ *et l'on a* (3.1) *sous la forme*

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + at\frac{dy}{dt} + by = 0.$$

De $x = -t$ on obtient

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dx}$$

et

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

donc l'équation (3.1) *dévient sous la forme*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0$$

i.e.

$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

D'aprés ce qui précède.

(1) Si $\Delta > 0$,

$$\begin{aligned} y &= c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2} \\ &= c_1(-t)^{r_1} + c_2(-t)^{r_2}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) Si $\Delta = 0$,

$$\begin{aligned} y &= (c_1 + c_2\ln x)x^{r_1} \\ &= (c_1 + c_2\ln(-t))(-t)^{r_1}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(3) Si $\Delta < 0$,

$$\begin{aligned} y &= x^{\alpha}\left(c_1\cos(\beta\ln x) + c_2\sin(\beta\ln x)\right) \\ &= (-t)^{\alpha}\left(c_1\cos(\beta\ln(-t)) + c_2\sin(\beta\ln(-t))\right), \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalement, on conclut

(1) Si $\Delta > 0$,

$$y = c_1|t|^{r_1} + c_2|t|^{r_2}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) Si $\Delta = 0$,

$$y = (c_1 + c_2\ln|t|)|t|^{r_1}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

(3) Si $\Delta < 0$,

$$y = |t|^{\alpha}\left(c_1\cos(\beta\ln|t|) + c_2\sin(\beta\ln|t|)\right), \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sinon on utilise une méthode plus générale :

on effectue un changement de variable en posant $t = e^x$, $(t > 0)$ *on a donc* $dt = tdx$,

i.e.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

ensuite

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dy}{dx}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{dy}{dx}\right) \\ &= -\frac{1}{t^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{t^2}\frac{d^2y}{dx^2}.\end{aligned}.$$

En remplaçant dans l'équation (3.1), *on obtient*

$$t^2\left(-\frac{1}{t^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{t^2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) + at\left(\frac{1}{t}\frac{dy}{dx}\right) + by = 0.$$

On obtient alors l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a-1)\frac{dy}{dx} + by = 0.$$

On aura alors suivant la nature des racines du polynômes caractéristique $r^2 + (a-1)\,r + b$:

1) $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} = c_1t^{r_1} + c_2t^{r_2}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$. *dans le cas de deux racines réelles distinctes* r_1 *et* r_2, $r_1 \neq r_2$.
2) $y = (c_1 + c_2x)e^{r_0x} = (c_1 + c_2\ln t)t^{r_0}$ *dans le cas d'une racine réelle double* $r_0 = \frac{1-a}{2}$.
3) $y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)) = t^{\alpha}(c_1\cos(\beta\ln t) + c_2\sin(\beta\ln t))$ *dans le cas de deux racines complexes conjuguées*
   $\alpha \pm i\beta = \frac{1-a}{2} \pm i\frac{\sqrt{4b-(1-a)^2}}{2}$.

Exemple 3.1.1.
(1) Cherchons une solution de l'équation

$$t^2y'' - ty' - 3y = 0.$$

On cherche des solutions particulières sous la forme

$$y = t^r.$$

On obtient une équation du second degré $r(r-1) - r - 3 = 0$ *soit* $r^2 - 2r - 3 = 0$, *on trouve* $r_1 = 3$ *et* $r_2 = -1$.
Alors la solution génerale est

$$y = c_1t^3 + \frac{c_2}{t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Cherchons une solution de l'équation

$$t^2y'' + 3ty' + y = 0.$$

On cherche des solutions particulières sous la forme $y = t^r$, *on obtient une équation* du *second degré* $r(r-1) + 3r + 1 = 0$ *soit* $(r+1)^2 = 0$, *on trouve* $r = -1$ *comme racine double.*
On utilise alors la méthode plus générale, on pose $t = e^s$ *et on note* $y(t) = y\left(e^s\right) = z(s)$. *Alors*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dz}{ds}$$

car

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}$$

et

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\right).$$

L'équation

$$t^2y'' + 3ty' + y = 0$$

se transforme alors en

$$\frac{d^2z}{ds^2} + 2\frac{dz}{ds} + z = 0.$$

On résout l'équation caractéristique

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

on trouve $r = -1$ *comme racine double donc*

$$z(s) = e^{-s}(c_1 + c_2 s).$$

Alors la solution générale est

$$y = \frac{1}{t}(c_1 + c_2 \ln t), \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) Cherchons une solution de l'équation

$$t^2y'' + 6ty' + 6y = \ln t.$$

On utilise alors la méthode plus générale.
On pose $t = e^s$ *et on note*

$$y(t) = y\left(e^s\right) = z(s).$$

Alors

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dz}{ds}$$

car

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}$$

et

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\right)$$

remplace dans l'équation

$$t^2\left(\frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\right)\right) + 6t\left(\frac{1}{t}\frac{dz}{ds}\right) + 6z = \ln(e^s).$$

Alors

$$\frac{d^2z}{ds^2} + 5\frac{dz}{ds} + 6z = s.$$

On résout l'équation homogéne

$$\frac{d^2z}{ds^2} + 5\frac{dz}{ds} + 6z = 0.$$

Ainsi, l'équation caractéristique

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

ensuit $\Delta = 5^2 - 4(6) = 1$, *on trouve* $r_1 = -2$ *et* $r_2 = -3$ *donc*

$$z_H(s) = c_1 e^{-2s} + c_2 e^{-3s}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche de solution particulière sous la forme

$$z_P(s) = Cs + D$$

C et D constantes réelle. On a

$$z'_P(s) = C \quad et \quad z''_P(s) = 0$$

En remplaçant dans l'équation, on trouve

$$\begin{aligned} 0 + 5(C) + 6(Cs + D) &= s \\ \Longrightarrow \quad 6Cs + 5C + 6D &= s \end{aligned}$$

donc $C = \frac{1}{6}$ *et* $D = -\frac{5}{36}$ *on trouve de solution particulière*

$$z_P(s) = \frac{s}{6} - \frac{5}{36}$$

alors la solution générale pour l'équation non homogéne est

$$z(s) = z_H(s) + z_P(s) = c_1 e^{-2s} + c_2 e^{-3s} + \frac{s}{6} - \frac{5}{36}.$$

Donc, on trouve la solution générale pour l'équation originale

$$y(t) = \frac{c_1}{t^2} + \frac{c_2}{t^3} + \frac{\ln t}{6} - \frac{5}{36}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

3.1.2 L'équation non homogène

C'est l'équation

$$t^2 y'' + aty' + by = h(t) \tag{3.2}$$

son équation homogène associée est

$$t^2 y'' + aty' + by = 0$$

et son équation caractéristique est

$$r^2 + (a-1)r + b = 0$$

Si $y_1,\ y_2$ deux solution particulière indépendantes de l'équation homogène (3.1), la solution générale de (3.1) est écrire sous la forme

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

et la solution générale de l'éqution non homogène (3.2) écrire sous la forme

$$y = y_H + y_P$$

tel que y_P est une solution particulière de l'équation (3.2), que l'on peut trouver par méthode de variation des constantes.

Posons

$$y_P = c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2$$

ensuit on cherche $c_1(t),\ c_1(t)$ selon la théorie suivante.

Théoréme 3.1.2. *Soit l'équation (3.2).*
La solution particulière

$$y_P = c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2$$

de l'équation (3.2) vérifie le système

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1 + c_2'(t)y_2 = 0 \\ c_1'(t)y_1' + c_2'(t)y_2' = \dfrac{h(t)}{t^2} \end{cases} \tag{3.3}$$

Preuve. *Supposons* $c_1'(t)y_1 + c_2'(t)y_2 = 0$
d'aprés

$$y_P = c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2,$$

alors

$$y_P' = c_1'(t)y_1 + c_1(t)y_1' + c_2'(t)y_2 + c_2(t)y_2',$$

donc

$$y_P' = c_1(t)y_1' + c_2(t)y_2',$$

et

$$y_P'' = c_1'(t)y_1' + c_1(t)y_1'' + c_2'(t)y_2' + c_2(t)y_2'',$$

comme

$$y_P'' + ay_P' + by_P = h(t),$$

on obtient

$$c_1'(t)t^2y_1' + c_2'(t)t^2y_2' = h(t)$$

on a donc le système

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1 + c_2'(t)y_2 = 0 \\ c_1'(t)y_1' + c_2'(t)y_2' = \dfrac{h(t)}{t^2} \end{cases}$$

Exemple 3.1.2. *Considérons l'équation non homogène suivante*

$$t^2y'' - 4ty' + 4y = t^4 + t^2, \quad t > 0$$

son équation homogène

$$t^2y'' - 4ty' + 4y = 0.$$

On chercher des solution particulière sous la forme $y = t^r$, on obtient une équation du second degré (l'équation caractéristique)

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

le quel est admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = 1,\ r_2 = 4$.

Ce qui donne la solution générale de l'équation homogène par

$$y_H = c_1 t + c_2 t^4, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour obtenir la solution particulièrede l'équation non homogène, posons

$$y_P = c_1(t)t + c_2(t)t^4.$$

En utilisant le système (3.3), on obtient

$$\begin{cases} c_1'(t)t + c_2'(t)t^4 = 0 \\ c_1'(t) + c_2'(t)(4t^3) = t^2 + 1 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} c_1'(t) = -\frac{1}{3}(t^2+1) \\ c_2'(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right) \end{cases}$$

ensuit

$$\begin{cases} c_1(t) = -\frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3} + t\right) \\ c_2(t) = \frac{1}{3}\left(\ln t - \frac{1}{2t^2}\right) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_P &= -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{t^4}{3} + t^2\right) + \tfrac{1}{3}\left(t^4 \ln t - \tfrac{1}{2}t^2\right) \\ &= -\tfrac{1}{9}t^4 - \tfrac{1}{3}t^2 + \tfrac{1}{3}t^4 \ln t - \tfrac{1}{6}t^2 \\ &= -\tfrac{1}{9}t^4 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^4 \ln t. \end{aligned}$$

Finalement, la solution générale de l'équationnon homogène donnée par

$$y = c_1 t + c_2 t^4 - \frac{1}{9}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^4 \ln t, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

3.2 L'équation différentielle de Lagrange

C'est une gnralisation de l'équation différentielle précédente d'Euler, et c'est sous la forme

$$(\alpha t + \beta)^2 y'' + a(\alpha t + \beta)y' + by = 0, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Il est clair que lorsque nous prenons $\alpha = 1,\ \beta = 0$ une équation de Lagrange se transforme en équation d'Euler différentielle. C'est-à-dire l'équation d'Euler est un cas particulier d'équation de Lagrange différentielle, et pour résoudre cette équation, nous utilisons le changement suivant

$$u = \alpha t + \beta.$$

L'équation se transforme en une équation différentielle à coefficients constantes qui est résolue comme précédemment, puis nous récupérons la variable d'origine et nous l'expliquerons dans ce qui suit

$$du = \alpha dt \Rightarrow dt = \frac{du}{\alpha}$$

ce qui donne

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \frac{dy}{du}$$

et

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\alpha \frac{dy}{du}\right) = \alpha^2 \frac{d^2y}{du^2}$$

on substitue dans l'équation (3.4)

$$u^2\left(\alpha^2 \frac{d^2y}{du^2}\right) + au\left(\alpha \frac{dy}{du}\right) + by = 0$$

en divisant par α^2 on obtion l'équation d'Euler

$$u^2\left(\frac{d^2y}{du^2}\right) + a_1 u\left(\frac{dy}{du}\right) + a_2 y = 0 \tag{3.5}$$

où $a_1 = \frac{a}{\alpha}$ et $a_2 = \frac{b}{\alpha^2}$
Maintenant, nous utilisons la substitution suivante $u = e^s$ où $s = \ln u$
On trouve

$$ds = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{ds}{du} = \frac{1}{u}$$

On a

$$\frac{dy(u)}{du} = \frac{dy\left(e^s\right)}{du} = \frac{dy\left(e^s\right)}{ds} \cdot \frac{ds}{du} = \frac{dz(s)}{ds} \cdot \frac{1}{u}, \quad (z(s) = y(e^s))$$

donc

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}\frac{dz}{ds}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dy(u)}{du}\right) &= \frac{d}{du}\left(\frac{dz(s)}{ds} \cdot \frac{1}{u}\right) \\
&= \frac{1}{u}\frac{d^2z}{duds} - \frac{1}{u^2}\frac{dz}{ds} \\
&= \frac{1}{u}\frac{d^2z}{uds^2} - \frac{1}{u^2}\frac{dz}{ds} \\
&= \frac{1}{u^2}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{1}{u^2}\frac{dz}{ds} \\
&= \frac{1}{u^2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{1}{u^2}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{1}{u^2}\frac{dz}{ds}.$$

On remplace dans l'équation (3.5)

$$u^2\left(\frac{1}{u^2}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{1}{u^2}\frac{dz}{ds}\right) + a_1 u\left(\frac{1}{u}\frac{dz}{ds}\right) + a_2 z = 0.$$

On obtient alors l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\frac{d^2z}{ds^2} + (a_1 - 1)\frac{dz}{ds} + a_2 z = 0$$

où $a_1 = \frac{a}{\alpha}$ et $a_2 = \frac{b}{\alpha^2}$ il est résolu comme nous le savions précédemment. [9]

Exemple 3.2.1. *pour résoudre cette équation*

$$(2t+1)^2y'' + (2t+1)y' - 4y = 0$$

on pose $u = 2t+1$, *puis on pose* $u = e^s$

$$\begin{aligned} du = 2dt &\Longrightarrow dt = \frac{du}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{dy}{dt} = 2\frac{dy}{du} \\ &\Longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(2\frac{dy}{du}\right) = 2^2 \cdot \frac{d^2y}{du^2} = 4 \cdot \frac{d^2y}{du^2} \end{aligned}$$

on substitue dans l'équation

$$u^2\left(4 \cdot \frac{d^2y}{du^2}\right) + u\left(2\frac{dy}{du}\right) - 4y = 0$$

en divisant par 4 *on obtion d'Euler*

$$u^2\left(\frac{d^2y}{du^2}\right) + \frac{1}{2}u\left(\frac{dy}{du}\right) - y = 0$$

on pose $u = e^s$ *ou* $s = \ln u$

$$\begin{aligned} \frac{dy(u)}{du} &= \frac{1}{u}\frac{dz(s)}{ds} \\ \frac{d^2y}{du^2} &= \frac{1}{u^2}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{1}{u^2}\frac{dz}{ds} \end{aligned}$$

remplace dans l'équation

$$u^2\left(\frac{1}{u^2}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{1}{u^2}\frac{dz}{ds}\right) + \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{u}\frac{dz}{ds}\right) - z = 0$$

alors

$$\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dz}{ds} - z = 0.$$

L'equation caractéristique de cette équation différentielle $r^2 - \frac{1}{2}r - 1$
$\Delta = \frac{17}{4} > 0 \quad \Rightarrow r_1 = \frac{1+2\sqrt{17}}{4}$, $r_2 = \frac{1-2\sqrt{17}}{4}$ *c'est la solution de l'équation homogéne*

$$z = c_1 s^{r_1} + c_2 s^{r_2}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

retourner la variable d'origine $s = \ln u = \ln(2t+1)$ *on trouve la solution*

$$y = c_1(\ln(2t+1))^{r_1} + c_2(\ln(2t+1))^{r_2}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.2. *Pour résoudre cette équation*

$$(t+2)^2y'' + (t+2)y' - y = t$$

on pose $u = t+2$ *ou* $t = u-2$

$$du = dt \Rightarrow$$

Donc

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{du^2}$$

remplace dans l'équation

$$u^2\frac{d^2y}{du^2} + u\frac{dy}{du} - y = u - 2$$

Et c'est une équation d'Euler, on pose $u = e^s$ *ou* $s = \ln u$
donc

$$\frac{dy(u)}{du} = \frac{1}{u}\frac{dz(s)}{ds}, \quad \frac{d^2y}{du^2} = \frac{1}{u^2}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{1}{u^2}\frac{dz}{ds}$$

remplace dans l'équation

$$\frac{d^2z}{ds^2} + (1-1)\frac{dz}{ds} - z = e^s - 2$$

alors

$$\frac{d^2z}{ds^2} - z = e^s - 2$$

On résout l'équation homogéne

$$\frac{d^2z}{ds^2} - z = 0.$$

Ainsi, l'équation distinctive $r^2 - 1 = 0$, *on trouve* $r_1 = 1$, $r_2 = -1$.
Ainsi, la solution de l'équation homogéne est $z_H = c_1e^s + c_2e^{-s}, \quad c_1, \, c_2 \in \mathbb{R}$.
Nous recherchons a' la solution particulier pas en forme $z_P(s) = c_1(s)e^s + c_2(s)e^{-s}$ *change les constantes*

$$\begin{cases} c_1'e^s + c_2'e^{-s} = 0 \\ c_1'e^s - c_2'e^{-s} = e^s - 2 \end{cases}$$

En résolvant ce systéme on obtient

$$c_1' = \frac{e^s - 2}{2e^s}, \quad c_2' = \frac{2 - e^s}{2e^{-s}}.$$

Alors

$$c_1 = \int \left(\frac{1}{2} - e^{-s}\right) ds = \frac{t}{2} + e^{-s}, \quad c_2 = \int \left(e^s - \frac{e^{2s}}{2}\right) ds = e^s - \frac{e^{2s}}{4}$$

remplace a la solution particulière

$$\begin{aligned} z_P(s) &= \left(\frac{s}{2} + e^{-s}\right)e^s + \left(e^s - \frac{e^{2s}}{4}\right)e^{-s} \\ &= \frac{e^s}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) + 2 \end{aligned}$$

on trouve la solution générale

$$z = z_H + z_P = c_1e^s + c_2e^{-s} + \frac{e^s}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right) + 2.$$

Renvoie la variable d'origine $e^s = t+2$ *et* $s = \ln u = \ln(t+2)$

$$y(t) = c_1(t+2) + \frac{c_2}{t+2} + \frac{t+2}{2}\left(ln(t+2) - \frac{1}{2}\right) + 2, \quad c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$$

3.3 Réduction d'ordre

Il existe des équations différentielle du second ordre à coefficients variables qui sont résolues par la méthode de rétrogradation [1] [7].

Modéle 1.

Si l'équation est écrite sous la forme

$$y'' + a(t)y' = h(t) \tag{3.6}$$

On peut réduit l'ordre 2 à l'ordre 1 de cette équation par utilisation de changement suivant

$$z = y'$$

donc l'équation (3.6) dévient sous la forme

$$z' + a(t)z = h(t)$$

c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exemple 3.3.1. *Trouvons une solution de l'équation suivant*

$$t^2y'' + 2ty' - 1 = 0; \quad t > 0$$

l'équation peut s'écrire sous la forme

$$y'' + \frac{2}{t}y' - \frac{1}{t^2} = 0$$

C'est sous la forme de l'équation (3.6), *donc on pose* $z = y'$, *alors*

$$z' + \frac{2}{t}z = \frac{1}{t^2}. \tag{3.7}$$

Donc

$$\frac{dz}{dt} + \frac{2}{t}z = \frac{1}{t^2}.$$

Nous recherchons un intégrateur

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2dt}{t}} = e^{\ln t^2} = t^2$$

On multiplie par les deux membres de l'équation (3.7)

$$t^2z' + 2tz = 1.$$

Alors

$$\left(t^2z\right)' = 1 \tag{3.8}$$

En intégrant les deux membres de l'équation (3.8)

$$\begin{aligned} t^2 z = \int 1 dt \quad &\Longleftrightarrow \quad t^2 z = t + C_1 \\ &\Longleftrightarrow z = \frac{1}{t} + \frac{C_1}{t^2} \end{aligned}.$$

Donc

$$y' = \frac{1}{t} + \frac{C_1}{t^2}$$

trouver la solution

$$y = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{C_1}{t^2} \right) = -\frac{C_1}{t} + \ln t + C_2, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$$

Modéle 2. (*méthode d'analyse opérateur [4]*)
C'est un méthode facile si c'est applicable, une méthode qui réduit l'équation de la seconde order à l'équation de premier order. Si nous avons l'équation suivante

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = h(t) \tag{3.9}$$

on pose $D = \dfrac{d}{dt}$, puis remplace a' l'équation (3.9)

$$\left(D^2 + a(t)D + b(t)\right) y = h(t).$$

Et il a été possible d'analyser l'effet différentiel au fur et à suit

$$\left[D^2 + a(t)D + b(t)\right] y = \left(D + a_1(t)\right)\left(D + a_2(t)\right) y.$$

L'équation devient sous la forme

$$\left(D + a_1(t)\right)\left(D + a_2(t)\right) y = h(t)$$

puis supposer que $\left(D + a_2(t)\right) y = z$, alors

$$\left(D + a_1(t)\right) z = h(t)$$

où

$$\frac{dz}{dt} + a_1(t)z = h(t)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier order,et résolvez nous obtenons de la valeur z, on remplace en sur $z = z(t)$ ressembler sous la forme

$$\frac{dy}{dt} + a_2(t)y = z(t)$$

C'est aussi une équation linéaire de premier ordre en y, et résolvez nous obtenons sur la solution générale y.

Exemple 3.3.2. *Dans la méthode d'analyse d'opérateur, nous recherchons une solution générale à l'équation.*

$$(t+2)y'' - (2t+5)y' + 2y = 2(t+2)^2 e^{2t},\ t \neq 2$$

écrivons l'équation sous la forme

$$\left[(t+2)D^2 - (2t+5)D + 2\right] y = 2(t+2)^2 e^{2t} \tag{3.10}$$

où $D = \dfrac{d}{dt}$.
En analysant membre gauche de l'équation ressembler (3.10) *sous la forme*

$$(t+2)D - 1)(D-2)y = 2(t+2)^2 e^{2t} \tag{3.11}$$

Supposer que $(D-2)y = z$*.....*$(*)$ *remplace en équation* (3.11)

$$((t+2)D - 1)z = 2(t+2)^2 e^{2t}$$

où

$$(t+2)\frac{dz}{dt} - z = 2(t+2)^2 e^{2t}$$

en divisant par $t+2$ *on a*

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{t+2} z = 2(t+2)e^{2t}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier order en z*, facteur d'intégration est*

$$I(t) = e^{-\int \frac{dt}{t+2}} = \frac{1}{t+2}$$

produit facteur d'intégration dans l'équation On a

$$\frac{1}{t+2}\frac{dz}{dt} - \frac{1}{(t+2)^2} z = \frac{1}{t+2} \cdot 2(t+2)e^{2t}$$

alors

$$\left(\frac{z}{t+2}\right)' = 2e^{2t}.$$

Donc par intégration des membres de l'équation

$$\frac{z}{t+2} = \int 2e^{2t} dt + C = e^{2t} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

on trouve la solution générale pour l'équation est

$$z = (t+2)e^{2t} + C(t+2), \quad C \in \mathbb{R}$$

remplace en l'équation $(*)$

$$\frac{dy}{dt} - 2y = (t+2)e^{2t} + C(t+2)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier order en y*, ce soit un facteur intégral* $\mu = \mu(t)$

$$\mu(t) = e^{-\int 2dt} = e^{-2t}.$$

On a

$$e^{-2t}\left(\frac{dy}{dt} - 2y\right) = e^{-2t}\left((t+2)e^{2t} + C(t+2)\right)$$

alors

$$\left(ye^{-2t}\right)' = (t+2) + C(t+2)e^{-2t}.$$

Donc

$$ye^{-2t} = \int \left((t+2) + C(t+2)e^{-2t}\right) dt + K, \quad C,\ K \in \mathbb{R}$$

utilise de l'integration par partie de $\int (t+2)e^{-2t}dt$

$$\int (t+2)e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}(t+2)e^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t} = -\frac{1}{2}(t+2)e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

On trouve la solution générale y pour l'équation

$$y = \frac{(t+2)^2e^{2t}}{2} - \frac{C(2t+5)}{4} + Ke^{2t}, \quad C,\ K \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.3.3.

1. *Montre que* $tD^2 + (2t+3)D + 4 \equiv (D+2)(tD+2)$
2. *a l'aide d'un analyse opérateur, trouver la solution générale de l'équation*

$$ty'' - (2t+3)y' + 4y = e^{2t}.$$

Résolvons ce que précède

1.

$$\begin{aligned}(D+2)(tD+2)y &= D(tD)y + D(2y) + 2tDy + 4y \\ &= tD^2y + Dy + 2Dy + 2tDy + 4y \\ &= \left[tD^2 + (2t+3)D + 4\right] y.\end{aligned}$$

Donc

$$tD^2 + (2t+3)D + 4 \equiv (D+2)(tD+2)$$

2. *résoudre l'équation, il peut la mettre sous la forme*

$$(D+2)(tD+2) = e^{2t} \tag{3.12}$$

supposer que $(tD+2) = z.....(\star)$ *et remplace en l'équation* (3.12)

$$(D+2)z = e^{2t}$$

où

$$\frac{dz}{dt} + 2z = e^{2t} \tag{3.13}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier order en z*, facteur d'intégration est*

$$I(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

produit facteur d'intégration à l'équation (3.13)

$$e^{2t}\frac{dz}{dt} + 2e^{2t}z = e^{2t} \cdot e^{2t}$$

Donc

$$\left(ze^{2t}\right)' = e^{4t}$$

On a

$$ze^{2t} = \int e^{4t}dt = \frac{e^{4t}}{4} + C$$

alors

$$z = \frac{e^{2t}}{4} + Ce^{-2t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

remplace z *en l'équation* $(\star)$

$$(tD+2)y = \frac{e^{2t}}{4} + Ce^{-2t}$$

où

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{e^{2t}}{4t} + \frac{Ce^{-2t}}{t}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier order en y, facteur d'intégration est

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{\ln t^2} = t^2$$

alors

$$t^2 \left(\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t} y \right) = t^2 \left(\frac{e^{2t}}{4t} + \frac{Ce^{-2t}}{t} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} yt^2 = \int \left(\frac{te^{2t}}{4} + Cte^{-2t} \right) &= \frac{1}{4} \left(\frac{te^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} \right) + C \left(-\frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} \right) \\ &= \frac{1}{16} (2t-1) e^{2t} - \frac{C}{4} (2t+1) e^{-2t} + K \end{aligned}$$

on trouve la solution générale pour l'équation

$$y = -\frac{C}{4} \frac{(2t+1)e^{-2t}}{t^2} + \frac{K}{t^2} + \frac{1}{16} \frac{(2t-1) e^{2t}}{t^2}, \quad C, K \in \mathbb{R}$$

Remarque 3.3.1. *Lors de l'utilisation de la méthode d'analyse opérateur (Généralement) ensuite*

$$[D + p_1(x)] [D + p_2(x)] y \neq [D + p_2(x)] [D + p_1(x)] y.$$

Chapitre 4

Applications

Les équations différentielles sont d'une grande importance pour les non-athlètes car elles peuvent être utilisées pour résoudre de nombreux problèmes en sciences physiques, biologiques et sociales... Etc. Trois étapes peuvent être identifiées, quel que soit l'objet précis de la demande.

En premier lieu, la situation physique doit être formulée mathématiquement, et cela peut généralement être fait en faisant des hypothèses sur ce qui se passe afin que les observations pratiques soient cohérentes.

Par exemple, les objets se déplacent selon les lois du mouvement de Newton, et les communautés isolées d'insectes se multiplient au rythme du nombre d'insectes présents. Chacun de ces termes comprend un taux de changement (dérivé) et, par conséquent, lorsqu'il est formulé mathématiquement, prend la forme d'une équation différentielle.

Il est important de réaliser que les équations mathématiques sont une description approximative de ce qui se passe réellement, car elles dépendent d'observations qui, à leur tour, sont des approximations. Le processus de formulation mathématique des problèmes physiques implique souvent de remplacer des processus séparés par des processus continus.

Par exemple, le nombre d'insectes dans une société change en quantités distinctes, mais si la société est grande, il est raisonnable de le considérer comme une variable continue, on peut même parler de son dérivé. D'une autre manière, nous pouvons considérer que les équations mathématiques catégorisent avec précision ce qui se passe dans un modèle simplifié qui a été créé pour inclure les caractéristiques les plus importantes qui se produisent réellement.

4.1 Problèmes de ressort

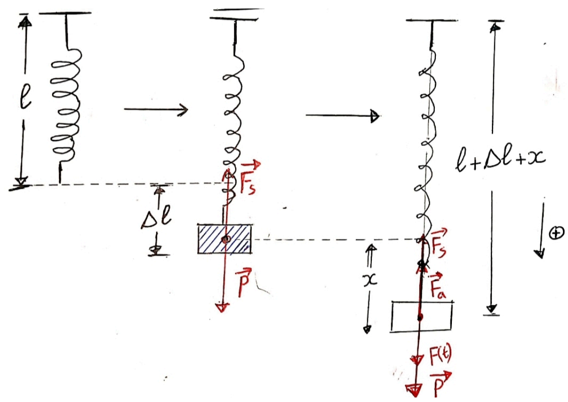


FIG. 4.1: Système masse-ressort

4.1.1 Loi du mouvement de Newton II

La loi du mouvement de Newton II stipule que si nous influons sur un objet avec une force qui a changé son état moteur, cette force est égale à la quantité de changement de mouvement par rapport au temps, et cette loi est exprimée comme suit

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

où
$\sum \vec{F}$: somme des forces agissant sur le corps
$\vec{a}$: L'accélération que ce corps va acquérir à la suite de l'influence de ces forces
m : est la masse du corps

4.1.2 Vibration mècanique

Le système de ressort simple consiste en une masse reliée à l'extrémité inférieure d'un ressort suspendu verticalement à partir d'une position haute. Le système est en position d'équilibre lorsqu'il est dans un état d'immobilité, la masse commence à se déplacer d'une ou plusieurs façons, retirer la masse de sa position d'équilibre à une vitesse initiale ou l'exposer à une force externe ($F(t)$).
Tout d'abord, considérons l'état d'allongement de son ressort de longueur naturelle l en mode d'équilibre résultant de la suspension d'une masse de m et pour symboliser Δl à l'allongement.

4.1.3 Loi de Hooke

La force de récupération du ressort (réaction) F_s est égale et contrecarre la force agissant sur le ressort et est proportionnelle à l'allongement (contraction) Δl du ressort en raison de cette force, c'est-à-dire
$F_s = -k\Delta l$ où k est une proportionnalité constante, généralement appelée tubes à ressort.

Dans la matière dynamique (4.1), nous aimerions étudier le mouvement de la masse soumise à la force extérieure ou l'humour au début. Notons par x pour déplacer la masse de la position d'équilibre et le déplacement dépend du temps t et est associé à la force appliquant sur la masse selon la loi de Newton II, qui stipule que le résultat des forces exercées sur la masse est égal au produit de la masse par l'accélération $m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Dans notre étude de cette question, le mouvement de la masse doit être pris soin de déterminer la bonne direction pour toutes les forces appliqées la masse, de sorte que nous considérerons la force positive si elle est desfinée vers le bas et négative si elle est destinée vers le haut, il ya quatre forces pratiquant sur la masse qui sont [14]

- son poids $p = mg$ qui est destiné vers le bas, où g l'accélération induite par la gravité de terrestre.
- La puissance du ressort F_s, qui convient à l'allongement $x + \Delta l$ et il fonctionne pour essayer de restaurer le ressort à son état normal toujours, s'il est $x + \Delta l > 0$ le ressort se dilate et la puissance F_s qui affecter au sommet et être donné par la quantité $F_s = -k(x + \Delta l)$ (la quantité de puissance F_s est $k(x + \Delta l)$, le signal négatif indique sa direction vers le haut), et s'il $x + \Delta l < 0$ (c'est-à-dire que $-x > \Delta l$), ensuite le ressort rétrécit, une distance $-x - \Delta l$ (rappelez-vous que si la force F_s au-dessus du niveau de position d'équilibre, la distance dans ce cas est égale à $-x$ et non x) et la force F_s destiné vers le bas qui est $F_s = k(-x - \Delta l)$ et donc pour chaque valeur x d'être $F_s(t) = -k(x + \Delta l)$.
- Force de résistance (résistance de l'air) F_a elles influencent sur la direction opposée du mouvement de masse, et sont proportionnels à la quantité de vitesse $\dfrac{dx}{dt}$ si la masse descend, ce x augmenter et être $\dfrac{dx}{dt}$ positif et donc F_a il monte et est donné en montant $F_a(t) = -a\dfrac{dx}{dt}$
  où a proportionnalité constante ou résistance constante.
  Si le bloc monte, ce x diminuer et être $\dfrac{dx}{dt}$ négatif et fort F_a il baisse et est également donné en quantité $F_a(t) = -a\dfrac{dx}{dt}$ et donc chaque valeur à x être $F_a(t) = -a\dfrac{dx}{dt}$.
- Force extérieure $F(t)$ dirigée vers le bas ou vers le haut lorsque vous êtes $F(t)$ positif ou négatif.
  Selon la loi de Newton II
  $$mg + F_s(t) + F_a(t) + F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
  en d'autres termes
  $$mg - k(x + \Delta l) - a\frac{dx}{dt} + F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
  et de la relation $mg = k\Delta l$ produit
  $$mx'' + ax' + kx = F(t)$$
  Il peut être écrit à partir de la forme
  $$x'' + \frac{a}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$
  De plus, si le système commence à bouger à partir d'un moment $t = 0$ à primaire vitesse v_0 de la position principale x_0, nous avons les conditions suivantes
  $$x(0) = x_0 \text{ et } x'(0) = v_0$$

Exemple 4.1.1.
Une boule pesant 10kg est suspendue à un ressort et elle s'allonge de 0.7m dans sa longueur normale a commencé à se déplacer de la position d'équilibre à une vitesse initiale $1m/s$ *dans la direction de ma tête vers le haut. Créer une expression du mouvement de la masse, sachant que la résistance de l'air est* $-90x'N$
<u>En cas1:</u> *pas de force extérieure.*
Nous prenons $g = 9.8m/s^2$ *c'est ce que nous avons fait* $p = mg = 98N$, $k = p/l = 98/0.7 = 140N/m$

de plus, soyez $a = 90$ *et* $F(t) = 0$ *(pas de force extérieure), à partir de la loi de Newton II*

$$mg + F_s(t) + F_a(t) + F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Donc

$$mg - k(x + \Delta l) - a\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

aprés substitution $a = 90$, $m = 10kg$, $k = 140N/m$ *et simplification on trouve*

$$x'' + \frac{90}{10}x' + \frac{140}{10}x = 0$$

On a

$$x'' + 9x' + 14x = 0 \tag{4.1}$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième order avec des coefficients constances qui est homogène, en résolvant l'équation caractéristique approbation de l'équation différentielle (4.1) $r^2 + 9r + 14 = 0$ *avec* $\Delta = 25$, *nous trouvons les deux racines* $r_1 = -2$ *et* $r_2 = -7$ *et ils sont réels et différents, c'est un exemple d'un mouvement qui s'amenuise trop. Et la solution de l'équation est* $x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-7t}$, *où* C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$, *les conditions initiales sont* $x_0 = 0$, $x'_0 = 1$ *(La masse a commencé à se déplacer dans la direction négative). En utilisant ces deux conditions, nous constatons que* $C_1 = -C_2 = \frac{1}{5}$ *donc, le* $x(t) = -\frac{1}{5}\left(e^{-7t} - e^{-2t}\right)$ *notez que* $x \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$ *et donc ce mouvement est éphémère.*

<u>En cas 2:</u> *Avoir une force extérieure* $F(t) = 5\sin t$

Nous avons de ce qui précède $a = 90$, $k = 140N/m$, $m = 10Kg$ *avec* $F(t) = 5\sin t$ *ainsi, l'équation devient non homogène*

$$x'' + 9x' + 14x = \frac{1}{2}\sin t \tag{4.2}$$

Il est clair que la résolution de l'équation homogène $x'' + 9x' + 14x = 0$ *il* $x_H(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-7}$ *du passé, et en utilisant la méthode d'imposer une forme de solution particuliér suppose* $x_P = K_1\cos t + K_2\sin t$ *que nous trouvons*

$$x'_P = -K_1\sin t + K_2\cos t \quad et \quad x''_P = -K_1\cos t - K_2\sin t$$

rémplace en l'équation non homogéne (4.2)

$$(-K_1\cos t - K_2\sin t) + 9\left(-K_1\sin t + K_2\cos t\right) + 14\left(K_1\cos t + K_2\sin t\right) = \frac{1}{2}\sin t$$

alors

$$(13K_1 + 9K_2)\cos t + (-9K_1 + 13K_2)\sin t = \frac{1}{2}\sin t$$

donc

$$K_1 = \frac{-9}{500}, \quad K_2 = \frac{13}{500}$$

ensuit la solution particulière $x_P = \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$ *ainsi, la solution générale à l'équation non homogène* (4.2) *est la suivante*

$$x = x_H + x_P = C_1e^{-2t} + C_2e^{-7t} + \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t.$$

En utilisant les deux exigences principales $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$. *Nous obtenons*

$$x = \frac{1}{500}\left(-90e^{-2t} + 99e^{-7t} + 13\sin t + 9\cos t\right).$$

Notez que les limites exponentielles sont le résultat de x_H *ainsi, il représente une libre circulation supplémentaire qui s'ajoute à l'accompagnement et à la décoloration rapide, et ces limites sont la partie transitoire de la solution. Et les limites résultant de* x_P *ne vous arrêtez pas quand* $t \longrightarrow \infty$. *Ils font partie de la stabilité de la solution.*

Exemple 4.1.2.
Une boule pesant 2kg est suspendue à un ressort il y a une source stable, le Zanbarki est une constante $10N/m$ *après être devenu dans un état de sommeil, il a été mis en mouvement en lui donnant une vitesse initiale* $1.5m/s$ *créez une expression de mouvement de masse, en négligeant la résistance de l'air.*
en cas 1: *pas de force extérieure.*
L'équation du mouvement est donnée par l'équation précédente, il représente un mouvement libre, non décroissant parce qu'il n'y a pas de force extérieure affectant le bloc ($F(t) = 0$) *et il n'y a pas de résistance du centre environnant, c'est-à-dire que* $a = 0$ *le masse et le ressort constance ont été donnés* $m = 2kg,\ k = 10N/m$ *respectivement. Ainsi, selon la loi de Newton II*

$$mg + F_s(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

donc

$$mg - 10(x + \Delta l) = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

De là, nous trouvons l'équation différentielle linéaire homogène

$$x'' + 5x = 0$$

son équation caractéristique est $r^2 + 5 = 0$ *et à partir de là les deux racines* $r_{1,2} = \pm\sqrt{5}$ *purement imaginaire, avec sa solution on trouve de la valeur*

$$x(t) = C_1\cos\sqrt{5}t + C_2\sin\sqrt{5}t$$

quand $t = 0$ *la position de la masse à la position d'équilibre est* $x_0 = 0$ *en utilisant cette exigence principale dans la solution générale, nous trouvons* $0 = x(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = C_1$ *et l'équation devient sur l'image* $x(t) = C_2\sin\sqrt{5}t$, *la vitesse initiale a été donnée qui est* $v_0 = 1.5m/s$ *en dérivant l'équation du mouvement et en substitution la vitesse initiale que nous obtenons*

$$v(t) = x'(t) = \sqrt{5}C_2\cos\sqrt{5}t \Rightarrow 1.5 = v(0) = \sqrt{5}C_2\cos 0 = \sqrt{5}C_2 \quad donc \quad C_2 = \frac{1.5}{\sqrt{5}}.$$

De l'équation là la position de la masse à chaque instant t il

$$x(t) = \frac{1.5}{\sqrt{5}}\left(\sin\sqrt{5}t\right).$$

en cas 2: *Avoir une force extérieure* $F(t) = e^{-t}$

appliquer la loi de Newton II

$$mg + F_s(t) + F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Nous avons de ce qui précède $k = 10,\ m = 2$ *avec* $F(t) = e^{-t}$ *ainsi, l'équation devient non homogène*

$$mg - 10(x + \Delta l) + e^{-t} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

donc

$$x'' + 5x = e^{-t}$$

Il est clair qu'il a résolu l'équation homogène $x'' + 5x = 0$ *il* $x_H(t) = C_1 \cos\sqrt{5}t + C_2 \sin\sqrt{5}t$
Nous recherchons donc une solution particulière de forme $x_P = Ce^{-t}$.
remplace en l'équation non homogéne $x_P'' = Ce^{-t} = x_P$ *on trouve*

$$6Ce^{-t} = e^{-t} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{6}$$

donc la solution particulière $x_P = \frac{1}{6}e^{-t}$. *Et à partir de là la solution générale à l'équation non homogéne*

$$x(t) = x_H + x_P = C_1 \cos\sqrt{5}t + C_2 \sin\sqrt{5}t + \frac{1}{6}e^{-t}$$

Nous compensons les conditions initiales $x(0) = 0,\ x'(0) = v(0) = 1.5m/s$

$$\begin{aligned}
&0 = x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{1}{6}e^0 = C_1 + \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{6}\\
&v(t) = x'(t) = \sqrt{5}C_2 \cos\sqrt{5}t - \frac{1}{6}e^{-t}\\
&\Rightarrow 1.5 = v(0) = \sqrt{5}C_2 \cos 0 - \frac{1}{6}e^0 = \sqrt{5}C_2 - \frac{1}{6} \quad \textit{donc} \quad C_2 = \frac{4}{3\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

De l'équation là la position de la masse à chaque instant t il

$$x(t) = -\frac{1}{6}\cos\sqrt{5}t + \frac{4}{3\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t + \frac{1}{6}e^{-t}$$

4.2 Problèmes de circuit

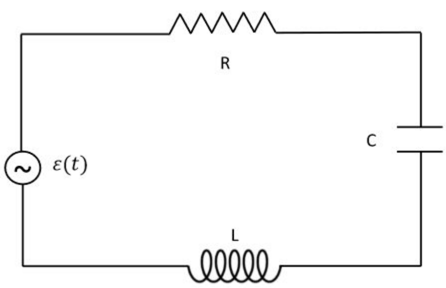


Fig. 4.2: schéma du circuit RCL

Considérons une résistance R, une inductance L et un condensateur C connectés en série comme illustré dans la Figure (4.2). Un AC générateur de courant alternatif fournit une force électromotrice (emf) variant dans le temps, $E(t)$, au circuit. ici, nous déterminons l'équation différentielle satisfaite par le charge sur le condensateur. Les équations constitutives pour les chutes de tension à travers un condensateur, une résistance, et une inductance sont données par [3] [11] [14]

$$U_C = q/C, \quad U_R = Ri, \quad U_L = L\frac{di}{dt}. \tag{4.3}$$

où C est la capacité, R est la résistance et L est l'inductance. L'accusation q et le i actuel sont liés par

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \tag{4.4}$$

4.2.1 Loi de Kirchhoff (Loi sur la perception des tensions)

La loi de tension de Kirchhoff stipule que l'emf E appliqué à toute boucle fermée est égal à la somme des chutes de tension dans cette boucle. Application de la loi de tension de Kirchhoff à le RLC ciruit se traduit par

$$U_L + U_R + U_C = E(t)$$

ou en utilisant (4.3) et (4.4) on trouve

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{4.5}$$

alors

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Donc

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{E(t)}{L} \tag{4.6}$$

L'équation du circuit RLC est une équation différentielle linéaire non homogène du second order à coefficients constants.

La tension AC peut être écrite comme $E(t) = E_0 \cos wt$, et l'équation gouvernante pour $q = q(t)$ peut s'écrire comme suit

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{E_0}{L}\cos wt \tag{4.7}$$

et les deux conditions initiales

$$q(t) = q_0, \quad \frac{dq}{dt}|_{t=0} = i(0) = i_0$$

La non-dimensionnalisation de cette équation sera montrée pour réduire le nombre de libres paramètres.

Pour construire des variables sans dimension, nous définissons d'abord la fréquence naturelle de oscillation d'un système comme étant la fréquence d'oscillation en l'absence de tout entraînement ou des forces d'amortissement. L'exemple emblématique est l'oscillateur harmonique simple, avec équation donnée par

$$x'' + \omega_0^2 x = 0,$$

et solution générale donnée par $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$. ici, le fréquence naturel la qualité de l'oscillation est ω_0, et la période d'oscillation est $T = 2\pi/\omega_0$. Pour la RLC Circuit, la fréquence naturelle d'oscillation se trouve à partir du coefficient du q terme, et est donné par

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En utilisant ω_0, avec des unités de un dans le temps, nous pouvons définir un temps sans dimension τ et une charge sans dimension Q par

$$\tau = \omega_0 t, \quad Q = \frac{\omega_0^2 L}{E_0} q.$$

L'équation sans dimension résultante pour le circuit RLC est alors donnée par

$$\frac{d^2Q}{d\tau^2} + \alpha\frac{dQ}{d\tau} + Q = \cos\beta\tau, \tag{4.8}$$

où α et β sont des paramètres sans dimension donnés par

$$\alpha = \frac{R}{L\omega_0}, \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Notez que les cinq paramètres originaux dans (4.7), à savoir R, L, C, E_0 et ω ont été réduits aux deux paramètres sans dimension α et β. Nous reviendrons plus tard à résoudre (4.8) après avoir visité deux autres applications qui s'avéreront être gouvernées par la même équation sans dimension.
et d'obtenir une équation différentielle pour le courant i. Nous dérivons l'équation (4.5) par rapport a t

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right) + \frac{R}{L}\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{E(t)}{L}\right).$$

Ensuite nous rattrapons les deux relations (4.4) Directement dans l'équation résultante nous trouvons

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{dE(t)}{dt} \tag{4.9}$$

Et la première condition initiale il $i(0) = i_0$, Et nous obtenons la deuxième condition de l'équation (4.5) Résolvez-le pour $\dfrac{di}{dt}$ ensuite, nous avons mis $t = 0$ et ainsi de suite

$$\frac{di}{dt}|_{t=0} = \frac{1}{L}E(0) - \frac{R}{L}i_0 - \frac{1}{LC}q_0$$

Une expression du courant peut être obtenue soit en dissolvant directement l'équation (4.9), soit en dissolvant l'équation (4.6) pour la charge électrique et on différencie alors cette expression

Exemple 4.2.1. *Le circuit est arrivé (RCL) respectivement pour elle* $C = \dfrac{1}{135}F$, $R = 180\Omega$, $L = 45h$ *Et tension en mouvement* $E(t) = 45\cos t$. *En supposant qu'il n'y a pas de charge primaire sur le condenseur, mais qu'il y a un courant initial* $I_0 = 1A$ *avec* $t = 0$. *C'est d'abord l'effet de la tension. Trouvez la charge résultante sur le condenseur, puis déduisez l'intensité de courant résultante.*

En substituant les valeurs données dans l'exemple de l'équation (4.6) *exprimant l'expédition, nous trouvons*

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{180}{45}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{45\cdot\frac{1}{135}}q = 45\frac{\cos t}{45}$$

Donc

$$\frac{d^2q}{dt^2}+4\frac{dq}{dt}+3q=\cos t \tag{4.10}$$

C'est une équation différentielle linéaire de second order qui est non homogène. Nous résolvons l'équation homogène

$$\frac{d^2q}{dt^2}+4\frac{dq}{dt}+3q=0$$

À la recherche des racines de l'équation caractéristique $r^2+4r+3=0$*, on trouve* $r_1=-1$ *et* $r_2=-3$*. Et à partir de là, la solution de l'équation homogène est*

$$q_H(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t},\quad C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$$

Pour trouver la solution générale à l'équation (4.10), nous recherchons une solution particuliér D'une forme $q_P=K_1\cos t+K_2\sin t$*, Nous le faisons dans l'équation (4.10) où*

$$\frac{dq_P}{dt}=-K_1\sin t+K_2\cos t,\quad \frac{d^2q_P}{dt^2}=-K_1\cos t-K_2\sin t$$

Alors

$$(-K_1\cos t-K_2\sin t)+4\left(-K_1\sin t+K_2\cos t\right)+3\left(K_1\cos t+K_2\sin t\right)=\cos t$$

Donc

$$(2K_1+4K_2)\cos t+(2K_2-4K_1)\sin t=\cos t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2K_1+4K_2=1\\ 2K_2-4K_1=0\end{cases}\Rightarrow K_1=\frac{1}{10}\quad et\quad K_2=\frac{1}{5}$$

on trouve la solution particulière $q_P=\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t$*, De là, nous obtenons la solution générale à l'équation (4.10)*

$$q(t)=q_H(t)+q_P(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}+\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t,\quad C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$$

En substituant les conditions initiales $q(0)=0,\quad I(0)=q'(0)=1$

$$\begin{cases}0=q(0)=C_1e^0+C_2e^0+\frac{1}{10}\cos 0+\frac{1}{5}\sin 0=C_1+C_2+\frac{1}{10}\\ I(t)=q'(t)=-C_1e^{-t}-3C_2e^{-3t}-\frac{1}{10}\sin t+\frac{1}{5}\cos t\end{cases}$$

alors

$$\begin{cases}C_1+C_2=-\frac{1}{10}\\ 1=I(0)=q'(0)=-C_1e^0-3C_2e^0-\frac{1}{10}\sin 0+\frac{1}{5}\cos 0\end{cases}$$

donc

$$\begin{cases}C_1+C_2=-\frac{1}{10}\\ C_1+3C_2=\frac{-4}{5}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad C_1=\frac{1}{4}\quad et\quad C_2=\frac{-7}{20}.$$

On trouve

$$q(t)=\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{7}{20}e^{-3t}+\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t$$

c'est l'intensité du courant

$$I(t)=\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{4}e^{-t}+3\frac{7}{20}e^{-3t}-\frac{1}{10}\sin t+\frac{1}{5}\cos t$$

Exemple 4.2.2. *Circuit (RCL) respectivement atteint elle $R=10\Omega$, $C=0.01F$, $L=0.5h$ et un effort impressionnant $E(t)=12V$, Et en supposant qu'il n'y a pas de courant primaire ou d'expédition primaire à $t=0$ C'est à ce moment-là que la tension affecte en premier. Créer le courant résultant dans le système*

en substituant les valeurs R, C, L données dans l'équation expressive actuelle (4.9), On trouve

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{10}{0.5}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{0.5\cdot 0.01}I=\frac{1}{L}\frac{d(12)}{dt}.$$

Donc nous obtenons une équation différentielle homogène

$$\frac{d^2I}{dt^2}+20\frac{dI}{dt}+200I=0.$$

Nous avons l'équation caratéristique de l'équation différentielle est $r^2+20r+200=0$ Où sont ses racines

$$r_1=-10+10i \quad , \quad r_2=-10-10i$$

Il s'agit donc d'un exemple de système libre qui n'est pas nocif pour le courant, et la solution est

$$I=e^{-10t}\left(C_1\cos 10t+C_2\sin 10t\right) \tag{4.11}$$

Et c'est deux conditions initiales $q(0)=0$, $I(0)=0$ on trouve $0=I(0)=e^0\left(C_1\cos 0+C_2\sin 0\right)=C_1$ si $C_1=0$ et pour déterminer la valeur de C_2 Nous compensons la condition dans la relation.

$$\frac{dI}{dt}|_{t=0}=\frac{12}{0.5}-20(0)-200(0)=24$$

en dérivant l'équation (4.11), on trouve

$$\frac{dI}{dt}=-10e^{-10t}\left((C_1-C_2)\cos 10t+(C_2+C_1)\sin 10t\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}24=\frac{dI}{dt}|_{t=0}&=-10e^0\left((C_1-C_2)\cos 0+(C_1+C_2)\sin 0\right)\\&=-10\left(C_1-C_2\right)\\&\Rightarrow \quad C_2=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

Nous trouvons donc le courant qui va

$$I=\frac{12}{5}e^{-10t}\sin 10t$$

et c'est un courant complètement transitoire.

4.3 Problèmes de Pendule

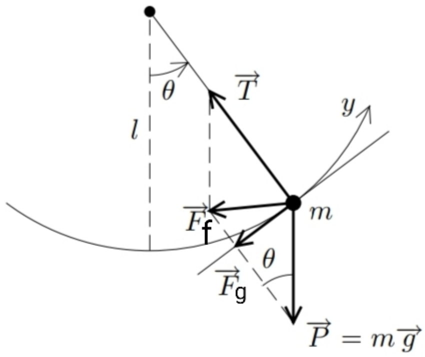


FIG. 4.3: Le pendule

ici, nous considérons une masse qui est attachée à une tige rigide sans masse et qui est étendu pour se déplacer le long d'un arc d'un cercle centré au point de pivot (voir (4.3)) Supposons que l est la longueur fixe de la bielle, et θ est l'angle qu'elle fait avec la verticale [11] [10] [14].
On peut appliquer l'équation de Newton, $\sum F = ma$, à la masse avec origine en bas et axe le long de l'arc avec une direction positive vers la droite. La position s de la masse le long de l'arc est donné par $s = l\theta$. La force gravitationnelle pertinente sur le pendule est la composante le long de l'arc, et à partir de la Figure (4.3) est observé comme étant

$$F_g = -mg\sin\theta.$$

Nous modélisons le frottement pour être proportionnel à la vitesse du pendule le long de l'arc, C'est

$$F_f = -c\dot{s} = -cl\dot{\theta}.$$

Avec une force externe sinusoïdale, $F_e = F_0 cos\omega t$, équation de Newton $m\ddot{s} = F_g + F_f + F_e$ se traduit par

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - cl\dot{\theta} + F_0 cos\omega t.$$

Récriture, nous avons

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{F_0}{ml}cos\omega t$$

c'est une équation différentielle non linéaire du second ordre. Rappelez maintenant que le

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta}{3!} + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} - \cdots .$$

à de petites amplitudes d'oscillation, on peut approximer $\sin\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{F_0}{ml}\cos\omega t$$

c'est une équation différentielle linéaire du second ordre.

Exemple 4.3.1. *On considère un pendule simple constitué d'une boule de masse $m = 0.2kg$ suspendu avec un fil non élastique, sa masse est négligée et sa longueur $l = 0.6125m$ On enlève la masse à un angle initiale $\theta_0 = 10°$ sur l'endroit où ils sont équilibrés, puis nous les libérons sans vitesse primaire*

en un instant t direction positive vers la droite. La position s de la masse le long de l'arc est donné par $s = l\theta$ il y a une friction efficace sur la masse. Friction constante $c = 1.6$.
Définissez l'équation exprimée sur la mesure d'angle à chaque instant t.(Négliger la force extérieure).
Nous avons les forces qui affectent la masse le pouvoir de la gravité $F_g = -mg\sin\theta$, Force de frottement $F_f = -c\dot{s} = -cl\dot{\theta}$ et une force externe $F_e = 0$
En appliquant la loi de Newton II

$$F_g + F_f = m\ddot{s}$$

Alors

$$-mg\sin\theta - cl\dot{\theta} = ml\ddot{s}$$

Après substitution et simplification des valeurs $m = 0.2kg,\ l = 0.6125,\ c = 1.6,\ g = 9.8$

$$\ddot{\theta} + 8\dot{\theta} + 16\sin\theta = 0.$$

On trouve l'equation du mouvement à de très petites distances ($\sin\theta \approx \theta$)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 8\frac{d\theta}{dt} + 16\theta = 0.$$

Et est un équation différentielle linéaire homogène, nous avons l'équation caratéristique de l'équation différentielle $r^2 + 8r + 16 = (r+4)^2 = 0$ Où sont un racine double $r = -4$. On trouve la solution

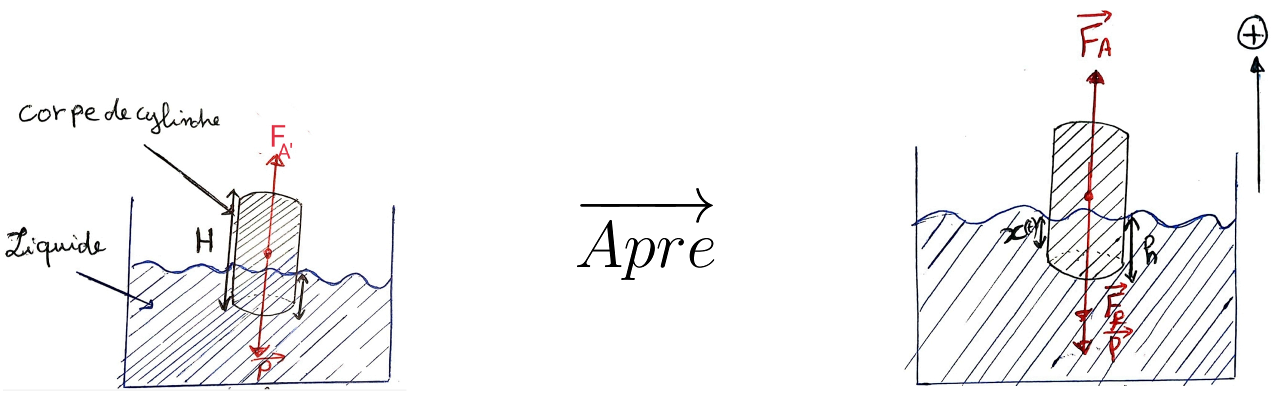
$$\theta = (At + B)e^{-4t}, \quad A,\ B \in \mathbb{R},$$

On remplace Indemnisation des conditions initiales $\theta_0 = 10°$ et $\dot{\theta}_0 = 5°$

$$\begin{cases} 10 = \theta_0 = (4A(0) + B)e^0 = B \\ 5 = \dot{\theta}_0 = (-4A(0) + A - 4B)e^0 = A - 4B \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad B = 10, \quad A = 45$$

Donc $\theta = (45t + 10)e^{-4t}$

4.4 Problèmes de flottabilité



1.En équilibre 2.Déplacement du corp

Fig. 4.4: flottabilité du corps

Nous considérons le corps de sa masse m Complètement ou partiellement immergé dans son liquide de densité ρ Un tel objet est soumis à des forces, la force de gravité $p = mg$ vers le bas et la force de friction $F_f = -K\dot{x}$ et la force opposée (l'impulsion d'Archimède F_A) [3].

4.4.1 Principe d'Archimède

Un objet dans un liquide est soumis à une poussée destinée au sommet égale au poids du liquide qui plaisante avec le corps. L'équilibre se produit lorsque l'élan du liquide de plaisanterie (flottabilité) est égal à la force gravitationnelle sur le corps. En supposant que la taille du corps est V le volume d'eau plaisantant lorsqu'il est équilibré par le corps est V_{eq}. Ce qui donne l'élan (flottabilité) qui doit être égal au poids corporel $p = mg$ ainsi $V_{eq}\rho g = mg$.

Le mouvement se produit lorsque le corps est retiré de la position d'équilibre. Nous choisissons la direction supérieure est la direction du mouvement. Si l'eau pousse le corps de loin $x(t)$, où le corps n'est pas dans un état d'équilibre. La force vers le bas ou négative sur ce corps reste la force de gravité mg mais l'élan (flottabilité) ou positif est réduit à $(V_{eq} - V_x) \cdot \rho g$ où V_x est une taille variable à chaque instant t Alternativement x, Compte tenu de la présence de force de frottement $F_f = -K\dot{x}$ et en appliquant la loi de Newton II

$$(V_{eq} - V_x) \cdot \rho g - mg - K\dot{x} = m\ddot{x} \tag{4.12}$$

substituant $V_{eq} \cdot \rho g = mg$ on trouve

$$m\ddot{x} + V_x \cdot \rho g + K\dot{x} = 0$$

Et à partir de là, nous obtenons une équation différentielle de second order.
Nous étudions un cas de ce qui est linéaire, par exemple un prisme ou un cylindre, la taille du prisme et la taille du cylindre calculent sérieusement la surface S de base en hauteur H i.e $V = S \times H$
Un cylindre : Supposons la taille de la partie blagueuse du cylindre de rayon r. Et immergé en hauteur h est $V_{eq} = \pi r^2 h$, substituant dans l'équation (4.12)

$$m\ddot{x} + (\pi r^2 h - \pi r^2 h + \pi r^2 x) \cdot \rho g + K\dot{x} = 0$$

Donc

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}\dot{x} + \frac{\pi r^2 \rho g}{m} x = 0. \tag{4.13}$$

C'est une équation différentielle linéaire de second order.

Exemple 4.4.1. *Ayons un corps en forme de cylindre qui est massé $m = 0.6kg$ rayon $R = 4cm$ et sa hauteur $H = 15cm$ flotté dans un bassin de densité d'eau $\rho = 1200kg/m^3$ une partie de celui-ci a été plongée dans cet étang d'une hauteur de 0.25 à partir de la hauteur totale, le mouvement du cylindre commence à le retirer de la position d'équilibre en lui donnant une vitesse initiale. Négligeant la force de frottement, il a créé l'équation qui exprime le mouvement du cylindre après l'équilibre.*

En substituant les valeurs $m = 0.6$, $R = 4cm$, $\rho = 1200$, $h = 0.25 \times 0.15 = 0.0375m$, *et je prends* $\pi = 3.14$ *et* $g = 9.8$ *de l'équation* (4.13)

$$\ddot{x} + \frac{3.14(0.15)^2 \times 1200 \times 9.8}{0.6} x = 0$$

et à partir de là, nous trouvons l'équation différentielle exprimée dans le mouvement

$$\ddot{x} + 1384.74x = 0$$

nous résolvons cette équation facilement, l'équation caratéristique $\lambda^2 + 1384.74 = 0$. *Ses racines sont* $\lambda = \pm\sqrt{1384.74}i$. *Donc La phrase mouvement à chaque instant* t

$$x(t) = A\cos\sqrt{1384.74}t + B\sin\sqrt{1384.74}t.$$

Disons que nous avons des conditions préliminaires $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0.445$.
De la première condition, nous trouvons $0 = x(0) = A\cos\sqrt{1384.74}(0) + B\sin\sqrt{1384.74}(0) = A$, *et à partir de la deuxième condition* $0.445 = \dot{x}(0) = B\sqrt{1384.74}\cos\sqrt{1384.74}(0)$.
donc $B = 0.445/\sqrt{1384.74} \approx 0.012$, *et à partir de là est le terme mouvement*

$$x(t) = 0.012\sin\sqrt{1384.74}t.$$

Exemple 4.4.2. *Le rivage flotte sa base un triangle des côtes le long de sa côte* l *et la masse* m *Dans un bassin de densité liquide* $\rho = 2450kg/m^3$ *De sorte que sa hauteur est parallèle à l'axe vertical. Le mouvement du prisme a commencé à le retirer de sa position d'équilibre et a donné une vitesse initiale. Définir l'équation différentielle qui détermine le mouvement du prisme résultant*

L'équilibre se produit lorsque l'élan du liquide de plaisanterie est égal à la force gravitationnelle sur le corps et la zone du triangle des côtes et la longueur de sa côte l *il* $A = \frac{\sqrt{3}l^2}{4}$ *en imposant une montée* h *parmi les unités immergées à la position d'équilibre, le volume d'eau plaisante lors de l'équilibre* $\frac{\sqrt{3}l^2 h}{4}$ *en supposant que l'élan (flottabilité) est* $\frac{\sqrt{3}l^2 h\rho}{4}$. *D'après la loi d'Archimède, cet élan doit être égal au poids du prisme* mg *Donc*

$$\frac{\sqrt{3}l^2 h\rho g}{4} = mg. \tag{4.14}$$

Nous choisissons la direction du mouvement vers le haut, si le prisme est soulevé au sommet de la surface de l'eau par $x(t)$ *d'unités n'est donc pas équilibré. La force reste sur le fond ou inverse le mouvement de la main sur le corps tel qu'il est* mg, *Mais la force d'Archiméde (positif) est réduit à* $\frac{\sqrt{3}l^2(h-x(t))\rho g}{4}$, *il est maintenant produit à partir de la loi de Newton II que*

$$\frac{\sqrt{3}l^2(h - x(t))\rho g}{4} - mg = m\ddot{x}$$

et pour compenser l'équation (4.14) *dans cette dernière équation et en la simplifiant, nous obtenons*

$$\ddot{x} + \frac{\sqrt{3}l^2\rho g}{4m} x = 0,$$

disons que la longueur de la côte triangulaire est $l = 0.18m$ *et la masse* $m = 1.5kg$ *nous compensons la valeur de densité* $\rho = 2450kg/m^3$. *Nous obtenons l'équation suivante*

$$\ddot{x} + 129.654\sqrt{3}x = 0.$$

C'est une équation homogène qui se résout comme avant.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons traité des équations différentielles linéaires du second ordre avec coefficients constants et méthode de recherche de la solution générale de l'équation homogène associée cette équation et la solution particulière de non homogène.

Puis nous avons étudié à ce type d'équations à coefficients variables où nous avons répertorié certains des modèles comme Euler, Lagrange.

C'est la partie théorique de la mémoire et dans la partie d'application, nous avons inclus quelques problèmes pratiques, notamment physiques. Il s'agit d'exprimer des phénomènes physiques de manière mathématique on utilisation d'équations différentielles linéaires du second ordre lequel, à son tour ce qui elles ont donné une description de ces phénomènes puis résout les problèmes physiques en utilisant les résultats des solutions de ce type d'équations différentielles. Nous avons utilisé la solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre comme outil pour décrire les phénomènes de différents champs et contribuer ensuite à trouver des solutions à certains des problèmes épineux de ces phénomènes.

Nous espérons que ce mémoire sera utile aux chercheurs dans le domaine des équations différentielles et il doit être un support pour d'autres recherches, notamment dans son aspect d'application.

Références

[1] المعادلات التفاضلية، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمياط.

[2] د.اسماعيل بوقفة ، د.عايش الهنادوة ، المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات، الجمهورية اليمنية ، جامعة العلوم والتكنولوجيا، الطبعة الاولى 1999.

[3] د.حسن العويضي، د.عبد الوهاب عباس ،المعادلات التفاضلية العادية "الجزء الأول "، دار الراشد، الطبعة الأولى 2005.

[4] د.حسن العويضي، د.عبد الوهاب عباس ،المعادلات التفاضلية العادية "الجزء الثاني"، دار الراشد، الطبعة الأولى 2005.

[5] صلاح علي مبخوت، المعادلات التفاضلية ، جامعة ذمار-اليمن، قسم الرياضيات ، اكتوبر 2009.

[6] عمران قوبا، التحليل، الجزء الثالث، من منشورات المعهد العالي العلوم التطبيقية والتكنولوجيا، الجمهورية العربية السورية، الإصدار الأول، الطبعة الأولى، 2018.

[7] A.C. King, J.Billingham and S.R. Otto ; Differential Equations, Combridge University Press 2003.

[8] Exo7. cour et exercices de mathématiques pour les étudiants, Équations Différentielles.

[9] George M. Murphy ; Ordinary Différential Équation And Their Solutions, Copyright (1960) by litton Educational Publishing,Ine.

[10] Jean-Pierre Demailly ; Analyse Numérique Et Équations Différentielles, Ouvrages Grenoble Sciences édités par EDP sciences, avenue du Hoggar Parc d'Activité de courtabceuf. BP 112-91944 Les Ulés Codex A-France.

[11] Jeffrey R.Chasnov ; Introduction to Différential Équation, The Hong Kong Univesity of Science and Technology (2009).

[12] Marc Séguin ; Physique XXI Tome A Note de cours rédigée par Simon Vézina

[13] Michel Rumin ; Équations différentielles linéaires du second ordre, Notes de cours S2 PeiP année 2013-2014.

[14] Shepley L.Ross ; DIFFÉRENTIAL ÉQUATION, third Edition, University of New Hampshire. New York. ISBN :0-471-81450-4

Résumé

Dans cette mémoire, nous avons traité l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, où variables et les méthodes de résolution.

Nous avons également abordé quelques modèles, comme l'équation d'Euler et Lagrange et nous avons également étudié certaines techniques de réduction d'ordre, comme la méthode d'analyse d'opérateur, qui vise à transformer l'équation du second ordre en deux équations du premier ordre. Quant au côté d'application, nous avons inclus quelques problèmes pour différents domaines, en particulier la physique, afin d'exprimer des phénomènes physiques de manière mathématique en utilisant des équations différentielles linéaires du second ordre pour donner une description approximative de ces phénomènes et ensuite résoudre des problèmes physiques en utilisant les résultats de ce type d'équations en fournissant des exemples illustratifs à ce sujet.

Mots clés : Équation différentielle, solution générale, solution particulière, wronskien, loi du mouvement de Newton.

Abstract

In this memory, we treated the linear differential equation of the second order with constant coefficients, then with variable coefficients and the methods to solve them. We also touched on some of their models, so we studied the Euler and Lagrange equation and we also studied some order reduction techniques, like operator analysis method. which aims to transform the second-order equation into two first-order equations. As for the application side, we have included some problems for different fields, especially physics, to express physical phenomena in a mathematical way using second order linear differential equations to give an approximate description of these phenomena and then solve physical problems using the results of this type of equations by providing illustrative examples on this subject.

Keywords : Differential equation, general solution, particular solution, Wronskian, Newton's law of motion.

ملخص

عالجنا في هذا البحث المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بالمعاملات الثابتة ثم بالمعاملات المتغيرة وطرق حلها.

كما تطرقنا إلى بعض أنماطها فدرسنا معادلة أولر و لاغرانج و كما درسنا بعض التقنيات لتخفيض الرتبة كطريقة تحليل المؤثر الذي يهدف إلى تحويل المعادلة من الرتبة الثانية إلى معادلتين من الرتبة الأولى، أما الجانب التطبيقي فأدرجنا بعض المسائل لميادين مختلفة و خاصة الفيزيائية و ذلك للتعبير عن الظواهر الفيزيائية بطرق رياضية باستعمال المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية لإعطاء وصفا و لو بشكل تقريبي لهذه الظواهر و من ثم حل المسائل الفيزيائية باستعمال نتائج هذا النوع من المعادلات مع تقديم أمثلة توضيحية على ذلك.

الكلمات المفتاحية: المعادلة التفاضلية، الحل العام، الحل الخاص، الرونسكيان، قانون نيوتن للحركة.